MATEMATICA - LEZIONE 47

lunedì 12 gennaio 2026 09:05

Data una funzione di più variabili, si può definire la DERIVATA PARZIALE

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \qquad (f_{x_i}(x)$$

dove $e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{\text{i-esima}}, \dots 0)$ coordinata.

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 e^{2x_3}}{1 + x_2} - x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{2x_3}}{1 + x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{2x_3} \frac{d}{dx_2} \frac{1}{1 + x_2}$$

$$= - \frac{x_1 e^{2x_3}}{(1 + x_2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 + x_2} \frac{d}{dx_3} e^{2x_3} = \frac{2 x_1 e^{2x_3}}{1 + x_2} - 1$$

ESEMPIO

$$f(x, y) = \cos(xy + e^{x^2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(xy + e^{x^2}) \frac{d}{dx}(xy + e^{x^2})$$

$$= -\sin(xy + e^{x^2})(y + e^{x^2} \cdot 2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin(xy + e^{x^2}) x$$

Gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(-\sin(xy+e^{x^2})(y+e^{x^2}2x), -\sin(xy+e^{x^2})x \right)$$

$$\nabla f(0,2) = (-\sin 1 \cdot 2, \quad 0) = (-2\sin 1, \ 0)$$

$$\nabla f(0,0) = (0, 0)$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$, $x \in \mathrm{Int}(A)$ e $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si dice che f è DERIVABILE IN x RISPETTO ALLA DIREZIONE v se

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}.$$

In tal caso il limite è detto DERIVATA DIREZIONALE DI f RISPETTO A v e si indica con $\frac{\partial f}{\partial v}$

ESEMPIO

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$v = (2,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(2,1)) - f(x,y)}{t}$$

$$= \frac{d}{dt} f((x,y)+t(2,1)) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} f(x+2t, y+t) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} (x+2t)^2 (y+t) \Big|_{t=0}$$

$$= 2(x+2t)\cdot 2(y+t) + (x+2t)^2 \Big|_{t=0}$$

$$= 4xy + x^2$$

OSS

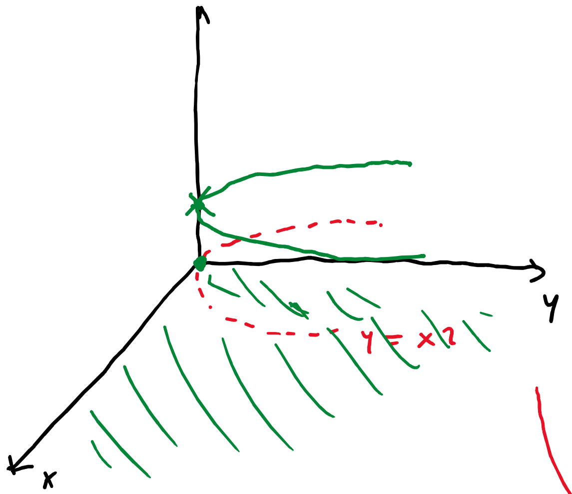
Se $v = e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

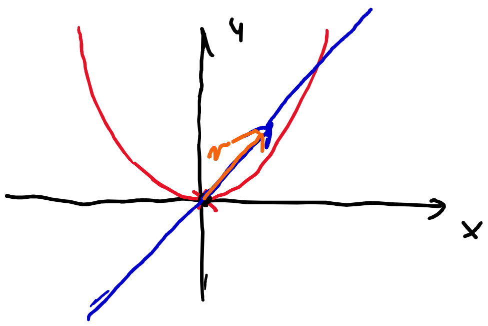
Nota: Esistono funzioni che ammettono derivate in tutte le direzioni ma non sono continue.

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



f ha derivata nell'origine rispetto a ogni direzione e $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma non è continua



Nota: per una funzione di una variabile:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

questo è equivalente a:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)-f'(x)\,t}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)-f'(x)\,t}{|t|} = 0$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x \in D_r(A) \cap A$. Supponiamo che esistono le derivate parziale di f in x. Si dice che è DIFFERENZIABILE in x se

$$\lim_{v\to 0} \frac{f(x+v)-f(x)-\nabla f(x)\cdot v}{\|v\|} = 0.$$

(limite in due variabili)

Nota: Si può dare una definizione più generale anche senza assumere l'esistenza delle derivate parziali. Si può richiedere che $\exists\, w \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\lim_{v\to 0} \frac{f(x+v)-f(x)-w\cdot v}{\|v\|} = 0.$$

In tal caso si dimostra che le derivate parziali esistono e che $v = \nabla f(x)$.

PROPRIETÀ

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in D_r(A) \cap A$. Supponiamo che f sia differenziabile in x. Allora:

1) f è continua e ammette derivate parziali.
2) $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ f è derivabile in x nella direzione v e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è di classe C^1 in A se in ogni punto di A esistono e sono continue tutte le derivate parziali di f.

TEOREMA Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è di classe C^1 in A allora f è differenziabile in tutti i punti di A.

