Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

19 giugno 2018

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione
$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\bar{z}^2.$$

2. Studiare la funzione
$$f(x) = \left|\sqrt[3]{|x|}\right| \left|\ln x^2\right|$$
e disegnarne il grafico approssimativo.

3. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 e^{\sin x} - \ln^3(1+x)}{sin^4 x}.$$

4. Data la funzione
$$g(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{(1+x)^\alpha}}$$
i) calcolare l'integrale indefinito per $\alpha = 1$;

ii) dire, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,se è integrabile in $[0,1]$ e in $[1,+\infty)$.

5. Risolvere la disequazione
$$\ln_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2^{2x}+2^{2x+1}}-2^x}{2^x-1}\right) > 0.$$

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ si ha $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta))$

e quindi $\rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}\,[\rho^2(\cos(-2\theta) + i\,\text{sen}(-2\theta))]}{\cancel{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4})}$

(se $\rho \neq 0$)

$\Leftrightarrow$ $\rho = 0 \vee \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $2\theta = -2\theta - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

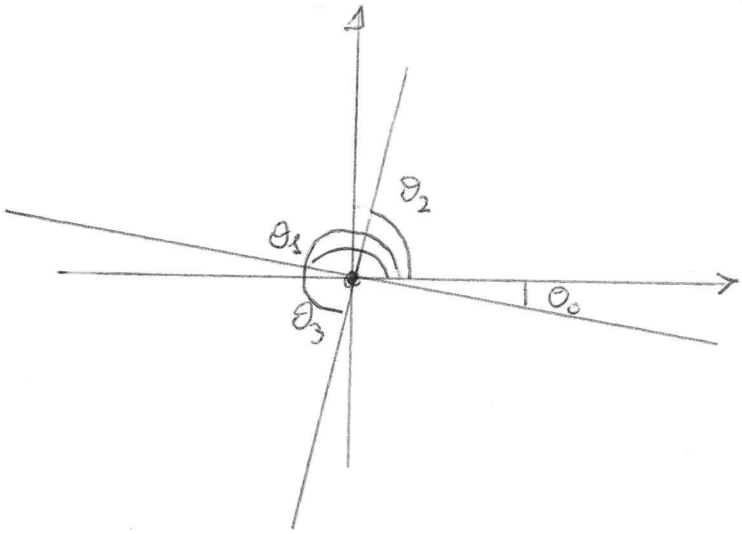
$\Leftrightarrow \rho = 0 \vee \theta = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$

Per $k=0$: $\theta_0 = -\frac{\pi}{16}$

$k=1$: $\theta_1 = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{16}\pi$

$k=2$: $\theta_2 = -\frac{\pi}{16} + \pi$

$k=3$: $\theta_3 = -\frac{\pi}{16} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{16} + \pi$



L'equazione ha ∞ soluzioni rappresentate dalle rette in figura

2. Poiché $\sqrt[3]{|x|} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ il 1° valore assoluto è superfluo e la funzione si può riscrivere nella forma

$f(x) = \sqrt[3]{|x|}\,|\ln x^2|$ cioè $f(x) = 2\sqrt[3]{|x|}\,|\ln|x||$

I D: $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Poiché f è pari, lo studio per $x>0$ e poi ne ribalto il grafico rispetto all'asse y.

$f(x) = 2\sqrt[3]{x}\,|\ln x| \qquad x>0$

$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{x}\,|\ln x| = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ non acc. $\vee \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ $\qquad (1,0)$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x>0 \wedge x \neq 1$

$$\begin{array}{ccccc} & + & & + & \\ \hline 0 & & 1 & & \end{array}$$

$x=1$ punto di min. assoluto

$\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt[3]{x}\,|\ln x| = 0\cdot(+\infty) = 0$ per gli ordini $\qquad \nexists$ as. verticali

f prolungabile per continuità in $x = 0$

$\lim_{x\to +\infty} 2\sqrt[3]{x}\,|\ln x| = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty \qquad \nexists$ as. orizz.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x}\cdot|\ln x|}{x} = \lim_{x\to +\infty} 2\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ per gli ordini

La funzione non ha asintoti $\qquad \nexists$ as. obliqui

$y' = 2\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}|\ln x| + \sqrt[3]{x}\,\frac{\ln x}{|\ln x|}\cdot\frac{1}{x}\right] = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\left[\frac{1}{3}|\ln x| + \frac{\ln x}{|\ln x|}\right]$

