

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2020/21

Appello del 22 giugno 2021

1. Siano date, in S_{20} , le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20)$$

$$\tau = (1, 4, 2, 5, 3, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)(16, 19, 17, 20, 18).$$

(a) Determinare l'insieme delle coppie di interi (m, n) tali che σ^m commuti con τ^n .

(b) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

2. Dato p , un numero primo positivo, si consideri l'applicazione $\varphi: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_p, [b]_p) = [p(a^2 - 2b^2)]_{p^2}$.

(a) Provare che φ è ben definita.

(b) Per $p = 7$, determinare $\varphi^{-1}([0]_{p^2})$.

(c) Per $p = 7$, dire se l'immagine di φ è chiusa rispetto alla somma di \mathbb{Z}_{p^2} .

3. Sia p un numero primo maggiore di 2. Determinare l'insieme delle radici in \mathbb{Z}_p , con le rispettive molteplicità, dei polinomi

(a) $f(x) = \sum_{i=1}^p x^i - 2 \sum_{i=0}^{p-1} x^i$

(b) $g(x) = \sum_{i=1}^{p-1} x^i$.