Lezione 2

Prerequisiti: Sottogruppi normali. Ideali. Gruppi ed anelli quoziente. Teorema fondamentale di omomorfismo per gruppi e per anelli.

Teoremi di isomorfismo.

Ricordiamo che, in base al Teorema di corrispondenza per i gruppi (vedi Algebra 2, Teorema 9.2), se G è un gruppo, ed H un sottogruppo normale, allora i sottogruppi (normali) del gruppo quoziente G/H sono tutti e soli i gruppi del tipo K/H, ove K è un sottogruppo (normale) di G contenente H.

Nell'Esercizio 15.9 del Corso di Algebra 2, avevamo dimostrato le relazioni di isomorfismo di gruppi ed anelli $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}\big/ 2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \cong 3\mathbf{Z}\big/ 6\mathbf{Z}$ attraverso considerazioni dirette. In realtà è possibile derivare ciò da un risultato generale.

Nel seguito, salvo avviso contrario, supporremo che G sia un gruppo moltiplicativo.

Lemma 2.1 Sia G un gruppo e siano H e K suoi sottogruppi normali tali che $H \subset K$. Allora l'applicazione

$$\varphi : G/H \to G/K$$

$$\varphi(gH) = gK$$

è un epimorfismo di gruppi il cui nucleo è *K/H.* $(=\pi(K)$, essendo $\pi : G \to G/H$ l'epimorfismo canonico).

<u>Dimostrazione:</u> L'applicazione φ è ben definita. Infatti, se $g, g' \in G$ sono tali che $gH = g'H$, allora $g^{-1}g' \in H$. Ma allora $g^{-1}g' \in K$, cioè $gK = g'K$. La proprietà di omomorfismo e la suriettività sono ovvie. Inoltre $gH \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow gK = K \Leftrightarrow g \in K \Leftrightarrow gH \in \pi(K)$.

Teorema 2.2 (*Terzo teorema di isomorfismo per gruppi*). Sia G un gruppo, e siano H e K suoi sottogruppi normali tali che $H \subset K$. Allora l'applicazione

$$\varphi^* : G/H\big/ K/H \to G/K$$

$$\varphi^*((gH)K/H) = gK$$

è un isomorfismo di gruppi.

<u>Dimostrazione:</u> Basta applicare il Teorema fondamentale di omomorfismo per gruppi (vedi Algebra 2, Teorema 3.8) all'omomorfismo φ del Lemma 2.1.

Vale un analogo risultato per gli anelli:

Esercizio 2.3* a) Sia *A* un anello, e siano *I* e *J* suoi ideali bilateri tali che $I \subset J$. Allora l'applicazione

$$\varphi^*: {A/I}\Big/{J/I} \to A/J$$

$$\varphi^*((a+I)+J/I) = a+J$$

è un isomorfismo di anelli.

b) Provare che l'anello ${\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}}\Big/{2\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

c) Se *A* è un anello commutativo unitario, provare che l'anello quoziente ${A[x]/(x^2-1)}\Big/{(x+1)/(x^2-1)}$ è isomorfo all'anello quoziente $A[x]/(x+1)$, che, a sua volta, è isomorfo all'anello *A*.

Teorema 2.4 (*Secondo teorema di isomorfismo per gruppi*) Sia *G* un gruppo, sia *H* un suo sottogruppo normale, e sia *K* un suo sottogruppo. Allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di *K* e l'applicazione

$$\eta: HK/H \to K/(H \cap K)$$

$$\eta(hkH) = k(H \cap K)$$

è un isomorfismo di gruppi.

<u>Dimostrazione:</u> Osserviamo che, essendo *H* un sottogruppo normale di *G*, *HK* è un sottogruppo di *G*, e quindi *H* è un sottogruppo normale di *HK*. È facile verificare che $H \cap K$ è un sottogruppo normale di *K*. Sia $f: HK \to K/(H \cap K)$ l'applicazione definita da $f(hk) = k(H \cap K)$. Allora *f* è ben definita: se $hk = h'k'$, allora $h'^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K$, cioè $k(H \cap K) = k'(H \cap K)$. Inoltre f è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per un opportuno $h'' \in H$ si ha:

$$f((hk)(h'k')) = f(h(kh')k') = f(h(h''k)k') = f(hh''kk') = kk'(H \cap K) =$$
$$k(H \cap K)k'(H \cap K) = f(hk)f(h'k')$$

Evidentemente *f* è surgettivo. Il suo nucleo è formato da tutti gli elementi *hk* tali che $h \in H, k \in K$ e

cioè tali che $k \in H \cap K$, (equivalentemente: $k \in H$)

$hk \in H$.

Quindi Ker$f = H$. La tesi segue allora dal Teorema fondamentale di omomorfismo per gruppi.

Esercizio 2.5* Enunciare il corrispondente risultato per gli anelli.

Esempio 2.6 Applichiamo il Teorema 2.4 al gruppo $G = \mathbf{Z}$, ed ai suoi sottogruppi $H = 2\mathbf{Z}$, $K = 3\mathbf{Z}$. Deduciamo che

$$(H + K) / H \cong K / (H \cap K),$$

ossia, essendo $H + K = \langle 2,3 \rangle = \mathbf{Z}$,

$$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \cong 3\mathbf{Z} / 6\mathbf{Z},$$

come avevamo già stabilito nell'Esercizio 15.9 del corso di Algebra 2.