$ID(y')$: $\ln x \neq 0 \iff x \neq 1$

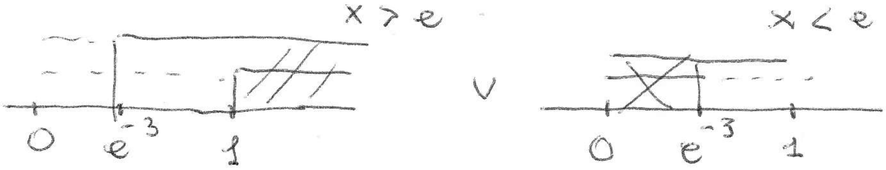
Poiché $y' = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{1}{3}\ln x + 1\right) & \text{se } \ln x > 0 \iff x > 1 \\ \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\left(-\frac{1}{3}\ln x - 1\right) & \text{se } \ln x < 0 \iff 0 < x < 1 \end{cases}$

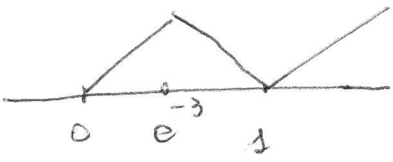
segue che

$\lim_{x\to 1^+} y' = 2 = f'_+(1) \qquad \lim_{x\to 1^-} y' = -2 = f'_-(1) \Rightarrow x = 1$ punto angoloso

Inoltre $y' > 0 \iff \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{3}\ln x + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3}\ln x + 1 < 0 \end{cases} \iff x > 1 \vee 0 < x < e^{-3}$

$x > e^{-3} \qquad x < e^{-3/2}$





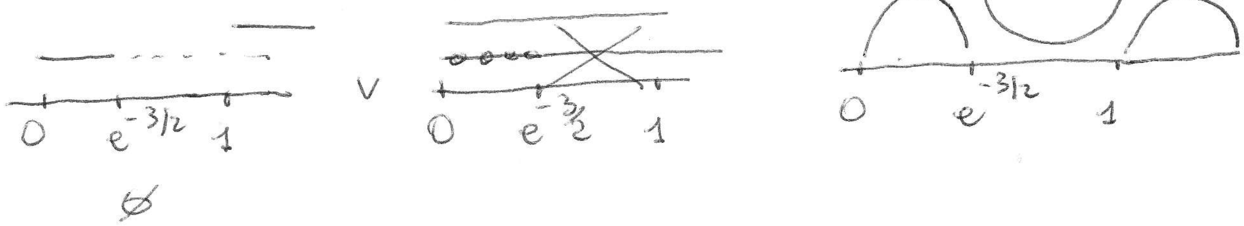
Conclusione: $y' > 0 \iff x > 1 \vee 0 < x < e^{-3}$

$M \begin{cases} x = e^{-3} \\ y = 2\sqrt[3]{e^{-3}}\,|\ln e^{-3}| = \frac{6}{e} \end{cases} \qquad m \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$y'' = \begin{cases} \frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}\left(-\frac{2}{9}\ln x - \frac{1}{3}\right) & \text{se } x > 1 \\ \frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{2}{9}\ln x + \frac{1}{3}\right) & 0 < x < 1 \end{cases}$

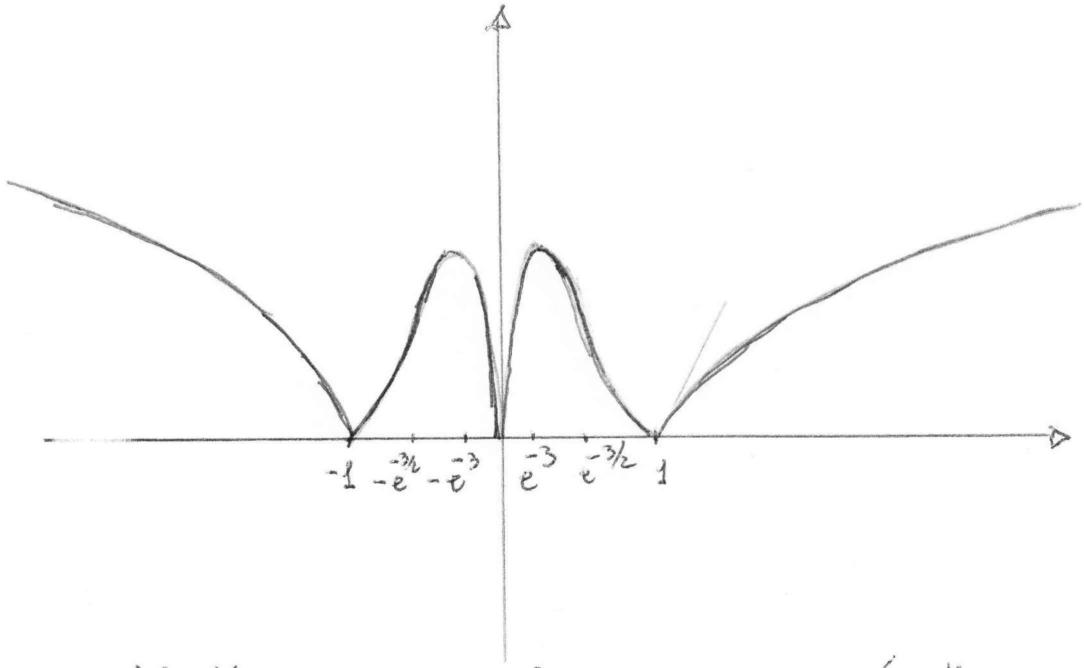
$$y''>0 \iff \begin{cases} x>1 \\ -\frac{2}{3}\ln x - 1>0\end{cases} \vee \begin{cases}0<x<1\\ \frac{2}{3}\ln x+1>0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x>1\\ x<e^{-3/2}\end{cases} \vee \begin{cases}0<x<1\\ x>e^{-3/2}\end{cases} \iff e^{-3/2}<x<1$$



