CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2018/19

<u>Appello del 5 luglio 2019</u>

1. Dato un intero $n \geq 2$, sia $\sigma \in S_n$.
   (a) Provare che, per ogni $\alpha \in S_n$, $\mathrm{Supp}(\alpha\sigma\alpha^{-1}) = \alpha(\mathrm{Supp}(\sigma))$.
   (b) Provare che $\mathrm{o}(\alpha\sigma\alpha^{-1}) = \mathrm{o}(\sigma)$.
   (c) Determinare la cardinalità dell'insieme $C = \left\{ \alpha(1,2)\alpha^{-1} \,\middle|\, \alpha \in S_n \right\}$.

2.
   (a) Dati due numeri primi positivi distinti p e q, provare che

$$p^{\varphi(pq)} \equiv p^{q-1} \pmod{pq}.$$

   (b) Dato un numero primo positivo p, determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $p^{2p(p-1)}$ per $6p^2$.

3. Sia p un numero primo positivo.
   (a) Determinare, al variare di p, tutte le radici in $\mathbb{Z}_p$ del polinomio

$$f(x) = x^{(p!)^2} + x^{p!} + \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x].$$

   (b) Determinare, al variare di p, tutte le radici in $\mathbb{Z}_p$ del polinomio

$$g(x) = x^{(p^5)!} + x^{(p^4)!} + x^{(p^3)!} + x^{(p^2)!} + x^{p!} + \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x].$$