Viaggio ideale e virtuale attraverso

pagine di scritti matematici

- **Presentazione**
- **Itinerari**
- **Indice**
- **Fonti**
- **Ringraziamenti**

a cura di Margherita Barile e Anna Maria Pastore

realizzazione in rete a cura di
Annamaria Labarbuta
Antonio Leserri
Tiziana Ottomano

Nota tecnica: Nel caso una pagina risulti vuota regolare lo zoom

Considerate la vostra semenza:
Fatti non foste a viver come bruti
Ma per seguir virtute e conoscenza.
(Dante, Inferno, Canto XXVI, 118-120)

Presentazione

Chi ha scritto questo ipertesto si è divertito ed appassionato e, nell'era del computer e dell'apprendimento per immagini e per situazioni virtuali, si è profondamente stupito nel provare straordinarie emozioni sfogliando un libro d'altri tempi, in fondo non tanto remoti, come, ad esempio, l'Euclide Megarense di Tartaglia (1543).

Questo viaggio virtuale, attraverso il mondo del testo di matematica, non ha e non può avere la pretesa di trattare in modo esaustivo l'argomento, ma persegue, piuttosto, la speranza di riuscire a sollecitare l'intelligenza e la curiosità dei giovani, perché non sostituiscano l'immagine al pensiero, ma si avvicinino al mondo scientifico ed almeno una volta nella loro vita prendano in mano uno dei tanti incredibili libri che i nostri predecessori ci hanno lasciato.

Nella scelta dei criteri-guida per la realizzazione di questa panoramica, si è preferito privilegiare gli aspetti interdisciplinari, le correlazioni con i problemi della vita quotidiana, con l'arte, con la musica, con l'astronomia, etc. Per questo motivo, a volte, sono stati trascurati autori di grosso spessore scientifico-speculativo, che tutti i matematici amano, a favore di autori minori, le cui opere offrono spunti curiosi ed in qualche modo divertenti.

Molte pagine di questo lavoro sono originali, alcune si ispirano fortemente a quelle che sono indicate come fonti primarie e, a volte, riportano fedelmente brani di altri autori, sempre accompagnati dalle dovute citazioni.

Nel redigere i testi e nella scelta dei brani e delle immagini si è pensato soprattutto a chi, uscendo dalla scuola superiore o avendo da poco iniziato il percorso universitario, ha già conoscenze matematiche, ma non ha ancora vivo il gusto della scoperta, e vuole approfondire, con una lettura ricca di aspetti storici ed umani, il proprio nascente amore verso il variegato mondo dei numeri, delle forme e delle strutture.

È evidente per chiunque che lo sviluppo della Matematica è dovuto al lavoro quotidiano di molti.

Pochi, certamente, sono stati e sono i Matematici e più in generale gli Scienziati veramente geniali che hanno aperto nuove frontiere e/o rivoluzionato teorie ritenute ormai acquisite.
Molti sono i matematici che contribuiscono alla sistemazione ed al completamento di teorie, molti ancora sono ottimi divulgatori, aspetto di non secondaria importanza perché contribuisce alla crescita culturale globale dell'umanità.
Il mondo matematico, pur essendo estremamente razionale, è profondamente affascinante ed a volte persino magico, dal momento che le sue intime ragioni di vita restano l'elaborazione mentale e la verifica sperimentale e/o teorica delle intuizioni, in ultima sintesi le interazioni di due modi di conoscere: pensare ed esperire.

Gli itinerari possibili di questo viaggio ideale sono:

1) Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web
2) Il Linguaggio Matematico e la sua evoluzione
3) Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica
4) La Matematica e le altre discipline
5) Curiosità

Ultimo aggiornamento Settembre 2006

Gli itinerari possibili di questo viaggio ideale sono:

1) **Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web**

2) **Il Linguaggio Matematico e la sua evoluzione**

3) **Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica**

4) **La Matematica e le altre discipline**

5) **Curiosità**

LA MATEMATICA NELLA STORIA DELLE CIVILTÀ

L'asterisco indica pagine contenenti solo immagini.

La matematica babilonese
La tavoletta babilonese Plimpton 322*
La numerazione
L'approssimazione delle radici di un'equazione algebrica
La numerologia
L'astronomia
Carta del mondo babilonese*

La matematica nell'Antico Egitto
La numerazione
Il papiro di Rhind
- Il titolo del papiro di Rhind
- Un'immagine del papiro*
- Tabella di frazioni unitarie
- La divisione di 2 per 7
- Problema 44
- Problema 45
- Problema 48
- Problema 51
- Problema 52
- Problema 79

Il papiro di Mosca
- Problema 14

L'astronomia
- La volta celeste*
- La dea del cielo Nut*

Lo zodiaco*
Gli affreschi di Palazzo Schifanoia a Ferrara (marzo*, aprile*, maggio*, agosto*)

La matematica indiana e araba
Al-Khuwarizmi
Omar Ibrahim Khayyam

La matematica cinese
La numerazione
La numerologia
I Ching (Il libro dei mutamenti)

ALCUNI GRANDI MATEMATICI DELLA STORIA

Pitagora ed i Pitagorici
Il misticismo dei numeri
- I numeri poligonali
- La tetractys di Pitagora
- Lettera di Pitagora a Teulage

L'astronomia secondo Pitagora
La geometria di Pitagora

Il Teorema di Pitagora
Dimostrazione grafica*
Dimostrazione a rompicapo*
Tre dimostrazioni "taglia e incolla"
La teoria musicale pitagorica
Pitagora nella Scuola di Atene di Raffaello
Busto di Pitagora nella cattedrale di Ulm*

Archita di Taranto

La matematica di Platone
Menone
Timeo
Teeteto
Le Leggi - La Repubblica

Eudosso di Cnido

Menecmo

Archimede
Conoidi e sferoidi: pagina originale*
La misura del cerchio: pagina originale*
Sulla sfera e sul cilindro: pagina originale*
Le spirali: pagina originale*
La coclea
Il mito di Archimede per Leon Battista Alberti

La Scuola Matematica Alessandrina
Euclide
Gli Elementi
Libro I – Definizioni
Wassily Kandinsky, Punto, linea e superficie
Postulati
Una poesia tedesca sul V postulato di Euclide
Nozioni Comuni
Libro IV – Costruzione del quadrato
Costruzione del pentagono regolare
Costruzione dell'esagono regolare
Costruzione del pentadecagono regolare
Libro VII – Definizioni
L'algoritmo di divisione euclidea
Libro IX – L'infinità dei numeri primi
Libro X – Il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili
Libro XII – Il volume del cono e del cilindro
L'Ottica
Una curiosità dall'Ottica di Euclide
Argomenti correlati:
- Eustachio Manfredi, Elementi della Geometria piana e solida e della trigonometria (1755):
  Frontespizio*
  Avvertenza al Lettore

Della Trigonometria

- Giuseppe Bigoni, Problemi e teoremi matematici (1818):
  Prefazione
  Costruzione della terza proporzionale
- F. Brioschi, E. Betti, Problemi e Teoremi (1880):

Un esempio di problema di geometria del triangolo

- Jacob Steiner, Le costruzioni geometriche realizzate mediante la linea retta ed un cerchio fisso (1895):
  Problema Ottavo: trovare i reciproci punti d'intersezione di due cerchi assegnati

Eratostene

Apollonio di Perga
Le coniche secondo Apollonio (frontespizio* – pagina originale*)
La soluzione del problema di Apollonio*

Erone di Alessandria
Catottrica
La falsa immagine allo specchio*
Lo specchio per guardare in strada*
L'effetto dell'uomo volante*
Diottra
Meccanica
L'odometro*
Il pantografo*
La leva*
La gru*
Il torchio*
Il congegno per raddrizzare i muri*
Metrica
Il calcolo approssimato dell'area dell'undecagono*
Il calcolo del volume di un prisma*
Pneumatica
Le animazioni di Erone*
Il gioco di Ercole*
I congegni idraulici per il culto*
L'eolìpila
La fontana di Erone
L'orologio ad acqua
Sull'arte della costruzione degli automi

Menelao

Claudio Tolomeo
L'Almagesto: pagine originali*
Lo zodiaco
Carta del mondo di Tolomeo*
Argomenti correlati:
La cartografia
Il problema della longitudine

Diofanto
L'indovinello su Diofanto
L'Arithmetica (pagina originale*)
- Le notazioni
- Sul modo di chiamare le potenze
- La scrittura di Diofanto*

Pappo di Alessandria
- Collezione matematica: frontespizio*

Teone di Alessandria

Severino Boezio

Leonardo Pisano (Fibonacci)
- Bigolli
- I numeri di Fibonacci
  - I numeri di Fibonacci in musica
  - I numeri di Fibonacci in natura: la fillotassi
- La sezione aurea
- Il rapporto aureo
  - La Parade di Seurat*
- Le frazioni continue
- Modello del libro delle spese
- *Flos*
- *Liber Abaci*
  - Sommario del Liber Abaci
  - Alcuni problemi dal Liber Abaci
  - La moltiplicazione per crocetta
- *Liber Quadratorum*
  - I numeri congrui
- Opuscoli (pagine originali*: 1 2 3 4)
- *Practica Geometriae*
  - La formula di Erone

Giovanni di Sacrobosco

Luca Pacioli
- *Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalità*
- *Sommario**
- *Distinctio prima Capitulum primum: pagina originale**
- *Tractatus primus Distinctio XI De Scripturis: pagina originale*, fregio**
- *Foglio 149**
- Il calcolo digitale*

Alcune immagini dal De Divina Proportione
- I poliedri disegnati da Leonardo da Vinci*
- Le proporzioni del viso*
- Le proporzioni dei caratteri tipografici*

Niccolò Copernico
L'immaginario dialogo di Copernico col sole

La trigonometria sferica

Nicolò Tartaglia
Il nome
La Nova Scientia
- Frontespizio
- Prefazione*
- Pagine originali*: 1 2

Euclide Megarense
- Frontespizio del 1543*
- Frontespizio del 1585*
- Libro I, Proposizione I*

Opera Archimedis Syracusani (frontespizio*)
Quesiti et inventioni diverse
- Frontespizio*
- Sonetto ai lettori*
- I versi del Tartaglia
  - Versione originale*
- La diottra
- Un problema algebrico

La Travagliata Inventione
- Frontespizio*

Il General Trattato di Numeri et Misure
- Seconda Parte: frontespizio*
- Quinta Parte: frontespizio*
- Sesta Parte: frontespizio*

Le disfide matematiche
- La disfida tra Antonio Maria Fior e Nicolò Tartaglia
- La disfida tra Ferrari e Tartaglia
  - Il primo cartello di sfida*

La disputa con Cardano
Le formule di Tartaglia (o formule di Cardano)

Gerolamo Cardano
L'Ars Magna (frontespizio*)

Ludovico Ferrari
L'oroscopo di Cardano per Ferrari*

Rafael Bombelli
L'Algebra: pagina originale*
Bombelli risolve un'equazione di terzo grado

François Viète (Vieta)

Tycho Brahe
L'autografo*
L'osservatorio Uraniborg di Tycho Brahe a Hveen (Copenhagen)*
La parallasse
Il quadrante astronomico*
Argomenti correlati:

L’astrolabio
    Uso dell’astrolabio*

Galileo Galilei
Opere (frontespizio*, ritratto*)
    Problemi varj
    Considerazioni sopra il giuoco de’ dadi
Le operazioni del compasso geometrico e militare
Sidereus Nuncius – Nunzio Sidereo (frontespizi: *latino**, *italiano**)
    Le macchie lunari*
    Nebulose*
    Osservazione dei satelliti di Giove: pagina manoscritta del 7 gennaio 1610*
        annotazioni del 22 gennaio 1610 (latino*, italiano*)
Il Saggiatore (frontespizio*)
Dialogo de’ due massimi sistemi tolemaico e copernicano (frontespizio dell’edizione fiorentina, 1632*)
(frontespizio dell’edizione latina. 1635*)
Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (frontespizio*)
    L’infinito nei Discorsi di Galilei
La sentenza contro Galileo
La ritrattazione di Galileo
L’Accademia dei Lincei
Il cannocchiale
    La storia del cannocchiale raccontata dal Leopardi
Argomenti correlati:
- Galileo Ferraris, Le proprietà cardinali degli strumenti ottici (1877)
    Sistemi di lenti

Johannes Kepler (Keplero)
Il problema delle palle di cannone
Il calcolo del volume delle botti
Le leggi di Keplero sul moto planetario
Keplero e la forma dei fiocchi di neve
Le tavole rudolfine: frontespizio*
Mysterium Cosmographicum: pagina originale*
Harmonices Mundi: pagina originale*

Marin Mersenne

René Descartes (Cartesio)
Curiosità
Il carteggio scientifico
    L’area sottesa alla cicloide
    Le tangenti ad una curva
    Cartesio risolve un problema aritmetico
La scienza di Descartes
Regole per la guida dell’intelligenza
    Le operazioni figurate
Discorso sul metodo (frontespizio*)
La Géométrie
    L’estrazione della radice quadrata

Les Météores
- L'arcobaleno*

Il Mondo ovvero Trattato della luce – La Dioptrique – Principia Philosophiae
- La riflessione e la rifrazione*
- La vista umana*
- Il cannocchiale parabolico*
- I macchinari per produrre le lenti*

Compendium Musicae
Il piano cartesiano
La lingua universale secondo Cartesio
Argomenti correlati:
La lingua universale secondo Leopardi

Bonaventura Cavalieri
Una lettera di Cavalieri a Torricelli

Pierre de Fermat
- L'Arithmetica di Bachet*– Le annotazioni di Fermat - Quaestio VIII*
- L'Ultimo Teorema di Fermat
- Il Diavolo e l'UTF
- Il Piccolo Teorema di Fermat

Evangelista Torricelli
Una lettera di Torricelli su spirale e parabola
Prospettiva di un pavimento ad ottagoni*
I solidi vasiformi: frontespizio*

John Wallis
Le annotazioni di Newton all'opera di Wallis

Blaise Pascal
Pascal e la "roulette"
Dei caratteri di divisibilità dei numeri dedotti dalla somma delle loro cifre
Pascal contro Descartes
La geometria di Pascal
Gli "Elementi" di Pascal
Pascal commenta le definizioni di Euclide
Pascal e la teoria degli indivisibili

Christian Huyghens

Isaac Newton
Curiosità
Il calcolo infinitesimale secondo Newton
Calcolo dell'area sottesa all'iperbole
La classificazione delle cubiche secondo Newton (pagina originale*)
La formula per il raggio di curvatura
La regola di Newton
Philisophiae Naturalis Principia Mathematica (frontespizio*)
La fisica di Newton secondo Einstein
Il telescopio catadiottrico di Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz
Il calcolo infinitesimale secondo Leibniz: il calcolo delle differenze
La disputa tra Leibniz e Newton
Argomenti correlati:
Linguaggi spaziali

La famiglia Bernoulli

Leonhard Euler (Eulero)
Lettere ad una principessa tedesca (frontespizio)*
- Lettera 64
- Lettera 103
- Lettera 156

Joseph-Louis Lagrange

Lorenzo Mascheroni
Un aneddoto: Mascheroni e il generale
Problemi di geometria
- Problema I (pagine originali)
- Problema IX (pagine originali)
- Problema XVII (pagine originali)

Carl Friedrich Gauss
Curiosità
La scoperta di un giovane matematico
La legge di reciprocità dei residui quadratici
Il Teorema Fondamentale dell'Algebra
Disquisitones arithmeticae: frontespizio*
Il Gaussberg*
Il monumento a Gauss e Weber*

Augustin Louis Cauchy
Generalizzazione della formula di Eulero

Nikolai Ivanovich Lobachevsky

Janos Bolyai
La Science Absolue de l'espace
- *Paragrafo 33* (traduzione)

Evariste Galois
Il metodo di Galois
Ultime note*

George Boole
Il sillogismo secondo Boole

Arthur Cayley

Bernhard Riemann
La geometria Riemanniana

Georg Cantor
Cardinali ed ordinali transfiniti

Gottlob Frege

Felix Klein
Il programma di Erlangen
- *Felix Klein, Introduzione alla Geometria Superiore I (1893):* (pagine originali*, traduzione)

Giuseppe Peano
Arithmetices Principia: pagina originale
Formulario matematico: pagine originali
L'Interlingua di Peano
Le notazioni logiche*

David Hilbert
Il discorso di Hilbert al Congresso di Parigi
    I 23 problemi
    La drosofila e la genetica
L'Hotel Hilbert

Bertrand Russell

Albert Einstein
La teoria della relatività

Kurt Gödel
I Teoremi di Gödel
    D.R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante

Andrew Wiles (pagina originale*)

DONNE IN MATEMATICA

Ipazia
Maria Gaetana Agnesi
    Una lettera
Sophie Germain
Sofia Kowalewsky
    Ricordi d'infanzia
Emmy Noether

ARTISTI E MATEMATICI

Marco Vitruvio Pollione - I dieci libri dell'architettura
    Il sei e il dieci come numeri perfetti

L'odometro
Le proporzioni del corpo umano secondo Vitruvio

Argomenti correlati:

Le misure con mani e con piedi

Leon Battista Alberti

L'architettura – De re aedificatoria

Il capitello ionico*
Il Tempio Malatestiano* (lati*)
Santa Maria Novella*
Palazzo Rucellai*
La Chiesa di S.Andrea*
La Chiesa di S. Sebastiano*
La tribuna dei Gonzaga*

Elementi di Pittura
De Pictura – Della Pittura
Della cifra
Ludi Matematici

Come misurare grandi distanze
Come misurare il percorso di un carro
Come misurare la velocità di navigazione

Argomenti correlati:

- Ludovico Perini, Geometria Pratica (1791):

  Frontespizio*
  Metodi per misurare altezza, lunghezza e profondità*
  La misurazione dell'altezza di un edificio*

Piero della Francesca

Trattato d'abaco
La flagellazione di Cristo
La Madonna tra Santi e Angeli
Studio prospettico di un toro*

Leonardo da Vinci

Il moto nell'acqua ed il moto nell'aria
L'Adorazione dei Magi
La Vergine delle Rocce
Sant'Anna, la Madonna e il Bambino con l'agnello
L'Annunciazione

Albrecht Dürer

La prospettiva*
Gli studi di Albrecht Dürer – Il corpo umano*
Le coniche secondo Dürer*
Un'epicicloide disegnata da Dürer*
La curva muschellini*

Lo strumento per costruirla*

*Melanconia**

Il quadrato magico*

*San Gerolamo**

ALCUNI ASPETTI RILEVANTI DELLA MATEMATICA NELLA STORIA

Il Linguaggio Matematico e la sua evoluzione
La forza dei simboli
La classificazione dell'algebra secondo Nesselmann (1842)

Contando…contando: dall'Aritmetica alla Teoria dei Numeri
I sistemi di numerazione
La numerazione indo-arabica
L'evoluzione delle cifre indo-arabiche
La numerazione ebraica
La numerazione fenicia
La numerazione greca
La numerazione romana
La numerazione Maya
    Il calendario*
Le origini dei numeri
Le quattro operazioni
L'uso dell'abaco
    I quippos*
L'Algebra
Le operazioni figurate
    La divisione a galea
Dai numeri naturali agli ottoniani
    I numeri complessi
        Le regole di calcolo
        Il piano di Gauss
        Forma trigonometrica di un numero complesso
        Le radici n-esime di un numero complesso
        Gli interi gaussiani
        Storia dei numeri complessi
    Il corpo dei Quaternioni
    Gli Ottoniani o numeri di Cayley
Smilla racconta la storia dei numeri

- Mario Francesco Pagani, Arithmetica Pratica (1591):
    Frontespizio*
    Le prove del sette e del nove
    Moltiplicazione per quadretto
        per gelosia
    Divisione a danda
        a galera
    Riduzione delle frazioni ad un comune denominatore
    Divisione di frazioni
    Problemi di aritmetica mercantile (1 2)
- Giuseppe Antonio Alberti, Trattato di Aritmetica Pratica (1752):
    Quesito 6
    Dizionario aritmetico (A-O P-Z)
- Lombardini, Elementi di Matematica (1828): Delle operazioni aritmetiche sulle espressioni algebriche
- Riccardo Baltzer, Elementi di Matematica (1863): Aritmetica generale

- Georg Vega, Thesaurus logarithmorum completus (1794): una pagina originale*

I numeri primi

I numeri primi fra 1 e 1500
Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica
Il crivello di Eratostene
I primi di Mersenne
    La tabella dei primi di Mersenne
I primi di Fermat
La "top ten" dei numeri primi
La "top ten" dei primi gemelli
I primi gaussiani
I numeri amicabili e perfetti
    La perfezione del sei secondo Agnolo Firenzuola

Il Calcolo Meccanico e l'Informatica

La pascalina*
Macchine calcolatrici tedesche*
La macchina di Lord Stanhope*
La macchina Enigma*
- John von Neumann: Collected Works
    Il diagramma di flusso per calcolare la differenza di due numeri
    Organi elementari di calcolo
- Jean Morel, Sergio Solimini: Metodi variazionali nella segmentazione delle immagini (1995)
  Esempio di segmentazione*
- Claudio di Comite, Palmira Ronchi (1991): Pascal e Matematica

Le equazioni algebriche:

Le equazioni algebriche di terzo grado
    Curiosità: Philippe de La Hire risolve un'equazione di terzo grado
Le equazioni algebriche di quarto grado
- Antonio Cagnoli, Trigonometria piana e sferica (1786):
  Risoluzione numerica di tutte le equazioni di terzo e quarto grado, per mezzo della trigonometria
- Giuseppe Bertrand, Trattato Elementare d'Algebra (1862):
  Risoluzione dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ quando a è piccolissimo
- Abbé Marie, Lezioni Elementari di Matematiche (1863):
    Le equazioni di terzo e quarto grado con radici incommensurabili, o immaginarie
- Paolo Ruffini, Opere Matematiche. Tomo Primo – Teoria generale delle equazioni (1915):
  Proprietà generali delle equazioni
  Il Teorema di Ruffini: versione informatica

Il Calcolo Infinitesimale

Il concetto di funzione
Il concetto di limite
Il concetto di funzione continua
Il concetto di integrale
    Il metodo di esaustione
    I Teoremi di Guldino
    Galdino e il calcolo dei baricentri
    Il baricentro della calotta sferica

Il volume del paraboloide rotondo secondo Torricelli
P. Fantasia: Guida alla misurazione del volume delle botti
Le serie numeriche
- Ulisse Dini, Lezioni di Calcolo Differenziale e Integrale (1884) (pagine manoscritte*)

Argomenti correlati:
- Vincenzo Riccati, Dell'uso del moto traslatorio nella costruzione delle equazioni differenziali (1751)

Frontespizio*
Prefazione
Caput I (prime tre pagine)
- Vito Volterra, Lezioni sulla teoria matematica della lotta per la vita (1831):

Caso di due specie, di cui una si nutre dell'altra
- Tullio Levi-Civita, Opere Matematiche – Memorie e note (1960)

Sulla stabilità delle lavagne a cavalletto

I poligoni
La costruibilità dei poligoni regolari
La costruzione dell'ettadecagono*
Una moderna costruzione dell'ettadecagono
Ettagono con l'origami*
Ennagono con l'origami*
La costruzione approssimata di un poligono regolare
- Paul Bachmann: La teoria della divisione del cerchio e le sue relazioni con la Teoria dei Numeri

I poligoni nella realtà: gli edifici*
Matematica fantastica: Flatlandia
I cristalli di ghiaccio ed i fiocchi di neve
I poliedri

