**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2025/26**

**<u>Appello del 9 gennaio 2026</u>**

1. Si considerino in $S_{19}$ le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10,11)(12,13,14)(15,16,17,18,19),$$
$$\tau = (1,4,3,2)(5,8,7,6)(9,12,10,13,11,14)(15,18,16,19,17).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di $S_{19}$ : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{19} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 48.
(c) Dire se $C(\sigma)$ è ciclico.

2.

(a) Determinare un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ la cui immagine abbia ordine 4.
(b) Determinare il numero degli omomorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20}$.

3. Dato un numero primo $p$ positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^p + x + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p - \overline{1},$$
$$h(x) = x^{p^3} - x^{p^2}.$$

(a) Determinare, al variare di $p$, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.
(b) Determinare l'insieme dei valori di $p$ per i quali i polinomi $g(x), h(x)$ sono coprimi.