CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

<u>Appello del 18 maggio 2022</u>

1. Date, in S_{22}, le permutazioni

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14,15,16)(17,18,19,20,21,22),$$
$$\tau = (1,4,3,2)(5,7,6,8,9)(10,12,11,13,14,15,16)(17,18,19,20,21,22),$$

si considerino i loro centralizzanti $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ e $C(\tau)$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

(b) Dire se il sottogruppo $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.

2. Dati gli interi *n, m*, si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_3, [b]_6) = ([nb]_2, [ma]_9)$.

(a) Determinare l'insieme delle coppie (n, m) per le quali φ è ben definita.

(b) Determinare $\operatorname{Im}\varphi$ al variare di n ed m.

(c) Determinare l'insieme delle coppie (n, m) per le quali φ è un omomorfismo di anelli.

3. Dato p un numero primo positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} x^{p^i},$$
$$g(x) = x^p - x,$$
$$h(x) = x^4 - \overline{6}x^3 + \overline{13}x^2 - \overline{12}x + \overline{4}.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.

(b) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(g(x), h(x))$.