

Raccolta di esercizi per gli studenti di **GEOMETRIA** - Cdl **Fisica**
Università di Bari
A. Lotta
A.A. 2025-26

1. Sia $(X, *)$ una struttura algebrica. Si assuma che $*$ sia associativa e dotata di elemento neutro e . Verificare che l'insieme $I \subset X$ di tutti gli elementi invertibili è un sottoinsieme stabile (chiuso) rispetto a $*$.
2. Posto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, stabilire che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ la cui operazione interna è definita come segue:

$$(a, b, c) * (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$

è un gruppo non abeliano.

3. Verificare che il sottoinsieme di \mathbb{R} dato da

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione standard, e che, rispetto alle operazioni indotte $(K, +, \cdot)$ è un campo.

4. Verificare in dettaglio la validità degli assiomi di spazio vettoriale per quel che concerne gli esempi: $V_1 \times V_2$ (prodotto diretto degli spazi vettoriali V_1 e V_2) e V^X (spazio delle funzioni dall'insieme X nello spazio vettoriale V), e lo spazio vettoriale $M_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo $m \times n$.
5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$F_{a,b}(x, y) := (ax - by, bx + ay).$$

Posto

$$K = \{F_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\},$$

mostrare che $(K, +, \circ)$ è un campo, dove $+$ è l'operazione di somma tra funzioni in $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2}$ e l'operazione di prodotto \circ è l'usuale composizione di funzioni.

6. Dati due \mathbb{K} -spazi vettoriali V_1 e V_2 e W_1, W_2 sottospazi vettoriali rispettivamente di V_1 e V_2 , verificare che $W_1 \times W_2$ è sottospazio vettoriale del prodotto diretto $V_1 \times V_2$.
7. Sia W un sottoinsieme non vuoto di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V . Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se per ogni $u, v \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ risulta $\lambda u + \mu v \in W$.

8. Verificare in base alla definizione che ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ del tipo

$$f(x, y) := (ax + by, cx + dy),$$

dove a, b, c, d sono costanti assegnate, è lineare.

9. Considerata la retta r di equazione $r : y = x$ in \mathbb{R}^2 , mostrare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow r$$

che associa ad ogni punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ il piede H della perpendicolare a r condotta da P , è un'applicazione lineare. Determinare esplicitamente il nucleo $\text{Ker}(F)$ e darne un'interpretazione geometrica.

10. Fissato un punto x_0 dell'insieme X e un \mathbb{K} -spazio vettoriale V , verificare che la funzione

$$F : V^X \rightarrow \mathbb{K}$$

tale che

$$F(f) := f(x_0) \quad \forall f \in V^X$$

che associa ad ogni funzione $f : X \rightarrow V$ il suo valore nel punto x_0 , è una funzione \mathbb{K} -lineare.

11. Dati due spazi vettoriali V_1 e V_2 sullo stesso campo, e il loro prodotto diretto $V_1 \times V_2$, verificare che le applicazioni

$$p_1 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1, \quad p_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$$

definite da

$$p_1(v_1, v_2) := v_1, \quad p_2(v_1, v_2) := v_2,$$

sono lineari (esse si chiamano proiezioni canoniche dal prodotto diretto sui due fattori).

12. Dato un \mathbb{K} -spazio vettoriale, verificare che la funzione

$$F : V \times V \rightarrow V \times V$$

definita da

$$F(u, v) := (-v, u)$$

è lineare.

13. Data un'applicazione lineare $F : V \rightarrow V'$ tra due \mathbb{K} -spazi vettoriali e un sottospazio vettoriale W' di V' , mostrare che

$$W = \{v \in V : F(v) \in W'\}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

14. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

stabilire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettiva.

15. Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = (x + y - z, y + 3z)$$

determinare esplicitamente $\text{Ker}(F)$ e mostrare che

$$\text{Ker}(F) \cong \mathbb{R}.$$

16. Verificare che i vettori

$$(1, 0, 1), (0, -1, 2), (0, 0, 1)$$

di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti.

