CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

Appello del 18 febbraio 2013

1. Siano date, in S_{18}, le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(5,6)(7,8,9)(10,11)(12,13,14,15,16,17,18),$$
$$\tau = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10)(11,12,13)(14,15,16,17,18).$$

   (a) Determinare un sottogruppo *H*, abeliano e non ciclico, di S_{18} tale che $H \cap \langle\sigma\rangle$ e $H \cap \langle\tau\rangle$ non siano il sottogruppo banale.
   (b) Determinare un sottogruppo ciclico di S_{18} verificante la proprietà del punto (a).

2. Sull'insieme $\mathbb{Z}_{79} \times \mathbb{Z}_{79}$ si definiscano una somma $\oplus$ ed un prodotto $\odot$ ponendo, per ogni $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{79}$,

$$(\alpha,\beta) \oplus (\gamma,\delta) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta),$$
$$(\alpha,\beta) \odot (\gamma,\delta) = (\alpha\cdot\gamma + 11\beta\cdot\delta, \alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma),$$

ove + e $\cdot$ indicano le usuali operazioni di somma e di prodotto in $\mathbb{Z}_{79}$.
Allora $(\mathbb{Z}_{79} \times \mathbb{Z}_{79}, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo.
Sia $A = \{(\alpha, 6\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{79}\}$.

   (a) Provare che *A* è un sottoanello dell'anello sopra definito.
   (b) Dire se *A* è un anello integro.
   (c) Dire se *A* è un anello unitario.

3.

   (a) Sia $f(x) = x^5 + 5^{1313}x^4 + 3^{212}x^3 + 2^{44}x^2 + 3^{115}x + 7^{33} \in \mathbb{Z}[x]$. Provare che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) Sia *p* un numero primo positivo, e sia

$$g(x) = x^{p^5} + x^{p^4} - x^{p^3} - x^{p^2} + x^{2p+1} - x^{2p} - x + [1]_p \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Trovare tutte le radici di $g(x)$ in $\mathbb{Z}_p$, e provare che nessuna di esse è semplice.