

Raccolta di esercizi per gli studenti di **GEOMETRIA** - Cdl **Fisica**
Università di Bari
A. Lotta
A.A. 2025-26

1. Sia $(X, *)$ una struttura algebrica. Si assuma che $*$ sia associativa e dotata di elemento neutro e . Verificare che l'insieme $I \subset X$ di tutti gli elementi invertibili è un sottoinsieme stabile (chiuso) rispetto a $*$.
2. Posto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, stabilire che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ la cui operazione interna è definita come segue:

$$(a, b, c) * (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$

è un gruppo non abeliano.

3. Verificare che il sottoinsieme di \mathbb{R} dato da

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione standard, e che, rispetto alle operazioni indotte $(K, +, \cdot)$ è un campo.

4. Verificare in dettaglio la validità degli assiomi di spazio vettoriale per quel che concerne gli esempi: $V_1 \times V_2$ (prodotto diretto degli spazi vettoriali V_1 e V_2) e V^X (spazio delle funzioni dall'insieme X nello spazio vettoriale V), e lo spazio vettoriale $M_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo $m \times n$.
5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$F_{a,b}(x, y) := (ax - by, bx + ay).$$

Posto

$$K = \{F_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\},$$

mostrare che $(K, +, \circ)$ è un campo, dove $+$ è l'operazione di somma tra funzioni in $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2}$ e l'operazione di prodotto \circ è l'usuale composizione di funzioni.

6. Dati due \mathbb{K} -spazi vettoriali V_1 e V_2 e W_1, W_2 sottospazi vettoriali rispettivamente di V_1 e V_2 , verificare che $W_1 \times W_2$ è sottospazio vettoriale del prodotto diretto $V_1 \times V_2$.
7. Sia W un sottoinsieme non vuoto di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V . Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se per ogni $u, v \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ risulta $\lambda u + \mu v \in W$.

8. Verificare in base alla definizione che ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ del tipo

$$f(x, y) := (ax + by, cx + dy),$$

dove a, b, c, d sono costanti assegnate, è lineare.

9. Considerata la retta r di equazione $r : y = x$ in \mathbb{R}^2 , mostrare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow r$$

che associa ad ogni punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ il piede H della perpendicolare a r condotta da P , è un'applicazione lineare. Determinare esplicitamente il nucleo $\text{Ker}(F)$ e darne un'interpretazione geometrica.

10. Fissato un punto x_0 dell'insieme X e un \mathbb{K} -spazio vettoriale V , verificare che la funzione

$$F : V^X \rightarrow \mathbb{K}$$

tale che

$$F(f) := f(x_0) \quad \forall f \in V^X$$

che associa ad ogni funzione $f : X \rightarrow V$ il suo valore nel punto x_0 , è una funzione \mathbb{K} -lineare.

11. Dati due spazi vettoriali V_1 e V_2 sullo stesso campo, e il loro prodotto diretto $V_1 \times V_2$, verificare che le applicazioni

$$p_1 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1, \quad p_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$$

definite da

$$p_1(v_1, v_2) := v_1, \quad p_2(v_1, v_2) := v_2,$$

sono lineari (esse si chiamano proiezioni canoniche dal prodotto diretto sui due fattori).

12. Dato un \mathbb{K} -spazio vettoriale, verificare che la funzione

$$F : V \times V \rightarrow V \times V$$

definita da

$$F(u, v) := (-v, u)$$

è lineare.

13. Data un'applicazione lineare $F : V \rightarrow V'$ tra due \mathbb{K} -spazi vettoriali e un sottospazio vettoriale W' di V' , mostrare che

$$W = \{v \in V : F(v) \in W'\}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

14. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

stabilire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettiva.

15. Data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = (x + y - z, y + 3z)$$

determinare esplicitamente $\text{Ker}(F)$ e mostrare che

$$\text{Ker}(F) \cong \mathbb{R}.$$

16. Verificare che i vettori

$$(1, 0, 1), (0, -1, 2), (0, 0, 1)$$

di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti.

17. Dato uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{K} ed un isomorfismo $F : \mathbb{K}^n \rightarrow V$, verificare che

$$\mathfrak{B} = \{F(e_1), \dots, F(e_n)\}$$

è una base di V . Dedurre che $F = \varphi_{\mathfrak{B}}$.