MATEMATICA - LEZIONE 27

mercoledì 22 novembre 2023 09:08

Tabella degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0 = 0$.

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots\dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}$

  qui si può scrivere anche $o(x^{2n+2})$

- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots\dots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}$

  oppure $o(x^{2n+1})$

- $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n)$.
- $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \dots\dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$

  dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\dots\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

ESERCIZIO

Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^3}{x^3}$

Sappiamo che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Formula di Taylor di ordine 3

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \cancel{-x} + x^3}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5}{6} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\substack{\to 0 \\ \text{per } x \to 0}} = \frac{5}{6}.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{2x \sin x}$$

Denominatore:

$$\sin x = x + o(x)$$

$$2x \sin x = 2x(x + o(x)) = 2x^2 + \underbrace{2o(x^2)}_{o(x^2)} = 2x^2 + o(x^2)$$

Numeratore:

Siccome il denominatore si comporta come x^2, ci basta sviluppare all'ordine 2 il numeratore.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi $e^x - x - \cos x = 1 + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{x} - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$

$$= \cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

Conclusione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{2x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \overbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \log(1+x) - x}{2\sqrt{1+x} - \sin x - 2\cos x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Denominatore:

$$D = 2\left(1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) - x + o(x^2) - 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= \cancel{2} + \cancel{x} - \frac{1}{4}x^2 - \cancel{x} - \cancel{2} + x^2 + o(x^2)$$
$$= \frac{3}{4}x^2 + o(x^2).$$

Numeratore: $\underbrace{\cos x}_{1}\ \underbrace{\log(1+x)}_{\sim x} - x$

$$\cos x = 1 + o(x)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\cos x \log(1+x) = (1+o(x))\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \underbrace{o(x^2) + o(x^2) + o(x^3) + o(x^4)}_{o(x^2)}$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$N = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{3}{4} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

OSS

$$o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x)) = -o(f(x))$$

$$o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min\{n,m\}}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Domanda: Qual è lo sviluppo di Taylor di ordine n di $f(x) = e^{-x}$ in $x_0 = 0$?

1° Metodo: Definizione.

$$f(x) = e^{-x}, \quad f'(x) = -e^{-x}, \quad f''(x) = e^{-x}, \quad f'''(x) = -e^{-x}, \quad f^{(4)}(x) = e^{-x}$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = -1 \quad \ldots\ldots$$

In generale $f^{(k)}(0) = (-1)^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + o(x^n)$$

2° Metodo: Sostituzioni

e^{-x} Chiamiamo $y = -x$. Se $x \to 0$ anche $y \to 0$.

$$\begin{aligned} e^{-x} = e^{y} &= 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}y^n + o(y^n) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}(-x)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}(-x)^n + o((-x)^n) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Spesso gli sviluppi di Taylor di composizioni di funzioni si possono ricavare per sostituzione a partire dagli sviluppi delle funzioni elementari.

ESEMPIO

Calcoliamo lo sviluppo di Taylor di ordine 5 in $x_0 = 0$ di

$$f(x) = \sin(2x)$$

$y = 2x$ se $x \to 0$, $y = 2x \to 0$ quindi:

$$\sin(2x) = \sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + o(y^5)$$
$$= 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^5}{120} + o(y^5)$$
$$= 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5)$$
$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{1+3x^2}$ Calcoliamo lo sviluppo di ordine 4.

$y = 3x^2$ (Se $x \to 0$, $y = 3x^2 \to 0$).

$$\sqrt{1+3x^2} = \sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$
$$= 1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{8}(3x^2)^2 + o((3x^2)^2)$$
$$= 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x^4 + o(x^4)$$

ESEMPIO

$f(x) = \log(2+x)$.

Cerchiamo lo sviluppo di ordine 3

$y = 1+x$?

$\log(2+x) = \log(1+1+x) = \log(1+y)$

Se $x \to 0$, $y \to 1$. Ci servirebbe lo sviluppo in $x_0 = 1$ di $\log(1+x)$. Ma noi conosciamo solo lo sviluppo in $x_0 = 0$.

