MATEMATICA - LEZIONE 21

lunedì 3 novembre 2025 09:03

Nell'ultima lezione:

1) Operazioni tra limiti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$. Se $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ allora

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 - L_2$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$

3) Se $L_2 \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 e $L_2 \neq 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

(cioè $\exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$)

2) Infinitesimi positivi / negativi

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ significa che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ significa che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) < 0 \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

3) Operazioni con $\pm\infty$

In alcuni casi le affermazioni del punto 1) si estendono ai casi in cui $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ (cioè L_1 e L_2 possono essere anche $\pm\infty$):

$+\infty + (+\infty) = +\infty$ $\quad \forall L \in \mathbb{R}: \ +\infty \pm L = +\infty$

$-\infty - (+\infty) = -\infty$ $\quad \forall L \in \mathbb{R}: \ -\infty \pm L = -\infty$

$+\infty \cdot +\infty = +\infty$ $\quad \forall L > 0: \ \pm\infty \cdot L = \pm\infty$

$-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$ $\quad \forall L < 0: \ \pm\infty \cdot L = \mp\infty$

$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$\forall L > 0: \ \frac{\pm\infty}{L} = \pm\infty$ e $\frac{L}{0^\pm} = \pm\infty$. Inoltre $\frac{+\infty}{0^\pm} = \pm\infty$

$\forall L < 0: \ \frac{\pm\infty}{L} = \mp\infty$ e $\frac{L}{0^\mp} = \mp\infty$. Inoltre $\frac{-\infty}{0^\pm} = \mp\infty$

$\forall L \in \mathbb{R}: \ \frac{L}{\pm\infty} = 0$ $\left(\begin{array}{l} L > 0 \text{ o } L = 0^+ \Rightarrow \frac{L}{\pm\infty} = 0^\pm \\ L < 0 \text{ o } L = 0^- \Rightarrow \frac{L}{\pm\infty} = 0^\mp \end{array} \right)$

4) Forme indeterminate (per somme/differenze/prodotti/quozienti)

$+\infty - \infty$ $\quad (\text{o } -\infty + \infty)$

$\pm\infty \cdot 0$

$\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (con tutte le possibili combinazioni dei segni)

5) Limiti di quozienti tra polinomi

Siano $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } n < m \\ \infty \text{ (con segno opportuno)} & \text{se } n > m \end{cases}$$

Si calcola raccogliendo la potenza principale

- Se $p(x_0) = q(x_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$ si calcola semplificando i fattori comuni.

Teorema sul limite della composta

Siano $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ e $g: X \longrightarrow Y$, $f: Z \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g(X) \subseteq Z$. Siano $x_0 \in D(X)$ e $y_0 \in D(Y)$.

Supponiamo che:

1) $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$
2) $\lim_{y \to y_0} f(y) = L$
3) $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $g(x) \neq y_0 \ \forall\, x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$.

Allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \overset{y = g(x)}{=} \lim_{y \to y_0} f(y) = L$$

Limiti di potenze con base ed esponente variabili

Vogliamo calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$

con $f(x) > 0 \ \forall x$ in un intorno di x_0.

<u>Idea</u>: $f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}$

$$= e^{g(x) \ln f(x)}$$

1) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = L^{\ell}$$

(Idea: $e^{g(x) \ln f(x)} \xrightarrow{x \to x_0} e^{\ell \ln L} = e^{\ln L^{\ell}} = L^{\ell}$)

2) $L = +\infty$ e $\ell > 0$, $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

(Idea: $e^{g(x) \ln f(x)} \longrightarrow e^{\ell \cdot +\infty} = e^{+\infty} = +\infty$)

3) $L = +\infty$ e $\ell < 0$ $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

4) $L = 0$ (0^+) e $\ell > 0$ $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

5) $L = 0$ (0^+) e $\ell < 0$ $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

6) Se $\ell = +\infty$ e $L > 1$ $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

7) Se $\ell = +\infty$ e $0 \leq L < 1$ $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

8) Se $\ell = -\infty$ e $L > 1$, $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

9) Se $\ell = -\infty$ e $0 \leq L < 1$, $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

Forme indeterminate per le potenze

$(+\infty)^0$, 0^0 , $1^{\pm\infty}$

Aggiungendo queste alle precedenti le forme indeterminate sono:

$$+\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{\pm\infty}$$

ESEMPI

- $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{\underbrace{\sqrt[3]{x} + 7x^2 + 1}} \right)^{\overset{\to +\infty}{x}} \quad (*)$$

$$\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}} + 7x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(x^{-\frac{5}{3}} + 7 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}}_{\to 0} + 7 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{1}{7}$$

$$(*) = \left(\frac{1}{7} \right)^{+\infty} = 0$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{\underbrace{x-3}_{\to 2}} \right)^{\left[\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^8} + x - 1}\right] \to 0} = 2^0 = 1$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x} \right)}_{\to 1}^{\overset{\to 1}{x}} = 1^{+\infty} \quad \text{(forma indeterminata)}$$

Vedremo che $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

Teoremi sui limiti

1) Teorema della permanenza del segno.
2) Teorema dei carabinieri.
3) Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone.