Le curve del piano
La catenaria
La cicloide
La cissoide
La concoide di Nicomede
La duplicazione del cubo
La lumaca di Pascal
Le spirali
La quadratura del cerchio
La trisettrice
La trisezione dell'angolo
La versiera dell'Agnesi
Che cos'è una curva ellittica
Le coniche
Curiosità
Le coniche come luoghi geometrici
La costruzione delle coniche
Le tangenti ad una conica
Le proprietà ottiche delle coniche
La parabola e la caduta dei gravi
Ellisse luogo dei vertici delle parabole di tiro
Le coniche nell'arte
La scala del Quirinale*

L'arena di Arles*
Il Royal Crescent Bath*
Piante di chiese tedesche*
Vaso veneziano*
La spirale e la parabola
Proiezioni di una circonferenza in: un'ellisse*
una parabola*
un'iperbole*
Seconda proiezione di una circonferenza in un'ellisse*
Argomenti correlati:
- G. Schaffnit, Scienza Geometrica delle Costruzioni, ovvero Geometria Descrittiva (1841):
  - La geometria descrittiva
  - La relazione tra geometria e algebra
  - Luce ed ombra

Superficie
Il toro
La superficie di Beltrami o pseudosfera
3 superficie immerse in R^3*
Le superficie minimali
- Le pellicole di sapone
- La superficie catenoide
- L'elicoide
  - Scale elicoidali
- La superficie di Scherk
  - Una parte della superficie di Scherk*

La curvatura di Gauss
- La superficie minimale di Enneper di grado 2 colorata in funzione della curvatura di Gauss*
- L'iperboloide ellittico
- L'iperboloide iperbolico
  - L'iperboloide iperbolico con l'indicazione delle linee di curvatura principale*
  - L'iperboloide iperbolico colorato in funzione della curvatura di Gauss ed in funzione della curvatura media*

La bottiglia di Klein
Il nastro di Möbius

La Topologia

Caso e probabilità
- P.R. Halmos: Selected Research Contributions
  - Il problema del matrimonio

Il problema delle parti
- Lettere sul problema delle parti

Un teorema sul gioco del lotto
Il moto browniano
- C. H. Coombs, R. M. Dawes, A. Tversky, Introduzione alla psicologia matematica
  - La probabilità soggettiva

Il triangolo aritmetico (figura*)
Galleria del triangolo aritmetico
- Triangolo greco*

Triangolo cinese*
Triangolo di Petrus Apianus*
Triangolo di Stifel*
Triangolo di Tartaglia*
Triangolo di Pascal*
Triangolo giapponese*
I numeri pari nel triangolo aritmetico
I multipli di cinque nel triangolo aritmetico
Il triangolo aritmetico e i poligoni costruibili

Il Postulato delle parallele e le Geometrie non Euclidee
Modelli del piano iperbolico:
Il semipiano di Poincaré
Il disco di Poincaré
*Angel-Devil di M.C. Escher**
Il modello di Beltrami-Klein
L'isomorfismo tra il modello di Beltrami Klein e il disco di Poincaré
Modelli del piano ellittico:
La semisfera con bordo, con identificazione di coppie di punti diametralmente opposti sul bordo
Il piano Euclideo ampliato con i punti all'infinito
La stella propria di rette dello spazio Euclideo
Il piano numerico proiettivo reale
La superficie romana di Steiner
Una realizzazione al computer della superficie romana di Steiner*

La Logica Matematica
Il sillogismo
La dimostrazione per assurdo
Il problema dell'uno e dell'unità
L'intuizionismo in matematica
Il nominalismo in matematica
I paradossi
L'assiomatizzazione della matematica
I sistemi formali
Modelli
Il contributo di Hilbert
Dai sistemi formali ai teoremi di Gödel
Teoria formale dei numeri o teoria dei numeri del primo ordine o aritmetica elementare
Il sistema formale per l'aritmetica elementare
Il principio d'induzione
La teoria degli insiemi
Le teorie assiomatiche degli insiemi
L'assioma della scelta (assioma di Zermelo)
L'ipotesi del continuo

Finito e Infinito in Matematica
I paradossi dell'infinito
L'infinito per Cantor
L'infinito per Hilbert
- Abbé Marie, Lezioni Elementari di Matematiche: Infiniti e Infinitesimi*

I frattali
Frattali poligonali*
L'insieme di Mandelbrot*

Le tassellature
Un esempio di arte islamica*
Argomenti correlati:
K. Chandrasekharan, Hermann Weyl (1885-1985): Lezioni del centenario. Symmetry (1952)
Fiocchi di neve*
Stelle marine*
Statua greca*
Finestra moresca*
Tassellature*

Matematica ed Arte
Dal mondo greco
- Il Discobolo*
- Il Doriforo*
- Vasi greci*

Le proporzioni del corpo umano*
Paolo Uccello: studio prospettico di un calice
La bellezza secondo Hogarth
- George David Birkhoff, Raccolta di scritti matematici. Volume III (1950)
  - Scienza e prospettiva spirituale
  - Qualche elemento matematico dell'arte
    - La misura estetica di una forma poligonale
      - Misura estetica di alcune forme poligonali*
    - La misura estetica di un vaso
      - Misura estetica di alcune forme di vaso*
    - Misura estetica per le griglie*
    - La misura estetica in poesia
      - Analisi di un verso dal Kubla Khan di Coleridge
  - Un approccio matematico all'etica
    - Tabella di raffronto estetica-etica
    - Esempio di calcolo della misura etica

Matematica ed Economia
L'Aritmetica mercantile
- Antonio Bordoni, Proposizioni Teoriche e Pratiche (1842)
  - Problema di minimizzazione dei costi*
  - Calcolo degli interessi*
  - Calcolo delle rate*
- Gaetano Scorza, Opere Scelte (1960). Osservazioni sulla teoria del baratto secondo il prof. Walras
  - Note introduttive e note conclusive
  - Trattazione matematica

Elenco delle fonti consultate

Fonti di notizie, citazioni, pagine originali ed illustrazioni

- **Libri – Fonti primarie**

1. Abbott, E.A., Flatlandia, trad. di M. d'Amico, Adelphi, Milano 1993.
2. Alberti, L.B., Della Pittura – Della Statua, a cura di Rafaele Trichet du Fresne, Parigi 1651.
3. Alberti, L.B., Opere volgari per la più parte inedite e tratte dagli autografi annotate e illustrate dal Dott. Anicio Bonucci, Tipografia Galileiana, Firenze 1843.
4. Alberti, L.B., L'architettura - De re aedificatoria, trad. di G. Orlandi, Il Polifilo, Milano 1966.
5. Alberti, L.B., Ludi matematici, in: Opere Volgari, vol. III, a cura di G. Grayson, Laterza, Bari 1979.
6. Alberti, L.B., Ludi matematici, a cura di R. Rinaldi, Guanda, Milano 1980.
7. Archimede, Opere, a cura di A. Frajese, UTET, Torino 1974.
8. Aristotele, Opere, vol. I, Organon, Laterza, Bari 1982.
9. Bachmann, P., Die Lehre von der Kreistheilung, Teubner, Leipzig 1872.
10. Boole, G., L'analisi matematica della logica, a cura di M. Mugnai, Bollati Boringhieri, Torino 1999.
11. Carroll, L., Il gioco della logica, trad. di O. Aurelio Simone, Astrolabio-Ubaldini, Roma 1969.
12. Cantor, G., Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Georg Olms, Hildesheim 1962.
13. Cauchy, A., Oeuvres Complètes, serie II, vol. I, Gauthier-Villars, Parigi 1905.
14. Cavalieri, B., Geometria degli indivisibili, a cura di L. Lombardo Radice, UTET, Torino 1966.
15. Cayley, A., The Collected Mathematical Papers, University Press, Cambridge, 1897.
16. Chandrasekharan, K. Hermann Weyl (1885-1985): Centenary Lectures, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1986.
17. Claudio Tolomeo, Le previsioni astrologiche (Tetrabiblos), a cura di S. Feraboli, Mondadori, Milano 1985.
18. Copernico, N., Opere, a cura di F. Barone, UTET, Torino 1979.
19. Descartes, R., Lettere, Amsterdam 1682.
20. Descartes, R., Il mondo, trad. di G. Cantelli, Boringhieri, Torino 1959.
21. Descartes, R., Oeuvres, a cura di Ch. Adam e P. Tannery, Vrin, Parigi 1974.
22. Descartes, R., Discours de la Méthode – La Dioptrique – La Géométrie, Lecce 1987 (facsimile dell'edizione di Leida, 1637) .
23. Descartes, R., Opere, a cura di E. Garin, voll. I-II, Laterza, Bari 1967.
24. Di Comite, C., Ronchi, P., Pascal e matematica, Ladisa, Bari 1991.
25. Diophantus, Opera Omnia, a cura di P. Tannery, voll. I-II, Teubner, Lipsia 1893,1895.
26. Einstein, A., Pensieri degli anni difficili, trad. di L. Bianchi, Bollati Boringhieri, Torino 1996.
27. Einstein, A., Relatività: esposizione divulgativa, Bollati Boringhieri, Torino 1999.
28. Erone di Alessandria, Pneumatics, a cura di B. Woodcroft, Taylor Walton and Maberly, Londra 1851.
29. Euclide, Elementi, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino, 1970.
30. Fantasia, P., Guida alla misurazione del volume delle botti, Avellino & C., Bari-Giovinazzo 1895.
31. Ferrari, L., Tartaglia, N., Cartelli di disfida matematica, a cura di A. Masotti, Ateneo di Brescia 1974.
32. Frege, G., Logica e aritmetica, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino 1977.

33. Galilei, G., Sidereus Nuncius, trad. di M. Timpanaro Cardini, Sansoni, Firenze 1948.
34. Galilei, G., Opere, a cura di F. Brunetti, voll. I-II, UTET, Torino 1964.
35. Galois, E., Ecrits et mémoires mathématiques, a cura di R. Bourgne e J.-P. Azra, Gauthier-Villars, Parigi 1962.
36. Gauss, C.F., Disquisitiones Arithmeticae, trad. di A.A. Clarke, Yale University Press, New Haven - London 1966.
37. Heath, T.L., Diophantus of Alexandria, Second Edition, Cambridge University Press 1910.
38. Hilbert, D., Gesammelte mathematische Abhandlungen, voll. I-III, Springer, Berlino 1932, 1933, 1935.
39. Kandinsky, W., Punto linea superficie, trad. di M. Calasso, Adelphi, Milano 1999.
40. Kepler, J., L'étrenne ou la neige sexangulaire, trad. di R. Halleux, a cura di R. Taton, Vrin-CNRS, Paris 1975.
41. Klein, F., Gesammelte Mathematische Abhandlungen, a cura di R. Fricke e A. Ostrowski. Springer, Berlino 1921.
42. Kowaleskaïa, S., *Souvenirs d'enfance*, in: Sonia Kowaleskaïa (1850-1891), L'aventure d'une mathématicienne, a cura di J. Détraz, Belin, Parigi 1993.
43. Leonardo da Vinci, Aforismi, novelle e profezie, a cura di M. Baldini, Newton & Compton, Roma 1993.
44. Leopardi, G., Tutte le opere, a cura di F. Flora, Mondadori, Milano 1962.
45. Mandelbrot, B., Fractales, Hasard et Finance, Flammarion, Paris 1997.
46. Marco Vitruvio Pollione, I dieci libri dell'architettura, trad. di Mons. D. Barbaro, Venezia 1629.
47. Marco Vitruvio Pollione, De architectura Libri X, trad. di L. Migotto, Studio Tesi, Pordenone 1990.
48. Newton, I., Principii di filosofia naturale, Teoria della gravitazione, a cura di F. Enriques e U. Forti, Alberto Stock, Roma 1925.
49. Newton, I., Papers and Letters on Natural Philosophy, a cura di I. Bernard Cohen e R.E. Schofield, Harvard University Press, Cambridge 1958.
50. Newton, I., Sistema del mondo, trad. di M. Renzoni, Boringhieri, Torino 1959.
51. Newton, I., Mathematical papers, a cura di D.T. Whiteside e M.A. Hoskin, Cambridge 1967.
52. Pascal, B., Oeuvres Complètes, Editions du Seuil, Parigi 1963.
53. Pascal, B., Pensieri, trad. di L. Collodi, Newton & Compton, Roma 1993.
54. Peano, G., Opere scelte, Ed. Cremonese, Roma 1958.
55. Pitagora, I versi aurei, i simboli, le lettere, trad. di G. Pesenti, Carabba, Lanciano 1913.
56. Platone, Tutte le opere, a cura di G. Pugliese Carratelli, Sansoni, Firenze 1974.
57. Ruffini, P., Opere Matematiche, Tomo I, Tipografia Matematica, Palermo 1915.
58. Russell, B., Introduzione alla filosofia matematica, trad. di E. Carone, Newton & Compton, Roma 1970.
59. Russell, B., I principi della matematica, trad. di E. Carone e M. Destro, Newton & Compton, Roma 1989.
60. Saladini, G., Nuovo Metodo delle Proporzioni Geometrica, Aritmetica ed Armonica, Bologna 1761.
61. Schmidt, W., Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, voll. I-III, Teubner, Lipsia 1899, 1900, 1903.
62. Swift, J., I viaggi di Gulliver, trad. di C. Formichi, Mondadori, Milano 1979.
63. Tartaglia, N., Quesiti et inventioni diverse, a cura di A. Masotti, Ateneo di Brescia, 1959.
64. Torricelli, E., Opere, a cura di G. Loria e G. Vassura, voll. I-III, Montanari, Faenza 1919, vol. IV, Lega, Faenza 1944.
65. Viviani, V., Vita di Galileo – Il processo di Galileo, a cura di Fernando Flora, Rizzoli, Milano 1954.

- **Libri – Fonti secondarie**

1. AA.VV, Conosci l'Italia, vol. IV, Arte e civiltà nell'Italia antica, Touring Club Italiano, Milano 1960.
2. AA.VV, Contributi alla Storia delle Matematiche. Scritti in onore di Gino Arrighi. Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Mucchi, Modena 1992.
3. AA.VV., Il Patrimonio dell'Umanità, tesori salvati e da salvare, Touring Club Italiano, Milano 1988.
4. AA.VV., L'alba dei numeri, Dedalo, Bari 1987.
5. AA.VV., La letteratura italiana, Storia e testi, Ricciardi, Milano Napoli 1956.
6. AA.VV., Histoire générale des sciences, Presses Universitaires de France, Paris 1966.
7. AA.VV., Storia della Letteratura Italiana, a cura di E. Cecchi e N. Sapegno, Garzanti, Milano 1967.
8. AA.VV., The history of modern mathematics, vol. 1, a cura di D.E. Rowe e J. McLeary, Academic Press, San Diego 1989.
9. Adler, I., Il segreto dei numeri, trad. di M. Selmi, Mondadori, Milano 1961.
10. Aczel, A.D., L'enigma di Fermat, trad. di G. Rigamonti, Il Saggiatore, Milano 1998.
11. Arnese, G., Cenni di storia del Calcolo Infinitesimale, Quaderno del Dipartimento di Matematica, Università di Bari, n.1/1998.
12. Artin, M., Algebra, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1993.
13. Asimov, I., Catastrofi a scelta, trad. di T. Chersi, Mondadori, Milano 1980.
14. Banfi, A., Galileo Galilei, Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1949.
15. Bariola, P., Storia della Ragioneria Italiana, Biblioteca Storica di Economia Aziendale, Cacucci Editore, Bari 1988.
16. Batschelet, E., Introduction to Mathematics for Life Scientists. Second Edition, Springer, Berlin 1975.
17. Bell, E.T., The development of mathematics, McGraw-Hill, New York-London 1945.
18. Bell, E.T., The magic of numbers, Whittlesey House, McGraw-Hill, New York 1946.
19. Bell, E.T, I grandi matematici, trad. di D. Aduni, Sansoni, Firenze 1950.
20. Boltianski, V.G., Hilbert's Third Problem, trad. di R. A. Silverman, Winston & Sons, Washington 1978.
21. Bonola, R., La geometria non Euclidea, Zanichelli, Bologna 1906.
22. Bonola, R., Non-Euclidean Geometry, Dover, New York 1955.
23. Borga, M., Freguglia, P., Palladino, P., I contributi fondazionali della scuola di Peano, Collana "Epistemologia", Franco Angeli, Milano 1985.
24. Bortolotti, E., La scuola matematica di Bologna, Zanichelli, Bologna 1928.
25. Bottazzini, U., Freguglia, P., Toti Rigatelli, L., Fonti per la storia della matematica, Sansoni, Firenze 1992.
26. Boyer, C. B., Storia della matematica, trad. di A. Carugo, Mondadori, Milano 1980.
27. Brieskorn, E., Knörrer, H., Plane Algebraic Curves, Birkhäuser, Basel 1986.
28. Cantelli, G., (a cura di), La disputa Leibniz-Newton sull'analisi, Boringhieri, Torino 1958.
29. Casati, R., La scoperta dell'ombra, Mondadori, Milano 2000.
30. Cassina, U., Dalla geometria egiziana alla matematica moderna, Cremonese, Roma 1961.
31. Castelnuovo, E., Barra, M., Matematica nella realtà, Boringhieri, Torino 1976.
32. Cellucci, C., La filosofia della matematica, Laterza, Bari 1967.
33. Contini, C., Ipazia e la notte, Longanesi & C., Milano 1999.
34. Coxeter, H.S.M., Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, New York 1989.
35. Cresci, L. Le curve celebri, Muzzio, Padova 1998.
36. Dampier, W.C., Storia della Scienza, trad. di L. Radicati di Brozolo, Edizioni Scientifiche Einaudi, Milano 1953.

37. Do Carmo, M.P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs , New Jersey, 1976.
38. Dreyer, J.L.E., Storia dell'astronomia da Talete a Keplero, trad. di L. Sosio, Feltrinelli, Milano 1970.
39. Dupuy, P., La vita di Evaristo Galois, a cura di C.Motti, Tumminelli, Roma 1945.
40. Eco, U., La ricerca della lingua perfetta, Collana "Fare l'Europa", Editori Laterza, Bari 1993.
41. Edgar, G.A., Measure, Topology, and Fractal Geometry, Springer, New York 1990.
42. Enriques, F., de Santillana, G., Storia del pensiero scientifico, Zanichelli, Bologna 1932.
43. Enzensberger, H.M., Il mago dei numeri, trad. di E. Ganni, Einaudi, Torino 1997.
44. Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York 1969.
45. Fasano, A., Marini, S., Meccanica Analitica, Bollati Boringhieri, Torino 1994.
46. Faure, R., Kaufmann, A., Denis-Papin, M., Manuale di Matematica, a cura di L. Muracchini, ISEDI, Milano 1971.
47. Frajese, A., La matematica nel mondo antico, Studium, Roma 1951.
48. Gabrieli, G.B., Nicolò Tartaglia. Una vita travagliata al servizio della Matematica, Biblioteca Queriniana, Brescia 1997.
49. Gelcich, E., Cartografia, Hoepli, Milano 1894.
50. Geymonat, L., Galileo Galilei, Einaudi, Torino 1957.
51. Geymonat, L., Storia del pensiero filosofico e scientifico, Garzanti, Milano 1970.
52. Gherardelli, F., Rosati, L.A., Tomassini, G., Lezioni di geometria, vol. I, CEDAM, Padova 1985.
53. Giacomelli, R., Gli scritti di Leonardo da Vinci sul volo, Bardi, Roma 1936.
54. Gillain, O., La science Egyptienne, Fondation Egyptologique Reine Elisabeth, Bruxelles 1927.
55. Gray, A., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, Studies in advanced mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton 1993.
56. Greenberg, M.J., Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History, W. H. Freeman, San Francisco 1972.
57. Guy, R.K., Unsolved Problems in Number Theory, Springer, New York 1981.
58. Hatcher, W.S., Fondamenti della Matematica, Serie di Logica Matematica, Boringhieri, Torino 1973.
59. Hawking, S.W., Dal big bang ai buchi neri, trad. di L. Sosio, Rizzoli, Milano 1988.
60. Høeg, P., Il senso di Smilla per la neve, trad. di B. Berni, Mondadori, Milano 1994.
61. Hofstadter, D.R., Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante, a cura di G. Trautteur, Adelphi, Milano 1984.
62. Jacob, F., La souris, la mouche et l'homme, Odile Jacob, Paris 2000.
63. Kline, M., Storia del pensiero matematico, voll. I e II, trad. di A. Conte, Einaudi, Torino 1996.
64. Klingenberg, W., A Course in Differential Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York 1978.
65. Klingenberg, W., Lineare Algebra und Geometrie, Springer, Berlin 1984.
66. Loria, G., Scritti, conferenze, discorsi sulla Storia delle Matematiche, a cura della Sezione "Mathesis" di Genova, CEDAM, Padova 1937.
67. Manuzio, G., Passatore, G., Verso la fisica, voll. I-III, Principato, Milano 1983.
68. Maracchia, S., Da Cardano a Galois, Feltrinelli, Milano 1979.
69. Marcolongo, R., Memorie sulla geometria e la meccanica di Leonardo da Vinci, SIEM, Napoli 1937.
70. Mendelson, E., Introduzione alla Logica Matematica, Serie di Logica Matematica, Boringhieri, Torino 1972.
71. Monod, J., Il caso e la necessità, trad. di A. Busi, Mondadori, Milano 1970.
72. Natucci, A., Il concetto di numero e le sue estensioni, Fratelli Bocca, Torino 1923.

73. Natucci, A., Sviluppo storico dell'aritmetica generale e dell'algebra, Pellerano-Del Gaudio, Napoli s.d..
74. Needham, J., Scienza e civiltà in Cina, trad. di M. Baccianini e G. Mainardi, vol. III, Einaudi, Torino 1985.
75. Neugebauer, O., Le scienze esatte nell'Antichità, trad. di A. Carugo, Feltrinelli, Milano 1974.
76. Oldroyd, D. Storia della filosofia della Scienza, trad. di L. Sosio, Collana "la Cultura", Il Saggiatore, Arnoldo Mondadori Editore, Milano 1997.
77. Oriolo, P., Coda, A., Corso di Matematica 1, Edizioni Scolastiche B. Mondadori, Moncalieri, 1991.
78. Ovio, G., L'Ottica di Euclide, Hoepli, Milano 1918.
79. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., Chaos and fractals - New frontiers of science, Springer, New York 1992.
80. Peitgen, H.-O., Richter, P.H., The beauty of fractals, Springer, Berlin 1986.
81. Perrin, F., Histoire des sciences illustrée, Beaudat, Paris 1956.
82. Petsinis, T., Il matematico francese, trad. di F. Paracchini, Baldini & Castoldi, Milano 1999.
83. Rodet, L., Sur les notations numériques et algébriques, Ernest Leroux Editeur, Paris 1881.
84. Rouse Ball, W.W., Le matematiche moderne sino a oggi, trad. di D. Gambioli, a cura di G. Loria, Zanichelli, Bologna 1904.
85. Rossi, P., La nascita della scienza moderna in Europa, Laterza, Bari 1997.
86. Rowe, D.E., McCleary, J., The history of modern mathematics, vol. I, Academic Press, San Diego 1988.
87. Sagredo, Aneddotica delle scienze, Hoepli, Milano 1948.
88. Scott, J.F., A History of Mathematics, Taylor & Francis, Londra 1969.
89. Segre, E., Personaggi e scoperte nella fisica contemporanea, Mondadori, Milano 1976.
90. Segre, M., Nel segno di Galileo, trad. di C. Levin, Il Mulino, Bologna 1993.
91. Singh, S., L'ultimo Teorema di Fermat, trad. di C. Capararo e B. Lotti, Rizzoli, Milano 1997.
92. Snijders, C.J., La sezione aurea, Muzzio, Padova 1993.
93. Sobel, D., Longitudine, trad. di G. Lonza e O. Crosio, Rizzoli, Milano 1999.
94. Thompson, J.S.E., La civiltà Maya, trad. di U. Tolomei, Einaudi, Torino 1970.
95. Tietze, H., Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit, Band I, II, Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1959.
96. Truesdell, C., Essays in the History of Mechanics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968.
97. van der Waerden, B.L., A History of Algebra, Springer, Berlin-Heidelberg 1985.
98. van der Waerden, B.L., Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer, Berlin-Heidelberg 1993.
99. von Krbek, F., Eingefangenes Unendlich, Geest & Portig, Lipsia 1954.
100. Vorob'ev, N.N., Fibonacci numbers, Pergamon Press, Oxford 1961.
101. Winfree, A.T., The Geometry of Biological Time, Springer, New York 1980.
102. Yuan Huaqing (a cura di), I Ching. Il libro della mutazione, Vallardi, Milano 1993.
103. Zellini, P., La ribellione del numero, Adelphi, Milano 1985.

