

ESERCIZIO Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\ln 2}^0 \frac{1}{e^{2x} - 4} dx$$

Calcoliamo prima $\int \frac{1}{e^{2x} - 4} dx$

Sostituzione

$$y = e^{2x}$$

$$dy = e^{2x} \cdot 2 dx$$

$$dx = \frac{dy}{e^{2x} \cdot 2} = \frac{dy}{2y}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{2x} - 4} dx &= \int \frac{1}{y - 4} \frac{dy}{2y} = \int \frac{1}{2y(y-4)} dy \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y-4)} dy \end{aligned}$$

Cerchiamo A, B ecc.

$$\frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-4}$$

$$= \frac{A(y-4) + By}{y(y-4)} = \frac{Ay - 4A + By}{y(y-4)} = \frac{(A+B)y - 4A}{y(y-4)}$$

Moltiplicando per $y(y-4)$ troviamo

$$1 = (A+B)y - 4A$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -4A = 1 \end{cases}$$

$$0 \cdot y + 1 = (A+B)y - 4A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{4} \\ A = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{y(y-4)} dy$$

$$= \int -\frac{1}{4} \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \frac{1}{y-4} dy$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|y| + \frac{1}{4} \ln|y-4| + C$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|e^{2x}| + \frac{1}{4} \ln|e^{2x}-4| + C$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln|e^{2x}-4| + C \quad \left. \begin{array}{l} \text{Il risultato è} \\ \text{questo ma può} \\ \text{essere scritto anche} \\ \text{in modo diverso} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln\left(|e^{2x}| \cdot \left|1 - \frac{4}{e^{2x}}\right|\right) + C$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2}x} + \cancel{\frac{1}{4} \cdot 2x} + \frac{1}{4} \ln\left|1 - \frac{4}{e^{2x}}\right| + C$$

In conclusione:

$$\int \frac{1}{e^{2x}-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y-4)} dy = \frac{1}{8} \ln\left|1 - \frac{4}{e^{2x}}\right| + C$$

Risultato finale

$$\begin{aligned} \int_{-\ln 2}^0 \frac{1}{e^{2x}-4} dx &= \frac{1}{8} \ln\left|1 - \frac{4}{e^{2x}}\right| \Big|_{-\ln 2}^0 \\ &= \frac{1}{8} \ln|-3| - \frac{1}{8} \ln|1 - 4e^{2\ln 2}| \\ &= \frac{1}{8} \ln 3 - \frac{1}{8} \ln 15 \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Nota: la sostituzione si poteva fare direttamente nell'integrale definito trasformando gli estremi

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}; \\ x=0 &\Rightarrow y=1 \\ x=-\ln 2 &\Rightarrow y=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\int_{-\ln 2}^2 \frac{1}{e^{2x}-4} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{y(y-4)} dy = \frac{1}{8} \ln \left| 1 - \frac{4}{y} \right| \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{1}{8} \ln 3 - \frac{1}{8} \ln 15 = \frac{1}{8} \ln 5$$

ESERCIZIO

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x \ln(2+3x) dx$$

Integriamo per parti

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} x^2 \ln(2+3x) - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(2+3x) - \frac{3}{2} \int \frac{x^2}{3x+2} dx \end{aligned}$$

Dividere i due polinomi

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 3x+2 \\ \hline x^2 + \frac{2}{3}x & \frac{x}{3} - \frac{2}{9} \\ \hline \text{" } -\frac{2}{3}x & \\ -\frac{2}{3}x - \frac{4}{9} & \\ \hline \text{" } \frac{4}{9} & \end{array}$$

Concludiamo che:

$$\frac{x^2}{3x+2} = \frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{\frac{4}{9}}{3x+2} \quad \text{Per tanto}$$

$$-\frac{3}{2} \int \frac{x^2}{3x+2} dx = -\frac{3}{2} \int \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{\frac{4}{9}}{3x+2} \right) dx$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \int x dx - \frac{2}{9} \int 1 dx + \frac{4}{9} \int \frac{1}{3x+2} dx \right)$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9} x + \frac{4}{9} \ln|3x+2| \cdot \frac{1}{3} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}\ln|3x+2| + C$$

Risultato finale:

$$\frac{1}{2}x^2 \ln(3x+2) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}\ln|3x+2| + C$$

Ricordare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

ESERCIZIO 3

$$\int \frac{1}{2e^x + e^{-x} + 1} dx$$

$$= \int \frac{1}{2e^x + \frac{1}{e^x} + 1} dx$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2e^{2x} + 1 + e^x}{e^x}} dx = \int \frac{e^x}{2e^{2x} + e^x + 1} dx$$

