

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2020/21

Appello del 7 gennaio 2021

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{19} :

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,2,3)(4,5,6,7,8)(9,10,11,12,13,14,15)(16,17,18,19), \\ \tau &= (1,3,2)(4,6,8,5,7)(9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19).\end{aligned}$$

- (a) Determinare l'insieme degli interi n tali che $\langle \sigma^n \rangle \cap \langle \tau \rangle = \{\text{id}\}$.
(b) Detto $C(\sigma)$ il sottogruppo degli elementi di S_{19} che commutano con σ , determinare $C(\sigma) \cap \langle \tau \rangle$.

2. Sia n un intero maggiore di 1.

- (a) Determinare l'insieme dei valori di n per i quali l'applicazione $\varphi_n : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{2n}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}_n$, $\varphi_n([a]_n) = ([a^2]_{2n})$ è ben definita.
(b) Determinare $|\varphi_{14000}^{-1}([0]_{28000})|$.
(c) Determinare $|\varphi_{210}^{-1}([1]_{420})|$.

3. Sia p un numero primo positivo. In $\mathbb{Z}_p[x]$ determinare

- (a) $\text{mcm}(x^{p^2} - 1, x^{p-1} - 1)$,
(b) $\text{MCD}(x^p - 1, x^{p^2-p} - 1)$.