17. Dato uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{K} ed un isomorfismo $F : \mathbb{K}^n \rightarrow V$, verificare che

$$\mathfrak{B} = \{F(e_1), \dots, F(e_n)\}$$

è una base di V . Dedurre che $F = \varphi_{\mathfrak{B}}$.

18. Determinare una base del seguente sottospazio vettoriale U di \mathbb{R}^4 :

$$U = L((1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 0, -1)).$$

19. Mostrare che due \mathbb{K} -spazi vettoriali finitamente generati V_1 e V_2 sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

20. Dati due sottospazi U_1 e U_2 di uno spazio vettoriale V , verificare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) La somma $U_1 + U_2$ è diretta;

b) Per ogni $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ si ha:

$$u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0.$$

21. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali U e V di \mathbb{R}^4 :

$$U = L((1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 0, -1)), \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di U , V e di $U \cap V$.

22. Dati i sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = L((1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)), \quad V = L((1, 2, -2, 1), (0, 0, 0, 1)).$$

Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

23. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_2[x]$ costituito da tutti i polinomi $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di grado al massimo 2. Verificare che

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(-1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale, e determinarne la dimensione ed una base.

24. Provare che \mathbb{C} , pensato come spazio vettoriale su \mathbb{R} , ha dimensione 2 e determinare una base di tale spazio vettoriale.

25. Verificare che, dato un campo \mathbb{K} , per ogni $n \geq 1$, la dimensione di $Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ è n , mostrando che l'applicazione

$$\Phi : Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n,$$

definita ponendo:

$$\Phi(F) := (F(e_1), \dots, F(e_n))$$

è un isomorfismo.

26. Si ponga

$$E = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \mid gr(p) \leq 3, p(1) = 0\}, \quad F = L(x^4, x^3 - x^2, x - 1).$$

a) Provare che E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$. Determinarne una base.

b) Determinare una base di $E \cap F$ ed una base di $E + F$.

27. Si determinino le dimensioni del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 - 2x_4, 3x_1 + x_2 - x_4).$$

28. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e siano $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari tali che

$$M_{\mathfrak{B}_o}^{\mathfrak{B}_o}(F) = A, \quad M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(G) = B$$

dove \mathfrak{B}_o denota la base canonica, mentre $\mathfrak{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$.

Stabilire per quali valori di k risulta $F = G$.

29. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k+3 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

- Determinare esplicitamente F .
 - Stabilire per quali valori di k F è surgettiva.
 - Determinare una base di $\text{Ker}(F)$ ed una base di $\text{Im}(F)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
30. Si considerino le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tali che F è associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & k & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$, mentre

$$G(1, 1) = (0, 0, 1, 1), \quad G(1, -1) = (1, 1, 0, 0).$$

- Determinare una base di $\text{Ker}(F)$ al variare di k .
 - Determinare una base di $\text{Im}(G)$.
 - Stabilire se vi sono valori di k per cui $G \circ F$ è un isomorfismo.
31. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & k & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base canonica e ad una base assegnata $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Determinare una base di $\text{Ker}(F)$ ed una base di $\text{Im}(F)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

32. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$F(a, b) = (a - b)x + 2bx^2 + b.$$

- Determinare la matrice associata a F rispetto alle basi

$$\mathfrak{B} = \{(1, -1), (1, 1)\} \quad \mathfrak{B}' = \{x - 1, x^2 + 1, x + 1\}$$

di \mathbb{R}^2 e di $\mathbb{R}_2[x]$ rispettivamente.

b) Stabilire se F è surgettiva e/o iniettiva.

c) Stabilire che non esiste alcuna base \mathfrak{B}'' di \mathbb{R}^2 per cui risulti:

$$M_{\mathfrak{B}''}^{\mathfrak{B}'}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$