---

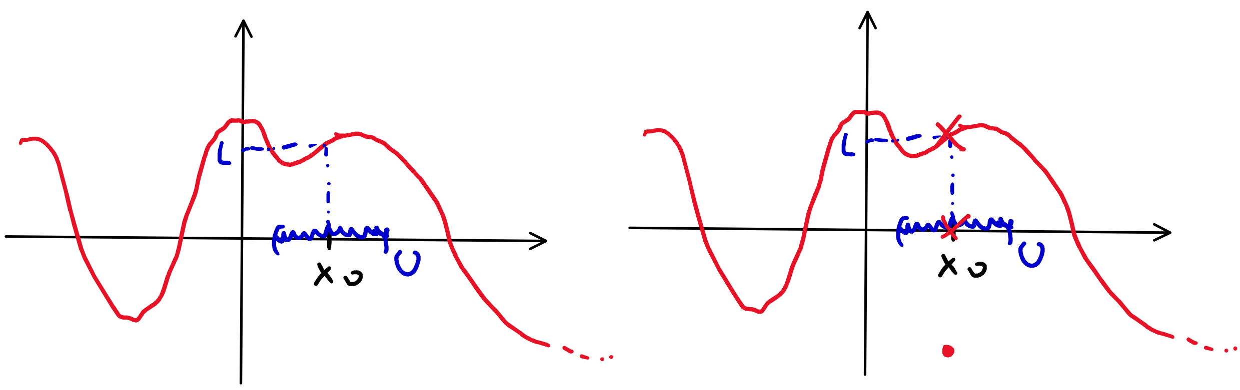
1) TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

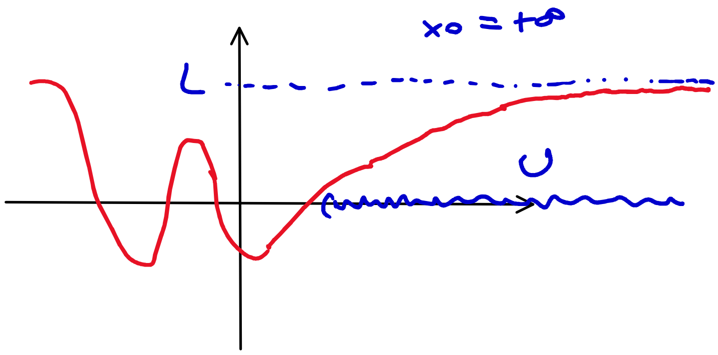
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D_r(A)$ e $L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

1) Se $L > 0$ $\exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) > 0$ $\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

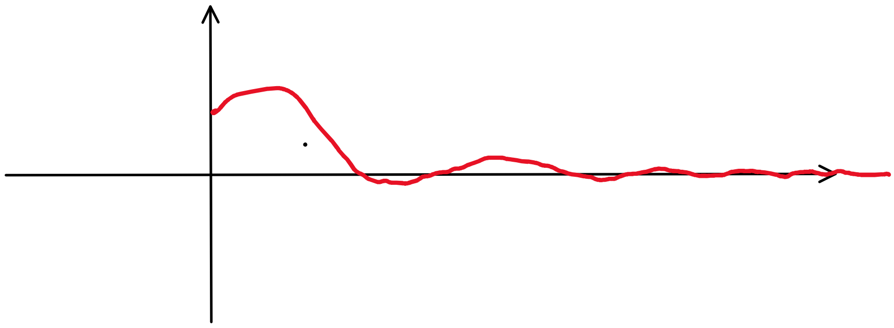
2) Se $L < 0$ $\exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) < 0$ $\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

(Significa che se L ha un segno, allora $f(x)$ ha lo stesso segno di L nei punti vicini a x_0).





OSS Se $L = 0$ non si può dire nulla sul segno di f.



$L = 0$ e f cambia segno infinite volte.

COROLLARIO:

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}r(A)$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

1) Se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \geq 0$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$
$\Rightarrow L \geq 0$.

2) Se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \leq 0$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$
allora $L \leq 0$.

Def: Sia $p(x)$ una proposizione che dipende da un numero reale $x \in A$ con $A \subseteq \mathbb{R}$.
Si dice che $p(x)$ è vera IN A DEFINITIVAMENTE PER $x \to x_0$ (o LOCALMENTE PER $x \to x_0$)
se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $p(x)$ è vera $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

ESEMPI

- Definizione di limite. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa: $\forall V \in \mathcal{D}_L$, $f(x) \in V$ localmente in A per $x \to x_0$.
- Teorema della permanenza del segno:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \overset{(o<)}{>} 0 \Rightarrow f(x) \overset{(o<)}{>} 0 \text{ in A localmente per } x \to x_0$$

OSS Nel teorema della permanenza del segno e nel suo corollario o si può sostituire con un altro numero $\alpha \in \mathbb{R}$. Cioè:

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

1) Se $L > \alpha \in \mathbb{R}$, allora $f(x) > \alpha$ in A localmente per $x \to x_0$.
2) Se $L < \alpha$, allora $f(x) < \alpha$ in A localmente per $x \to x_0$
3) Se $f(x) \geq \alpha$ localmente in A per $x \to x_0$ allora $L \geq \alpha$
4) Se $f(x) \leq \alpha$ localmente in A per $x \to x_0$. allora $L \leq \alpha$.