Osservo infine che $\lim_{x\to0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\left(-\frac{1}{3}\ln x - 1\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ G_f parte per $x>0$ con tangente verticale e rivolto verso il basso.



Poiché $e^{\operatorname{sen} x} = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ (si trova direttamente tra gli sviluppi notevoli)

$$\ln^3(1+x) = \left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^3 \simeq x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{3}{4}x^5-\frac{1}{8}x^6$$

il limite diventa

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3(\cancel{1}+x+\frac{x^2}{2})-\cancel{x^3}+\frac{3}{2}x^4}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{2}x^4}{x^4}=\frac{5}{2}.$$

Oppure si può usare limiti notevoli:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3(e^{\operatorname{sen}x}-1)+x^3-\ln^3(1+x)}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^3(e^{\operatorname{sen}x}-1)+(x-\ln(1+x))(x^2+x\ln(1+x)+\ln^2(1+x))}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-1}{x}+\frac{(\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{x^2}{2})(x^2+x^2+x^2)}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{3\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int D(2\sqrt{1+x})\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx \overset{P.P.}{=}$

$\displaystyle= 2\sqrt{1+x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \cancel{2}\int \sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\,dx$

Calcolo il secondo integrale

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx = \int \frac{2\,\frac{\cancel{t-t^2}}{(1-2t)^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{t-t^2}}{\cancel{1-2t}}}\,dt$$

$\sqrt{x^2+x} = x+t \Rightarrow$

$\cancel{x^2}+x = \cancel{x^2}+t^2+2tx \Rightarrow$

$x = \dfrac{t^2}{1-2t} \Rightarrow dx = 2\dfrac{t-t^2}{(1-2t)^2}\,dt$

$\sqrt{x^2+x} = \dfrac{t^2}{1-2t}+t = \dfrac{t-t^2}{1-2t}$

$$= 2\int \frac{1}{1-2t}\,dt = -\lg|1-2t|+c$$

$$= -\lg|1+2x-2\sqrt{x^2+x}|+c$$

e quindi

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \lg|1+2x-2\sqrt{x^2+x}|+c.$$

ii) Poiché g è definita e continua in $[0,1]$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, g è sempre integrabile in senso classico $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \alpha=0 \\ 0 \ (\text{con ord } \frac{\alpha}{2}) & \text{se } \alpha>0 \end{cases} \Rightarrow$$

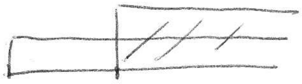
g è integ. in s. i. in $[1,+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\alpha}{2}>1$ cioè $\alpha>2$

5. Poiché $\sqrt{2^{2x}+2^{2x+1}} = \sqrt{2^{2x}+2\cdot2^{2x}} = \sqrt{3\cdot2^{2x}} = \sqrt{3}\cdot2^x$ basta porre

$$0<\frac{(\sqrt{3}-1)2^x}{2^x-1}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-1>0 \ (\Leftrightarrow \text{la frazione è} >0 \text{ essendo } N>0\ \forall x) \\ \frac{(\sqrt{3}-1)2^x}{2^x-1}<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x-1>0 \\ (\sqrt{3}-1)2^x<2^x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (\sqrt{3}-2)2^x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow (2-\sqrt{3})2^x>1$$

$$2^x>\frac{1}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow x>\lg_2\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \underbrace{-\lg_2(2-\sqrt{3})}_{>0}$$



$0 \qquad -\lg_2(2-\sqrt{3})$

Si conclude che la disequazione è soddisfatta $\forall x\in\,]-\lg_2(2-\sqrt{3}),+\infty)$.