

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2024/25

Appello del 10 gennaio 2025

1. Si considerino in S_{24} le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)(21, 22)(23, 24), \\ \tau &= (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 13, 12, 11, 10)(14, 16, 18, 20, 15, 17, 19)(21, 23, 22, 24).\end{aligned}$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{24} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{24} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.
- (c) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 16.

2.

- (a) Dire se esiste un monomorfismo di anelli da \mathbb{Z}_6 a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12}$, e, in caso affermativo, determinarlo.
- (b) Dire se esiste un epimorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{24}$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}$, e, in caso affermativo, determinarlo.

3. Dato un numero primo $p > 2$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^p + x^{p-1} + x^{p-2} - \bar{1}, \\ g(x) &= x^{p^2} + x^{p^2-1} + x^{p^2-3} - \bar{1}, \\ h(x) &= x^{p^2} + x^{p^2-p} + x^{p^2-2p} - x^{p-1}.\end{aligned}$$

- (a) Determinare, al variare di p , l'insieme delle radici comuni a $f(x)$ e $g(x)$ in \mathbb{Z}_p .
- (b) Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(f(x), h(x))$.