CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

<u>Appello del 10 settembre 2018</u>

1. Siano date in S_{10} le permutazioni

$$\sigma = (1,2,3,4,5),$$
$$\tau = (5,4,7,10,8,6,9).$$

(a) Provare che ogni sottogruppo di S_{10} contenente $\{\sigma,\tau\}$ contiene due sottogruppi H_1 e H_2 di ordine 9 la cui intersezione è il sottogruppo banale.

(b) Siano $m,n \in \{0,1,2,3,4\}$ e $r,s \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tali che $(m,r) \neq (n,s)$. Provare che allora $\sigma^m\tau^r \neq \sigma^n\tau^s$.

2. Siano *n, m* interi positivi, e sia data l'applicazione

$$\varphi:\ \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$$

$$([a]_5,[b]_7) \mapsto (n[a]_5, m[b]_7)$$

(a) Determinare, al variare di n e m, la cardinalità dell'immagine di φ.

(b) Determinare tutti i valori di n, m per i quali φ è un omomorfismo di anelli.

(c) Determinare tutti i valori di n, m per i quali φ è un isomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo positivo.

(a) Dire per quali p il polinomio $f(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ si spezza in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.

(b) Dire per quali p il polinomio $g(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p \in \mathbb{Z}_p[x]$ si spezza in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.