MATEMATICA - LEZIONE 17

lunedì 27 ottobre 2025 09:04

- Si introduce un nuovo numero i detto UNITÀ IMMAGINARIA che ha la proprietà $i^2 = -1$.

Def Un NUMERO COMPLESSO è un numero della forma $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$.

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Definizioni da ricordare

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + i\, Im(z)^2} \qquad \text{MODULO}$$

$$\bar{z} = Re(z) - i\, Im(z) \qquad \text{CONIUGATO.}$$

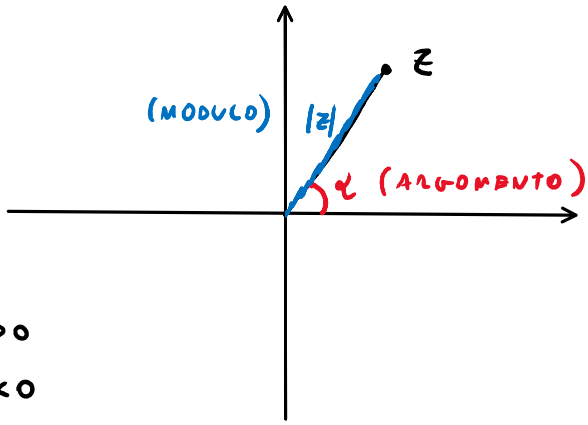
1) FORMA ALGEBRICA / CARTESIANA:

$$z = \underbrace{x}_{\substack{\text{PARTE REALE} \\ Re(z)}} + i \underbrace{y}_{\substack{\text{PARTE IMMAGINARIA} \\ Im(z)}} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}$$

2) FORMA TRIGONOMETRICA (se $z \neq 0$)

$$z = |z| \, (\cos \underbrace{\alpha}_{\text{ARGOMENTO DI } z} + i \sin \alpha)$$

dove



$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

$$\alpha = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

OSS 1

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_2) \cdot |z_2| (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$= |z_1||z_2| \, (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Quindi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\arg(z_1 + z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

OSS 2 Se $z \neq 0$, allora:

$$\frac{1}{z} = \frac{Re(z)}{|z|^2} - \frac{i\,Im(z)}{|z|^2}$$

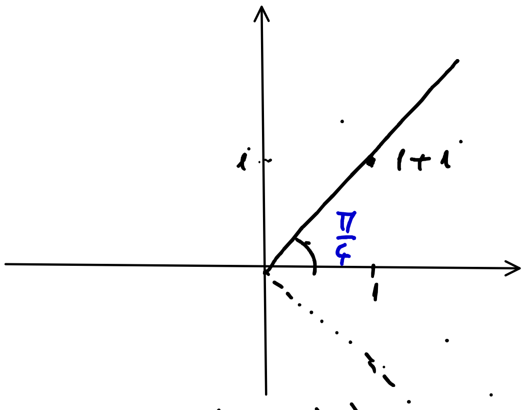
da cui $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ e $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

PROPRIETÀ

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}$, allora:

$$z^n = |z|^n \, (\cos(n \arg(z)) + i \sin(n \arg z))$$

ESEMPIO



$$(1+i)^7 = ?$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7 \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$

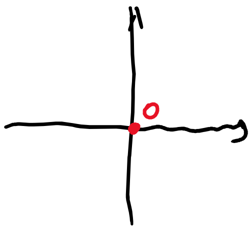
$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8 - 8i$$

OSS

1) $\arg(0)$ non è definito

$0 = 0(\cos\alpha + i \sin\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$



2) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $\arg(z)$ è definito a multipli interi di 2π.

3) Se $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ con $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $|z| = \rho$ e $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Forma esponenziale di un numero complesso.

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$ con $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.
Definiamo $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

OSS $\forall y \in \mathbb{R}$: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

In particolare $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$z = |z| \left(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \right)$$

$$= \underbrace{|z|\, e^{i \arg(z)}}_{\text{FORMA ESPONENZIALE DI } z}$$

ESEMPI

1) $z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{2}$, $\quad \arg(z) = \frac{\pi}{4}$ quindi

$$z = \sqrt{2}\, e^{i \frac{\pi}{4}}$$

2) $z = -\sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin \alpha = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{5}{6}\pi$

$$-\sqrt{3} + i = 2\, e^{i \frac{5}{6}\pi}$$

Comodo per calcolare le potenze.