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ dy &= e^x dx \end{aligned}$$

$$= \int \frac{dy}{2y^2 + y + 1} = \int \frac{1}{2y^2 + y + 1} dy$$

Ricordare

$$\frac{1}{\frac{e}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

Calcoliamo le radici complesse

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{-7}}{4} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 2y^2 + y + 1 &= 2 \left(\left(y + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right) = 2 \cdot \frac{7}{16} \left(\left(\frac{y + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \right)^2 + 1 \right) \\ &= \frac{7}{8} \left(\left(\frac{4y + 1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

In generale dato un polinomio $ay^2 + by + c$ con $\Delta < 0$
 e le radici complesse sono $y_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ si può scrivere:
 $ay^2 + by + c = a((y - \alpha)^2 + \beta^2) = a\beta^2 \left(\left(\frac{y - \alpha}{\beta} \right)^2 + 1 \right)$

Quindi se ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2y^2 + y + 1} dy &= \int \frac{1}{\frac{7}{8} \left(\left(\frac{4y + 1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right)} dy \\ &= \frac{8}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{4y + 1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1} dy \\ &= \frac{8}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{4y + 1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1} dy \\ &= \frac{8}{7} \frac{\sqrt{7}}{4} \arctan \left(\frac{4y + 1}{\sqrt{7}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4e^x + 1}{\sqrt{7}} \right) + C \end{aligned}$$

Note: In questo caso il numeratore era costante, se avessimo avuto un polinomio di grado 1 ($ax+b$ con $a \neq 0$) avremmo dovuto trovare una decomposizione del tipo

$$ax+b = A(\underbrace{4y+1}_{\text{denominate del denominatore}}) + B$$

denominate del denominatore.

$$\bullet \int \frac{y}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \ln(y^2+1) + C$$

$$\bullet \int \frac{3y-2}{\underbrace{y^2+y+1}_{A=1-4=-3 < 0}} dy$$

$$3y-2 = A(2y+1) + B$$

$$3y-2 = 2Ay + A + B$$

$$\begin{cases} 2A=3 \\ A+B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=-2-\frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{3y-2}{y^2+y+1} dy = \frac{3}{2} \int \frac{2y+1}{y^2+y+1} dy - \frac{7}{2} \int \frac{1}{y^2+y+1} dy$$

$$= \frac{3}{2} \ln(y^2+y+1) - \frac{7}{2} \int \frac{1}{y^2+y+1} dy \quad (*)$$

Radici del denominatore $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y^2+y+1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1 \right)$$

$$= \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)$$

Quindi: $\int \frac{3y-7}{y^2+y+1} dy =$

$$(*) = -\frac{3}{2} \ln(y^2+y+1) - \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy$$

$$= -\frac{3}{2} \ln(y^2+y+1) - \frac{14}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy$$

$$= -\frac{3}{2} \ln(y^2+y+1) - \frac{7}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

Integrali generalizzati:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$$

Abbiamo definito gli integrali solo quando l'intervallo di integrazione è chiuso e limitato

Idea: si fissa $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$. Si calcola $\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2} dx$ e si fa il limite per $\beta \rightarrow +\infty$

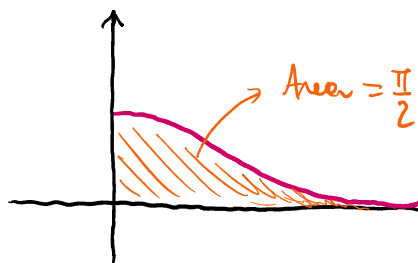
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctan \beta - 0$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctan \beta = \frac{\pi}{2}$$

Quindi possiamo dire che

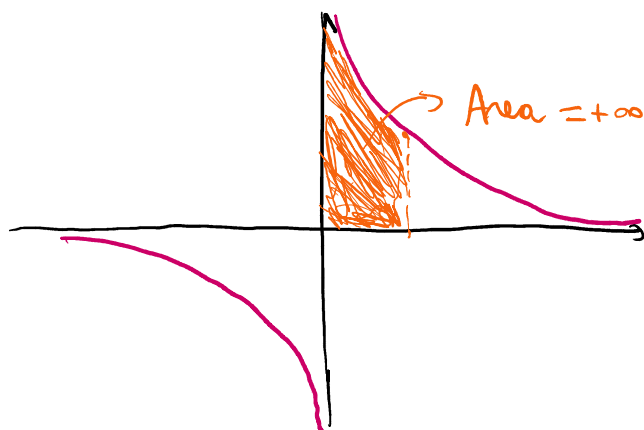
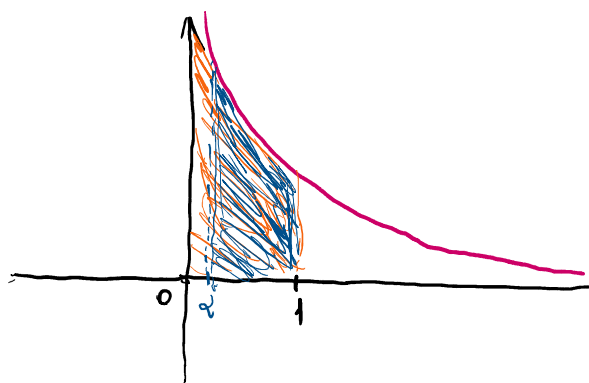
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$



