CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2019/20

Appello dell'11 settembre 2020

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{21}:

$$\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11,12)(13,14,15,16,17,18,19,20,21)$$
$$\tau = (1,2,3,4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)(13,14,16,17,19,20)(15,18,21).$$

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

(b) Trovare un sottogruppo non ciclico H di S_{21} tale che ogni elemento di H commuti sia con σ, sia con τ.

2.

(a) Determinare un omomorfismo di anelli non nullo $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$.

(b) Dimostrare che non esiste un omomorfismo di gruppi non nullo $\varphi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

(c) Dimostrare che non esiste un omomorfismo di anelli surgettivo $\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_6$.

3. Sia p un numero primo positivo.

(a) Determinare 4 valori di p tali che il polinomio $f(x) = x^{p+2} + \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ abbia almeno due radici distinte in $\mathbb{Z}_p$.

(b) Determinare 2 valori di p maggiori di 100 tali che il polinomio $g(x) = x^{p+8435} - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ abbia $p-1$ radici distinte in $\mathbb{Z}_p$.