- **Articoli su riviste scientifiche e divulgative**

1. Agostini, A., *Il problema inverso delle tangenti e l'integrazione indefinita nelle opere del Torricelli*, Archeion, **XII** (1930), pag.33.
2. Arrighi, G., *Incontri di Maria G. Agnesi con Jano Planco, Quattro lettere inedite della scienziata milanese.* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **105** (1971), pagg. 681-686.
3. Cox, D.A., *Introduction to Fermat's Last Theorem*, American Mathematical Monthly, **101,** No.1 (1994), pagg. 3-14.
4. Coxeter, H.S.M., *The golden section, phyllotaxis, and Wythoff's game*, Scripta Mathematica **19** (1953), pagg. 135-143.
5. Deakin, M.A.B. *Hypatia and Her Mathematics*, American Mathematical Monthly **101**, No.3 (1994), pagg. 234-243.
6. Geretschläger, R., *Folding the regular heptagon*, Crux mathematicorum **23**, No. 2 (1997), pagg. 81-88.
7. Geretschläger, R., *Folding the regular nonagon*, Crux mathematicorum **23**, No. 4 (1997), pagg. 210-217.
8. Kimberling, C., *Emmy Noether*, American Mathematical Monthly **79** (1972), pagg. 136-149.
9. Laux, G, *Spaß mit Pythagoras*, Mathe-plus **5/6** (1985), pagg. 12-18.
10. Loria, G., *Una lettera inedita di Evangelista Torricelli*, Archeion **XIV** (1932), pagg. 12-14.
11. Lowman, E.L., *An example of Fibonacci numbers used to generate rhythmic values in modern music*, The Fibonacci Quarterly **9**, pagg. 423-426.
12. Lowman, E.L., *Some striking proportions in the music of Bela Bartok*, The Fibonacci Quarterly, **9**, pagg. 527-528, 536-537.
13. Luminet, J.P., Starkman, G.D., Weeks, J. R., *Viviamo in un universo finito?*, Le Scienze **370** (giugno 1999), pagg. 74 –83.
14. Masotti, A., *Maria Gaetana Agnesi*, Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano **14** (1940), pagg. 1-39.
15. McClain, E.G., *Musical Theory and Ancient Cosmology*, The World and I, February 1994, pagg. 371-391.
16. Mulcrone, T.F., *The names of the curve of Agnesi*, Amer. Math. Monthly **64** (1957), pagg. 359-361.
17. Peisch, H., *Regelmäßige Vielecke*,, Mathe-plus **5/6** (1985), pagg. 2-9.
18. Piazzolla Beloch M., *Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del ripiegamento della carta*, in: Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, 1936, pagg. 93-95.
19. Singh, S., Ribet, K.R., *La dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat*, Le Scienze **353** (1998), pagg. 74-79.
20. Tessieri, S., *Il lungo cammino della cicloide*, Parte Seconda, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, **22B** (1999) pagg. 107-138.
21. Truesdell, C., *Maria Gaetana Agnesi*, Archive for History of Exact Science **40** (1989), pagg. 113-142.
22. van der Waerden, B.L., *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen **111** (1935), pagg. 469-476.
23. Wiedemeier, G., *"Alles ist Zahl"*, Mathe-plus **2** (1985), pagg. 2-5.
24. Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics **142** (1995), pagg. 443-551.

- **Opere multimediali**

1. Enciclopedia Microsoft ENCARTA 98.
2. Enciclopedia Zanichelli 1998 Multimediale Interattiva.
3. Letteratura Italiana Zanichelli in CD-Rom, 1998.
4. E. Weisstein, Concise Encyclopedia of Mathematics, CRC Press, 1999.

- **Opere generali**

1. Enciclopedia di Filosofia, Garzanti, Milano 1981
2. Enciclopedia Treccani, 1996.

- **Siti WEB**

Artcyclopedia
http://artcyclopedia.com/

Australian Antarctic Division
http://www.antdiv.gov.au/

Barry Hoggard's Home Page
http://www.panix.com/~hoggardb/naples0597.shtml

Carl-Friedrich-Gauss-Gymnasium, Frankfurt an der Oder (Germania)
http://gauss.euv-frankfurt-o.de/degauss.htm

Flatlandia
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

Fondazione Piero della Francesca
http://www.nots.it/piero/uk_c_tra.htm

Gauss-Gymnasium Worms (Germania)
http://www.fh-worms.de/Gauss-Gymnasium/

Harry J. Smith's Homepage
http://pw1.netcom.com/~hjsmith/

Intelligence Resource Program – The Pentagon
http://www.fas.org/irp/facility/pentagon.htm

I.T.C. "Antonio Zanon" – Udine
http://www.ten.it/zanonline/

Liber Liber
http://www.liberliber.it/

Library of Congress Vatican Exhibit
http://metalab.unc.edu/expo/vatican.exhibit/exhibit/Main_Hall.html

Mac Tutor History of Mathematics Archive
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/

Palazzo Schifanoia
http://www.4net.com/100cities/ferrara/femap/schifa.htm

Pavia on the Web
http://www.systemy.it/pavia/city/history/boezio.html

Provincia Regionale di Catania
http://www.provincia.ct.it/

Richard Palais' Homepage
http://rsp.math.brandeis.edu/

The Golden Section in Art, Architecture and Music
http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html#archlinks

University of Malta – Dept. of Computer Information Systems – Jarek Sklenar
http://www.cis.um.edu.mt/~jskl/pascline.html

University of Minnesota – The Geometry Center – The Golden Ratio
http://www.geom.umn.edu/~demo5337/s97b/art.htm

University of Tennessee at Martin – The Prime Pages
http://www.utm.edu/research/primes/

Webmuseum – Famous Paintings Exhibition
http://www.oir.ucf.edu/wm/paint/

Xah Lee – A Visual Dictionary of Special Plane Curves
http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Ringraziamenti

La preparazione di quest'ipertesto ha richiesto circa tre anni di lavoro.
I testi presentati sono patrimonio del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Bari, di alcuni docenti dello stesso e della Biblioteca Nazionale Sagarriga Visconti Volpi di Bari.
Le autrici desiderano ringraziare in particolare il Direttore del Dipartimento di Studi Aziendali e Giusprivatistici dell'Università di Bari, per aver messo a disposizione l'opera ***Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalita*** di Luca Pacioli, ed il Professor Giuseppe Arnese per aver consentito l'utilizzazione quasi integrale del testo delle lezioni sulla Storia del Calcolo Infinitesimale, tenute per il Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica.
È doveroso anche segnalare che le pagine relative al Tartaglia sono state fortemente ispirate dal libro di G. B. Gabrieli, ***Nicolò Tartaglia. Una vita travagliata al servizio della Matematica,*** *Biblioteca Queriniana, Brescia 1997*, al quale si rinvia per un'appassionante lettura sulle vicende della vita di questo straordinario personaggio.
Un ringraziamento va anche a: Giulia Dileo, Teresa Geminale, Valeria Germinario, Delio Mugnolo, Paola Russi ed Antonella Tarantino che, in qualità di studenti del corso di laurea in Matematica, hanno collaborato, nella fase iniziale, alla selezione dei testi da presentare.
Un ultimo grazie al Signor Antonio Leserri, alla Dott.ssa Annamaria Labarbuta e alla Sig.ra Tiziana Ottomano del Centro di Calcolo del Dipartimento di Matematica che hanno curato la messa in rete dell'ipertesto.

Margherita Barile e Anna Maria Pastore

Itinerario n.1

Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web

Antichità e Medioevo:
La Matematica Babilonese
La Matematica nell'antico Egitto
La numerazione Maya
La Matematica Cinese
La Matematica Indiana e Araba
Pitagora
Euclide e la Scuola Alessandrina
Archimede
Contando...contando: dalla Aritmetica alla Teoria dei Numeri

Dalla fine del 1400 alla fine del 1800:

Luca Pacioli - *Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalita. Venezia, 1494.*

N. Tartaglia - *Euclide Megarense. Venezia, 1585*

N. Tartaglia - *La Nova Scientia. Venezia, 1550*

M. F. Pagani - *Arithmetica pratica. Ferrara, 1591*

G. Galilei - *Sidereus Nuncius. Venetii, 1610*

Vitale Giordano - *Euclide Restituto. Roma, 1680*

G. Galilei - *Opere. Firenze, 1718*

V. Riccati - *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium - Commentarius. Bononiae, 1751*

G. A. Alberti - *Trattato di aritmetica pratica. Venezia, 1752*

E. Manfredi - *Elementi della Geometria piana e solida e della trigonometria. Bologna, 1755*

L. Euler (Eulero) - *Lettere a una principessa tedesca su diversi argomenti di fisica e di filosofia. (Traduzione dell'edizione originale in francese, Mietau e Lipsia, 1770). Torino, 1958*

A. Cagnoli - *Trigonometria piana e sferica. Parigi, 1786*

L. Perini - *Geometria Pratica. Venezia, 1791*

G. Vega - *Thesaurus logarithmorum completus. Lipsia, 1794*

G. Bigoni - *Problemi e teoremi matematici. Venezia, 1818*

Abbé Marie - *Lezioni elementari di Matematiche. Firenze, 1825*

Lombardini - *Elementi di Matematica ad uso degli studenti nella Ducale Università di Parma. Parma, 1828*

L. Mascheroni - *Problemi di Geometria (colle dimostrazioni del Capitano Sacchi). Milano, 1832*

G. Schaffnit - *Scienza Geometrica delle Costruzioni, ovvero Geometria Descrittiva . Padova, 1841*

A. Bordoni - *Proposizioni teoriche e pratiche. Pavia, 1842*

Leonardo Pisano (detto il Fibonacci) - *Opuscoli. Firenze, 1856, Seconda edizione*

G. Bertrand - *Trattato di Algebra elementare. Firenze, 1862*

J. Bolyai - *La Science absolue de l'espace. Paris, 1868*

P. Bachmann - *Die Lehre von der Kreistheilung und Ihre Beziehungen zur Zahlentheorie – Academische Vorlesungen. Leipzig, 1872*

R. Baltzer - *Elementi di Matematica. Genova, 1875 (tradotto da L. Cremona)*

G. Ferraris - *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici. Esposizione elementare della teoria di Gauss e delle sue applicazioni……. 1877*

E. Betti - F. Brioschi - *Problemi e teoremi. Napoli, 1880*

U. Dini - *Lezioni di Calcolo Differenziale ed Integrale. Bologna, 1884*

F. Klein - *Einleitung in die Höhere Geometrie, I. Vorlesung Gehalten in Wintersemester 1892. Göttingen, 1893*

J. Steiner - *Die geometrischen Constructionen ausgefuehrt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises als Lehrgegenstand auf hoeheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. Leipzig, 1895*

Il Novecento:

P. Ruffini - *Opere matematiche. Tomo Primo Teoria generale delle equazioni. Palermo, 1915*

Vito Volterra - *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Paris, 1931*

G. D. Birkhoff - *Collected Mathematical Papers. Volume III. New York, 1950*

G. Scorza - *Opere Scelte,Volume I. Roma, 1960*

T. Levi-Civita - *Opere Matematiche - Memorie e note. Volume IV. Bologna, 1960*

J. von Neumann - *Collected Works Volume V: Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis. Oxford-London-New York-Paris, 1963*

C. H. Coombs, R.M. Dawes, A. Tversky - *Introduzione alla psicologia matematica. Trad. di G. Cioffi e M. Bagassi. Milano 1980*

P.R. Halmos - *Selected Research Contributions. New York, 1983*

K. Chandrasekharan - *Hermann Weyl (1885-1985): Centenary Lectures. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris- Tokyo, 1986*

C. Di Comite, P. Ronchi - *Pascal e matematica. Bari, 1991*

J-M. Morel, S. Solimini - *Variational Methods in Image Segmentation. Boston-Basel-Berlin 1995*

Itinerario n.4

La Matematica e le altre discipline

È fuor di dubbio che la matematica, per il suo duplice aspetto speculativo ed applicativo, abbia influenzato e sia stata influenzata da altre attività dell'essere umano. Non è certamente un caso che i più grandi matematici siano stati anche filosofi, e che spesso l'interesse per la matematica si sia coniugato a quello per altre scienze o per l'arte. E questo non è un fenomeno transitorio, comincia con l'antichità e continua ancora oggi.
Si propongono alcuni libri che testimoniano l'intreccio tra Matematica ed altri aspetti della cultura e della realtà quotidiana: **balistica**, **astronomia**, **architettura**, **ottica**, **letteratura**, **economia**, **cartografia**, **tecniche di misurazione**, **meccanica**, **biologia**, **psicologia**, **filosofia**, **musica**, **arte** ed **informatica**.

Itinerario n.3

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Il libro di Matematica inteso come testo scolastico è relativamente recente. La società del secolo XVI, per esempio, ancora non conosceva l'istruzione pubblica gratuita e chiunque avesse delle capacità intellettuali poteva seguire delle lezioni pubbliche o private, sostenendone completamente le spese. Le prime utilizzazioni di testi per studenti sono quindi in qualche modo legate all'Istruzione Universitaria, o alle Scuole Speciali tipo Accademie o Scuole di Medicina.
Solo più tardi appaiono libri scritti appositamente per studenti pre-universitari.
Sfogliando questi libri, si nota l'impostazione dell'insegnamento con il metodo del "problem solving"; molti testi sono infatti interamente costituiti da problemi, ciascuno dei quali viene risolto spesso in diversi modi e con tecniche differenti.
I contenuti di questi testi ad uso scolastico subiscono, nel tempo, notevoli cambiamenti; in tempi recenti, accanto a settori classici come l'algebra letterale, l'**analisi (o calcolo infinitesimale)**, la **geometria euclidea**, compaiono le nozioni fondamentali di **teoria degli insiemi**, statistica, **probabilità**, **logica**, i **diagrammi di flusso**...
Man mano che la ricerca progredisce e che nuovi settori si aprono ed altri si consolidano, le nuove nozioni passano nei programmi delle scuole secondarie e diventano patrimonio di tutti. In fondo, è così che cresce la cultura dell'uomo.

E. Manfredi - *Elementi della Geometria piana e solida e della trigonometria. Bologna, 1755*

G. Bigoni - *Problemi e teoremi matematici. Venezia, 1818*

Abbé Marie - *Lezioni elementari di Matematiche. Firenze, 1825*

Lombardini - *Elementi di Matematica ad uso degli studenti nella Ducale Università di Parma. Parma, 1828*

L. Mascheroni - *Problemi di Geometria (colle dimostrazioni del Capitano Sacchi) Milano, 1832*

G. Schaffnit - *Scienza Geometrica delle Costruzioni, ovvero Geometria Descrittiva. Padova, 1841*

G. Bertrand - *Trattato di Algebra elementare. Firenze, 1862*

P. Bachmann - *Die Lehre von der Kreistheilung und Ihre Beziehungen zur Zahlentheorie – Academische Vorlesungen. Leipzig, 1872*

R. Baltzer - *Elementi di Matematica. Genova, 1875-1884 (tradotto da L. Cremona)*

E. Betti - F. Brioschi - *Problemi e teoremi. Napoli, 1880*

U. Dini - *Lezioni di Calcolo Differenziale ed Integrale. Bologna, 1884*

F. Klein - *Einleitung in die Höhere Geometrie, I. Vorlesung gehalten in Wintersemester 1892-93. Göttingen, 1893*

J. Steiner - *Die geometrischen Constructionen ausgefuehrt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises als Lehrgegenstand auf hoeheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. Leipzig, 1895*

C. Di Comite, P. Ronchi - *Pascal e matematica, Bari, 1991*

Itinerario n.5

Curiosità

Sotto questa voce, che può sorprendere ed è certamente inadeguata al valore dei testi presentati, è stato raccolto materiale particolarmente interessante e curioso per contenuto, per formulazione, per grafica.

M. F. Pagani - *Arithmetica pratica. Ferrara, 1591*

G. Galilei - *Opere. Firenze, 1718*

G. A. Alberti - *Trattato di aritmetica pratica. Venezia, 1752*

L. Euler (Eulero) - *Lettere a una principessa tedesca su diversi argomenti di fisica e di filosofia. (Traduzione dell'edizione originale in francese, Mietau e Lipsia, 1770). Torino, 1958*

G. Vega - *Thesaurus logarithmorum completus. Lipsia, 1794*

Leonardo Pisano (detto il Fibonacci) - *Opuscoli. Firenze, 1856, Seconda edizione*

P. Ruffini - *Opere matematiche. Tomo Primo. Teoria generale delle equazioni. Palermo, 1915*

P. R. Halmos - *Selected Research Contributions. New York, 1983*

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Abbé Marie
Lezioni elementari di Matematiche
Firenze, 1825

Lo scopo dell'autore è quello di offrire un libro di *"facilissimo acquisto che, in poca mole, offrisse ad un principiante quanto era necessario per prendere le prime idee della Scienza e porsi in grado di riassumere in seguito lo studio sopra corsi più vasti e più completi".*

Il testo è diviso in due parti ed esordisce con le seguenti definizioni:
"Ciò che può crescere o scemare si chiama quantità; i numeri, il moto etc. sono quantità."
"Le Matematiche comprendono tutte le scienze che trattano delle proprietà e rapporti di queste quantità."
Dunque si comincia dalle nozioni preliminari di aritmetica, quali le quattro operazioni, spiegando con ricchezza di particolari ed estrema semplicità come eseguirle, e si prosegue fino alle progressioni aritmetiche, alle **serie** ed ai **logaritmi**.
Seguono una parte dedicata alla geometria e numerose tavole: dei **numeri primi**, delle potenze, dei logaritmi dei rapporti delle misure toscane con alcune delle corrispondenti estere, di misure lineari, di misure di superficie, di misure di capacità e pesi.
La seconda parte va dallo studio delle **curve** fino alle regole del **calcolo infinitesimale**. La natura dell'**infinito** è stata, specialmente nell'Ottocento, argomento di vivaci discussioni tra i matematici. Interessante è **il punto di vista dell'Abbé Marie**, che pure differisce, in molti punti, dalle nozioni universalmente accettate oggigiorno.

Un'altra parte dell'opera è dedicata all'algebra: in particolare vi viene trattata la **ricerca delle radici di un'equazione**. Viene impiegata la **regola dei segni** di **Cartesio**, oltre alle **frazioni continue**, che consentono una risoluzione approssimata. Particolare attenzione è dedicata al cosiddetto **caso irriducibile** delle equazioni di terzo grado, che indusse **Bombelli**, nel Cinquecento, a introdurre il calcolo con i **numeri complessi**.

La risoluzione delle equazioni di terzo grado
La risoluzione delle equazioni di quarto grado

Equazioni del terzo e quarto grado con radici incommensurabili, o immaginarie

238. Se un' equazione del terzo grado non ha radici reali razionali, comincio dal toglierle il secondo termine (220) e la riduco alla forma $x^3+px+q=0$. Fatto I.ª $p=-3ab$, II.ª $q=-a^3-b^3$, quest' equazione si cangia nell' altra identica $x^3-3abx=a^3+b^3$ che sappiamo (183) aver per radice $x=a+b$. Ma la I.ª e II.ª danno (202) $a=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, $b=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, dunque o si prendano i segni superiori o gli inferiori, avremo sostituendo $x=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$. Così $x^3+9x+6=0$, ove $p=9$, $q=6$ dà $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$.

239. L' altre due radici, chiamata m la già trovata, possono aversi da $x=\frac{-m\pm\sqrt{(-4p-3m^2)}}{2}$, la quale si trova con dividere la data per $x-m$, e riflettendo che $m^3+pm+q=0$ (233): ma si hanno anche dall' altre due cubiche di a^3, b^3, cioé da γa, γb e da λa, λb (161), combinate però di modo che il loro prodotto dia, come sopra (238), $3ab=-p$, unendo γa con λb, e λa con γb, giacchè $\gamma\lambda=1$ (161). Sarà dunque $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}-\frac{1\mp\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$ E ben si vede che se $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ è reale, le due ultime radici sono immaginarie: ma se è immaginario, cioè se con p negativo si abbia $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$, ciascuna delle tre radici è reale. Infatti la prima prende allora la forma $x=\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ (160.2.°) e alle due ultime possiamo dar l' altra $x=-(\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})})\pm$

$\sqrt{-3}(\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})})$. Or poichè negli sviluppi dei radicali $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}$, $\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ i termini ove B è a potenza pari vengono con segno eguale e reali (142.157), e gli altri con segno ineguale e immaginarj, dunque nella prima radice, come pure nella prima parte delle altre due, ove quetsi sviluppi son sommati, gli immaginarj si distruggon fra loro; mentre nella seconda parte si distruggono i reali e restano gli immaginarj, che per altro essendo moltiplicati per l'immaginario $\sqrt{-3}$ si cangiano tutti in reali. L'aver tentato invano di ridur questi tre radicali a forma reale ha dato a questo caso il nome d' *irriducibile*. Vedremo a suo luogo come la Trigonometria faciliti il loro calcolo trasformandogli in funzioni circolari.

240. Lo stesso metodo risolve anche l'equazioni della forma $x^{3n}+px^{2n}+qx^n+r=0$, fatto $x^n=y$.

241. Sia ora l'equazione del *quarto grado* $x^4+px^2+qx+r=0$. Supposto che x^2+tx+s, x^2+vx+u, sieno i fattori quadratici del primo membro (217) gli moltiplico, e paragonando la data col loro prodotto trovo I. $v=-t$, e quindi II. $u+s=t^2+p$, III. $u-s=\frac{q}{t}$, IV. $su=r$: sommo e sottraggo la II. e III., e viene

$u=\frac{1}{2}(p+t^2)+\frac{q}{2t}$, $s=\frac{1}{2}(p+t^2)-\frac{q}{2t}$, che moltiplicate danno

$su=r=\frac{1}{4}(p+t^2)^2-\frac{q^2}{4t^2}$, da cui la *ridotta* $t^6+2pt^4+(p^2-4r)t^2-q^2=0$ della forma generale $x^{3n}+px^{2n}+$ec.$=0$(240). Pongo $t^2=y$ ed ho $y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0$. Sieno y', y'', y''' le tre radici di quest'equazione: avremo $2p=-y'-y''-y'''$ (227.3.ª) e $q=\pm\sqrt{y'y''y'''}$, ove il segno di sotto avrà luogo soltanto quando q sia negativo. Sostituendo frattanto in $t^2=y$ uno qualunque dei tre valori di y, per esempio y', sarà $t=\pm\sqrt{y'}$ e quindi $4u=y'-y''-y'''+2\sqrt{y''y'''}$, e $4s=y'-y''-y'''-2\sqrt{y''y'''}$, e le radici della data o de' suoi due fattori saranno

$x=\frac{1}{2}(t+\sqrt{(t^2-4u)})=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{y'}\pm\sqrt{y''}\mp\sqrt{y'''})$

$x=\frac{1}{2}(t-\sqrt{(t^2-4u)})=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{y'}\mp\sqrt{y''}\pm\sqrt{y'''})$

$x=\frac{1}{2}(-t+\sqrt{(t^2-4s)})=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{y'}\pm\sqrt{y''}\pm\sqrt{y'''})$

$x=\frac{1}{2}(-t-\sqrt{(t^2-4s)})=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{y'}\mp\sqrt{y''}\mp\sqrt{y'''})$, presi come

si è detto, i segni di sotto se q è negativo. Così per $x^4-20x^2-12x+13=0$, ove $p=-20$, $q=-12$, $r=13$, la ridotta sarà $t^6-40t^4+348t^2-144=0$, che fatto $t^2=y$ diviene $y^3-40y^2+348y-144=0$, equazione che ha l'unica radice reale (233) $y'=12$; le altre due son contenute nel quoziente (236) $y^2-28y+12=0$, d'onde si ha (197) $y''=14+2\sqrt{46}$, $y'''=14-2\sqrt{46}$. Dunque $\sqrt{y'}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{y''}=$ (164) $\sqrt{(7+\sqrt{3})}+\sqrt{(7-\sqrt{3})}$, $\sqrt{y'''}=\sqrt{(7+\sqrt{3})}-\sqrt{(7-\sqrt{3})}$; e poichè q è negativo, sarà $x=-\sqrt{3}\mp\sqrt{(7-\sqrt{3})}$, $x=\sqrt{3}\mp\sqrt{(7+\sqrt{3})}$.

