LABORATORIO DI MATEMATICA - 7

lunedì 16 febbraio 2026 14:33

5) $$\int \frac{x-3}{2x^2+x+1}\,dx$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} = \overbrace{-\frac{1}{4}}^{\alpha} \pm i \overbrace{\frac{\sqrt{7}}{4}}^{\beta}$$

$$D(x) = 2x^2 + x + 1 = 2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \right)$$

Verifica:

$$2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \right) = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + \frac{7}{16} \right)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2x^2 + x + 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{x-3}{2x^2+x+1} = \frac{A(4x+1) + B}{2x^2+x+1} = \frac{A(4x+1)}{2x^2+x+1} + \frac{B}{2x^2+x+1}$$

$$x - 3 = 4Ax + A + B$$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ A + B = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -3 - \frac{1}{4} = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{x-3}{2x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx - \frac{13}{4}\int \frac{1}{2x^2+x+1}$$

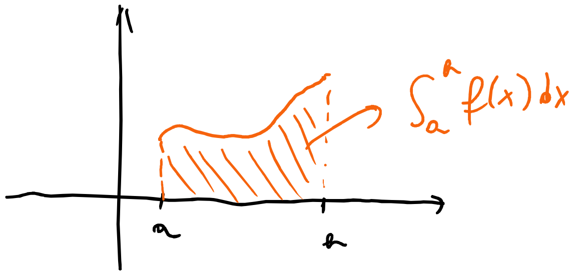
$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{13}{4} \cdot \int \frac{1}{2 \cdot \left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{13}{\cancel{8}\,2} \cdot \frac{\cancel{4}}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \right) + C$$

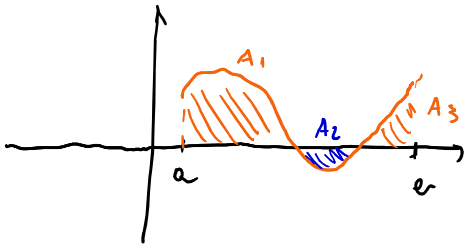
$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+x+1) - \frac{13}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right) + C$$

Integrali definiti

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Il risultato è l'area con segno della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[a,b]$.



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 .$$

(area "con segno")

Come si calcolano?

Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$:

1) Si calcola $\int f(x)\,dx = \underline{F(x)} + C$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

ESEMPIO

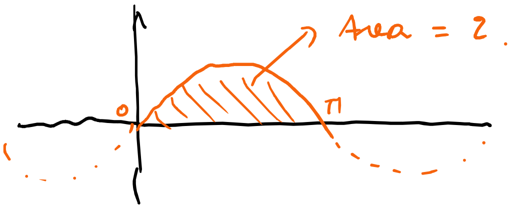
$$\int_0^2 x^3\,dx = ?$$

$$\int x^3\,dx = \underbrace{\frac{1}{4}x^4}_{F(x)} + C$$

$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^2 = \frac{1}{4}\cdot 16 - 0 = 4 .$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= -(-1) + 1 = 2$$



Sostituzioni negli integrali

In un integrale si può fare una sostituzione $y=\varphi(x)$ perché si sostituisce $dy = \varphi'(x)\,dx$

$$\int e^x \sin(e^x)\,dx \qquad y = e^x$$

$$dy = D(e^x)\,dx$$

$$dy = \underbrace{e^x\,dx}$$

$$= \int \underbrace{\sin(e^x)}_{\sin y}\ \underbrace{e^x\,dx}_{dy}$$

$$= \int \sin y\,dy = -\cos y + C$$

$$= -\cos e^x + C$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx \qquad y = e^{2x}$$

$$dy = D(e^{2x})\,dx$$

$$dy = e^{2x}\cdot 2\,dx$$

$$dy = \underbrace{2e^{2x}\,dx}$$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{e^{2x}}_{y}-1}\ \frac{\overbrace{2e^{2x}\,dx}^{dy}}{2\underbrace{e^{2x}}_{y}}$$

$$= \int \frac{1}{y-1}\cdot\frac{1}{2y}\,dy = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(y-1)y}\,dy \quad (*)$$

$$\frac{1}{(y-1)y} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + B(y-1)}{(y-1)y}$$

$$1 = Ay + B(y-1)$$

$$1 = Ay + By - B$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(y-1)y}\,dy = \int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$= \ln|y-1| - \ln|y| + C$$

$$* = \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| - \frac{1}{2}\underbrace{\ln e^{2x}}_{2x} + \frac{1}{2}C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| - x + C.$$

