Raccolta di esercizi per gli studenti di **GEOMETRIA** - Cdl **Fisica**
Università di Bari
A. Lotta
A.A. 2025-26

1. Sia $(X, *)$ una struttura algebrica. Si assuma che $*$ sia associativa e dotata di elemento neutro e. Verificare che l'insieme $I \subset X$ di tutti gli elementi invertibili è un sottoinsieme stabile (chiuso) rispetto a $*$.

2. Posto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} |\, x \neq 0\}$, stabilire che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ la cui operazione interna è definita come segue:
$$(a, b, c) * (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$
è un gruppo non abeliano.

3. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da
$$K = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$
è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione standard, e che, rispetto alle operazioni indotte $(K, +, \cdot)$ è un campo.

4. Verificare in dettaglio la validità degli assiomi di spazio vettoriale per quel che concerne gli esempi: $V_1 \times V_2$ (prodotto diretto degli spazi vettoriali V_1 e V_2) e V^X (spazio delle funzioni dall'insieme X nello spazio vettoriale V), e lo spazio vettoriale $M_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo $m \times n$.

5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:
$$F_{a,b}(x, y) := (ax - by, bx + ay).$$
Posto
$$K = \{F_{a,b} :\ a, b \in \mathbb{R}\},$$
mostrare che $(K, +, \circ)$ è un campo, dove $+$ è l'operazione di somma tra funzioni in $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2}$ e l'operazione di prodotto $\circ$ è l'usuale composizione di funzioni.

6. Dati due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V_1 e V_2 e W_1, W_2 sottospazi vettoriali rispettivamente di V_1 e V_2, verificare che $W_1 \times W_2$ è sottospazio vettoriale del prodotto diretto $V_1 \times V_2$.

7. Sia W un sottoinsieme non vuoto di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se per ogni $u, v \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ risulta $\lambda u + \mu v \in W$.

8. Verificare in base alla definizione che ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo

$$f(x, y) := (ax + by, cx + dy),$$

dove a, b, c, d sono costanti assegnate, è lineare.

9. Considerata la retta r di equazione $r : y = x$ in $\mathbb{R}^2$, mostrare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \to r$$

che associa ad ogni punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ il piede H della perpendicolare a r condotta da P, è un'applicazione lineare. Determinare esplicitamente il nucleo $Ker(F)$ e darne un'interpretazione geometrica.

10. Fissato un punto x_0 dell'insieme X e un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, verificare che la funzione

$$F : V^X \to \mathbb{K}$$

tale che

$$F(f) := f(x_0) \quad \forall f \in V^X$$

che associa ad ogni funzione $f : X \to V$ il suo valore nel punto x_0, è una funzione $\mathbb{K}$-lineare.

11. Dati due spazi vettoriali V_1 e V_2 sullo stesso campo, e il loro prodotto diretto $V_1 \times V_2$, verificare che le applicazioni

$$p_1 : V_1 \times V_2 \to V_1, \;\; p_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$$

definite da

$$p_1(v_1, v_2) := v_1, \quad p_1(v_1, v_2) := v_2,$$

sono lineari (esse si chiamano proiezioni canoniche dal prodotto diretto sui due fattori).

12. Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, verificare che la funzione

$$F : V \times V \to V \times V$$

definita da

$$F(u, v) := (-v, u)$$

è lineare.

13. Data un'applicazione lineare $F : V \to V'$ tra due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e un sottospazio vettoriale W' di V', mostrare che

$$W = \{v \in V : \; F(v) \in W'\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

14. Considerata la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
stabilire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è ingettiva.

15. Data l'apppicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$$F(x, y, z) = (x + y - z, y + 3z)$$
determinare esplicitamente $\mathrm{Ker}(F)$ e mostrare che
$$\mathrm{Ker}(F) \cong \mathbb{R}.$$

16. Verificare che i vettori
$$(1, 0, 1),\ (0, -1, 2), (0, 0, 1)$$
di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

17. Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ ed un isomorfismo $F : \mathbb{K}^n \to V$, verificare che
$$\mathfrak{B} = \{F(e_1), \dots, F(e_n)\}$$
è una base di V. Dedurne che $F = \varphi_{\mathfrak{B}}$.

18. Determinare una base del seguente sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$:
$$U = L((1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 0, -1)).$$

19. Mostrare che due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali finitamente generati V_1 e V_2 sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

20. Dati due sottospazi U_1 e U_2 di uno spazio vettoriale V, verificare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) La somma $U_1 + U_2$ è diretta;

b) Per ogni $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ si ha:
$$u_1 + u_2 = 0 \ \Rightarrow \ u_1 = u_2 = 0.$$

21. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali U e V di $\mathbb{R}^4$:
$$U = L((1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 0, -1)), \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x{+}2y = 0\}.$$
Determinare la dimensione ed una base di U, V e di $U \cap V$.

22. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1,0,0,1),(0,1,-1,0)), \quad V = L((1,2,-2,1),(0,0,0,1)).$$

Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

23. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_2[x]$ costituito da tutti i polinomi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado al massimo 2. Verificare che

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : \, p(-1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale, e determinarne la dimensione ed una base.

24. Provare che $\mathbb{C}$, pensato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ha dimensione 2 e determinare una base di tale spazio vettoriale.

25. Verificare che, dato un campo $\mathbb{K}$, per ogni $n \geq 1$, la dimensione di $Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ è n, mostrando che l'applicazione

$$\Phi : Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n,$$

definita ponendo:

$$\Phi(F) := (F(e_1), \ldots, F(e_n))$$

è un isomorfismo.