242. Nel modo stesso si risolvon l'equazioni della forma $x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+rx^n+v=0$, fatto $x^n=y$.

Equazioni del quinto grado, del sesto ec. risolubili col metodo precedente

243. Con un metodo analogo a quello che abbiamo spiegato (238), cerco i divisori o quadratici o cubici o biquadratici d'un'equazione che non ne ha dei semplici: se vi sono, l'equazione è *riducibile*; se no, è *irriducibile*. Tutti i gradi però hanno dell'equazioni che la formula generale (183) risolve.

244. Sia in essa $m=5$, $=6$, ec.; si troveranno sempre le radici delle seguenti equazioni $x^5-5abx^3+5a^2b^2x-a-b=0$; $x^6-6abx^4+9a^2b^2-2a^3b^3-a^6-b^6=0$ ec. Si abbia per esempio $x^5+5px^3+5p^2x+2q=0$. Sarà $p=-ab$, $2q=-a^5-b^5$, d'onde $a=\sqrt[5]{(-q\pm\sqrt{(q^2+p^5)})}$, $b=\sqrt[5]{(-q\mp\sqrt{(q^2+p^5)})}$, dunque $x=a+b=\sqrt[5]{(-q+\sqrt{(q^2+p^5)})}+\sqrt[5]{(-q-\sqrt{(q^2+p^5)})}$.

Equazioni di qualunque grado con radici reali irrazionali

245. Se l'equazione $X=0$ di grado qualunque non ha radice veruna reale e razionale, la spoglio del secondo termine (232), e formata quindi l'equazione delle differenze, con l'uno o con l'altro dei metodi già prescritti (210.221), determino il limite l, da cui dedotto λ, ho la serie $0, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}$, ec. (226), i termini della quale sostituiti in luogo dell'incognita nella proposta, possono immediatamente darmi un primo e assai approssimato valore delle cercate radici (226).

246. Ma poichè questa sostituzione di quantità nella maggior parte frazionarie riescirebbe forse difficoltosa, cangio nella proposta x in $\frac{\omega}{\lambda}$. E' chiaro che siccome le radici della nuova equazione saranno allora λ volte più grandi di quelle della proposta (218), così ne saranno λ volte maggiori le differenze, onde in luogo di far uso della serie precedente, potremo impunemente adoprarne una λ volte maggiore, quella cioè dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec. Col mezzo di questa otterremo con molto maggior prontezza i valori approssimati di ω, differenti dal vero meno che di un' unità, e che divisi per λ daranno quelli di x, o delle radici della proposta.

247. Sia frattanto p uno dei suddetti valori approssimati. Fatto $\omega = p + \frac{1}{\omega'}$, sarà $\frac{1}{\omega'}$ un rotto proprio e positivo, e per conseguenza ω' una quantità reale positiva e maggiore dell' unità (47). Sostituito perciò questo valor di ω nella trasformata precedente, ne risulterà una nuova trasformata in ω', che avrà necessariamente una radice reale positiva, di cui aver potremo il valore approssimato, mediante la semplice sostituzione dei numeri naturali, come abbiamo avuto quello di ω. Sia p' questo valore: in tal caso posto $\omega' = p' + \frac{1}{\omega''}$ sarà parimente anche ω'' una quantità maggiore di 1, e se ne avrà il valor prossimo nel modo medesimo con cui avuti abbiamo quelli di ω' e di ω. In egual modo fatto p'' questo valore e posto $\omega'' = p'' + \frac{1}{\omega'''}$ avremo con lo stesso metodo e con l'uso della medesima serie il valor prossimo di ω'''. Ed è chiaro che così seguitando, e sostituendo in fine gli uni negli altri in ordine retrogrado i valori di ω', ω'' ω''', ec. risulterà $\omega = p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \text{ec.}}}$ rotto continuo che diverrà ordinario col mezzo della nota espressione $\frac{N^{(k)}}{M^{(k)}}$ (62.60), d'onde in fine $x = \frac{N^{(k)}}{\lambda M^{(k)}}$

Esempio. Sia $x^3 - 7x + 7 = 0$. Per l'equazione delle differenze troveremo $z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$, i cui segni alternativi mostrano esser reali tutte le radici della proposta (227.2.ª),

come già d' altronde sappiamo, atteso il caso irriducibile in cui si trova compresa (239). Fatto $z=\frac{1}{\nu}$ (226) si ha $\nu^3-9\nu^2+\frac{42}{49}\nu-\frac{1}{49}=0$, per la quale $l=-9$ e $\lambda=3$. Porremo dunque $x=\frac{\omega}{3}$ (246) ed avremo $\omega^3-63\omega+189=0$, ove sostituiti i numeri naturali 0, 1, 2, ec, si trova un cambiamento di segno alla sostituzione del 5, ed un altro a quella del 6. Dunque quest' equazione ha due radici positive, una compresa fra il 4 e il 5, ed una fra il 5 e il 6. L'altra radice è negativa, come già si sa (214), e come pur lo mostra il limite 6 (221): quindi senza continuar le sostituzioni formo immediatamente l' equazione (209) $\omega^3-63\omega-189=0$, ove il cambiamento di segno s' incontra alla sostituzione del 10, onde la radice cercata è tra il 9 e il 10.

248. Ripresa adesso la prima radice in cui $p=4$, pongo $\omega=4+\frac{1}{\omega'}$, e dalla sostituzione di questo valore ho $\omega'^3-15\omega'^2+12\omega'+1=0$, ove il cambiamento di segno ha luogo fra il 14 e il 15: sarà dunque $p'=14$. Pongo perciò $\omega'=14+\frac{1}{\omega''}$, ed ho $27\omega''^3-180\omega''^2-27\omega''-1=0$, d'onde col solito metodo ottengo $p''=6$. Continuando così troverò $p'''=1$, $p'^{v}=4$, $p^{v}=6$, ec. Avrò dunque (55) $M'=1$, $M''=14$, $M'''=85$, $M'^{v}=99$, $M^{v}=481$, $M^{v'}=2985$, come pure $N'=4$, $N''=57$, $N'''=346$, $N'^{v}=403$, $N^{v}=1958$, $N^{v'}=12151$; e per le successive approssimazioni della prima radice della proposta $\frac{4}{3}, \frac{57}{42}, \frac{346}{255}, \frac{403}{297}, \frac{1958}{1443}, \frac{12151}{8955}$, le quali sono alternativamente maggiori e minori del vero (57.2.ª) e l' ultima non ne differisce neppure di un milionesimo. Operando con l' istesso sistema per l'altra radice positiva troverò le approssimazioni $\frac{5}{3}, \frac{66}{39}, \frac{401}{237}, \frac{467}{276}, \frac{2269}{1341}, \frac{14081}{8322}$. E quanto alla negativa, si avrà nel modo medesimo dall' equazione $\omega^3-63\omega-189=0$.

249. Osservazioni I. Se la proposta non ha che una sola radice reale, come per esempio, se è del terzo grado e fuori del caso irriducibile (239), potremo immediatamente sostituirvi la serie 1, 2, 3, ec. (246) senza permutarvi l' incognita in $\frac{\omega}{\lambda}$.

250. II. Se la proposta abbia uno o più paja di radici eguali, il che apparirà dall'equazione delle differenze (225), le sostituzioni

non saranno atte a farle conoscere (212). In tal caso si costruisca col metodo già prescritto (223) l'equazione $X'=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\text{ec.}=0$, a cui, come già sappiamo, tutte debbono soddisfare le radici eguali della data. Supposte a, b, c, ec. queste radici, ambedue l' equazioni $X=0$, $X'=0$ avranno dunque per fattore $(x-a)(x-b)(x-c)$ec. Perciò cercato il loro comun divisore D (159) e fatto D=0, le radici eguali della proposta si avranno immediatamente da questa nuova equazione. Quanto alle rimanenti ineguali, è chiaro che tutte saran contenute nel quoziente $\frac{X}{D^n}=0$

Esempio. Sia l' equazione $x^6-4x^5+3x^4+3x^2+4x+1=0$. Avremo $X'=6x^5-20x^4+12x^3+6x+4=0$, e $D=x^2-2x-1$. Fatto D=0, si ha $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, due radici che saranno due volte ripetute nella proposta.

INFINITI E INFINITESIMI

901. Intendiamo per quantità *infinite* e per quantità *infinitesime* quelle, la cui grandezza o piccolezza eccede qualunque valore che lor si volesse o si potesse assegnare, e che comunque grandi, o comunque piccole si concepiscano, posson sempre concepirsi anche maggiori o minori. Esse sono quell' estremo limite, a cui le quantità ognor crescenti o decrescenti tendono continuamente, senza poter mai raggiungerlo e molto meno oltrepassarlo. Così sarebbe infinito l' ultimo termine della serie crescente 1, 2, 3, 4 ec., ed infinitesimo l' ultimo della decrescente 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec. E' pure infinitesimo un rotto che abbia un denominatore infinito, poichè diminuendo il valor del rotto a misura che cresce quello del denominatore (48), quando questo ecceda qualunque grandezza assegnabile e divenga infinito, l' altro dovrà trovarsi inferiore a qualunque piccolezza assegnabile e divenire infinitesimo. Per l' opposta ragione sarà infinito un rotto che abbia un denominatore infinitesimo; molto più poi se lo avrà nullo.

902. Son del pari infiniti di numero i punti che distinti di luogo gli uni dagli altri posson segnarsi sopra una linea o retta o curva, la quale perciò o piccola o grande che sia, potrà riguardarsi come l' aggregato di un numero infinito di punti. Sono infinite di numero le linee che l' une consecutivamente all' altre

posson segnarsi sopra una superficie, la quale perciò sarà come l'aggregato di un numero infinito di linee. Sono infinite le sezioni parallele, che possono praticarsi in un solido, che sarà dunque come l'aggregato totale delle superficie di qualunque sezione. Quindi il punto sarà l'infinitesima parte della linea, la linea l'infinitesima parte della superficie, e questa l'infinitesima parte del solido.

903. Per esprimere o rappresentar l'infinito si usa il segno o il carattere ∞. L'espressioni 2∞, 3∞, $a\infty$ significano l'infinito preso 2, 3, a volte; ∞^2, ∞^3, ∞^n significano i prodotti di due, di tre, di n infiniti, che si chiamano anche infiniti del *secondo*, del *terzo*, dell' n^{simo} *ordine*. Così una linea d'infinita lunghezza è, rapporto al numero dei punti che vi son contenuti, un infinito di second' ordine; q^∞ è la potenza infinita di q o l'ultimo termine della progressione infinita q, q^2, q^3 ec. $\frac{a}{\infty^2}, \frac{a}{\infty^3}, \frac{a}{\infty^n}$ sono infinitesimi del *secondo*, del *terzo*, dell' n^{simo} ordine.

904. Le quantità infinitesime di un ordine qualunque sono infinitamente più piccole di quelle dell' ordine precedente, e infinitamente più grandi di quelle dell' ordine seguente, e perciò sono infinite rapporto alle seconde, infinitesime rapporto alle prime. Ciò facilmente risulta dalla proporzione $\frac{a}{\infty^{n+1}} : \frac{a}{\infty^n} :: \frac{a}{\infty^n} : \frac{a}{\infty^{n-1}}$: Oppostamente gl' infiniti d' ordine superiore sono infinitamente più grandi di quelli d' ordine inferiore e viceversa, come egualmente le finite sono infinitesime rapporto alle infinite, e infinite rapporto alle infinitesime; infatti $\infty : a :: a : \frac{a^2}{\infty}$.

905. Le quantità poste in calcolo dall' algebra or-

dinaria essendo supposte sempre finite, e perciò sostanzialmente differenti dalle infinite e infinitesime, ne segue che i principj ammessi per quelle saranno almeno in qualche parte insufficienti per queste, e l'intervento degli infiniti o degli infinitesimi in un' equazione esigerà nuovi canoni, senza i quali non saremo certi di giungere a risultamenti esatti e rigorosi. Il che quanto sia vero chiaramente apparirà dagli esempj seguenti.

I. Sia la progressione geometrica decrescente $\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}$ ec. continuata fino all' infinito, e voglia tutta sommarsi. Avremo (328) $a=\frac{3}{10}$, $q=\frac{1}{10}$, $n=\infty$ ed $s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^\infty}\right)$, mentre, come è già noto (89), dovrebbe aversi semplicemente $s=\frac{1}{3}$.

II. Posti a, b due archi qualunque, abbiamo dalla trigonometria (651. 77ª) $\frac{sen(a+b)}{sen(a-b)}=\frac{tang\,a+tang\,b}{tang\,a-tang\,b}$. Sia frattanto $a=90°$, avremo (644) $sen(a+b)=cos\,b$, $sen(a-b)=cos\,b$, $tang\,a=\frac{sen\,a}{cos\,a}=\frac{1}{0}$(633. 4.°)$=\infty$ (901); d' onde $1=\frac{\infty+tang\,b}{\infty-tang\,b}=1+\frac{2tang\,b}{\infty-tang\,b}$ in luogo di $1=1$.

51 III. Nel circolo AMB abbiamo la tangente $MT=\frac{r}{r-x}\sqrt{(2rx-x^2)}=r\sqrt{\left(\left(\frac{r}{r-x}\right)^2-1\right)}$(536). Fatto $x=r$ deve aversi $MT=r\infty$ (633. 4.°), mentre la formula dà $MT=\sqrt{(r^4\infty^2-r^2)}$.

146 IV. Dal vertice A dell' iperbola AMQ si conduca AS normale all' asse AN prolungandola fino all' incontro in S con la tangente TM. I triangoli TAS, TPM daranno TP:AT::PM:AS, ossia (786)

$\frac{x^2-a^2}{x} : \frac{ax-a^2}{x} :: \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} : AS = b\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. Se si supponga x infinita, e che per conseguenza la tangente MT si converta nell' asintoto CR (788), avremo $AS = b\sqrt{\frac{\infty-a}{\infty+a}}$, mentre sappiamo che deve aversi semplicemente $AS = b$ (*ivi*).

V°. Nell' istessa iperbola abbiamo $AT = a - \frac{a^2}{x}$ (786). Supposta $x = \infty$ si sa che deve risultarne $AT = AC = a$ (788), e frattanto l'equazione darebbe $AT = a - \frac{a^2}{\infty}$.

906. Or da questi esempj e da moltissimi altri che potremmo nel modo stesso esibire, apparisce 1.° che i risultamenti ottenuti con le regole ordinarie dell' algebra, e nei quali si trovano termini di valore finito congiunti a termini di valore infinito o infinitesimo, sono erronei; 2.° che per ridurgli al loro giusto valore *bisogna eliminare tutti gli infinitesimi che si trovano di seguito alle quantità finite, e le finite che si trovano di seguito alle infinite*: o che è lo stesso, *conviene istituire delle particolari equazioni tra le quantità finite nel primo caso, e tra le infinite nel secondo*. Applicando infatti questo principio agli addotti esempj, tutti i risultamenti divengon subito esatti.

907. Ma come potrebbe sempre, e con qualche ragione, dubitarsi della generalità di un principio, il quale non avesse altro appoggio, che esempj e prove particolari, per quanto queste fossero numerose, eccone una dimostrazione semplice e piana, dedotta dalle nozioni medesime che abbiamo date degl' infiniti e degl' infinitesimi (901). Sieno a, b due quantità finite ed α, β due quantità infinitesime, e si abbia l' equazione $a - \alpha = b + \beta$. Se non fosse $a = b$, potremmo sup-

porre $a=b\pm c$, valore che sostituito nell' equazione porterebbe a concludere $\beta-\alpha=\pm c$. Or perchè ciò sussistesse converrebbe che α e β non potessero esser minori di c; il che ripugnando al supposto che α e β sieno infinitesime (901), rende manifesto che non può esservi differenza alcuna fra a e b, ossia che deve aversi $a=b$. Lo stesso si dica se a, b fossero infinite ed α, β finite, o se quelle fossero infinite di un ordine superiore, queste d' un inferiore, o se quelle fossero infinitesime di un ordine inferiore, queste di un superiore: poichè in ciascuno di questi casi α e β sarebbero sempre infinitesime rapporto ad a, b (904).

908. E' però da avvertirsi 1.° che quantunque nell' equazione $a+\alpha=b+\beta$ debba supporsi $a=b$, non sempre potremo altresì concludere $\alpha=\beta$; poichè la differenza $\beta-\alpha$ fra β e α può sempre concepirsi minore di c senza che per questo sia zero. Così nell' analisi dei finiti per quanto da $am=an$ risulti in generale $m=n$, non ha luogo però questa medesima conseguenza quando sia $a=0$, o che si abbia $0\times m=0\times n$; come del pari da $b^a=a^a$ (134) non può dedursi $b=a$, quantunque ciò venga dato dall' equazione più generale $b^m=a^m$. 2.° La soppressione delle quantità finite di faccia alle infinite non deve aver luogo quando sì l' une che l' altre faccian parte di un esponente: così $q^{\infty+1}$ non può ridursi a q^∞; perchè in tal caso l' unità aggiunta all' infinito non indica somma, ma prodotto, e si ha $q^{\infty+1}=q^\infty\times q$, espressione ben differente da q^∞ (903).

909. Il principio che abbiamo sopra stabilito (906.2.°) è stato per lungo tempo assunto per base del calcolo *differenziale* di cui adesso entriamo a trattare, e noi pure seguitando il più gran numero dei Geometri, per tale lo assumeremo. L' apparente contradizione

che regna fra il medesimo e i canoni ordinarj delle equazioni (187), nasce dall' impossibilità di formarci un' idea giusta e completa dell' infinito e dell' infinitesimo; nè d' altronde deve muoverci a dubitare della di lui verità, dopo le prove che ne abbiamo arrecate e il ragionamento col quale l' abbiamo comprovato. Le matematiche son piene di simili enigmi, forse anche più inintelligibili, ed ai quali frattanto comechè assistiti dall' appoggio dei raziocinj e dei fatti, niuno ardirebbe di contradire. La regola dei segni (118), quelle dei radicali irrazionali, e molto più quelle degli immaginarj (157) somministrano luminosi esempj di questo genere.

Leibnizio, che il primo arricchì l' analisi del principio, del quale parliamo, lo riguardò come assioma, sembrandogli troppo evidente che due quantità debbano prendersi per eguali, allorchè la lor differenza è minore di qualunque quantità immaginabile ed assegnabile; e poco o niente curando le speciose objezioni che gli venivano opposte, non pensò che a trar partito dalla prodigiosa fecondità del suo fortunato concetto, ed entrar coraggioso nel vasto campo di scoperte a cui mediante il medesimo si era aperta la più facile strada. *Eulero* che volle poscia ridurlo a teorema non fu molto felice nei suoi tentativi; ed anzi che diminuire, piuttosto contribuì ad accrescere le querele degli oppositori: talchè i più insigni fra i susseguenti Analisti giudicaron miglior partito di abbandonare il principio infinitesimale, e supplire con altri che fossero maggiormente al coperto dagli attacchi di tutte le metafisiche sottigliezze. Il metodo dei *limiti* e quello delle *derivazioni*, a questo proposito immaginati, riescirono applauditissimi, e lor si applaude tuttora: ma poichè quanto questi sie-

peravano l' antico principio per parte dell' evidenza geometrica, altrettanto gli cedevano nella semplicità e nella facilità delle applicazioni, il canone Leibniziano fu perciò di nuovo proposto e raccomandato da quei medesimi che più faticato avevano per farlo abbandonare. Il merito di averlo in seguito posto nel più chiaro lume si deve a *Carnot*, che prendendo a sviluppare un' idea già prodotta da *La-Grange*, mostrò come la soppressione delle quantità infinitesime in faccia alle finite o di queste in faccia alle infinite non è un errore che si commetta, ma la compensazione di un errore già commesso ed involto nell' ipotesi stessa, d' onde sempre partiamo, qualunque volta si procede all' applicazione del principio di cui si tratta. Si vedano le di lui *riflessioni sulla metafisica del calcolo infinitesimale*.

Del resto determinandoci noi per questo principio, attesa specialmente la facilità di applicarlo, non intendiamo con ciò di dargli alcuna preferenza sugli altri, che avremo anzi cura di richiamare, qualunque volta occorra di convalidar maggiormente le più importanti proposizioni. Già abbiamo data a suo luogo un' idea dell' analisi derivata (390 - 393), altrettanto a tempo opportuno faremo del metodo dei limiti. Esortiamo poi vivamente i Giovani vogliosi di continuare nell' intrapresa carriera, a bene impadronirsi dell' uno e dell' altro metodo, ma specialmente del primo, che troveranno pienamente esposto e discusso nella *Teoria delle funzioni analitiche* di *La Grange*, e nelle *Lezioni sul calcolo delle funzioni*. Questo studio é reso in oggi necessario per l' intelligenza dei più moderni Scrittori, come lo studio del calcolo infinitesimale è indispensabile per chi vuole internarsi nelle opere luminose di *Eulero*, dei *Bernoulli*, di *La-Grange* stesso e di *La-Place*, e specialmente nelle due *Meccaniche Analitica* e *Celeste*, che tra le classiche avranno per lungo tempo il vanto di essere considerate per le più insigni.

Il concetto di limite

Le serie numeriche

Gli ordinali transfiniti

I paradossi dell'infinito secondo Galilei

La teoria degli indivisibili

L'iperbole

I numeri complessi o immaginari

Leibniz

Eulero

Lagrange

Bernoulli

Matematica e Architettura

Il rapporto aureo
L'*Architettura* di Vitruvio
***De Re Aedificatoria* di Leon Battista Alberti**
Edifici a pianta poligonale
Le coniche in architettura

Matematica e Arte

La presenza della matematica nella storia dell'arte è quasi costante, se pure con intensità differente, se non altro perché **linea**, **forma** e **volume** sono nozioni squisitamente geometriche e sono, insieme al colore, alla base di ogni costruzione artistica.

Tuttavia il momento in cui, in modo più significativo e puntuale, la matematica interviene nel mondo artistico è quello del **Quattrocento**, noto anche come **Umanesimo**. I bagliori dell'Umanesimo, però, possono essere rintracciati più indietro nel tempo già con Giotto la cui arte rappresenta una novità per il desiderio di equilibrio tra figure e paesaggio.

