CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2013/14

<u>Appello del 7 aprile 2014</u>

1. Sia H un sottogruppo non abeliano di A_4.

   (a) Provare che H ha più di 6 elementi.
   (b) Provare che ogni 3-ciclo di S_4 appartiene ad H.
   (c) Provare che $H = A_4$.

2. Sia n un intero maggiore di 1 e sia x un intero tale che $1 \le x \le 11$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to U(\mathbb{Z}_{12})$$

tale che, per ogni intero $a \ge 0$,

$$\varphi\big([a]_n\big) = ([x]_{12}^a).$$

   (a) Determinare tutte le coppie (n, x) per le quali φ è un omomorfismo di gruppi ben definito.
   (b) Determinare tutte le coppie (n, x) per le quali φ è un monomorfismo di gruppi.

3. Sia p un numero primo positivo e dispari. Per ogni intero positivo n sia

$$f_n(x) = x^n + x + 1 \in \mathbb{Z}[x],$$

e sia $\overline{f}_n(x)$ la sua riduzione modulo p.

   (a) Provare che esistono infiniti interi positivi n non divisibili per p per i quali $\overline{f}_n(x)$ ha in $\mathbb{Z}_p$ una sola radice.
   (b) Provare che esistono infiniti interi positivi n divisibili per p per i quali $\overline{f}_n(x)$ ha in $\mathbb{Z}_p$ una sola radice.