

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2020/21

Appello del 7 gennaio 2021

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{19} :

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19),$$

$$\tau = (1, 3, 2)(4, 6, 8, 5, 7)(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19).$$

- (a) Determinare l'insieme degli interi n tali che $\langle \sigma^n \rangle \cap \langle \tau \rangle = \{\text{id}\}$.
- (b) Detto $C(\sigma)$ il sottogruppo degli elementi di S_{19} che commutano con σ , determinare $C(\sigma) \cap \langle \tau \rangle$.

2. Sia n un intero maggiore di 1.

- (a) Determinare l'insieme dei valori di n per i quali l'applicazione $\varphi_n : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{2n}$ tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi_n([a]_n) = ([a^2]_{2n})$ è ben definita.
- (b) Determinare $|\varphi_{14000}^{-1}([0]_{28000})|$.
- (c) Determinare $|\varphi_{210}^{-1}([1]_{420})|$.

3. Sia p un primo positivo. In $\mathbb{Z}_p[x]$ determinare

- (a) $\text{mcm}(x^{p^2} - \bar{1}, x^{p-1} - \bar{1})$,
- (b) $\text{MCD}(x^p - \bar{1}, x^{p^2-p} - \bar{1})$.