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 y \qquad v = (2,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$

$\nabla f(x,y) = (2xy, \; x^2)$

Siccome le derivate parziali sono continue, f è differenziabile in tutti i punti e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v = (2xy \, , \, x^2) \cdot (2,1) = 4xy + x^2.$$

ESERCIZIO

Sia $f(x,y) = e^{x^2 y} \ln(1+x^2)$.

1) Calcolare le derivate parziali di f.

2) Calcolare la derivata di f rispetto a $v = (3, -1)$ nel punto $x = (1, 0)$.

---

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2 y} \cdot 2xy \ln(1+x^2) + \frac{e^{x^2 y}}{1+x^2} \cdot 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2 y} x^2 \ln(1+x^2)$

2) Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v \qquad v = (3,-1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{e^0}{1+1} \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \cdot 1 \cdot \ln(2) = \ln 2$

$\nabla f(1,0) = (1, \ln 2)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = (1, \ln 2) \cdot (3,-1) = 3 - \ln 2.$

Massimi e minimi di funzioni di più variabili

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$.
Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER f IN A se $\exists\, r > 0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$.
Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO LOCALE PER f IN A se $\exists\, r > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$.

TEOREMA (TEOREMA DI FERMAT IN PIÙ VARIABILI)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ un punto di massimo o minimo locale per f in A. Se f è differenziabile in x_0 allora $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$

(cioè $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$)

Def: I punti in cui ∇f è il vettore nullo si dicono PUNTI CRITICI / PUNTI STAZIONARI per f.

Notiamo che una funzione di n variabili ha n^2 derivate seconde che possono essere scritte in una "tabella".

ESEMPIO

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ la posso derivare rispetto a x o a y ottenendo due funzioni che indichiamo con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx} 2xy = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dy} 2xy = 2x$$

Allo stesso modo possiamo derivare $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}x^2 = 0$$

4 derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Si scrive

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

sono uguali: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

TEOREMA (DI SCHWARZ)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che f sia di classe C^2 in A (cioè che le derivate parziali prime e seconde esistono e sono continue in A). Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad \forall\, x \in A.$$

In generale le derivate seconde si possono racchiudere in una tabella del tipo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Questa tabella è detta MATRICE HESSIANA DI f.

Matrici:

Def Una matrice $n \times m$ è una tabella con n righe e m colonne.
Le matrici si indicano con lettere maiuscole.

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ è una matrice 2×3.

Data una matrice A, a_{ij} indica l'elemento alla riga i e alla colonna j di A

$a_{11} = 2$
$a_{12} = 1$
$a_{13} = 3$
$a_{21} = -1$
$a_{22} = 0$
$a_{23} = 4$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

In generale $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Def: Una matrice si dice QUADRATA se $n = m$ e si dice simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata e simmetrica

$A = \begin{pmatrix} 3 & \overset{a_{12}}{4} \\ \underset{a_{21}}{0} & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata ma non è simmetrica

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata 3×3 simmetrica.

Operazioni tra matrici

1) Addizione / sottrazione si fa termine a termine tra due matrici con le stesse dimensioni:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{2+1}{3} & \overset{1+4}{2} & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Moltiplicazione / divisione per un numero reale

Anche questa si fa termine a termine:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

In generale

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots \end{pmatrix}$$

3) Prodotto riga per colonna tra matrici:

Se A è una matrice $n \times m$ e B è una matrice $m \times K$ il prodotto riga per colonna di A per B è la matrice $n \times K$ che ha come elemento di posto i, j il prodotto scalare tra l'i-esima riga di A e la j-esima colonna di B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×3 $\qquad$ Matrice 2×3.

Si noti che le matrici $n \times m$ si possono moltiplicare a destra per vettori colonna in $\mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

4) Determinante di una matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ESEMPI

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -2-3 = -5$$

• Determinante di una matrice 3×3

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \; - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{12} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{array}$$

Nota Esiste una regola più generale per definire il determinante di una qualsiasi matrice quadrata.

5) Polinomio caratteristico e autovalori

Def: Data una matrice A, si definisce POLINOMIO CARATTERISTICO DI A il polinomio $p(\lambda)$ ottenuto calcolando il determinante della matrice ottenuta sottraendo λ a tutti gli elementi di A che si trovano sulla diagonale principale. Nel caso 2×2:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

Le radici del polinomio caratteristico si dicono AUTOVALORI DI A.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 1 = -3\lambda + \lambda^2 - 1$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda - 1$$

Gli autovalori si ottengono risolvendo

$$\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

TEOREMA Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 in A. Sia $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ un punto critico per f (cioè $\nabla f(x_0) = 0$). Allora.

1) Se tutti gli autovalori della matrice Hessiana di f in x_0 sono strettamente positivi, allora x_0 è un punto di minimo locale.

2) Se tutti gli autovalori della matrice Hessiana sono strettamente negativi, allora x_0 è un punto di massimo locale.

3) Se c'è un autovalore positivo e uno negativo, x_0 non è né un massimo né un minimo