CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2008/09

<u>Appello del 16 febbraio 2009</u>

<u>TRACCIA A</u>

1. Si consideri la seguente permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 9 & 3 & 8 & 10 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

   Determinare σ^{338}.

2. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 4b \\ -4b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   (a) Provare che A è un sottoanello unitario dell'anello $M_2(\mathbb{Z})$.

   (b) Provare che l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_{10}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi \begin{pmatrix} a & 4b \\ -4b & a \end{pmatrix} = [a + 2b]_{10},$$

   è un omomorfismo di anelli.

   (c) Determinare il nucleo $Ker\varphi$.

   (d) Dire se φ è surgettivo.

3. Dato il polinomio $f(x) = x^5 - x^4 + 7x^2 + 14x - 21 \in \mathbb{Z}[x]$,

   (a) determinare una sua fattorizzazione in $\mathbb{Q}[x]$,

   (b) detta $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ la riduzione di $f(x)$ modulo 2, dire se $[x]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_2[x] / (\overline{f}(x))$, e in caso affermativo determinare il suo inverso.