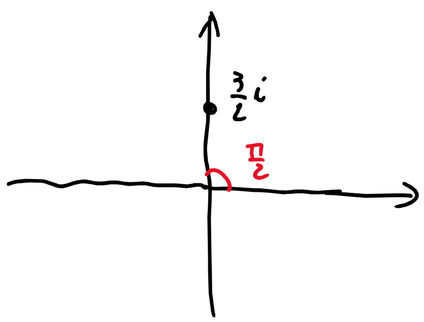
$$(-\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 e^{i 5\pi} = 2^6 \left(\cos(5\pi) + i \sin(5\pi) \right)$$
$$= 64\,(-1) = -64.$$

3) $z = \frac{3}{2} i$

$|z| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$$z = \frac{3}{2}\, e^{i \frac{\pi}{2}}$$



4) $z = -1$

$|z| = |-1| = 1$ e $\arg(z) = \pi$

Quindi $-1 = e^{i\pi}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{FORMULA DI EULERO} \\ e^{i\pi} + 1 = 0\end{array}}$$

Le proprietà delle potenze scritte in forma trigonometrica si possono riscrivere in forma esponenziale:

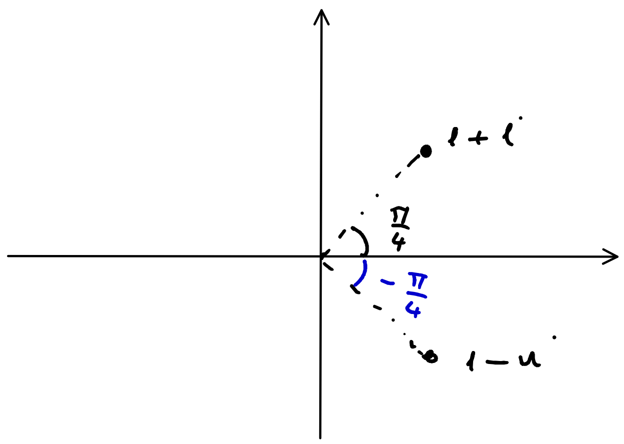
FORMULA DI DE MOIVRE

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z| e^{i\alpha}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$ si ha che

$$z^n = |z|^n e^{in\alpha} = |z|^n \left(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)\right)$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^{10}}$



$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Quindi:

$$\frac{(1+i)^6}{(1-i)^{10}} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6}{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^6 \, e^{i \frac{6\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^{10} \, e^{-i \frac{10}{4}\pi}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^4} \, e^{i \frac{6}{4}\pi + i \frac{10}{4}\pi}$$

$$= \frac{1}{4} \, e^{i 4\pi} = \frac{1}{4} \left(\cos(4\pi) + i \sin(4\pi) \right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

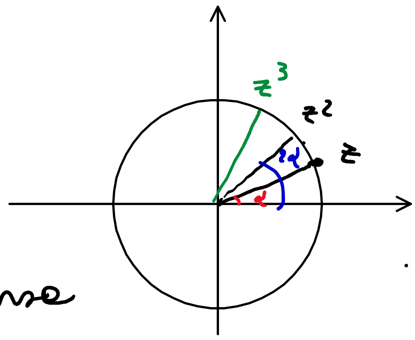
Interpretazione grafica delle potenze

- Se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1$. Allora

  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad z^n = 1^n \left(e^{i n \arg(z)} \right)$

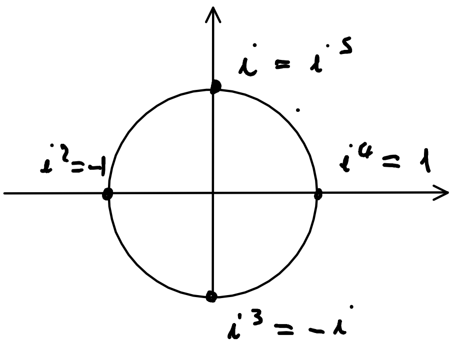
  $= e^{i n \arg(z)}$

  Sono tutti punti sulla circonferenza goniometrica.



- $z = i$

  $i = e^{i \frac{\pi}{2}}$



- Se $|z| \neq 1$, è sempre vero che $\arg(z^n) = n \arg(z)$

  ma $|z^n| = |z|^n$

Radici n-esime di numeri complessi:

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Una RADICE n-ESIMA DI z è un numero complesso w t.c. $w^n = z$.

Come si trovano le radici n-esime?

- Se $z = 0$.

$$w^n = z \iff w^n = 0 \iff w = 0$$

L'unica radice n-esima di 0 è 0.

- Supponiamo $z \neq 0$. Allora $z = |z| e^{i \arg(z)}$

Vogliamo trovare w t.c. $w^n = |z| e^{i \arg(z)}$.

Rappresentiamo anche w in forma esponenziale

$$w = |w| e^{i\vartheta}$$

$$w^n = z \iff |w|^n e^{in\vartheta} = |z| e^{i \arg(z)}$$

$$\iff \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\vartheta = \arg(z) + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \vartheta = \dfrac{\arg(z)}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \vartheta = \dfrac{\arg(z)}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

RICORDARE Ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha esattamente n radici n-esime date dalla formula

$$\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

ESEMPI

$z = -8$. Calcoliamo le radici cubiche $(n=3)$ di z.

