

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2020/21**

**Appello del 22 giugno 2021**

1. Siano date, in  $S_{20}$ , le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20) \\ \tau &= (1, 4, 2, 5, 3, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)(16, 19, 17, 20, 18).\end{aligned}$$

(a) Determinare l'insieme delle coppie di interi  $(m, n)$  tali che  $\sigma^m$  commuti con  $\tau^n$ .  
(b) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

2. Dato  $p$ , un numero primo positivo, si consideri l'applicazione  $\varphi: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2}$  tale che, per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi([a]_p, [b]_p) = [p(a^2 - 2b^2)]_{p^2}$ .

(a) Provare che  $\varphi$  è ben definita.  
(b) Per  $p = 7$ , determinare  $\varphi^{-1}([0]_{p^2})$ .  
(c) Per  $p = 7$ , dire se l'immagine di  $\varphi$  è chiusa rispetto alla somma di  $\mathbb{Z}_{p^2}$ .

3. Sia  $p$  un numero primo maggiore di 2. Determinare l'insieme delle radici in  $\mathbb{Z}_p$ , con le rispettive molteplicità, dei polinomi

(a)  $f(x) = \sum_{i=1}^p x^i - 2 \sum_{i=0}^{p-1} x^i$

(b)  $g(x) = \sum_{i=1}^{p-1} x^i$ .