Nel **Medio Evo** l'uomo *non indaga ma accetta* e si preoccupa solo di realizzare un patrimonio di beni per l'aldilà.
Già nella seconda metà del **Trecento**, si intravede un nuovo modo di sentire il rapporto **uomo-natura** ed **uomo-Dio**, che, accompagnato da un profondo sentimento della nobiltà dell'uomo, sarà motivo dominante nel Quattrocento. Gli scrittori insistono sulla coscienza della dignità umana: l'uomo è fatto da Dio a immagine e somiglianza e ***deve guardare alla natura per capire in cosa consista la sua nobiltà.***
La natura diventa così oggetto di conoscenza e l'indagine è razionale; **agere et intelligere, natura e dottrina**. La Matematica è l'amore sommo e il numero è il mezzo che dà certezza. La "Scientia" è investigazione sistematica della realtà perché l'uomo aspira ad essere controllore dell'universo ed assume se stesso come valore limite.

C'è anche un vivissimo rapporto con l'antico. Gli artisti guardano al mondo classico non per imitarlo ma perché trovano in esso l'identica maniera di apprezzare l'uomo. I testi di **Vitruvio** diventano sacri punti di riferimento. Questa concezione si presenta in modo più evidente in architettura, dove è fondamentale la relazione tra uomo e spazio.
Nel **Romanico** lo spazio è sentito per creare misticismo, nel **Gotico** il verticalismo accentuato suggerisce l'infinità dello spazio e di nuovo conduce al misticismo. Nel **Quattrocento** l'ambiente diventa sereno, fatto per l'uomo che si impadronisce di tutte le ragioni costruttive. Il controllo dello spazio avviene attraverso la **prospettiva**: essa regola i rapporti tra l'uomo e lo spazio circostante; nulla è casuale, tutto è controllato.

G. D. Birkhoff - *Collected Mathematical Papers. Volume III. New York,*

K. Chandrasekharan - *Hermann Weyl (1885-1985): Centenary Lectures. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1986*

Dal mondo greco

Il rapporto aureo

Le tassellature

Artisti che si sono ispirati alla matematica:

- **Vitruvio**
- **Leon Battista Alberti**
- **Piero della Francesca**
- **Leonardo da Vinci**
- **Albrecht Dürer**

Le coniche nell'arte

Matematica e Astronomia

G. Galilei - *Sidereus Nuncius. Venetii, 1610*

A. Cagnoli - *Trigonometria piana e sferica. Parigi, 1786*

I grandi astronomi della storia:
Claudio Tolomeo
Copernico
Tycho Brahe
Keplero
Galileo Galilei

Il cannocchiale di Galileo
Il telescopio parabolico (dalla *Dioptrique* di Cartesio)
Il telescopio a riflessione totale di Newton

La parallasse

Matematica e balistica

N. Tartaglia - *La Nova Scientia. Venezia, 1550*

La parabola e la caduta dei gravi
La traiettoria dei proiettili secondo Galileo

Matematica e Biologia

Vito Volterra - *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Paris, 1931*

I numeri di Fibonacci e la fillotassi

I frattali in natura

La matematica nella genetica

Matematica e cartografia

Storia della cartografia
Il problema della longitudine

Dal mondo greco

Dal XII al IX secolo a.C. la penisola ellenica attraversa un periodo noto come Medioevo Ellenico o Fase Geometrica a motivo della caratteristica decorazione dei vasi. Scarsissime sono le opere d'arte di questo periodo giunte fino a noi. Tre **vasi** costituiscono l'unica testimonianza artistica abbastanza completa di questo periodo. Le loro decorazioni a fasce sovrapposte, che ricoprono interamente le superfici, sono costituite da un repertorio geometrico di gusto nordico-barbarico, purificato e reso assoluto da una ricerca di stile rigoroso ed astratto.

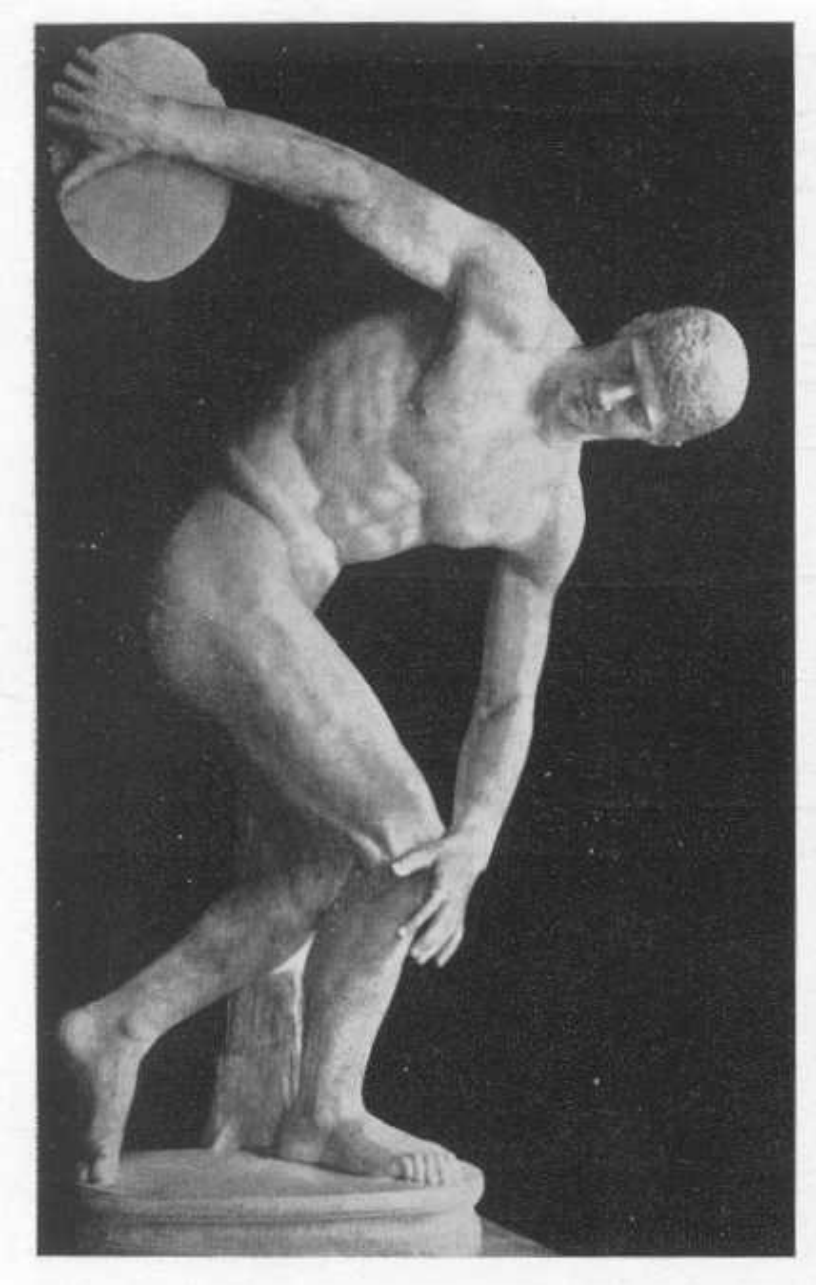
All'età arcaica, (dal secolo VIII alla metà del V secolo a.C.), ed esattamente al periodo 500-450 a.C. risale il **Discobolo** di Mirone opera che ci è giunta purtroppo solo in copie romane di marmo. La statua rappresenta l'atleta al termine del moto pendolare che precede il lancio del disco.

"*Ogni muscolo appare rilevato e irrigidito dallo sforzo, e descritto con una minuzia analitica che distrarrebbe dalla visione d'insieme, se non intervenisse una logica costruttiva di carattere geometrico. L'immagine appare appiattita in uno spazio di scarsa profondità, entro due ideali piani paralleli, e le membra si dispongono come se fossero inserite in una serie giustapposta di ideali triangoli, per esempio: testa-braccia, testa-anca-ginocchio, anca-ginocchio-piede. Questo metodo di razionalizzare la figura umana subordinandola ad uno schema esterno, rappresenta l'estremo sviluppo dello spirito geometrico dell'arcaismo greco.*"

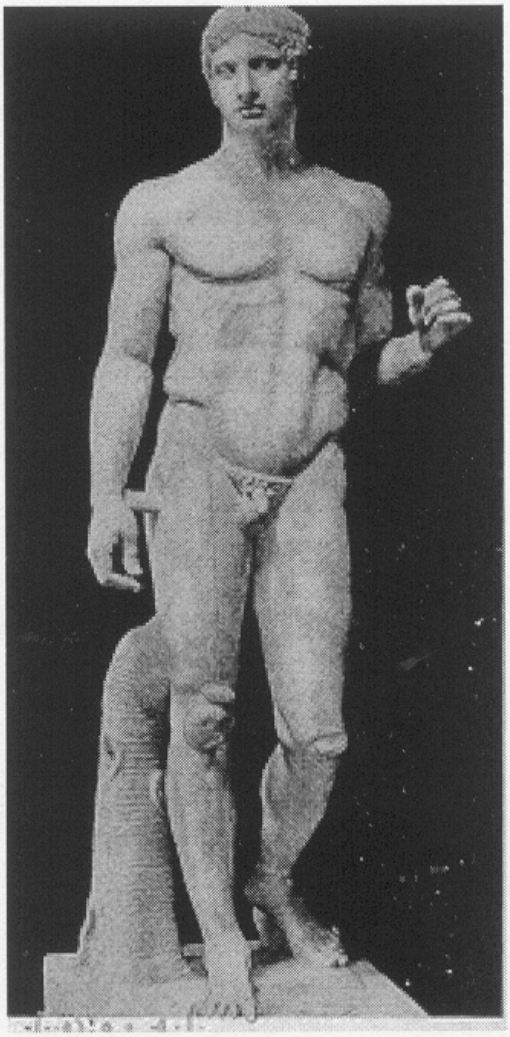
All'età classica (seconda metà del V secolo e IV secolo a.C.) e precisamente alla seconda metà del V secolo appartiene il **Doriforo** (portatore di lancia) di Policleto, anche questa opera in copia romana di marmo. "*Il Doriforo è concepito come una robusta costruzione di volumi, ma in esso si realizza un nuovo equilibrio classico che non risulta dalla simmetrica composizione delle parti, bensì dal loro armonico contrapporsi, sottolineato nei punti di raccordo da ombre profonde. Ma vi è un altro fattore che dà un tono nettamente classico al Doriforo: la proporzionalità. A quanto ci narrano infatti le antiche fonti, Policleto fu un teorico delle proporzioni ed elaborò in un suo saggio -il Kánon- un sistema di armonici rapporti da lui ideato. Il Doriforo fu appunto scolpito per esemplificare tale sistema che stabiliva un rapporto proporzionale tra l'altezza totale del corpo e le singole parti: un sesto dell'altezza dava la misura del piede, un ottavo la misura della testa, un decimo il viso e la mano etc.*"

(citazioni da Storia dell'arte, vol. I di L. Castelfranchi Vegas e E. Cerchiari Necchi)

Il Discobolo di Mirone



Il Doriforo di Policleto



Matematica ed Economia

Notevole è l'intreccio tra matematica ed economia, e non è un caso che la Ragioneria, disciplina portante del gruppo Economico-Aziendale, vanti tra i suoi iniziatori quel **Fibonacci** e quel **Luca Pacioli** che tanto hanno dato anche allo sviluppo della matematica. Sicuramente l'impulso a tanto studio è venuto dalla vasta attività commerciale dell'Alto Medioevo. Problemi legati alle attività dei mercanti si trovano in molti testi (**Perini**, **Pagani**, **Alberti**) sotto il nome di aritmetica pratica o di aritmetica mercantile.
Contributi vennero anche da **Cardano** e **Tartaglia**. Riportiamo un esempio tratto dalla Storia della Ragioneria Italiana di Plinio Bariola, con riferimento al calcolo degli interessi.
Gli scrittori di aritmetica mercantile usavano il termine *"merito"* per *interesse* e *"meritare un capitale ad un tanto per cento"* significava trovare l'interesse che quel capitale produceva a quel dato tasso nel tempo stabilito.
I conteggi dell'interesse semplice venivano insegnati con dovizia di esemplificazioni e risolti sempre con la regola del tre. Non c'è traccia di regole particolari o formule che leghino i vari elementi che concorrono al calcolo dell'interesse: *capitale, tasso, tempo, montante, valuta attuale.*
Per quanto riguarda il *"meritare a capo d'anno"* ovvero *l'interesse composto*, si procedeva come nel seguente esempio (in lire attuali):
"A quanto ammonterà il capitale di L. 3815 al 6 per cento a far capo d'anno dopo 2 anni e 6 mesi?
Secondo Pacioli: L.3815 al 6% dopo il 1° anno saranno L. 4043,90
dopo il 2° anno saranno L. 4286,53
dopo il 3° anno saranno L. 4543,72
A questo punto bisogna scontare queste 4543,72 lire per mesi 6 al 6% ed il ragionamento è questo: meritando 100 lire al 6%, dopo un anno ritornano L. 106, dopo 6 mesi ritorneranno L.103. Viceversa se L.103 ritornano L.100, quanto ritorneranno L. 4543,72? Facendo il calcolo si ottiene L. 4411,38 che sarà l'ammontare richiesto.
Secondo Cardano: Cardano arriva allo stesso risultato con un procedimento più complicato. Trova il montante al terzo anno in L. 4543,72 e vi aggiunge l'interesse semplice per altri 6 mesi, pari allo scarto tra i tre anni ed il periodo effettivamente ipotizzato, totalizzando L. 4680,03.
Quindi divide il quadrato del montante del terzo anno (L. 4543,72) per il totale appena ottenuto (L. 4680,03) e perviene a L. 4411,38.
Secondo Tartaglia: Tartaglia ragiona in modo differente e dichiara errati i ragionamenti del Pacioli e del Cardano.

Egli suppone il caso: *Lire 860. soldi 16. denari 8. al 10 per cento a far capo d'anno. A quanto ammonteranno dopo anni 2, mesi 9, giorni 15?*
Con i metodi precedenti si trova L. 1122. s.7. d.8.
Il Tartaglia risolve il quesito così:
L. 860. s.16. d.8. al 10% dopo il 1° anno diventano L. 946. s.18. d. 4
dopo il 2° anno diventano L.1041. s.12. d. 2
e queste L.1041. s.12. d. 2 le merita semplicemente per mesi 9 e mezzo ottenendo L. 1124. s.1. d. 4.
Aggiunge *"com'è detto alcun dirà che io favorisco li usurai, a questi tali rispondo che quello che ho detto non l'ho detto per favorire l'usurai, ma per dire la verità, ma perché tal passo è più presto giudiziale che razionale ne matematico, e le cose giudiziali ognuno le piglia secondo il suo parere, e però pigliala come ti pare."*

Si noti che il metodo usato da Tartaglia è in realtà quello che viene usato attualmente.

Luca Pacioli - ***Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalità. Venezia, 1494.***

A. Bordoni - *Proposizioni teoriche e pratiche. Pavia, 1842*

G. Scorza - *Opere Scelte, Volume I. Roma, 1960*

L'aritmetica mercantile

I frattali e l'economia (B. Mandelbrot)

Matematica e Filosofia

Più intrigante è il rapporto tra Matematica e Filosofia. Da sempre matematici e filosofi hanno condiviso lo sforzo di chiarire e/o scoprire l'essenza di alcuni concetti formali e generali come quello di numero, di infinito, di infinitesimo, di limitato ed illimitato, di spazio e tempo aldilà del nostro modo di impadronircene misurandoli.

Gauss e Kant

Quando nel 1855 **Gauss** muore, vengono resi pubblici la sua corrispondenza ed i suoi appunti inediti e si scopre che Egli aveva già da tempo maturato la convinzione che alla Geometria Euclidea non spettasse quel ruolo assoluto che duemila anni di storia le avevano attribuito.

Cosa può aver indotto una personalità del calibro di Gauss a non rendere note le sue scoperte sulla **Geometria non Euclidea** ed in particolare su quella iperbolica, in un periodo in cui il mondo matematico si affannava a dirimere l'annosa questione della indipendenza del **postulato delle parallele**?

Vi sono due ordini di considerazione a questo riguardo.

La prima è che Gauss era un perfezionista e, fedele al suo motto *"pauca sed matura"* amava pubblicare soltanto risultati completi. Il suo impegno in molte branche della matematica, in astronomia, in geodesia, in fisica, la scoperta del telegrafo con **W. Weber** non gli diedero il tempo di porre le sue scoperte in una forma definitiva e perfetta.

La seconda è che Gauss era consapevole dello scalpore che i suoi risultati avrebbero prodotto e non amava l'idea di essere coinvolto nelle critiche, a volte ridicolizzanti che sempre accompagnano, da parte dei più, i cambiamenti profondi.

La sua epoca era dominata dal più grande filosofo europeo del XVIII secolo, **Immanuel Kant**, che nella ***Critica della ragion pura*** aveva scritto *"il concetto* di *spazio (euclideo) è ben lungi dall'essere di origine empirica, esso è una inevitabile necessità del pensiero".* Pubblicare i suoi risultati avrebbe di certo significato innescare una lunga polemica con i numerosi seguaci di Kant, creando una situazione da cui Egli rifuggiva.

G. D. Birkhoff - *Collected Mathematical Papers. Volume III. New York, 1950*

La Scuola di Pitagora
La logica aristotelica: il sillogismo
I *Dialoghi* di Platone
La visione del mondo di Cartesio
L'*ésprit géométrique* di Pascal
Il problema del linguaggio universale: - **Cartesio**
- **Leibniz**
- **Leopardi**
- **Peano**

I fondamenti della matematica
Il nominalismo
L'intuizionismo
Il problema dell'uno e dell'unità
Finito ed infinito

Matematica e Meccanica

V. Riccati - *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium – Commentarius. Bononiae, 1751*

T. Levi-Civita - *Opere Matematiche - Memorie e note. Volume IV. Bologna, 1960*

La meccanica di Leonardo da Vinci
I *Discorsi intorno a due nuove scienze* di Galileo
La scienza di Cartesio
I *Principia Mathematica* di Newton
La relatività einsteiniana

Matematica e Informatica

J. von Neumann - ***Collected Works Volume V: Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis. Oxford-London-New York-Paris, 1963***

C. Di Comite, P. Ronchi - ***Pascal e matematica, Bari, 1991***

J-M. Morel, S. Solimini - ***Variational Methods in Image Segmentation Boston-Basel-Berlin 1995***

Il calcolo meccanico

Il linguaggio dell'Intelligenza Artificiale (U. Eco)

Matematica e Letteratura

G. D. Birkhoff - *Collected Mathematical Papers. Volume III. New York, 1950*

Giacomo Leopardi:
- **Lo *Zibaldone***
- **Il *Copernico***
- **La *Storia dell'Astronomia***

La *Mascheroniana* di Vincenzo Monti
I versi di Mascheroni

I poligoni di *Flatlandia*

Una poesia tedesca sul V postulato di Euclide

***Il senso di Smilla per la neve:* la storia dei numeri**

Longitudine

Brani biografici e d autobiografici:
- **Archimede (L.B. Alberti)**
- **Evariste Galois (T. Petsinis)**
- **Sonja Kowalewsky**

Matematica e Tecniche di Misurazione

L. Perini - *Geometria Pratica. Venezia , 1791*

I *Ludi Matematici* di L.B. Alberti
La diottra del Tartaglia

Matematica e Musica

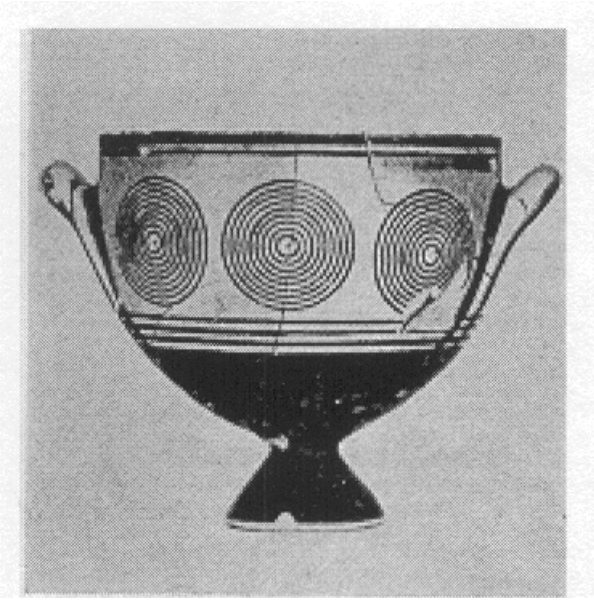
La teoria musicale pitagorica
Il *Compendium Musicae* di Cartesio
I numeri di Fibonacci nella musica

Matematica e Ottica

G. Ferraris - Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici. Esposizione elementare della teoria di Gauss e delle sue applicazioni……. 1877

L'*Ottica* di Euclide
La *Catottrica* di Erone
Il cannocchiale di Galileo
La *Dioptrique* di Cartesio
Il contributo di Huyghens
Il contributo di Newton
Le proprietà ottiche delle coniche

Vasi





La matematica indiana e araba

La **matematica indiana**, pur avendo origini molto antiche, fiorisce solo dopo la conquista da parte di Alessandro Magno nel 326 a.C.. Il più antico documento che si conosca è l'opera ***Śulvasūtra*** di **Apastamba** che contiene materiale di probabile provenienza greca, come le **terne pitagoriche** e un tentativo di **quadratura del cerchio**. I problemi di geometria traggono origine da esigenze di tipo rituale, come la costruzione di altari aventi determinate forme e dimensioni, e vengono risolti mediante costruzioni analoghe a quelle presentate negli ***Elementi*** di **Euclide**.

Aryabhata (V-VI sec d.C.) è considerato l'inventore del sistema numerico decimale, che giunse, molti secoli dopo, in Europa attraverso i matematici arabi.

Brahmagupta (VI sec. d.C.) è ricordato soprattutto per aver considerato per primo lo **zero** ed i numeri negativi, ma anche per aver esteso la formula di **Erone**, valida per i triangoli, ai quadrilateri: l'area di un quadrilatero di lati a,b,c,d e semiperimetro s sarebbe data da:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

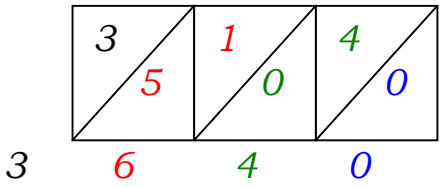
Questa formula, in realtà, è corretta solo per quadrilateri *ciclici*, ossia quelli che possono essere inscritti in un cerchio.

L'opera principale di **Bhaskara** (XII sec. d.C.), il ***Lilavati***, è un compendio della matematica indiana, e contiene capitoli di astronomia, algebra e geometria. Vi compaiono le soluzioni di equazioni algebriche, anche indeterminate, oltre al **teorema di Pitagora** – nella forma della "**canna di bambù spezzata**", che troviamo anche nella **matematica cinese**. Il titolo è il nome della figlia dell'autore; egli le volle dedicare il suo scritto per consolarla. Una leggenda narra che una perla, caduta dal suo turbante in un orologio ad acqua, bloccò quest'ultimo prima dello scoccare dell'ora, in cui, secondo le previsioni astrologiche del padre, la ragazza avrebbe dovuto incontrare l'uomo della sua vita.
Bhaskara fu il primo a considerare infinita una frazione avente *0* a denominatore.

Il linguaggio matematico usato da Bhaskara, che mescola formule a parole, è un bell'esempio di quella che, secondo la **classificazione di Nesselmann**, è chiamata "***algebra sincopata***".

Gli Indiani svilupparono molte tecniche di calcolo aritmetico, che **Fibonacci** apprese durante i suoi viaggi commerciali in Oriente, e portò in Europa. Ecco un esempio di moltiplicazione, che appare, tra l'altro, nella ***Summa*** di **Luca Pacioli**:

$$728 \times 5 = 3640$$



Nei tre quadrati vengono scritti i prodotti delle cifre *7, 2* e *8* per *5*, inserendo una cifra in ciascuno dei due triangoli. Quindi si sommano le cifre in ciascuna fascia diagonale.

La **civiltà araba** nacque nel VII sec. d.C., quando vari popoli nomadici si riunirono per fondare un'unica grande nazione islamica, che dalla Penisola Araba si espanse, fino ad occupare, nell'arco di tre secoli, un vastissimo territorio che va dall'attuale Iran alla Spagna. Il periodo di massimo splendore culturale ed artistico va dal IX al XI secolo. A quest'epoca risalgono le numerose traduzioni arabe delle opere filosofiche e scientifiche dell'Antica Grecia, tra cui le edizioni commentate degli scritti aristotelici, realizzate da Averroè. D'altra parte gli stessi ***Elementi*** di **Euclide** approdarono in Europa intorno all'anno Mille nelle versioni arabe.

Alhazen (sec. X-XI d.C.) nacque a Bassora, nell'attuale Iraq: il suo nome è rimasto legato ad un noto problema di ottica geometrica, ma gli spetta il merito di aver calcolato il volume del paraboloide con una tecnica che anticipa il metodo delle serie di Newton**.**

Al-Biruni (sec. X-XI d.C.) trovò una **risoluzione delle equazioni di terzo grado per via trigonometrica**. Fu inoltre uno studioso di astronomia ed un compilatore di calendari. Si occupò del **problema della longitudine**.

I capostipiti della matematica araba sono **Al-Khuwarizmi** e **Khayyam**.

La principale differenza tra la matematica indiana e quella araba risiede nel linguaggio: in base alla classificazione di Nesselmann, la seconda è ancora interamente basata sull'***algebra retorica***.

La numerazione indo-arabica

Abu Abd-Allah ibn Musa Al-Khuwarizmi (IX secolo d.C.)
Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w'al-muqabalah

(Compendio di calcolo mediante completamento e bilanciamento)

Il nome dell'autore e il titolo dell'opera

Il nome *Al-Khuwarizmi* deriva dall'oasi di Chiva, luogo di origine dell'autore, mentre *ibn Musa* significa figlio di Mosè.



Il termine *al-jabr* significa *completamento* (o *ripristino*), ed indica l'eliminazione delle quantità negative da un'equazione. Per esempio, *al-jabr* trasforma $x = 10 - 3x$ in $4x = 10$. La parola *algebra* deriva proprio da *al-jabr,* e quest'opera è considerata il documento fondatore della disciplina. Il termine *al-muqabalah* significa *bilanciamento* (o *semplificazione*) ed indica l'atto di ridurre le quantità positive della stessa potenza su entrambi i membri dell'equazione.

Per esempio, *al-muqabalah* trasforma $10x + 64 = 5x + 36 + x^2$ in $5x + 28 = x^2$. Secondo altri l'espressione *al-jabr w'al-muqabalah* sarebbe formata dal termine assiro e dal termine arabo per *equazioni,* altri ancora fanno derivare entrambe le parole dal siriaco e interpretano *al-jabr* come *arte di uomo eccellente* e *w'al-muqabalah* come *libro delle scienze occulte.*

Curiosità

Il termine al-jabr assunse anche il significato di conciaossa, che conservò anche quando, in seguito all'arrivo dei Mori nella Penisola Iberica, esso venne ispanizzato in *algebrista.* Ai tempi del dominio arabo, in Spagna era frequente vedere un'insegna recante la scritta *"Algebrista y Sangrador" (conciaossa e salassatore)* sopra le porte delle botteghe dei barbieri, ai quali era affidato anche il compito di fornire le cure mediche più semplici. Nell'Italia del sec. XVI la parola *algebra* veniva ancora usata per indicare l'arte di aggiustare le ossa. Nella prima versione latina dell'opera di Al-Khuwarizmi (sec. XII) il titolo venne tradotto in *Ludus algebrae et almucgrabalaeque.*

L'opera

Quest'opera, scritta nel 830 d.C., fu concepita come libro di testo elementare di matematica pratica. Essa fu conosciuta in Europa solo qualche secolo più tardi, grazie ad una traduzione del sec. XII. Il libro si apre con una trattazione sulle equazioni algebriche, e si conclude pervenendo alle applicazioni a problemi di misurazione ed eredità.

Nella prima parte l'autore distingue e risolve sei tipi di equazioni di primo e secondo grado, che elenchiamo di seguito, riportando a lato la notazione moderna:

quadrati uguali a radici	$ax^2 = bx$
quadrati uguali a numeri	$ax^2 = c$
radici uguali a numeri	$bx = c$
quadrati e radici uguali a numeri	$ax^2 + bx = c$
radici e numeri uguali a quadrati	$bx + c = ax^2$

Questa distinzione di casi dipende dal fatto che all'epoca di Al-Khuwarizmi, e per molti secoli dopo, in matematica i coefficienti erano rigorosamente positivi. Inoltre non venivano usati simboli matematici, tutto veniva descritto a parole: a questo proposito Nesselmann parla di ***algebra retorica***.

L'incognita è chiamata *cosa* o *radice* (di una pianta), termine, quest'ultimo, che è tuttora in uso per indicare la soluzione di un'equazione algebrica. Può essere interessante confrontare la **nomenclatura** adottata da Al-Khuwarizmi per le potenze dell'incognita con quelle tipiche di altre scuole matematiche.

Nel **Capitolo I** Al-Khuwarizmi presenta sistematicamente le soluzioni algebriche, note fin dall'Antica **Babilonia**, di alcuni casi particolari di queste equazioni. Mancano le dimostrazioni e la trattazione generale, e le radici sono sempre reali e positive, ma possono essere irrazionali. Nel **Capitolo II** il Nostro fornisce una giustificazione geometrica alle regole algebriche enunciate. Si consideri la sua risoluzione di un caso particolare dei *quadrati e radici uguali a numeri:*

"... un quadrato e 10 radici sono uguali a 39 unità. La domanda in questo tipo di equazione è dunque la seguente: qual è il quadrato che combinato con dieci delle sue radici darà una somma totale di 39? Il modo di risolvere questa equazione è quello di prendere metà delle radici anzidette. Ora, le radici nel nostro problema sono 10. Quindi se ne

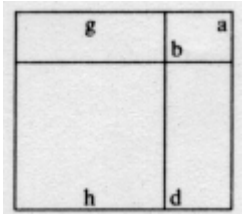
prendano 5, che moltiplicato per se stesso dà 25, una quantità che aggiunta a 39 dà 64. Avendo poi estratto da quest'ultimo la radice quadrata, che è 8, se ne sottragga la metà delle radici, cioè 5, il che dà 3. Il numero 3 quindi rappresenta una radice di questo quadrato, che naturalmente è 9. Dunque 9 dà il quadrato. "

In notazione moderna il problema è quello di risolvere l'equazione

$$x^2+10x = 39$$

Il metodo, trascritto passo passo, si traduce in:
- $1/2 \cdot 10 = 5$
- $5^2 = 25$
- $39 + 25 = 64$
- *radice quadrata di 64 = 8*
- $8 - 1/2 \cdot 10 = 3$
- $x = 3$, *e* $x^2 = 9$.

Tuttavia Al-Khuwarizmi va ben oltre la semplice dimostrazione della ricetta trovata nei testi babilonesi. Egli insiste nel sovrapporre ai contenuti algebrici un'argomentazione geometrica di stampo euclideo. Quindi, dopo aver esplicitamente detto che *"...è necessario che dimostriamo geometricamente la veridicità degli stessi problemi che abbiamo spiegato in termini di numeri",* egli procede a giustificare l'esempio di cui sopra con due diverse costruzioni geometriche, che danno tutte e due un completamento del quadrato. Nella seconda di queste costruzioni egli richiede:



"...al quadrato che rappresenta il quadrato dell'incognita aggiungiamo dieci radici e quindi prendiamo metà di queste radici, cioè 5. Da qui costruiamo due aree sui lati del quadrato ab.

Queste sono chiamate ag e bd. La larghezza di ciascuna di queste è uguale alla larghezza di un lato del quadrato ab ed ogni lunghezza è

uguale a 5. Ora dobbiamo completare il quadrato col prodotto di 5 e 5, cioè la metà delle radici, che aggiungiamo ai due lati del primo quadrato, il quale rappresenta la seconda potenza dell'incognita. Quindi ora pare evidente che le due aree congiunte ai due lati, che rappresentano 10 radici, aggiunte al primo quadrato, che rappresenta x^2, danno 39. Inoltre è chiaro che il quadrato intero è formato aggiungendo il prodotto di 5 per 5. Questo quadrato è completato e per il suo completamento si somma 25 a 39. Il totale è 64. Adesso ne estraiamo la radice quadrata, che rappresenta un lato del quadrato maggiore, e poi ne sottraiamo la stessa quantità che vi avevamo aggiunto, cioè 5. Rimane 3, che risulta essere un lato del quadrato ab, cioè, una radice di x^2. Quindi 3 è la radice di x^2, e x^2 è 9. "
Il metodo geometrico impiegato, che corrisponde al completamento del quadrato, è quello presentato da **Euclide** negli ***Elementi*** (**Libro II, Prop.4**).

Nel **Capitolo III** vengono considerati prodotti di binomi del tipo $x+a$, $y-b$, nel **Capitolo IV** vengono stabilite le regole per l'addizione e la sottrazione di espressioni che contengono l'incognita, il suo quadrato e la sua radice quadrata, si danno regole per l'estrazione di questa radice, ed anche alcune proprietà dei radicali, come $ab=\sqrt{a^2}b$ e $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.
Nel **Capitolo V**, infine, vengono svolti alcuni semplici problemi algebrici.

Per le radici irrazionali Al-Khuwarizmi usa il termine *assam,* che significa "sordo". Questo nome sopravviverà per molti secoli. Ancora in pieno Settecento, **Giuseppe Antonio Alberti** lo utilizzerà nel suo ***Trattato di aritmetica pratica***.

Il lavoro svolto da Al-Khuwarizmi per le equazioni di secondo grado sarà esteso da **Khayyam** alle equazioni di terzo grado.

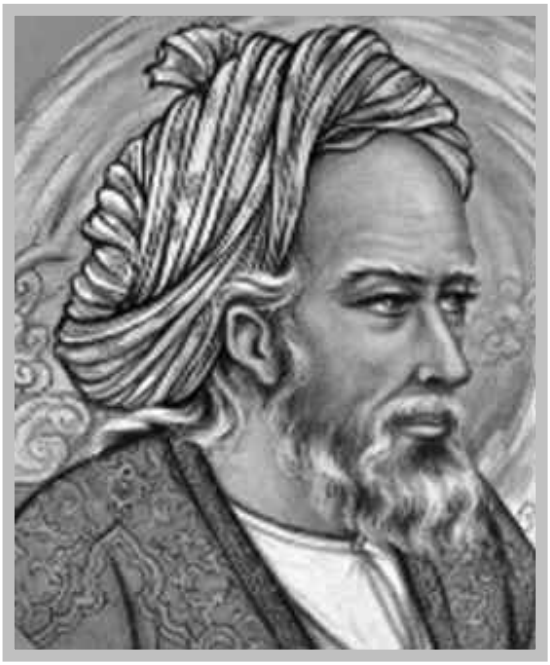
Altre opere
L'attività di Al-Khuwarizmi si svolse prevalentemente a Baghdad, nella Bayt al-Hykmah (Casa della Sapienza) - fondata dal califfo al-Ma'mūn nel 815 - che era biblioteca e centro di traduzione.

Al-Khuwarizmi compose complessivamente più di mezza dozzina di opere di astronomia e matematica, le più antiche delle quali erano probabilmente basate sul *Sindhind* di origine indiana, un trattato

pervenuto a Baghdad nel 766 d.C.. Fra queste ricordiamo l'opera aritmetica di cui ci è pervenuta una sola copia in traduzione latina *Algoritmi de numero Indorum (Al-Khuwarizmi sul calcolo numerico indiano)*: la parola *algoritmo* altro non è, dunque, che la trascrizione latina del nome di colui che contende a **Diofanto** il titolo di "Padre dell'Algebra". Egli presentò il sistema di numerazione indiano con tale completezza, che in Occidente si equivocò, attribuendone a lui stesso l'invenzione. Così si è affermato l'uso di chiamare *numerazione araba* quella che, in realtà, è la **numerazione indiana**.

La matematica indiana e araba

Omar Ibrahim Khayyam (o Al-Khayami) (1044 ca. –1123)



Questo poeta e matematico persiano proseguì il lavoro compiuto da **Al-Khuwarizmi** nell'ambito delle equazioni algebriche. Nella sua ***Algebra*** trattò le equazioni cubiche, classificandone 13 tipi diversi; per esse propose risoluzioni geometriche effettuate intersecando **coniche**. Egli ricorse a questo particolare metodo, già utilizzato dal greco **Menecmo**, poiché aveva intuito ciò che solo in tempi moderni sarebbe stato dimostrato rigorosamente, con gli strumenti della ***teoria di Galois***: l'equazione generale di terzo grado non può essere risolta con riga e compasso. Le radici di un'equazione sono per Omar Khayyam le lunghezze di segmenti i cui estremi sono punti d'intersezione di parabole ed iperboli. Egli respingeva le radici negative, per le quali non poteva trovare un'adeguata visualizzazione. Per una ragione analoga non provò mai a trattare equazioni di grado superiore al terzo, che andavano oltre le tre dimensioni dello spazio. A proposito dei problemi biquadratici egli così si esprime: *"Quello che viene chiamato dagli algebristi quadrato-quadrato è, in termini di grandezza continua, un fatto puramente teorico. Esso non esiste nella realtà in alcun modo."*

Il rifiuto di affrontare questioni algebriche prive di significato geometrico va forse letto alla luce della sua visione unitaria della matematica, che precorre di secoli la filosofia di **Descartes**. Impossibile non pensare alla geometria analitica quando leggiamo, in Omar Khayyam, frasi come questa: *"Chiunque pensi che l'algebra sia uno stratagemma per conoscere ciò che non si sa, ha un'idea sbagliata di essa. Non si dovrebbe fare alcuna attenzione al fatto che l'algebra e la geometria presentano un aspetto così diverso. L'algebra non è altro che la dimostrazione di fatti geometrici."*

Ci è pervenuto un frammento di un trattato sulle *Difficoltà in* ***Euclide***, in cui Omar Khayyam analizza il **quinto postulato**.

Curiosità

- Khayyam fu il primo a formulare la congettura secondo cui **l'equazione diofantea**

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

non avrebbe soluzioni intere non nulle. L'enunciato per esponenti maggiori o uguali a 3 sarà formulato nel Seicento dal matematico francese **Pierre de Fermat**, e passerà alla storia come **l'Ultimo Teorema di Fermat**. Esso attenderà per più di tre secoli prima di essere dimostrato.

- Khayyam fu anche poeta. I suoi versi, inneggianti ai piaceri della vita, come il vino e l'amore, furono giudicati licenziosi dalle autorità musulmane, e messi all'indice. La rivoluzione khomeinista del 1979 li condannò nuovamente: solo di recente il governo iraniano li ha riabilitati. Le persecuzioni religiose di cui Khayyam fu vittima sono narrate nel romanzo *"Il manoscritto di Samarcanda"*, dello scrittore libanese Amin Maalouf.

Archimede (Siracusa 287-212 a.C.)

La figura di questo matematico è una delle più note ed emblematiche della storia: la sua popolarità è dovuta soprattutto ai molti aneddoti sulla sua vita di genio stravagante riportati dallo storico Plutarco. Le



note colorite con cui vengono narrati certi episodi che lo hanno visto protagonista non devono, però, far dimenticare la colossale importanza delle sue ricerche scientifiche, che gli valsero gli appellativi di "saggio", "maestro", "grande geometra". Il suo famoso "*Eureka!*" pronunciato nella vasca da bagno e la sua esultante corsa in costume adamitico per le strade di Siracusa segnano – sia pur nella fantasia - uno dei principali momenti della storia della fisica, ossia la scoperta della **legge idrostatica**; l'architetto romano **Vitruvio** la ricorderà tra le principali conquiste della scienza greca, insieme al **Teorema di Pitagora** e alla **duplicazione del cubo**. E persino la leggenda sulla sua morte per mano di un soldato romano mette in luce un aspetto fondamentale dei suoi studi matematici: si racconta che Archimede perì di spada per aver inveito contro il milite, la cui ombra avrebbe coperto i circoli che il geometra stava tracciando per terra. Secondo un'altra versione, il soldato, che aveva ricevuto l'ordine di risparmiare il grande matematico, l'avrebbe chiamato per nome, ma questi, troppo immerso nei suoi calcoli, non gli avrebbe risposto. Il cerchio è un elemento ricorrente nelle sue opere matematiche. Nel breve trattato ***Misura del cerchio*** egli mostra come approssimare l'area di un cerchio con quella di un poligono regolare e ne ricava una sorprendente stima di π:

$$3{,}1408 \approx 3+10/71 < \pi < 3+10/70 \approx 3{,}1428.$$

Ma Archimede non si accontenta di questi dati numerici approssimati: egli cerca la precisione. Nell'antichità le uniche formule di area esatte note erano quelle delle figure delimitate da segmenti rettilinei, come il quadrato. Il famoso problema della **quadratura del cerchio** nasceva dunque essenzialmente dalla

necessità di conoscere l'area di quest'ultimo. D'altra parte effettuare questa costruzione con gli strumenti euclidei, ossia con riga e compasso, appariva come un'impresa disperata. Archimede si avvalse allora di un nuovo strumento, di sua invenzione: una **spirale**, che da lui ha preso il nome. Essa è la traiettoria di un punto che si muove sul piano combinando un moto traslatorio ed un moto rotatorio, entrambi uniformi (ossia con velocità costante). Una volta tracciata questa spirale sul foglio – il che è possibile per via meccanica – Archimede poté quadrare il cerchio con riga e compasso. L'idea di ricorrere a particolari curve per risolvere problemi geometrici, in realtà, non era nuova. Già **Menecmo**, un secolo prima, vi aveva pensato: aveva infatti introdotto le **coniche** per realizzare la duplicazione del cubo.

Per verificare la correttezza della sua costruzione, Archimede ha comunque bisogno di un metodo per il calcolo dell'area del cerchio. A tal fine mette a frutto il ***metodo di esaustione***, creato da **Eudosso**. Questo prevede un algoritmo di approssimazione indefinita che contiene *in nuce* i principi del **calcolo integrale**. Con la stessa tecnica Archimede determina le aree delimitate da archi di parabole (***Quadratura della Parabola***).

Una volta nota l'area del cerchio – sia pur in maniera approssimata - Archimede può calcolare il volume e l'area della superficie dei principali solidi di rotazione, cui dedica i trattati ***Sulla sfera e sul cilindro*** e ***Conoidi e sferoidi***: i suoi risultati, non potendo essere numericamente esatti, sono di natura comparativa. Così egli prova, ad esempio, che la superficie della sfera è pari a quattro volte l'area del suo cerchio massimo (Libro I, proposizione XXXIII), ed è anche pari a 2/3 della superficie totale del cilindro circoscritto. Egli utilizza alcuni risultati tratti dagli ***Elementi*** di **Euclide**: per dimostrare che il volume *S* della sfera è pari a 2/3 del volume *Ci* del cilindro circoscritto, egli dimostra prima che *S* è pari a quattro volte il volume del cono avente come base il cerchio massimo ed altezza il raggio della sfera; questo è sua volta pari alla metà del volume *Co* del cono che ha la stessa base e ha l'altezza pari al diametro della sfera. Dunque, riassumendo, $S = 2\,Co$. Archimede quindi applica la **Proposizione 10 del Libro XII** degli ***Elementi*** di Euclide, secondo la quale $Co = 1/3\,Ci$, e conclude.

Molte delle formule che Archimede dimostra nei suoi scritti geometrici erano state da lui intuite prima sulla base dell'evidenza fisica, ad esempio immaginando di porre in equilibrio oggetti aventi le forme

desiderate con altri di volume noto. Questo suo metodo di ricerca ci viene rivelato da una sua opera minore, intitolata ***Sui Teoremi Meccanici***, scritta sotto forma di una lunga lettera ad **Eratostene**, e ritrovata solo nel 1906 dal filologo danese J.L. Heiberg.

Il trattato detto ***Arenario*** o ***Psammite***, dedicato al suo amico Gerone, tiranno di Siracusa, riguarda l'astronomia e l'aritmetica: oltre a presentare il primo sistema eliocentrico della storia, quello ipotizzato da Aristarco di Samo, esso contiene importanti osservazioni sui grandi numeri (come i granelli di sabbia contenuti nell'intero universo, cui si riferisce il titolo): viene studiato il modo di rappresentarli nella poco agevole **notazione greca** (non posizionale).
Archimede dimostrò che, supponendo i limiti del mondo molto al di sopra di quanto comunemente ritenuto, il *cinquantaduesimo* termine della progressione geometrica di ragione dieci era più che sufficiente a rappresentare il numero di granelli che il mondo, considerato di forma sferica, poteva contenere.
Questo numero, "*1* seguito da *51* zeri", oggi si scrive con la formula

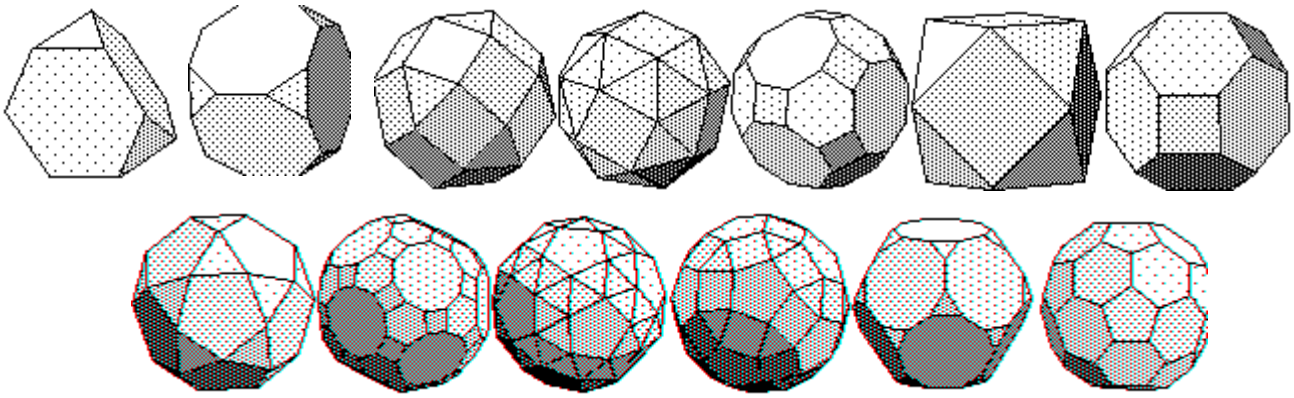
$$x = 10^{51}.$$

Includendo anche il cielo delle stelle fisse, Archimede arrivava ad una stima di 10^{63}.
Con la "numerazione greca" era però possibile scrivere come numero massimo il nostro *100.000.000*. Archimede immaginò un modo tendente a perfezionare la numerazione greca.
Egli considerò come unità tale numero massimo, cioè 10.000^2, ed adoperando il sistema antico, con questa unità riuscì a rappresentare i numeri fino a 10.000^4, cioè fino a numeri con sedici cifre. Assumendo questo ultimo numero come unità e reiterando il procedimento, arrivò ad esprimere i numeri fino a 10.000^6, cioè fino a ventiquattro cifre, e così di seguito.
Sostanzialmente, Archimede divideva i numeri in periodi di otto cifre, riuscendo così a rappresentare un qualsiasi numero.
Più tardi, **Apollonio**, filosofo della **Scuola Alessandrina**, ridusse i periodi di otto cifre a periodi di quattro cifre: *il primo era quello delle unità, il secondo quello delle miriadi o decine di migliaia, il terzo quello delle doppie miriadi o centinaia di milioni* e così via.
I due metodi rimasero però ad esclusivo uso dei dotti.