Quando si fanno sostituzioni negli integrali definiti si cambiano anche gli estremi di integrazione:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$dy = D(\sqrt{x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}_{dy}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

$$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

$$\int_1^2 e^y \cdot 2\,dy$$

$$= 2\int_1^2 e^y\,dy$$

$$= 2\left[e^y\right]_1^2 = 2(e^2 - e^1) = 2(e^2 - e).$$

ESERCIZIO.

a) Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x-4}\,dx$

b) Calcolare $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{2x}\,]\,(e^x)^2}{\underbrace{e^{2x}}_{}+3e^x-4}\,dx$

$(e^x)^2 + 3\cdot e^x - 4$

---

a) $\frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{4}{5}\ln|x+4| + C \quad (*)$

b) $y = e^x \qquad dy = D(e^x)\,dx = e^x\,dx$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x-4}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x-4}\cdot \underbrace{e^x\,dx}_{dy}$$

$x=1 \Rightarrow y = e^1 = e$
$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e} \frac{y}{y^2+3y-4}\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{5}\ln|y-1| + \frac{4}{5}\ln|y+4|\right]_{e^{\frac{1}{2}}}^{e}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|e-1| + \frac{4}{5}\ln|e+4| - \frac{1}{5}\ln|e^{\frac{1}{2}}-1| - \frac{4}{5}\ln|e^{\frac{1}{2}}+4|$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{e-1}{e^{\frac{1}{2}}-1}\right| + \frac{4}{5}\ln\left|\frac{e+4}{e^{\frac{1}{2}}+4}\right|.$$

ESERCIZIO

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln x - 1}{x(\ln^2 x + \ln x + 1)}\,dx$$

$y = \ln x$
$dy = D(\ln x)\cdot dx$
$dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int_{1}^{e} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x + \ln x + 1}\,\underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{dy}$$

$x = e \Rightarrow y = \ln e = 1$
$x = 1 \Rightarrow y = \ln 1 = 0$

$$= \int_{0}^{1} \frac{y-1}{y^2+y+1}\,dy.$$

ESERCIZIO

$$\int_{0}^{\ln 2} \frac{4e^{2x} - 5e^x}{e^{2x} - 6e^x + 9}\,dx$$

$y = e^x$
$dy = e^x\,dx$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{(4e^x - 5)}{e^{2x} - 6e^x + 9} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dy}$$

$x = \ln 2 \rightarrow y = e^{\ln 2} = 2$

$x = 0 \rightarrow y = e^0 = 1$

$$= \int_1^2 \frac{4y - 5}{y^2 - 6y + 9} \, dy .$$

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{2x - \sqrt{x} + 1} \, dx$$

$y = \sqrt{x}$

$dy = D\sqrt{x} \, dx$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$

$$= \int \frac{1}{2x - \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\underbrace{2\sqrt{x}} \, dx}_{dy}$$

$$= \int \frac{2y}{2y^2 - y + 1} \, dy$$

Equazioni differenziali

Sono equazioni in cui compare una funzione incognita $y = y(x)$ e alcune delle derivate di $y(x)$.

ESEMPI:

1) $y' = x^2$

$y(x) = \int x^2 \, dx$

$y(x) = \frac{1}{3} x^3 + C.$

2) $y' = y \, x^2$

$y(x) = \underbrace{\int y(x) \, x^2}_{\text{non possiamo calcolarlo perché non conosciamo } y.} dx$

$$\frac{y'}{y} = x^2$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3+c}$$

$$y(x) = \pm\, e^{\frac{1}{3}x^3+c}.$$

Equazioni lineari di II ordine a coefficienti costanti.

$$a y'' + b y' + c y = g(x).$$

Per queste equazioni esiste un metodo risolutivo che non richiede il calcolo di integrali.

- Se $g(x) = 0$, l'equazione si dice **OMOGENEA**.

  Si considera il polinomio

  $p(t) = a t^2 + b t + c$ (POLINOMIO CARATTERISTICO)

  1) $\Delta > 0$. In questo caso $p(t) = 0$ ha due soluzioni t_1 e t_2. Si dimostra che la soluzione dell'equazione diff. $a y'' + b y' + c y = \underline{0}$ è

     $$y_0(x) = C_1 e^{t_1 x} + C e^{t_2 x}.$$

  2) $\Delta = 0$. $p(t) = 0$ ha una sola radice reale $t_0 \in \mathbb{R}$. La soluzione dell'eq. differenziale

     $$y_0(x) = C_1 e^{t_0 x} + C e^{t_0 x}\cdot x.$$

  3) $\Delta < 0$: $p(t)$ non ha radici reali ma ha due radici complesse $t_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

la soluzione è

$$y_0(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

ESEMPI

1) $2y'' + 7y' - 9y = 0$

$p(t) = 2t^2 + 7t - 9$

$\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$ $\qquad t_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \end{cases}$

La soluzione è

$$y_0(x) = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{-\frac{9}{2}\cdot x} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{9}{2}x}$$

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$p(t) = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ $\qquad t = \dfrac{-4 \pm 0}{2} = -2$

La soluzione è:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}\cdot x$$

3) $y'' + 2y' + 5y = 0$

$p(t) = t^2 + 2t + 5$

$\Delta = 4 - 5\cdot 4 = -16$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm i\cdot 4}{2} = \underbrace{-1}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\beta} i$$

$$y_0(x) = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x).$$

E se $g(x) \neq 0$?

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

Fatto: Se conosciamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$, allora le soluzioni sono tutte del tipo
$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $y_0(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

- $y_0(x)$ si trova con il metodo visto prima.
- Bisogna trovare $\bar{y}$.

Metodo di somiglianza:

Si cerca una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ "simile a $g(x)$"

ESEMPIO

$$2y'' - y' - 6y = x + 1$$

$g(x) = x + 1$ è un polinomio di I grado.

Cerchiamo $\bar{y}(x)$ come un polinomio di primo grado.

$\bar{y}(x) = Ax + B$.

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$ Sostituiamo nell'equazione:

$$2\bar{y}'' - \bar{y}' - 6\bar{y} = x + 1$$

$$2 \cdot 0 - A - 6(Ax + B) = x + 1$$

$$\underline{-A} - 6Ax \underline{-6B} = x + 1$$

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ -A - 6B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ 6B = -A - 1 = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{5}{36} \end{cases}$$ cioè $\bar{y}(x) = Ax + B$
$= -\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$

Se vogliamo tutte le soluzioni dell'equazione:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$

dove $y_0(x)$ risolve l'eq. omogenea $2y'' - y' - 6y = 0$

$p(t) = 2t^2 - t - 6$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

In conclusione le soluzioni dell'equazione completa sono

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$
$$= -\frac{1}{6}x - \frac{5}{36} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

Metodo di similarità

- Se $g(x)$ è un polinomio di grado n.

  $\bar{y}(x)$ si può cercare come un polinomio $\leq n$, purché 0 non sia una radice del polinomio caratteristico $p(t)$.

  Se $p(t) = 0$ allora $\bar{y}(x) = x^m q(x)$ dove q è un polinomio di grado $\leq n$ e m è la molteplicità di 0 come radice di $p(t)$.

- Se $g(x) = h(x) e^{\alpha x}$ con h polinomio di grado n.

  $\bar{y}(x) = q(x) e^{\alpha x}$ purché α non sia radice del pol. caratteristico.

  Se invece $p(\alpha) = 0$, $\bar{y}(x) = x^m q(x) e^{\alpha x}$ dove m è la molteplicità di α come radice di $p(t)$ e $q(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$.

Riepilogando:

$$a y'' + b y' + c y = g(x).$$

1) Si risolve $a y'' + b y' + c y = 0$ e si chiama $y_0(x)$ la soluzione.

2) Si cerca una soluzione particolare $\bar{y}$ (ad esempio con il metodo di similarità)

3) La soluzione finale dell'equazione completa è
$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x).$$

ESEMPIO

$$y'' + 4y' = 4x - 1$$

1) Si risolve $y'' + 4y' = 0$

$$p(t) = t^2 + 4t = t(t+4) \qquad t_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$$

$$y_0(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-4x}$$
$$= C_1 + C_2 e^{-4x}$$

2) $g(x) = 4x - 1$

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$$
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A$$

$$\bar{y}'' + 4\bar{y}' = 4x - 1$$
$$2A + 4(2Ax + B) = 4x - 1$$
$$2A + 8Ax + 4B = 4x - 1$$

$$\begin{cases} 8A = 4 \\ 2A + 4B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 4B = -1 - 2A = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)\,x = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

3) Conclusione:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + C_1 + C_2\, e^{-4x}.$$

$$2y'' + y' + 5y = \underbrace{5x^2 + 2x + 3}_{g(x) \text{ pol. di secondo grado.}}$$

1) Risolvere $2y'' + y' + 5y = 0$.

$$p(t) = 2t^2 + t + 5$$

$$\Delta = 1 - 5 \cdot 8 = -39 < 0$$

Radici complesse: $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-39}}{4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{39}}{4} = \underbrace{-\dfrac{1}{4}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\dfrac{\sqrt{39}}{4}}_{\beta}$

La sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = C_1\, e^{-\frac{1}{4}x} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right) + C_2\, e^{-\frac{1}{4}x} \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right)$$

2) Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}(x)$.

$$g(x) = 5x^2 + 2x + 3$$

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A$$

$$2\bar{y}'' + \bar{y}' + 5\bar{y} = 5x^2 + 2x + 3$$

$$2 \cdot 2A + 2Ax + B + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 + 2x + 3$$

$$\underline{4A} + \underline{2Ax} + \underline{B} + \underline{5Ax^2} + \underline{5Bx} + \underline{5C} = \underline{5x^2} + \underline{2x} + \underline{3}$$

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ 2A + 5B = 2 \\ 4A + B + 5C = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ 2 + 5B = 2 \rightarrow B = 0 \\ 4 + 5C = 3 \rightarrow C = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$A = 1 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = -\frac{1}{5}$$

$$\bar{y}(x) = x^2 - \frac{1}{5}$$

3) La soluzione dell'equazione completa è

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$

$$= x^2 - \frac{1}{5} + c_1 e^{-\frac{1}{4}x} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{4}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{39}}{4}x\right)$$

$$y'' + y = x$$

- $y'' + y = 0$

$$p(t) = t^2 + 1 \qquad \Delta = -4 < 0 \qquad \left(\begin{array}{l} t^2 + 1 = 0 \\ t^2 = -1 \\ t = \pm\sqrt{-1} = \pm i \end{array} \right)$$

$$t_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

$$= \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{1}_{\beta} \cdot i$$

$$y_0(x) = c_1 e^{0 \cdot x} \cos x + c_2 e^{0 \cdot x} \operatorname{sen} x$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

- $\bar{y}(x)$

$g(x) = x$ (polinomio di grado 1)

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$

$$\bar{y}'(x) = A$$

$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$\bar{y}'' + \bar{y} = x$$

$$0 + Ax + B = x$$

$$Ax + B = x$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = x$$

- $y(x) = x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

ESERCIZI

1) $4y'' - 4y' + 5y = 3x - 2$ $\quad \left(y(x) = \frac{3}{5}x + \frac{2}{25} + c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin x \right)$

2) $y'' + 2y' - 3y = 3x - 1$ $\quad \left(y(x) = -x - \frac{1}{3} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} \right)$

3) $y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$ $\quad \left(y(x) = 2x + 1 + c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} \right)$

4) $4y'' - 4y' + y = x^2 - 20$ $\quad \left(y(x) = x^2 + 8x + 4 + c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} x \right)$

5) $y'' - 2y' - 3y = 3x$ $\quad \left(y(x) = -x + \frac{2}{3} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \right)$

6) $y'' + 8y' + 25y = 10$ $\quad \left(y(x) = \frac{2}{5} + c_1 e^{-4x} \cos(3x) + c_2 e^{-4x} \sin(3x) \right)$

---

1) $4y'' - 4y' + 5y = 3x - 2$

- Risolviamo $4y'' - 4y' + 5y = 0$

$p(t) = 4t^2 - 4t + 5 \qquad \Delta = 16 - 80 = -64$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{4 \pm 8i}{8} = \frac{1}{2} \pm i$$

$$y_0(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin x$$

- Cerco una sol. particolare $\bar{y}(x) = Ax + B$

$$\bar{y}'(x) = A$$
$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$4\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 5\bar{y} = 3x - 2$$

$$0 - 4A + 5(Ax + B) = 3x - 2$$

$$-4A + 5Ax + 5B = 3x - 2$$

$$\begin{cases} 5A = 3 \\ -4A + 5B = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ -\frac{12}{5} + 5B = -2 \end{cases} \to 5B = -2 + \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{2}{25}$$

$$\begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{2}{25} \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = \frac{3}{5}x + \frac{2}{25}$$

- $y(x) = \frac{3}{5}x + \frac{2}{25} + C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin x$

2) $y'' + 2y' - 3y = 3x - 1$

- Risolvo $y'' + 2y' - 3y = 0$

$p(t) = t^2 + 2t - 3 \qquad \Delta = 4 + 12 = 16 \qquad t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

- Cerco $\bar{y}(x)$ del tipo $\bar{y}(x) = Ax + B$

$\bar{y}'(x) = A$

$\bar{y}''(x) = 0$

$0 + 2A - 3(Ax + B) = 3x - 1$

$2A - 3Ax - 3B = 3x - 1$

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ 2A - 3B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ -2 - 3B = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = -1 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = -x - \frac{1}{3}$$

- $y(x) = -x - \frac{1}{3} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

3) $y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$

- Risolvo $y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$

$p(t) = t^2 - 4t + 3 \qquad \Delta = 16 - 12 = 4 \qquad t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$

- Cerco $\bar{y}(x) = Ax + B$ soluzione particolare:

$$\bar{y}'(x) = A$$
$$\bar{y}''(x) = 0$$

$$0 - 4A + 3(Ax+B) = 6x - 5$$
$$-4A + 3Ax + 3B = 6x - 5$$

$$\begin{cases} 3A = 6 \\ -4A + 3B = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ -8 + 3B = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = 2 \\ 3B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = 2x + 1$$

- Soluzione dell'equazione completa:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$
$$= 2x + 1 + c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}.$$

4) $4y'' - 4y' + y = x^2 - 20$

- Risolviamo $4y'' - 4y' + y = 0$

$$p(t) = 4t^2 - 4t + 1 \qquad \Delta = 0$$
$$= (2t - 1)^2$$

$t_0 = \frac{1}{2}$ unica radice reale

$$y_0(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} x$$

- Cerchiamo $\bar{y}(x)$ del tipo $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\bar{y}''(x) = 2A$$

Sostituendo nell'equazione:

$$4\bar{y}'' - 4\bar{y}' + \bar{y} = x^2 - 20$$
$$4 \cdot 2A - 4(2Ax+B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 - 20$$

$$8A - 8Ax - 4B + Ax^2 + Bx + C = x^2 - 20$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -8A + B = 0 \\ 8A - 4B + C = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 8 \\ 8 - 32 + C = -20 \rightarrow C = 4 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = x^2 + 8x + 4$$

- Soluzione finale dell'equazione completa:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$
$$= x^2 + 8x + 4 + C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} x$$

5) $y'' - 2y' - 3y = 3x$

- Risolviamo $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$p(t) = t^2 - 2t - 3$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$t_{1,2} = \frac{+2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

- Cerchiamo $\bar{y}(x)$ della forma:

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$
$$\bar{y}'(x) = A$$
$$\bar{y}''(x)\ 0$$

$$\bar{y}'' - 2\bar{y}' - 3\bar{y} = 3x$$
$$0 - 2A - 3(Ax + B) = 3x$$
$$-2A - 3Ax - 3B = 3x$$

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ 2 - 3B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -x + \frac{2}{3}$$

- Soluzione finale $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$

$$= -x + \frac{2}{3} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

6) $y'' + 8y' + 25y = 10$

- Risolviamo $y'' + 8y' + 25y = 0$

$p(t) = t^2 + 8t + 25$

$\Delta = 64 - 100 = -36 < 0$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

$$y_0(x) = c_1 e^{-4x}\cos(3x) + c_2 e^{-4x}\sin(3x)$$

- Cerchiamo $\bar{y}(x)$ del tipo $\bar{y}(x) = A$ con $A \in \mathbb{R}$:

$\bar{y}'(x) = 0$

$\bar{y}''(x) = 0$

$\bar{y}'' + 8\bar{y}' + 25\bar{y} = 10$

$25A = 10$

$A = \frac{2}{5} \Rightarrow \bar{y}(x) = \frac{2}{5}$

- soluzione finale:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$$

$$= \frac{2}{5} + c_1 e^{-4x}\cos(3x) + c_2 e^{-4x}\sin(3x)$$