CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2009/10

<u>Appello del 13 settembre 2010</u>

1. Data la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 16 & 7 & 17 & 6 & 3 & 10 & 15 & 4 & 5 & 11 & 14 & 13 & 18 & 2 & 9 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} \in S_{18},$$

   determinare l'ordine del gruppo $G = \langle \alpha^{580} \rangle \cap \langle \alpha^{396} \rangle$.

2. Sia $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ l'applicazione definita ponendo $\varphi(x) = ([3x+4]_6, [5x+6]_{10})$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$.

   (a) Dire se è vero che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
   (b) Determinare $\varphi^{-1}([1]_6, [1]_{10})$.
   (c) Determinare un elemento di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ avente come controimmagine l'insieme vuoto.

3. Sia $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare tutti i primi $p \le 17$ per i quali la riduzione di $f(x)$ modulo p è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.
   (b) Determinare una fattorizzazione della riduzione di $f(x)$ modulo 19.