Un procedimento simile si può utilizzare per definire gli integrali di funzioni non limitate (ad esempio, quelle che hanno un'asintoto verticale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_a^1 = \end{aligned}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} 0 - \ln a = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\ln a = -(-\infty) = +\infty$$



Invece:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

Ricordare

$$\int x^a dx = \frac{1}{1+a} x^{1+a} + C$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Big|_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_x^1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - 2\sqrt{x} = 2$$

Notazione:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) - F(0)$$

Def Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo $a < b$. Si dice che f è **INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO IN $[a, b)$** se

- 1) $\forall \beta \in (a, b)$, f è integrabile in $[a, \beta]$
- 2) $\exists \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$.

(se $b = +\infty$ è un limite per $\beta \rightarrow +\infty$)

In tal caso il limite si indica con $\int_a^b f(x) dx$

Def Siano $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$ e sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo $a < b$. Si dice che f è **INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO IN $(a, b]$** se

- 1) $\forall \beta \in (a, b)$, f è integrabile in $[\beta, b]$
- 2) $\exists \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$.

In tal caso il limite si indica con $\int_a^b f(x) dx$

Nota:

Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (intervallo aperto in entrambi gli estremi) è integrabile in $[x, \beta]$ $\forall \alpha, \beta \in (a, b)$ con $x < \beta$ si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO in (a, b) se $\forall c \in (a, b)$, f è integrabile in senso generalizzato in $(a, c]$ e in $[c, b)$,

Il simbolo $\int_a^b f(x) dx$ è usato anche quando f non è integrabile in senso generalizzato:

Quando $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$:

• $\int_a^b f(x) dx$ se dice **CONVERGENTE** se f è integrabile in senso generalizzato.

• $\int_a^b f(x) dx$ se dice **DIVERGENTE** a $+\infty$ (o $a - \infty$) se $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx = +\infty$ (o $a - \infty$)

• $\int_a^b f(x) dx$ non esiste se $\nexists \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$

ESEMPI

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ è convergente. Infatti abbiamo visto che

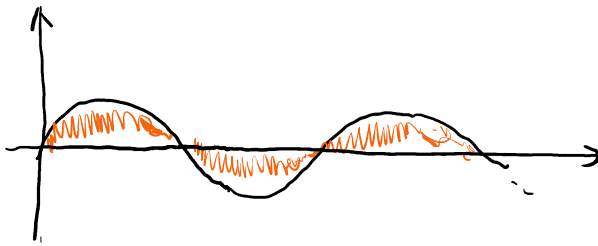
$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ è divergente a $+\infty$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^{\beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln \beta - \underbrace{\ln 1}_{=0} = + \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln \beta = +\infty\end{aligned}$$

3) $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ ~~?~~ Erfolgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\cos x \Big|_0^{\beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\cos x + 1 \quad \text{?}\end{aligned}$$



4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ $\begin{matrix} \text{é convergente se } \alpha > 1 \\ \text{é divergente se } \alpha \leq 1 \end{matrix}$

Ad exemplo

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente ($2 > 1$). Podemos calcularlo

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^{+\infty} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\beta} + 1 = 1\end{aligned}$$

$$5) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \lim_{p \rightarrow +\infty} -e^{-p} + 1 \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{e^{-p}}_{\rightarrow 0} = 1 \end{aligned}$$

L'integrale è convergente

In alcuni casi si può stabilire se un integrale è convergente anche senza calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4} = \frac{1}{x^{4-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}} dx \quad \text{è convergente perché } \frac{11}{3} > 1$$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER GLI INTEGRALI GENERALIZZATI)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $a < b$. Siano $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, p]$ $\forall p \in (a, b)$ tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b)$. Se

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty) \quad \text{allora}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x) dx \quad \text{hanno lo stesso carattere.}$$

Consideriamo ad esempio

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} \cdot x^{\frac{11}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{11}{3}}}{1+x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1 \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}} dx$ è convergente possiamo dire

che anche $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx$ è convergente.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad ?$$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO PER GLI INTEGRALI GENERALIZZATI)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $a < b$. Siano

$f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che f e g sono integrabili in $[a, \beta)$ $\forall \beta \in (a, b)$.

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Allora:

1) Se $\int_a^b g(x) dx$ è convergente, anche $\int_a^b f(x) dx$ è convergente.

2) Se $\int_a^b f(x) dx$ è divergente, anche $\int_a^b g(x) dx$ è divergente.

ESEMPIO

Se $x \geq 1$, allora $x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x$

$$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Quindi $0 \leq e^{-x} \leq e^{-x^2}$

Se come $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ è convergente $\left(\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{p \rightarrow +\infty} -e^{-p} + 1 = 1 \right)$

anche $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente