

1) (1) $X+Y=N$ con N V.A. GEOMETRICA DI PAR. p

QUINDI $E\left(\frac{1}{10}(X+Y)\right) = \frac{1}{10} E(N) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{10}(X+Y)\right) &= \text{Var}\left(\frac{1}{10}N\right) = E\left(\left(\frac{1}{10}N - E\left(\frac{1}{10}N\right)\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{100} E\left((N - E(N))^2\right) = \frac{1}{100} \text{Var}(N) = \frac{1}{100} \frac{(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

(2) $P(N=K) = p(1-p)^{K-1}$ per $K \geq 1$ (NOTARE CHE $P(N=0)=0$)

QUINDI $P(X=0) = \sum_{K=1}^{\infty} P(X=0|N=K) P(N=K) = \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K p(1-p)^{K-1} =$

$$= \frac{1}{2} p \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^{K-1} = \frac{1}{2} p \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^K = \frac{1}{2} p \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}(1-p)\right)} =$$

$$= \frac{p}{1+p}$$

$$(3) P(N=K|X=0) = \frac{P(X=0|N=K) P(N=K)}{P(X=0)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^K p(1-p)^{K-1} \frac{(1+p)}{p}}{\frac{p}{1+p}}$$

PER $K \geq 1$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^K (1+p)(1-p)^{K-1}$$

$$(4) \quad P(X=0|Y=0) = \frac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{P(N=0)}{P(Y=0)} = 0$$

X e Y NON SONO INDIPENDENTI IN QUANTO

$$P(X=0|Y=0) \neq P(X=0), \quad \text{INFATTI}$$

$$P(X=0|Y=0) = 0 \quad \text{e} \quad P(X=0) = \frac{p}{1-p}$$

$$(2) \quad 1) \quad f(x) = (\lambda+1) x^\lambda \chi_{[0,1]}(x)$$

f È LA DENSITÀ DI UNA V.A. X IN QUANTO:

$$1) \quad \text{È CHIARAMENTE } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = (\lambda+1) \int_0^1 x^\lambda dx = (\lambda+1) \left. \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right|_0^1 = 1$$

2) LA FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA È

$$g(x_1, \dots, x_n | \lambda) = (\lambda+1)^n x_1^\lambda \cdots x_n^\lambda \chi_{[0,1]}(x_1) \cdots \chi_{[0,1]}(x_n)$$

CHÈ POSSIAMO SCRIVERE COME

$$g(x_1, \dots, x_n | \lambda) = \begin{cases} (\lambda+1)^n x_1^\lambda \cdots x_n^\lambda & \text{se } 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FISSATI $x_1, \dots, x_n$, MASSIMIZZO LA FUNZIONE $g(x_1, \dots, x_n | \lambda)$ IN λ .

PER $0 < x_i < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ CONVIENE CONSIDERARE $\log(g)$.

$$\log(g(x_1, \dots, x_n | \lambda)) = n \log(\lambda) + \lambda \sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \log(g(x_1, \dots, x_n | \lambda)) = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \geq 0$$

DAL FATTO CHE $-\sum_{i=1}^n \log(x_i) > 0$ PER $0 < x_i < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ SI HA

$$\frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \geq 0 \iff \lambda \leq \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n -\log(x_i) \right)} - 1$$

QUINDI $\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n -\log(x_i) \right)}$

È UN PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO IN
QUANTO È MASSIMO RELATIVO È L'UNICO
PUNTO CRITICO.

LA REGIONE COMPLEMENTARE $\left(\text{ovvero } \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 1 \text{ o } x_i \leq 0 \text{ per qualche } i \in \{1, \dots, n\} \right\} \right)$

HA PROBABILITÀ NULLA E QUINDI È IRRILEVANTE NELLA DEFINIZIONE

DELL'ESTIMATORE DI MASSIMA VEROSIMILITUDINE, PERCHÉ

$$\hat{\lambda} := \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n -\log(x_i) \right)} - 1 \quad \text{È LO STIMATORE DI MASS. VER. PER } \lambda.$$

$$(3) \quad P(-\ln(X) \leq t) = P(\ln(X) \geq -t) = P(X \geq e^{-t})$$

QUINDI PER $e^{-t} \geq 1$, CIOE PER $t \leq 0$, SI HA

$$P(X \geq e^{-t}) = \int_{e^{-t}}^{\infty} f(x) dx \leq \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} 0 dx = 0$$

$$\Rightarrow P(-\ln(X) \leq t) = 0 \quad \text{PER } t \leq 0.$$

INVECE PER $t > 0$:

$$P(-\ln(X) \leq t) = P(X \geq e^{-t}) = \int_{e^{-t}}^1 (\lambda+1) x^{\lambda} dx =$$

USANDO LA SOSTITUZIONE $x = e^{-y}$ SI HA $(dx = -e^{-y} dy)$

$$= - \int_0^t (\lambda+1) e^{-(\lambda+1)y} dy = 1 - e^{-(\lambda+1)t}$$

QUINDI $-\ln(X)$ HA LEGGE ESPONENZIALE DI PAR. $(1+\lambda)$.

(4) DATO CHE $E(X) = \frac{1}{1+\lambda}$ DAL PUNTO SOPRA, SI HA CHE

PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) \rightarrow \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{IN PROBABILITÀ.}$$

3) 1) IL SONDAGGIO EFFETTUATO SI PUÒ INTERPRETARE COME UN CAMPIONE BERNOULLIANO DI RANGO 100 E PAR. p INCOGNITO DI CUI SI VUOLE COSTRUIRE UN INTERVALLO DI FIDUCIA

UN INTERVALLO DI FIDUCIA PER LA PROPORZIONE p È DATO DA

$$\left[\bar{X} - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right]$$

DOVE:

- a) $\bar{X}$ È LA MEDIA CAMPIONARIA
- b) n È IL RANGO DEL CAMPIONE
- c) $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ È IL QUANTILE DI ORDINE $1-\frac{\alpha}{2}$ DI $N(0,1)$.

DAI DATI SI HA

$$\bar{X} = 0,07, \quad n = 100, \quad \phi_{0,975} \approx 1,96$$

QUINDI $[0,02, 0,12]$ È UN INTERVALLO DI FIDUCIA PER p

CON $1-\alpha = 0,95$.

NOTA: ALTERNATIVAMENTE SI PUÒ USARE L'INTERVALLO DI FIDUCIA MAGGIORMENTE APPROSSIMATO DATO DA

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

DI LIVELLO $1-\alpha$

2) UN INTERVALLO DI CONFIDENZA PER IL PAR. θ È UN INTERVALLO AZZARDATO

$[T_1, T_2]$, DOVE T_1 E T_2 SONO PUB STATISTICHE,
TACCHÉ CHÉ $\forall \theta \in \Theta$ SI HA

$$P_{\theta}(\{\theta \in [T_1, T_2]\}) \geq 1-\alpha.$$