CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

<u>Appello del 25 gennaio 2022</u>

1.

(a) Sia H il sottogruppo di S_4 costituito dalle permutazioni che commutano con $\sigma = (1,2)(3,4)$. Provare che H possiede almeno tre distinti sottogruppi di ordine 4.

(b) Dato un intero $n \geq 5$, siano $\alpha, \beta \in S_n$, ove α è un 2-ciclo e β è un 3-ciclo. Provare che $\alpha\beta = \beta\alpha$ solo se α e β sono permutazioni disgiunte.

2.

(a) Determinare l'insieme degli interi n tali che il numero $N = n^{172} + 4n^{129} + n^{86} - 6n^{43}$ sia divisibile per 98.

(b) Determinare tutti gli interi positivi m tali che $\varphi(m) = 10$.

(c) Determinare un intero positivo m tale che $\varphi(m) = 160$.

3. Dato un primo positivo p, si consideri il seguente polinomio di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = 1 + \sum_{i=0}^{20} x^{p^i}.$$

(a) Determinare tutti i valori di p per i quali $f(x)$ possiede in $\mathbb{Z}_p$ almeno una radice. Determinare, se possibile, una radice nel caso in cui sia $p = 43$.

(b) Per $p = 5$, determinare tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_5$, con le rispettive molteplicità.