**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2016/17**

**Appello del 25 settembre 2017**

1. Sia data la permutazione

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7) \in S_{11}.$$

(a) Provare che l'insieme $H = \{\alpha \in S_{11} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ ha almeno 288 elementi.
(b) Provare che $H$ contiene un sottogruppo commutativo di ordine 48.
(c) Dire se l'insieme $K = \{\alpha \in S_{11} \mid \alpha^2\sigma = \sigma\alpha^2\}$ è un sottogruppo di $S_{11}$.

2. Dato un intero positivo $n$, si considerino l'insieme di matrici $A_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b^n \\ b & a^n \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}$ e l'applicazione

$$\varphi_n : A_n \to \mathbb{Z}_{101}$$
$$X \mapsto [\det(X)]_{101}$$

(a) Dire se $\varphi_{1312}$ è surgettiva.
(b) Determinare $\varphi_{10099}{}^{-1}(\{[0]_{101}\})$.

3. Siano $p$, $q$ primi positivi distinti.

(a) Dire per quali $p$ il polinomio $x^2 - x - p$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Provare che il polinomio $x^3 + 8x^2 - pq$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.