Cerchiamo quindi una sostituzione diversa

Scelta migliore:

$$\log(2+x) = \log\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1+\underbrace{\frac{x}{2}}_{y}\right)$$

Se $x \to 0$, $y = \frac{x}{2} \to 0$.

$$\log 2 + \log(1+y) = \log 2 + y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$
$$= \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} + o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)$$
$$= \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

ESEMPIO

Sviluppiamo $f(x) = \sqrt{x}$ all'ordine 2 nel punto $x_0 = 4$.

$$\sqrt{x} = \sqrt{4 + x - 4} = \sqrt{4\left(1 + \frac{x-4}{4}\right)} = 2\sqrt{1 + \underbrace{\frac{x-4}{4}}_{=y}}$$

Se $x \to 4$
$y = \frac{x-4}{4} \to 0$.

$$= 2\sqrt{1+y}$$
$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)\right)$$
$$= 2 + y - \frac{1}{4}y^2 + o(y^2)$$
$$= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x-4}{4}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)$$
$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o((x-4)^2).$$

ESEMPIO

e^x in $x_0 = 2$

$y = x - 2$. Se $x \to 2$, $y \to 0$ quindi

$$e^x = e^{2+y} = e^2 e^y = e^2\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \dots + \frac{1}{n}y^n + o(y^n)\right)$$
$$= e^2\left(1 + x - 2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(x-2)^n + o((x-2)^n)\right)$$

ESERCIZIO

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(2x^2) - \log(1-x^3) - \operatorname{sen} x}{x^3\left(\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}\right)}$

Denominatore

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$e^{\frac{x}{2}} = e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \qquad \frac{x}{2}=y$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$D = x^3\left(\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}\right) = x^3\left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= x^3\left(-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x^5 + o(x^5).$$

Numeratore $x\cos(2x^2) - \log(1-x^3) - \operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

$$\cos(\underbrace{2x^2}_{y}) = \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2) = 1 - \frac{(2x^2)^2}{2} + o((2x^2)^2)$$

$$= 1 - 2x^4 + o(x^4)$$

$$x\cos(2x^2) = x\left(1 - 2x^4 + o(x^4)\right) = x - 2x^5 + o(x^5).$$

$$\log(1\underbrace{-x^3}_{y}) = \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$= -x^3 - \frac{(-x^3)^2}{2} + o((-x^3)^2)$$

$$= -x^3 + \underbrace{x^6 + o(x^6)}_{o(x^5)}$$

$$= -x^3 + o(x^5).$$

$$N = x - 2x^5 + o(x^5) + x^3 + o(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)$$

$$= \cancel{x} - 2x^5 + x^3 \cancel{- x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

$$= \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{7}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{x^{\cancel{5}\,2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right)}$$

$\to 0$

$$= \frac{\frac{7}{6}}{0^+\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{7}{6}}{0^-} = -\infty.$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 e^{2x^2} - \log(1+x^3)}{x^3 + x^5 - x^2 \sin x}$$

Denominatore:

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)$$

$$x^3 + x^5 - x^2(x + o(x)) = \cancel{x^3} + x^5 \cancel{- x^3} + o(x^3)$$

$$= x^5 + \underbrace{o(x^3)}.$$

$$= o(x^3).$$

Mi servono più termini dello sviluppo di $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$D = x^3 + x^5 - x^2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{x^3} + x^5 - \cancel{x^3} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

$$= \frac{7}{6}x^5 + o(x^5).$$

Numeratore : $x^3 e^{2x^2} - \log(1+x^3)$

$$x^3 e^{\overbrace{2x^2}^{=y}} = x^3 e^y = x^3\left(1+y+o(y)\right) = x^3\left(1+2x^2+o(x^2)\right)$$

$$= x^3 + 2x^5 + o(x^5)$$

$$\log(1+\underbrace{x^3}_{y}) = \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$= x^3 \underbrace{- \frac{x^6}{2} + o(x^6)}_{o(x^5)} = x^3 + o(x^5)$$

$$N = \cancel{x^3} + 2x^5 + o(x^5) - \cancel{x^3} + o(x^5) = 2x^5 + o(x^5).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^5 + o(x^5)}{\frac{7}{6}x^5 + o(x^5)} = \frac{2}{\frac{7}{6}} = \frac{12}{7}.$$