Raccolta di esercizi per gli studenti di **GEOMETRIA** - Cdl **Fisica**
Università di Bari
A. Lotta
A.A. 2023-23

1. Posto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} |\, x \neq 0\}$, stabilire che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ la cui operazione interna è definita come segue:

$$(a, b, c) * (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$

è un gruppo non abeliano.

2. Verificare che l'insieme Φ di tutte le funzioni del tipo

$$x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$$

dove a, b sono costanti e $a \neq 0$, è un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{R}$.

3. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da

$$K = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

eredita da $\mathbb{R}$ due operazioni $+$ e $\cdot$ di somma e prodotto, rispetto alle quali esso è un campo.

4. Dati due polinomi $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, con $g \neq 0$, la funzione

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

si chiama *funzione razionale*. Il suo dominio è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che $g(x) \neq 0$.

Due funzioni razionali $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ sono *equivalenti* se:

$$f(x)g'(x) = f'(x)g(x) \qquad (*)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ad esempio $\frac{3}{x-1}$ e $\frac{3(x+1)}{x^2-1}$ sono equivalenti e verrano identificate (sebbene abbiano domini diversi).

Verificare che l'insieme K di tutte le funzioni razionali, considerate a meno di equivalenza, è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto tra funzioni:

$$f(x)/g(x) + h(x)/k(x) := x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{k(x)},\; f(x)/g(x) \cdot h(x)/k(x) := x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{k(x)}.$$

5. Verificare in dettaglio la validità degli assiomi di spazio vettoriale per quel che concerne gli esempi: $V_1 \times V_2$ (prodotto diretto degli spazi vettoriali V_1 e V_2) e V^X (spazio delle funzioni dal'insieme X nello spazio vettoriale V).

6. Verificare che ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo

$$f(x, y) := (ax + by, cx + dy),$$

   dove a, b, c, d sono costanti assegnate, è lineare.

7. Fissato un punto x_0 dell'insieme X e un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, verificare che la funzione

$$F : V^X \to \mathbb{K}$$

   tale che

$$F(f) := f(x_0) \quad \forall f \in V^X$$

   che associa ad ogni funzione $f : X \to V$ il suo valore nel punto x_0, è una funzione lineare.

8. Dati due spazi vettoriali V_1 e V_2 sullo stesso campo, e il loro prodotto diretto $V_1 \times V_2$, verificare che le applicazioni

$$p_1 : V_1 \times V_2 \to V_1, \; p_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$$

   definite da

$$p_1(v_1, v_2) := v_1, \quad p_1(v_1, v_2) := v_2,$$

   sono lineari (esse si chiamano proiezioni canoniche dal prodotto diretto sui due fattori).

9. Verificare che l'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) := (x + y, x - y)$$

   è un automorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

10. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x + y - z, y + 3z)$$

   verificare che f è lineare, determinare esplicitamente $\mathrm{Ker}(f)$ e mostrare che

$$\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbb{R}.$$

11. Dati due sottospazi U_1 e U_2 di uno spazio vettoriale V, verificare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

    a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

b) Per ogni $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ si ha:

$$u_1 + u_2 = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = u_2 = 0.$$

12. Mostrare che dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V, il sottospazio somma $U+W$ è il pì piccolo sottospazio contenente entrambi. Ovvero, se E è un qualunque sottospazio contenente sia U che W, allora si ha:

$$U + W \subset E.$$

13. Data una successione finita di vettori $v_1, \ldots, v_m$, $m \geq 1$ dello spazio vettoriale V, verificare che il sottospazio vettoriale $L(v_1, \ldots, v_m)$ generato da essi è il più piccolo sottospazio (per inclusione) contenente gli stessi vettori. In altri termini, se W è un sottospazio qualsiasi che contiene tutti i vettori v_i, allora

$$L(v_1, \ldots, v_m) \subset W.$$

14. Verificare che i vettori

$$(1, 0, 1),\ (0, -1, 2), (0, 0, 1)$$

di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

15. Provare che $\mathbb{C}$, pensato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ha dimensione 2 e determinare una base di tale spazio vettoriale.

16. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_2[x]$ costituito da tutti i polinomi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado al massimo 2. Verificare che

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : \, p(-1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale, e determinarne la dimensione ed una base.

17. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali U e V di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 0, -1)), \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \, x+2y = 0\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di U, V e di $U \cap V$.

18. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)), \quad V = L((1, 2, -2, 1), (0, 0, 0, 1)).$$

Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

19. Si determini la dimensione del sottospazio vettoriale V di $Hom(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ generato dai seguenti funzionali:

$$F_1(x) = \sqrt{2}x_1 + x_3 + \sqrt{3}x_4 + 2\sqrt{3}x_5,\ F_2(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x_3 + x_4,$$

$$F_3(x) = \sqrt{3}x_1 + x_3 + \sqrt{2}x_4 + 3\sqrt{2}x_5,\ F_4(x) = x_1 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x_3 + \sqrt{6}x_5.$$

20. Considerata la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

stabilire che

$$V = \{X \in M_{3,2}(\mathbb{R}) :\ AX = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_{3,2}(\mathbb{R})$, e determinarne la dimensione ed una base.

21. Si determinino le dimensioni del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 - 2x_4, 3x_1 + x_2 - x_4).$$

22. Siano U e W due spazi vettoriali con basi rispettivamente $\{u_1 \dots, u_n\}$ e $\{w_1 \dots, w_m\}$. Mostrare che

$$\{(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$$

è una base del prodotto diretto $U \times W$.

23. Si ponga

$$E = \{p \in \mathbb{R}_4[x] |\ gr(p) \le 3,\ p(1) = 0\},\ F = L(x^4, x^3 - x^2, x - 1).$$

a) Provare che E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$. Determinarne una base.

b) Determinare una base di $E \cap F$ ed una base di $E + F$.

24. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari tali che

$$M^{\mathfrak{B}_o}_{\mathfrak{B}_o}(f) = A, \quad M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(g) = B$$

dove $\mathfrak{B}_o$ denota la base canonica, mentre $\mathfrak{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$.

Stabilire per quali valori di k risulta $f = g$.

25. Posto
$$V := \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\, {}^t A = -A\},$$
si consideri l'applicazione $F : M_2(\mathbb{R}) \to V$ tale che
$$\forall A \in V \qquad F(A) := A -{}^t A.$$

a) Stabilire che F è lineare.

b) Considerata la base
$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
di $M_2(\mathbb{R})$, determinare una base $\mathfrak{B}'$ di V e la matrice $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(F)$.

c) Stabilire se F è surgettiva.

d) Determinare una base di $Ker(F)$.

26. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$U = L((1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0)),\ V = L((1,0,2,1),(1,0,0,-1),(0,0,0,1)).$

a) Determinare una base $\mathfrak{B}$ di $E := U \cap V$.

b) Si considerino le applicazioni lineari $f : E \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to E$ associate, rispetto alla base $\mathfrak{B}$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, rispettivamente alle matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ 3 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di $Ker(f)$ ed una base di $Ker(g)$.

Stabilire inoltre se g è surgettiva.

27. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k+3 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
dove $k \in \mathbb{R}$.

a) Determinare esplicitamente f.

b) Stabilire per quali valori di k f è surgettiva.

c) Determinare una base di $Ker(f)$ ed una base di $Im(f)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

28. Si consideri il sottospazio $W = L((1,1,0,0),(2,2,-1,1),(0,1,-1,0),(1,0,0,1))$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di W;

b) Determinare esplicitamente l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Ker(F) = W, \quad F(0,0,0,1) = (1,0,0).$$

29. Si considerino i vettori

$$v_1 = (1,0,1,0),\ v_2 = (0,1,0,0),\ v_3 = (1,1,1,0),\ v_4 = (0,0,1,0)$$

ed i sottospazi $V = L(v_1, v_2)$, $W = L(v_3, v_4)$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $V \cap W$ ed una base di $V + W$;

b) Stabilire quale delle seguenti matrici è associata ad un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to V$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ ed alla base $\{v_1, v_2\}$ di V:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Considerata l'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$G(x,y,z,t) = (x + z + \alpha\, t, x + y - z + t,\ x + z + 2t, 0)$$

stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $Im(G) \subset V$.

30. Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, tali che f è associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & k & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$ e

$$g(1,1) = (0,0,1,1),\ g(1,-1) = (1,1,0,0).$$

a) Determinare una base di $Ker(f)$ al variare di k.

b) Determinare una base di $Im(g)$.

c) Stabilire se vi sono valori di k per cui $g \circ f$ è un isomorfismo.

31. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U =< (1,1,0,0), (1,2,-1,0), (1,1,0,1) >$$

$$V = \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_3 = x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Determinare una base di $U \cap V$.

32. Posto

$$V := \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\ A \text{ è simmetrica}\},$$

si consideri l'applicazione

$$F : V \to M_2(\mathbb{R})$$

tale che

$$\forall A \in V \qquad F(A) := AZ$$

dove $Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire che F è lineare.

b) Stabilire se F è ingettiva e determinare una base di $Im(F)$.

33. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$F(a, b) = (a - b)x + 2bx^2 + b.$$

a) Determinare la matrice associata a F rispetto alle basi

$$\mathfrak{B} = \{(1, -1), (1, 1)\} \quad \mathfrak{B}' = \{x - 1, x^2 + 1, x + 1\}$$

di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}_2[x]$ rispettivamente.

b) Stabilire se F è surgettiva e/o ingettiva.

c) Stabilire che non esiste alcuna base $\mathfrak{B}''$ di $\mathbb{R}^2$ per cui risulti:

$$M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}''}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Si ponga

$$U := \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ \ x + ky = 0,\ x + k(k + 1)z = 0 \,\}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

a) Determinare la dimensione di U al variare di k.

b) Per i valori di k per cui $\dim(U) = 3$ determinare una base di $U \cap W$ dove $W = \langle (1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 0) \rangle$.

35. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ definita nel modo seguente:

$$F(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{R}_3[x]$$

Si determinino una base di $Ker(F)$ ed una base di $Im(F)$.

36. Si ponga

$$U_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \, x = (k+1)z, \; y = 0\}, \; U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \, x = 0, \; z = kt\}.$$

a) Determinare, al variare di k, la dimensione ed una base di $U_1 + U_2$ e di $U_1 \cap U_2$.

b) Posto $k = 0$, determinare esplicitamente un isomorfismo

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

tale che

$$F(U_1) = U_2.$$

37. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & -1 & k-1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi

$$\mathfrak{B} = \{(2, 1, \pi), (0, 1, 0), (\pi, 0, 1)\}, \; \mathfrak{C} = \{(1, \sqrt{2}, 0, 0), (0, 1, \sqrt{3}, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Determinare una base di $Ker(f)$ ed una base di $Im(f)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

38. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & k & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base canonica e ad una base assegnata $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Determinare una base di $Ker(F)$ ed una base di $Im(F)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

39. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1, \sqrt{2}, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\ f(0, 0, \sqrt{3}, 1) = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 3k & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(0, 1, 0, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2k & 0 \end{pmatrix}.$$

dove k è un parametro reale.

1) Stabilire per quali valori di k f è un isomorfismo.

2) Determinare una base di $Ker(f)$ ed una base di $Im(f)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3) Stabilire per quali valori di k accade che tutte le matrici $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^4$ sono simmetriche.

4) Verificare che

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : tr(f(x)) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base al variare di k.