

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2010/11**

**Appello del 1° luglio 2011**

1. Siano dati i seguenti elementi di  $S_{16}$ :

$$\sigma = (3, 15, 7, 10, 4)(5, 6, 8, 14, 12, 13, 9)$$

$$\tau = (1, 11)(2, 16)(5, 12, 6, 13, 8, 9, 14)$$

$$\rho = (1, 2, 11, 16)$$

$$\alpha = (1, 2, 11, 16)(3, 15, 7, 10, 4)(5, 6, 8, 14, 12, 13, 9).$$

- (a) Determinare tutti gli elementi di  $\langle \alpha \rangle$  aventi periodo 14.
- (b) Provare che  $\langle \alpha \rangle$  è il più piccolo sottogruppo di  $S_{16}$  contenente  $\{\sigma, \tau, \rho\}$ .
- (c) Determinare un gruppo di ordine 28 contenente  $\{\tau, \rho\}$ .

2. Siano  $m$  ed  $n$  interi maggiori di 1. Data una coppia  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , si consideri l'applicazione

$$\varphi_{a,b} : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{mn}$$

$$\text{tale che, per ogni } x, y \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{a,b}([x]_m, [y]_n) = [ax + by + 1]_{mn}.$$

- (a) Determinare tutte le coppie  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  per le quali l'applicazione  $\varphi_{a,b}$  è ben definita.
- (b) Determinare tutte le coppie  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  per le quali l'applicazione  $\varphi_{a,b}$  è iniettiva.

3. Siano dati i polinomi

$$f(x) = x^{100002} + x^{100000} - 13333x^2 - 13333 \in \mathbb{Z}[x],$$

$$g(x) = x^4 + 34x^2 + 33 \in \mathbb{Z}[x].$$

- (a) Determinare tutti le radici complesse comuni a  $f(x)$  e  $g(x)$ .
- (b) Dette  $\overline{f(x)}$  e  $\overline{g(x)}$  le riduzioni di  $f(x)$  e  $g(x)$  modulo 101, determinare  $\text{MCD}(\overline{f(x)}, \overline{g(x)})$ .