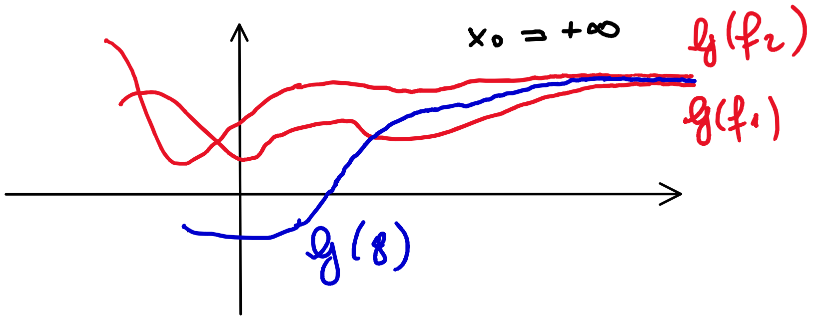
TEOREMA DEI CARABINIERI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $f_1, f_2, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Assumiamo che

1) $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ localmente in A per $x \to x_0$

2) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = L = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.



Da un certo punto in poi il grafico di g è compreso tra il grafico di f_1 ed f_2

ESEMPIO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}$$

Siccome $-1 \leq \cos x \leq 1$ si può dire che:

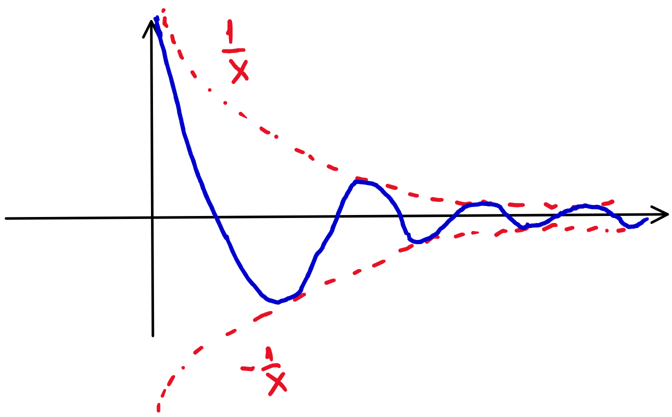
$\forall x > 0$ si ha che $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$f_1(x) = -\frac{1}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Quindi per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$



OSS

Nel teorema dei carabinieri se $L=+\infty$ o $L=-\infty$ è sufficiente una sola disuguaglianza

1) Se $L=+\infty$ si può dire che
se $\lim_{x\to x_0} f_1(x)=+\infty$ e $g(x)\geq f_1(x)$ localmente per $x\to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

2) Se $L=-\infty$ si può dire che:
se $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=-\infty$ e $g(x)\leq f_2(x)$ localmente per $x\to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$.

ESEMPIO

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x - x$$

$$g(x)=\sin x - x \leq 1-x$$

Siccome $\lim_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$, anche
$\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

OSS

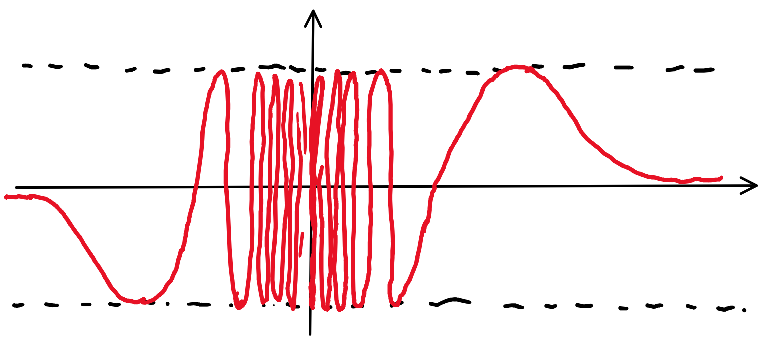
- La somma di una funzione limitata e di una infinita è infinita.
- Il prodotto di una funzione limitata e di uno infinitesimo è infinitesimo.

---

3) Abbiamo detto che non sempre $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

- $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$, $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin x$
- $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ (perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
  $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$)

- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
  $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



In questo caso $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ e

$\nexists \lim_{x \to 0^\pm} f(x)$

TEOREMA DI ESISTENZA DEI LIMITI PER FUNZIONI MONOTONE.

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$. Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$. una funzione monotona crescente o decrescente in (a, b). Allora

$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Inoltre:

1) Se f è monotona crescente:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{]a,b[} f \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{]a,b[} f$$

2) Se f è monotona decrescente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{]a,b[} f \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{]a,b[} f$$