Nell'*Arenario* viene anche enunciata la cosiddetta **proprietà archimedea dei numeri naturali**, secondo la quale ogni numero naturale quanto si voglia grande ammette un successore. L'opera è

permeata dell'idea di **infinito**, che sta alla base dei processi iterativi indefiniti: questi verranno ripresi da **Cantor** alla luce del concetto di **numero transfinito**.

Archimede trovò 13 tipi di **poliedri semiregolari**, ossia di **poliedri** le cui facce sono tutti poligoni regolari, ma di tipo diverso. Ad esempio, nel *tetraedro troncato*, il primo della figura, le facce sono triangoli equilateri ed esagoni regolari.



Questi poliedri sono oggi detti ***archimedei***. Sono ottenuti tagliando i poliedri regolari con piani disposti simmetricamente intorno al centro della sfera circoscritta.

Le principali opere a contenuto fisico sono:

- ***Sull'equilibrio dei piani***, un trattato di statica in cui vengono calcolati i baricentri di molte figure geometriche, e viene enunciato il **principio della leva**;
- ***Galleggianti***, contenente il famoso **principio di Archimede**;
- ***Catottrica***, uno studio sugli specchi, andato perduto, del quale riferisce **Teone di Alessandria**.

Ad Archimede vengono attribuite anche invenzioni di utilità pratica, come l'argano per tirare in secco le navi, oppure macchine da guerra, come le catapulte e gli specchi ustori, che, secondo una leggenda, permisero ai Siracusani di respingere il primo attacco inferto alla loro città dalla flotta romana del console Marcello durante la Seconda Guerra Punica. La seconda incursione



Dipinto di Giulio Parigi (1599), Stanzino delle Matematiche, Galleria degli Uffizi, Firenze

avrebbe segnato la fine dell'indipendenza della città, ultima roccaforte greca, e avrebbe portato all'uccisione dello stesso Archimede.
Si narra che lo scienziato avrebbe conquistato l'amicizia del tiranno Gerone, prima che per i suoi meriti militari, smascherando un orafo, che aveva tentato di affibbiare al re una corona d'oro contenente, in realtà, una parte di argento. L'immersione dell'oggetto nell'acqua avrebbe rivelato, secondo il principio di Archimede, che il peso specifico era minore del dovuto.
Questo episodio, puramente immaginario, è ricordato in uno **scritto** di **Leon Battista Alberti** e, in epoca più recente, da Vincenzo Monti nel suo **poema** dedicato al matematico **Lorenzo Mascheroni**.

Nel **maggio del 1543** **Tartaglia** pubblica a sue spese un primo libro in latino di opere di Archimede:

a) ***De centris gravium, libri duo***

b) ***Tetragonibus***

c) ***De insidentibus aquae, liber unus***

Nel **1565** esce, attribuito postumo a Tartaglia, un secondo volume dei ***Galleggianti***, dal titolo ***Archimedis de insidentibus aquae, Liber primus et secundus***. In realtà pare che la traduzione in latino dei due libri di Archimede sia stata opera del frate belga **Guglielmo di Moerbeke, 1525**.

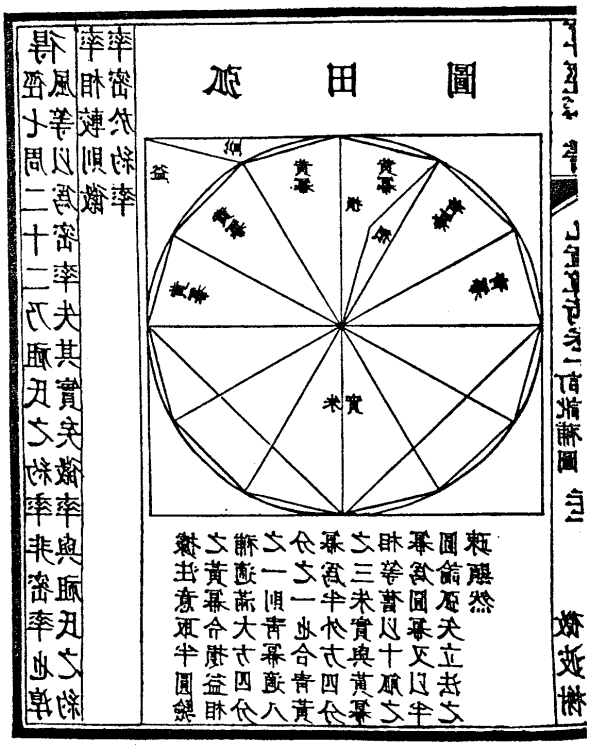
Curiosità

- Marco Tullio Cicerone, nell'epoca in cui era questore in Sicilia, scoprì, presso una delle porte della città di Siracusa, una tomba dimenticata, nascosta dalla vegetazione, e sovrastata da una colonnina, su cui erano incisi una sfera ed un cilindro. Immediatamente la riconobbe come la tomba di Archimede.

- **Gottfried Wilhelm Leibniz** disse: *"Chi capisce* ***Archimede*** *e* ***Apollonio****, ammirerà meno le conquiste dei più grandi matematici dei tempi successivi."*

Una pagina del trattato "Le Spirali"
Galilei descrive un'invenzione di Archimede: la coclea

Il metodo di esaustione in un trattato giapponese del 1687



Una pagina dal trattato *Le Spirali* di Archimede

ΟΡΟΣ. ε.

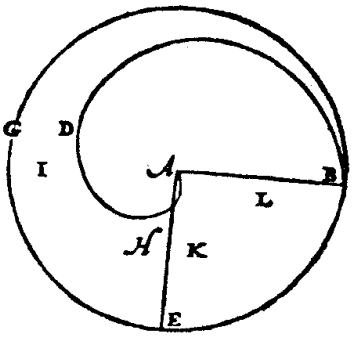
Καὶ ἐπὰν ἀπὸ τῆς ἀρχομένης ὅ ἐστιν ἀρχὴ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα χραμμά· τᾶς δὲ εὐθείας ταύτας ἁπτὶ τὰ αὐτὰ ἃ περίφορα χρόνῳ, πεπαγύσθω καλείσθω τὰ μὲν ἁπτὶ ἀπάρχα, ἐπόμενα.

DEFINIT. VI.

Atque ſi à puncto quod eſt principium Helicis, agatur aliqua linea recta: ea quæ ſunt ad eaſdem huius rectæ partes, ad quas circumuolutio fertur, antecedentia vocentur: quę verò in contraria, conſequentia.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Sit ſpiralis A.D.B. à cuius principio A. linea ducatur vtcumque A.C.E. Voluta enim C.D.B. tum ſpatium H.I.B. quod eſt ad eaſdem lineæ A. E. partes, in quas reuolutio fertur, antecedentium nomine dantur. Oppoſita verò voluta, quæ eſt à parte k.L. tum ſpatium quod deinceps eſt eiuſdem lineæ A.E, nempè E. k.L. conſequentium appellatione ſignificantur. Rurſus ſi centro A.& interuallo lineæ ſpiralis nempè A.B. deſcribatur circulus, qui ſit B.E.G. arcus E.G.B. antecedens appellabitur, oppoſitus verò E.B.G. cõſequens denominatur. Hæc autem antecedentia & conſequentia contraria omnino ſunt antecedentibus & conſequentibus aſtronomicis. In cõſequentia etenim fertur planeta, quæ à principio zodiaci verſus finem progreditur, ſeu ab Ariete in Taurum, Capricornum & Piſces: contra verò in antecedentia regreditur, qui à Piſcibus verſus Arietem tendit.



ΟΡΟΣ. ζ.

Ὅταν χραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος· διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἃ ἐστὶν περάτα, περᾶτος καλείσθω· ὁ δὲ χραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω· καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τοσοῦτοι ἂν ὦσι τὸ πλῆθος.

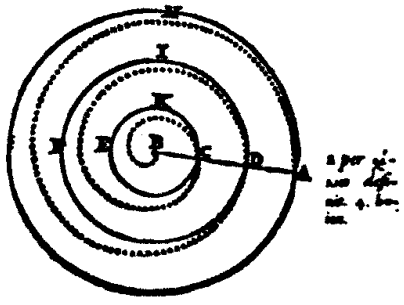
DEFIN. VII.

Deſcriptus autem circulus centro quidem puncto, quod eſt principium ſpiralis, interuallo verò hac recta quæ eſt prima, primus appelletur: Deſcriptus verò centro quidem eodem, interuallo verò dupla recta, ſecundus dicatur: & alij deinceps eodem modo denominentur.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Sint Helices prima, ſecunda, tertia, vel pluribus circumuolutionibus deſcriptæ, ſitque B. principium ipſarum, & deſcribatur circulus E.K.C. centro B. & interuallo primæ lineæ B. C. Hic primus circulus appellatur. Alius verò F.I.D. eodem centro B. ductus, & interuallo linea B.D. dupla primæ B.C. appellatur ſecundus.

Tertius eſt circulus G.H. A. eodem centro B. deſcriptus, & interuallo B. A. tripla ipſius B.C. & ita ſit de reliquis. Quotupliciras enim interualli circuli ſupra lineam primam circulo denominationem impertitur.



Da un'edizione parigina del 1615

Galileo Galilei

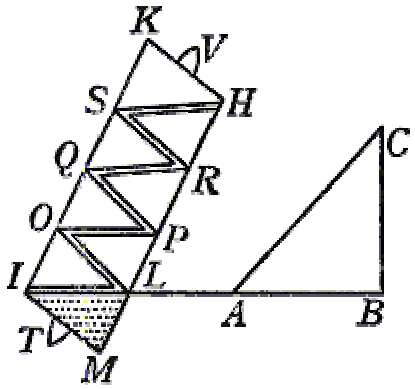
Le Mecaniche

Galilei compose questo trattato prima del 1593, durante il periodo in cui insegnava a Padova, e contemporaneamente, gestiva un'officina meccanica in cui realizzava, per la vendita, varie invenzioni di utilità pratica. Nell'opera, che rimase lungo tempo sotto forma di manoscritto, Galileo richiama le macchine fondamentali costruite nell'antichità, come la vite, la leva e l'argano, di cui si trova traccia, ad esempio, in **Erone**. Una sezione è dedicata alla vite inventata da **Archimede** per prelevare l'acqua da un fiume.

DELLA COCLEA D'ARCHIMEDE PER LEVAR L'ACQUA

Non mi pare che in questo luogo sia da passar con silenzio l'invenzione di Archimede d'alzar l'acqua con la vite: la quale non solo è maravigliosa, ma è miracolosa; poiché troveremo, che l'acqua ascende nella vite discendendo continuamente. Ma prima che ad altro venghiamo, dichiareremo l'uso della vite nel far salir l'acqua.

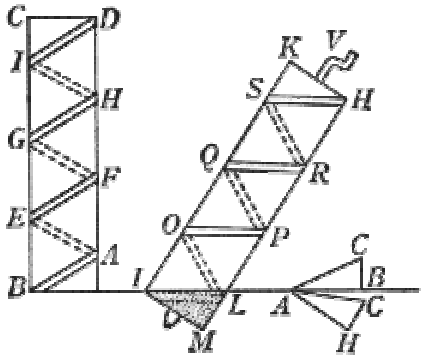
E considerisi nella seguente figura



intorno alla colonna MIKH esser avvolta la linea ILOPQRSH, la quale sia un canale, per lo quale possa scorrer l'acqua: se metteremo l'estremità I nell'acqua, facendo stare la vite pendente, come dimostra il disegno, e la volgeremo in giro intorno alli due perni T, V, l'acqua per lo canale anderà scorrendo, fin che finalmente verserà fuori della bocca H. Ora dico che l'acqua, nel condursi dal punto I al punto H, è venuta sempre discendendo, ancorché il punto H sia più alto del punto I. Il che esser così, dichiareremo in tal modo. Descriveremo il triangolo ACB, il quale sia quello onde si generi la vite IH, di maniera che il canale della vite venga figurato dalla linea AC, la cui salita ed elevazione viene determinata per l'angolo CAB; cioè, che se il detto angolo sarà la terza parte o la quarta di un angolo retto, la elevazione del canale AC sarà

secondo la terza o quarta parte d'un angolo retto. Ed è manifesto, che la salita d'esso canale AC verrà tolta via abbassando il punto C insino al B, perché allora il canale AC non averà elevazione alcuna; ed abbassando il punto C un poco sotto il B, l'acqua naturalmente scorrerà per lo canale AC al basso, dal punto A verso il C. Concludiamo dunque, che, essendo l'angolo A un terzo di un retto, la salita del canale AC verrà tolta via abbassandolo dalla parte C per la terza parte di un angolo retto.

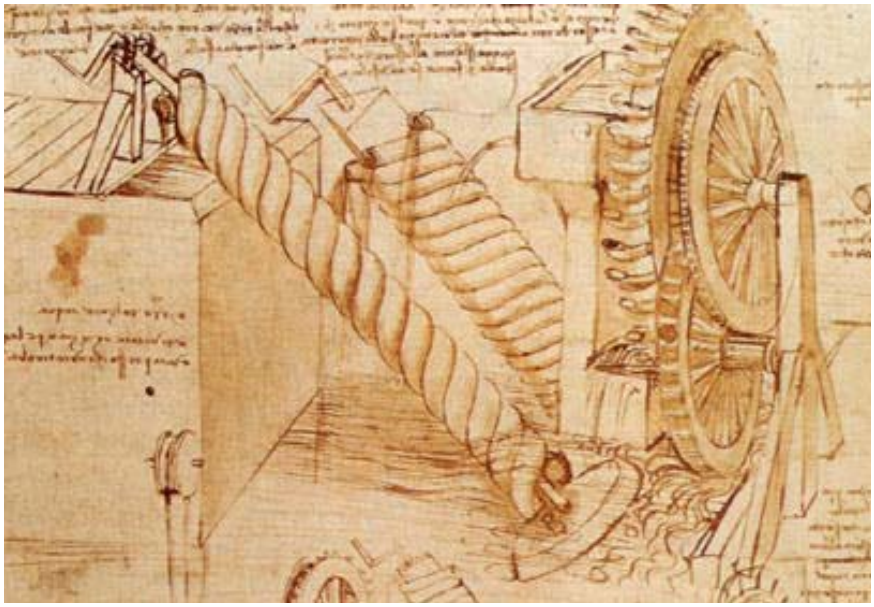
Intese queste cose, volgiamo il triangolo intorno alla colonna, e facciamo la vite BAEFGHID;



la quale, se si constituirà dritta, ad angoli retti, con l'estremità B in acqua, volgendosi attorno, non per questo tirerà in su l'acqua, essendo il canale, attorno alla colonna, elevato, come si vede per la parte BA. Ma se bene la colonna sta dritta ad angoli retti, non è per questo che la salita per la vite attorta intorno alla colonna sia di maggiore elevazione che d'un terzo d'angolo retto; essendo generata dalla elevazione del canale AC. Adunque, se inclineremo la colonna per un terzo di detto angolo retto, ed un poco più, come si vede IKHM, il transito e moto per lo canale non sarà più elevato, ma inclinato, come si vede per lo canale IL; adunque l'acqua dal punto I al punto L si moverà discendendo; e girandosi la vite intorno, l'altre parti d'essa successivamente si disporranno e si rappresenteranno all'acqua nella medesima disposizione che la parte IL; onde l'acqua successivamente anderà discendendo; e pur finalmente si troverà esser montata dal punto I al punto H: il che di quanta meraviglia si sia, lascio giudicare a chi perfettamente l'averà inteso. E da quanto s'è detto, si viene in cognizione come la vite per alzar l'acqua deve esser inclinata un poco più della quantità dell'angolo del triangolo, col quale si descrisse essa vite.

La forma della coclea è quella di una particolare superficie, detta **elicoide**.

La vite di Archimede in un disegno di Leonardo da Vinci (Codice Atlantico, 26 v)





ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPEROIDIBVS FIGVRIS INVENTA SEQVVNTVR.

ARCHIMEDES DOSITHEO RECTE AGERE

Una preziosa edizione del 1544, che fu in possesso di [Piero della Francesca](), prima di passare nelle mani del Duca di Urbino
Biblitoteca Vaticana

Eudosso di Cnido (408-355 a.C.)

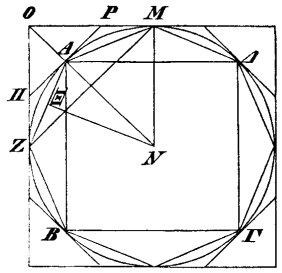
Questo insigne matematico ed astronomo greco nacque in una località dell'Asia Minore, che oggi fa parte della Turchia. Fu allievo di **Platone** e del **pitagorico** **Archita di Taranto**, e divenne maestro di **Menecmo**. Gli si attribuiscono molti dei risultati raccolti nelle opere di **Euclide** ed **Archimede**. Sviluppò la **teoria delle proporzioni**, estendendola ai numeri irrazionali, e creò il **metodo di esaustione** per il calcolo di aree e volumi. Studiò la **sezione aurea**. Si interessò anche al problema della **duplicazione del cubo**: ne propose una soluzione che, però, è andata perduta.

α΄.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστίν.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μεῖζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς



ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.

ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστιν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστιν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.

Ἀρχιμήδους κυκλου μετρησις AB², Archimedis Syracusani liber B. **1** *α΄*] om. AB.

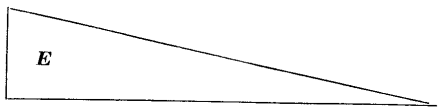
5 *δέ*] AB, fort. *δή*. *ἐλάσσων*] B, mg. G, *μειζων* A. **6** *περιγεγράφθω*] in *-γράφθω* inc. C. **9** *τῇ*] BCGH, *της* A. **11** *μεῖζόν*] A, *μείζων* (C). **12** *τομεῖ*] A(C), sectores B. **16** *τριγώνου*] in *τρι-* des. (C). **18** *β΄*] om. AB. **25** *πρὸς ἕν*] rursus inc. C. **26** *τοῦ*] AB, *τό* C.

I.

Triangulo rectangulo aequalis est circulus omnis, cuius radius aequalis est alteri laterum rectum angulum comprehendentium, ambitus autem basi.[1])

circulus $ABΓΔ$ ad triangulum E[2]) ita se habeat, ut propositum est; dico, eum ei aequalem esse.

nam si fieri potest, sit maior circulus, et inscribatur quadratum $AΓ$, arcus autem in binas partes aequales diuidantur ⟨et ducantur rectae BZ, ZA, AM, $MΔ$ cet.⟩,[3]) et



segmenta iam minora sint eo spatio, quo circulus triangulum excedit;[4]) itaque figura rectilinea adhuc maior est triangulo. sumatur centrum N, et perpendicularis ⟨ducatur⟩ $NΞ$; itaque $NΞ$ minor est latere[1]) trianguli. sed etiam perimetrus figurae rectilineae minor est reliquo latere, quia etiam ambitu circuli minor est [De sph. et cyl. I p. 10]; itaque figura rectilinea minor est triangulo E [ZMP. XXIV p. 180 nr. 12]; quod fieri nequit.

sit autem circulus, si fieri potest, minor triangulo E, et circumscribatur quadratum, et arcus in binas partes aequales secentur, per puncta autem ⟨sectionum⟩ rectae contingentes ducantur; itaque $\angle OAP$ rectus est [Eucl. III, 18]. quare $OP > MP$; nam $MP = PA$ [ZMP. XXIV p. 181 nr. 15]; itaque etiam triangulus $POΠ > \frac{1}{2} OZAM$.[2]) relinquantur segmenta segmento[3]) $ΠZA$ similia minora eo spatio, quo E triangulus circulum $ABΓΔ$ excedit;[4]) itaque figura rectilinea circumscripta adhuc minor est triangulo E; quod fieri nequit; est enim maior, quia NA aequalis est catheto trianguli, perimetrus autem maior basi trianguli.[5]) ergo circulus aequalis est triangulo E.

---

1) Aliam et eam correctiorem huius propositionis formam significat Eutocius: *ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιόν φησιν· ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ*; et infra: *τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον — ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ.* citant Hero, Metr. p. 66, 27, Pappus I p. 258, 17; 312, 20; III p. 1158, 22, Proclus in Eucl. p. 423, 3, Anonymus Hultschii 42, 3 p. 265. demonstrationem repetit Pappus V, 6 p. 312—16 ex Zenodoro ap. Theonem in Ptolemaeum p. 12—13 ed. Basil.

2) Archimedes scripserat *πρὸς τρίγωνον τὸ Ε* lin. 5.

3) Tale aliquid Archimedes sine dubio addiderat lin. 9. omnino in toto hoc opusculo genus dicendi et exponendi breuitate tam neglegenti laborat, ut manum excerptoris potius quam Archimedis agnoscas.

4) Hoc fieri potest per Eucl. XII, 2 p. 144, 6 sqq. collata X, 1. cfr. De sph. et cyl. I, 6 p. 20.

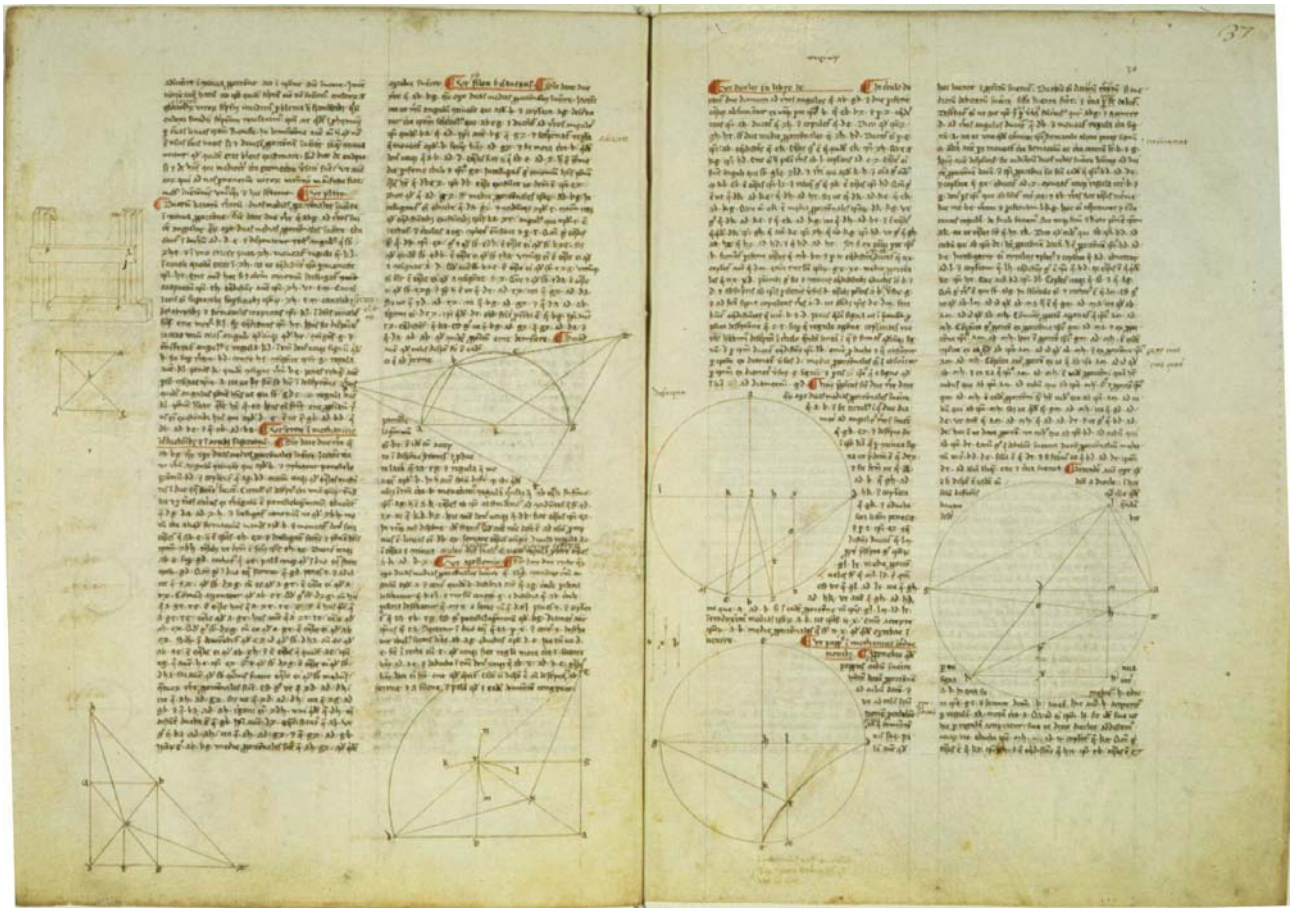
1) *τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς* (h. e. catheto) lin. 1 obscurius quam pro more Archimedis dictum est.

