**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2013/14**

**Appello del 4 giugno 2014**

1. Sia data la seguente permutazione di $S_{17}$:

$$\alpha = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10,11)(12,13,14,15,16,17).$$

Per ogni intero positivo $n$ sia $K_n = \{\sigma \in \langle\alpha\rangle \mid o(\sigma) \text{ divide } n\}$.

(a) Provare che, per ogni $n$, $K_n$ è un sottogruppo di $S_{17}$.
(b) Determinare $|K_{18396}|$.
(c) Determinare tutti gli $n$ per i quali $|K_n| = 2$.

2. Sia $p$ un numero primo positivo.

(a) Determinare tutti i $p$ per i quali è ben definita l'applicazione

$$\varphi : U(\mathbb{Z}_p) \to U(\mathbb{Z}_{p^2})$$

tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, con $p \nmid a$, $\varphi([a]_p) = [a^2]_{p^2}$.

(b) Dire per quali $p$ l'applicazione

$$\gamma : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2}$$

tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\gamma([a]_p) = [a^2]_{p^2}$, è un omomorfismo di anelli ben definito.

3. Sia $f(x) = x^{405117} + 5x^{15339} + 195x^{9488} + 771 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Provare $f(x)$ ha al più 4 radici razionali distinte.
(b) Determinare un primo positivo $p$ tale che la riduzione di $f(x)^2 + 1$ modulo $p$ sia priva di radici in $\mathbb{Z}_p$.