$|z| = |-8| = 8$ $\qquad (z = 8e^{i\pi})$

$\arg(z) = \pi$

Le radici cubiche sono i numeri della forma

$$\sqrt[3]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2$$

- $k=0$: $\sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$
- $k=1$: $\sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\pi} = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$
- $k=2$: $\sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

ESEMPIO

Calcoliamo le radici quinte di $z = -\sqrt{3} + i$ (scrivendole in forma esponenziale).

$n = 5$

$z = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5}{6}\pi}$

$|z| = 2 \qquad \arg(z) = \frac{5}{6}\pi$

le radici quinte di z sono:

$$\sqrt[5]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

cioè

$$\sqrt[5]{2}\; e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\sqrt[5]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{5}\pi\right)} = e^{i\frac{17}{30}\pi}$$

$$\sqrt[5]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{5}\pi\right)} = e^{i\frac{29}{30}\pi}$$

$$\sqrt[5]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6}{5}\pi\right)} = e^{i\frac{41}{30}\pi}$$

$$\sqrt[5]{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8}{6}\pi\right)} = e^{i\frac{53}{30}\pi}$$

Caso particolare: radici quadrate $(n = 2)$

Se $z = |z|\, e^{i \arg z}$ le radici quadrate di z sono

$$\sqrt{|z|}\; e^{i\left(\frac{\arg z}{2} + k\pi\right)} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1$$

$$= \sqrt{|z|}\; e^{i\frac{\arg(z)}{2}}\; \underbrace{e^{ik\pi}}$$

$k = 0$: $e^{0} = 1$

$k = 1$: $e^{i\pi} = -1$

$$= \pm \sqrt{|z|}\; e^{i\frac{\arg z}{2}}$$

ESEMPIO

$z = 3 + 4i$

$|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\arg(z) = ?$ $\qquad \cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\arg(z) = \arctan \frac{4}{3}$

Radici quadrate di z sono $\pm \sqrt{5}\, e^{i \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3}}$

Nota: In alcuni casi le radici quadrate hanno un'espressione più semplice se calcolate usando le formule di bisezione:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad e \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Se $z = |z|\, e^{i\alpha}$ e $\alpha \in [0, \pi]$ allora le radici quadrate sono:

$$\pm \sqrt{|z|}\, e^{i \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \pm \sqrt{|z|} \left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \right)$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{|z|+|z|\cos\alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{|z|-|z|\cos\alpha}{2}} \right)$$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{|z|+Re(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z|-Re(z)}{2}} \right)$$

Formula alternativa per le radici quadrate.

Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

- Se $y \geq 0$, le radici quadrate di z sono

$$\pm \left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i \sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \right)$$

- Se $y < 0$, le radici quadrate sono:

$$\pm\left(-\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

ESEMPIO

$z = 3 + 4i$: le radici quadrate di z sono

$$\pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \sqrt{\frac{5-3}{2}}\right) = \pm(2+i) = \begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}$$

Curiosità:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$.

Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$.

Sia $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Sia r una radice quadrata di Δ. Allora:

- Se $\Delta \neq 0$ l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ ha due soluzioni:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm r}{2a}$$

- Se $\Delta = 0$, l'unica soluzione è $\frac{-b}{2a}$.

ESEMPIO

$$z^2 + iz + 2 - 3i = 0$$

$(a=1, \quad b=i, \quad c=2-3i)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = i^2 - 4\cdot 1\cdot(2-3i)$$
$$= -1 - 8 + 12i$$
$$= -9 + 12i$$

$$|\Delta| = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

e $Re(\Delta) = -9$. Una radice quadrata di Δ è

$$r = \sqrt{\frac{15-9}{2}} + i\sqrt{\frac{15+9}{2}} = \sqrt{3} + i\sqrt{12}$$
$$= \sqrt{3} + i\,2\sqrt{3}$$

le soluzioni dell'equazione sono

$$z_{1,2} = \frac{-i \pm (\sqrt{3} + i\,2\sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\right)$$

Ricordare: Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\Delta < 0$ le radici quadrate di Δ sono $\pm i\sqrt{|\Delta|}$ e la formula risolutiva è:

$$\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \left(\text{due soluzioni complesse coniugate}\right)$$

ESERCIZIO DI ESAME.

Sia $z = \dfrac{6+7i}{1+2i}$

1) Determinare la forma algebrica di z.

2) Calcolare $(z-3)^9$

—

1) $z = \dfrac{6+7i}{1+2i} = \dfrac{(6+7i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$= \dfrac{6+7i-12i+14}{1+4} = \dfrac{20-5i}{5}$

$= 4-i$

2) $(z-3)^9 = (4-i-3)^9$

$= (1-i)^9$

$= \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^9$

$= (\sqrt{2})^9\, e^{-i\frac{9}{4}\pi}$

$= 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) - i\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right)$

$= 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 16\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 16 - 16i$