2) Nam $OAP > APM$ (Eucl. VI, 1) et
$$OAP = \tfrac{1}{2} POΠ,\ PAM = AΠZ.$$

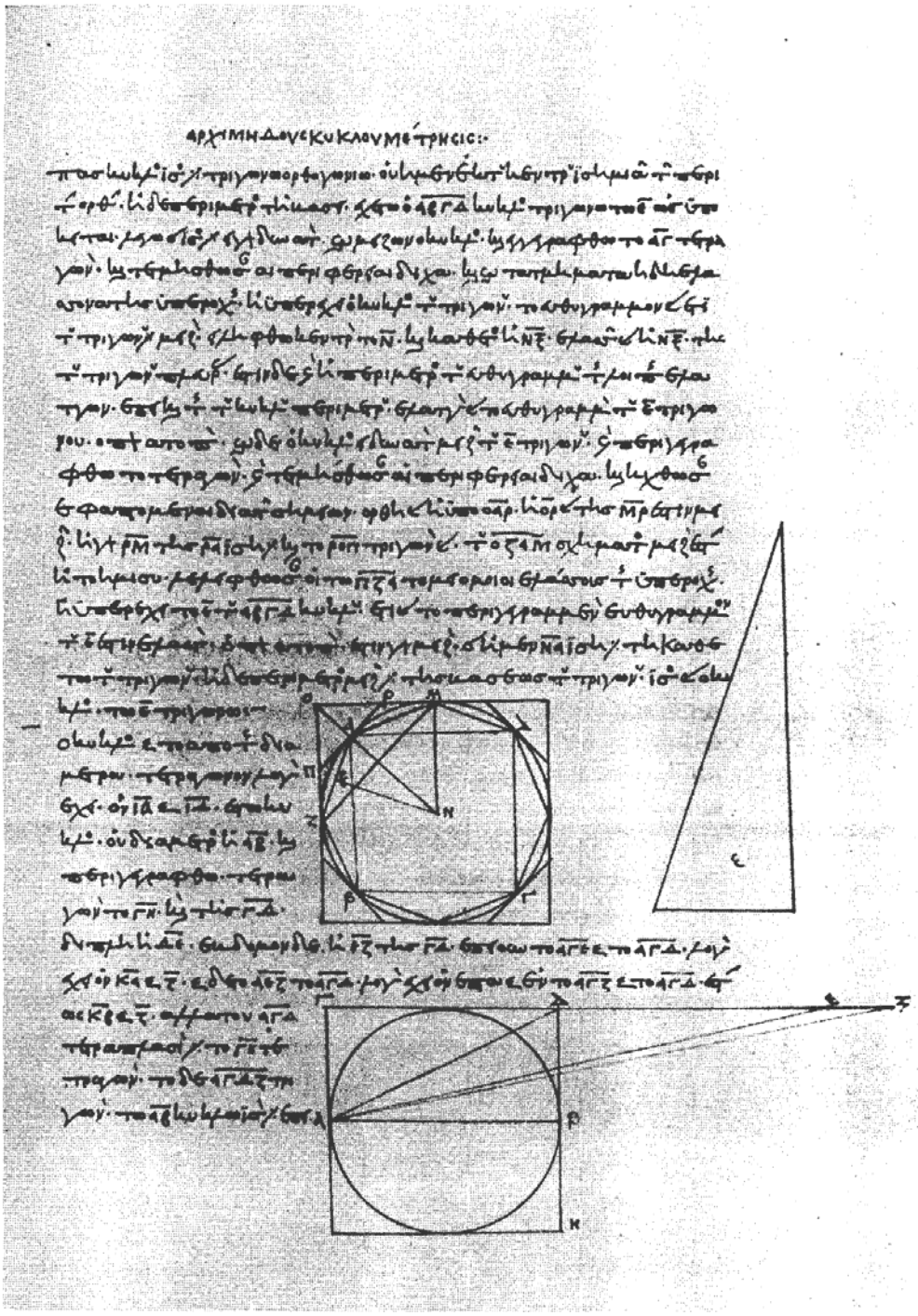
3) *τομεῖ* lin. 12 Archimedes non scripsit pro *ἀποτμήματι*.

4) Cum $POΠ > \frac{1}{2} OZAM$, hoc fieri potest per Eucl. X, 1; cfr. De sph. et cyl. I, 6.

5) Quia maior est ambitu circuli; De sph. et cyl. I, 1.



Commentario di Eutocio all'opera "Sulla sfera e sul cilindro" di Archimede in una traduzione latina della seconda metà del sec. XIII. La pagina riguarda la storia della duplicazione del cubo (Biblioteca Vaticana)



Pagina da un'edizione greca del V secolo
Firenze, Biblioteca Laurenziana

La matematica babilonese

Le principali fonti documentarie sulle conoscenze matematiche dei Babilonesi sono le **tavolette d'argilla**, alcune rinvenute nel 1854 dal geologo W. K. Loftus nei pressi di Senkereh sull'Eufrate (risalenti al periodo che va dal 2300 al 1600 a.C.), altre trovate a Boghazhoi sul fiume Ali, relative al regno degli Ittiti (1800-1200 a.C.). Queste riportano soprattutto calcoli aritmetici e problemi algebrici, scritti in **caratteri cuneiformi**, dai quali risulta l'uso di una notazione di carattere essenzialmente posizionale, in base 10 e 60, in cui si riscontra già l'uso, sia pur parziale, di un simbolo avente la funzione di zero.

L'**Algebra** era notevolmente sviluppata: i Babilonesi sapevano estrarre le radici quadrate e cubiche, riportate in apposite tavole. Colpisce la loro abilità **nell'approssimare le radici irrazionali**: la radice di 2 è data come 1,414213 (quando noi sappiamo che il valore esatto, troncato alla sesta cifra dopo la virgola, è 1,414214...). Non c'è però motivo di credere che i Babilonesi fossero consci del fatto che questi numeri non avevano una rappresentazione decimale o sessagesimale finita. Essi sapevano risolvere le equazioni quadratiche, e particolari sistemi di equazioni in più incognite. Queste ultime venivano normalmente indicate con speciali parole (l'uso, peraltro raro, di simboli pare sia casuale) l'utilizzo di *uś* (lunghezza), *sag* (larghezza), *aša* (area) induce a pensare che molti problemi algebrici traessero origine da questioni di carattere geometrico. Per calcolare i lati di un rettangolo di cui si conoscano il semiperimetro p e l'area a occorre invece risolvere un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x+y = p \\ xy = a. \end{cases}$$

Questo problema veniva ricondotto ad uno più semplice, fondamentale dell'algebra babilonese: trovare un numero che, sommato al suo reciproco, fornisca un numero fissato, in formule:

$$x + 1/x = b,$$

che, come noto, dà luogo ad un'equazione di secondo grado. A volte venivano usate parole sumeriche per denotare due incognite che fossero

l'una la reciproca dell'altra, come si legge sulle tavole di reciproci che essi utilizzavano per i loro calcoli. Una delle iscrizioni dice:

igi 2 gál-bi 30

che significa:

½ = 30/60.

Un altro esempio di problema a due incognite riconducibile ad un'equazione di secondo grado è il seguente:

Ho moltiplicato Lunghezza e Larghezza e l'Area è 10. Ho moltiplicato la Lunghezza per se stessa ed ho ottenuto un'Area. L'eccesso della Lunghezza sulla Larghezza ho moltiplicato per se stesso e questo risultato per 9. E quest'Area è l'Area ottenuta moltiplicando la Lunghezza per se stessa. Quali sono la Lunghezza e la Larghezza?

Il testo del problema, tutto espresso a parole, è un tipico esempio di ***algebra retorica***.

Il corrispondente sistema di equazioni è, nel moderno simbolismo:

$$\begin{cases} xy = 10 \\ 9(x-y)^2 = x^2, \end{cases}$$

Da esso si ricava un'equazione biquadratica, e quindi, ancora, due equazioni di secondo grado. Altri problemi geometrici, riguardanti i volumi, conducevano all'estrazione di radici cubiche.

Se non fosse per il linguaggio arcaico, l'enunciato del problema precedente potrebbe essere benissimo quello proposto da un insegnante di una scuola media ai suoi allievi. Basterebbe introdurre una unità di misura per lunghezza e larghezza, ad esempio il metro, e precisare che il numero *10* si riferisce a *10* metri quadrati. Diversa è la situazione per un altro enunciato, riportato da B. L. van der Waerden, che inizia così:

Lunghezza, Larghezza. Ho moltiplicato Lunghezza e Larghezza, ottenendo l'Area. Quindi ho sommato all'Area l'eccesso della Lunghezza rispetto alla Larghezza: 183.

Se anche in questo caso volessimo lavorare con metri e metri quadrati, ci troveremmo in serie difficoltà: come sommare una quantità espressa in metri quadrati ad un'altra espressa in metri? Bisognerebbe contravvenire alla regola di bilanciare le unità di misura, commettendo un bell'errore da matita blu. Per i Babilonesi il problema non sussisteva: tutte le misure erano espresse semplicemente da numeri. Lo storico van der Waerden chiama questa pratica ***algebra mista***, distinguendola dall'*algebra geometrica,* quella che si avvale di diverse unità di misura per lunghezze, aree e volumi.

I Babilonesi sapevano anche calcolare le somme parziali di successioni aritmetiche e geometriche, e conoscevano una formula per la somma dei primi *n* **numeri quadrati**.

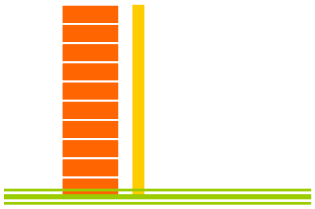
La **Geometria** rivestiva un ruolo meno rilevante, e veniva praticata quel tanto che bastava a risolvere i problemi della vita quotidiana come la divisione di un campo oppure la scelta del formato dei mattoni per una data costruzione. Ci sono pervenuti soprattutto calcoli di aree di figure piane regolari e dei volumi dei solidi più semplici. I disegni che accompagnano le formule spesso sono così ambigui che è difficile stabilire la correttezza del procedimento. Tuttavia pare ormai accertato che i Babilonesi conoscessero **la costruzione dell'esagono regolare**, oltre al **Teorema di Pitagora** ed alla nozione di similitudine fra triangoli. Ciò è testimoniato soprattutto dalla tabella contenuta nella **tavoletta** n.322 della Plimpton Collection della Columbia University. Essa risale al periodo babilonese antico (1900-1600 a.C.), e presenta una lista di possibili misure per i lati di un triangolo rettangolo: risulta che i Babilonesi conoscevano molte **terne pitagoriche**, anche se nessuna formula generale è mai stata trovata.

In un altro testo babilonese conservato al British Museum di Londra, viene risolto il seguente problema:

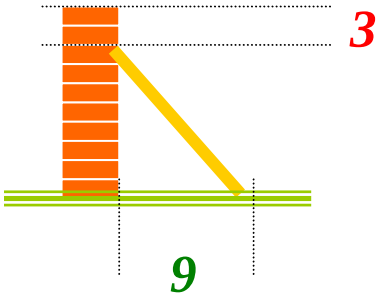
Una canna è appoggiata verticalmente ad un muro. Se la sua sommità scivola in giù di 3 lunghezze, la sua estremità opposta avanza di 9 lunghezze. Quanto è lunga la canna, quanto è alto il muro?

L'enunciato sottintende che l'altezza del muro coincida con la lunghezza della canna.

La situazione iniziale è:



e quella finale:



Applicando il teorema di Pitagora si ricava facilmente che la canna ed il muro misurano 15 lunghezze. Un problema di analoga formulazione è presente nella antica **matematica cinese**: una trave appoggiata obliquamente alla sommità di un muro, di cui si conosce l'altezza, si adagia al suolo se si allontana la sua estremità inferiore di una lunghezza.

Altrove i Babilonesi determinano soluzioni approssimate: ad esempio viene risolto il problema di determinare la diagonale d di un rettangolo di altezza h e base w con il valore:

$$d = h + w^2/2h,$$

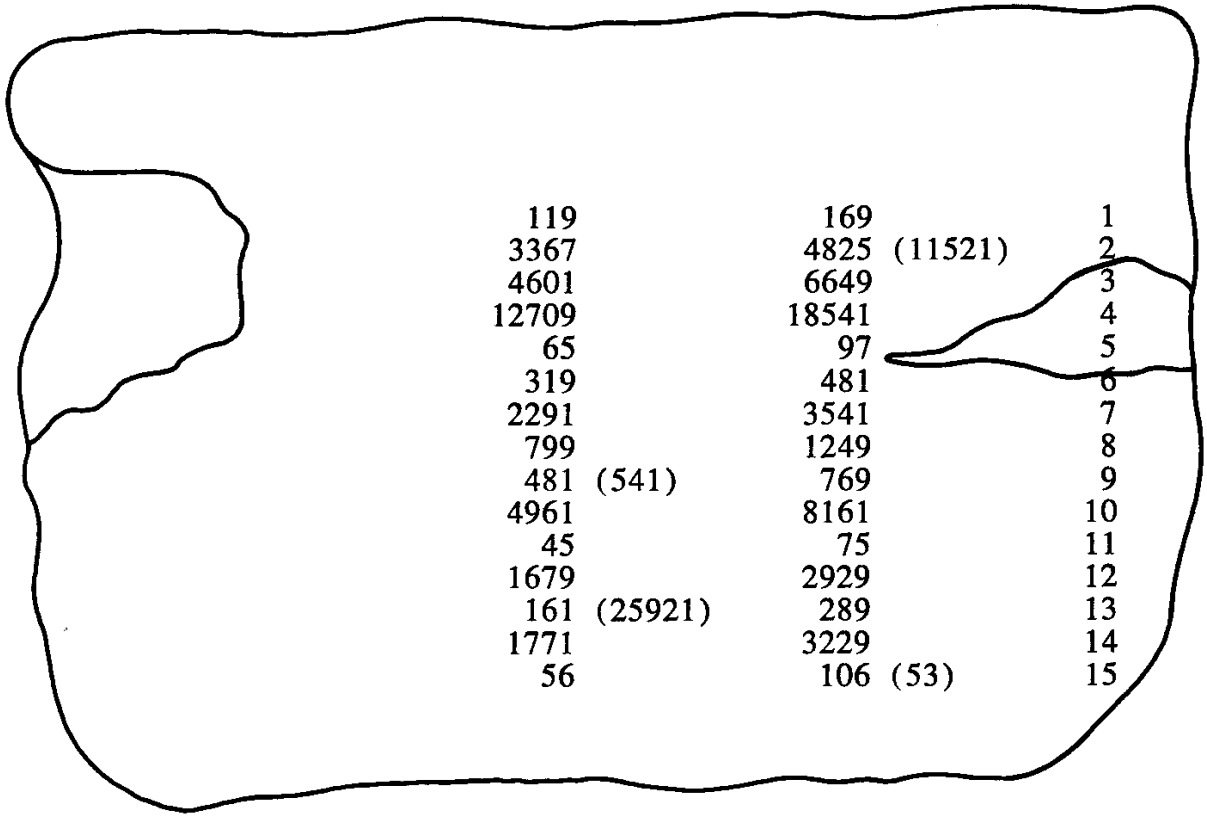
che, per $h>w$, è un'ottima approssimazione di $\sqrt{h^2 + w^2}$.

Il valore di π era approssimato dai Babilonesi a volte con 3, altre volte con $3 + 1/8$.

Le conoscenze matematiche trovavano applicazione, in **astronomia**, allo studio ed alla previsione dei moti stellari, lunari e planetari, che stavano alla base del calendario oltre che dell'astrologia.

La tavoletta babilonese Plimpton 322





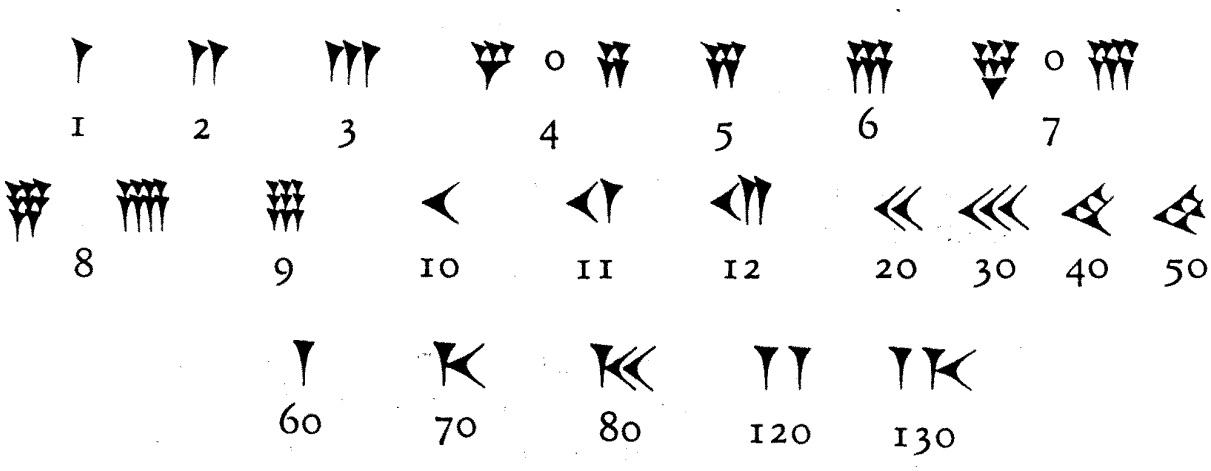
119		169	1
3367		4825	(11521) 2
4601		6649	3
12709		18541	4
65		97	5
319		481	6
2291		3541	7
799		1249	8
481	(541)	769	9
4961		8161	10
45		75	11
1679		2929	12
161	(25921)	289	13
1771		3229	14
56		106	(53) 15

I numeri della seconda e della terza colonna sono le lunghezze di uno dei cateti e dell'ipotenusa di triangoli rettangoli. La prima colonna riporta, per ciascuno di questi, il rapporto fra l'ipotenusa e l'altro cateto. Siamo di fronte ad una lista di **terne pitagoriche**. Ecco la lista completa delle terne contenute nella tavoletta Plimpton 322, in notazione decimale:

a	*b*	*c*
120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541
72	65	97
360	319	481
2700	2291	3541
960	799	1249
600	481	769
6480	4961	8161
60	45	75
2400	1679	2929
240	161	289
2700	1771	3229
90	56	106

La numerazione babilonese

Ecco i simboli per i numeri interi, di origine akkadica:



La notazione era posizionale in base *60*. Ad esempio, il numero



si leggeva

$$1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 4 = 3604,$$

quindi i Babilonesi, molti secoli prima che gli **Arabi** inventassero lo zero, avevano già un simbolo per indicare l'assenza di un numero. C'è da osservare, però, che questo simbolo non veniva mai usato in ultima posizione, al posto delle unità.

La notazione posizionale si estendeva anche alle frazioni. Ad esempio, il simbolo



indicava

$$21/60, \quad \text{o anche} \quad 20/60 + 1/60^2.$$

Questa non è l'unica ambiguità della numerazione babilonese.
Nel trasferire la scrittura babilonese alla notazione moderna, useremo il punto e virgola per separare le unità dai sessantesimi, mentre separeremo con la virgola i numeri relativi a diverse potenze sessagesimali. Così, ad esempio, la scrittura

1;24,51,10

indicherà

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 .$$

Come nella **numerazione egizia** alcune frazioni venivano denotate con simboli speciali:

1/2 *1/3* *2/3*



I Babilonesi si avvalevano, per i loro calcoli, di molte tavole numeriche, tra cui le tavole contenenti i reciproci dei numeri interi. In queste mancano i reciproci dei numeri *7, 11, 13, 14,...,* che non ammettono una rappresentazione sessagesimale finita.

L'addizione era indicata semplicemente accostando i numeri, mentre esistevano appositi segni per la sottrazione:

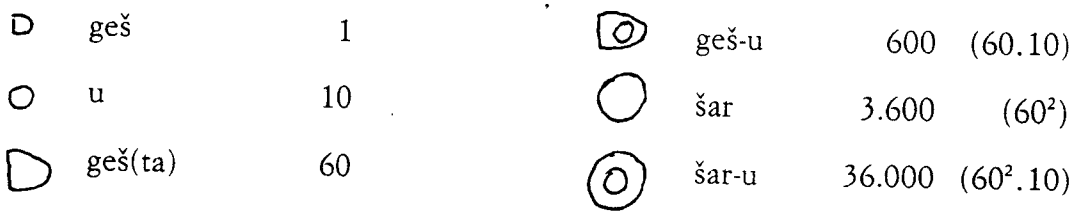


e per la moltiplicazione:



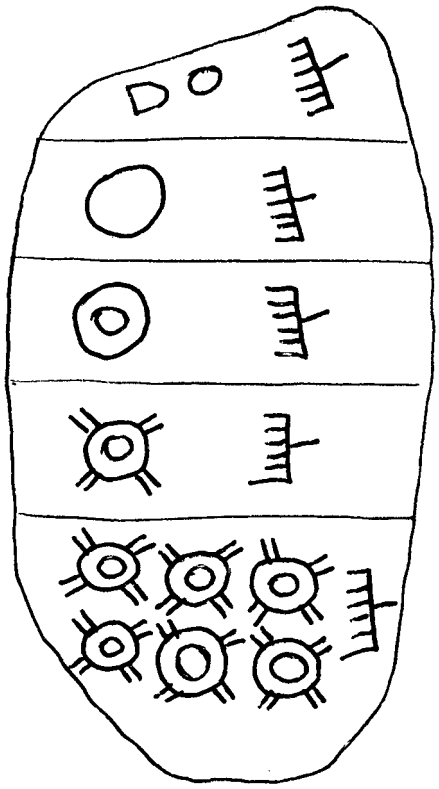
Quest'ultimo segno era chiamato *a-rá,* che significa "andare".

La base sessagesimale perviene ai Babilonesi dalla tradizione sumerica, cui vengono fatti risalire anche molti termini relativi alla matematica. I simboli usati erano i seguenti:



geš	1		geš-u	600	(60.10)
u	10		šar	3.600	(60^2)
geš(ta)	60		šar-u	36.000	(60^2.10)

Ed in base *60* è scritto anche il più antico problema algebrico che si conosca: si tratta di un'iscrizione su di una tavoletta d'argilla rinvenuta nel 1964 da una spedizione archeologica italiana presso l'antica città di Ebla, e risale al 2500 a.C.. È un quesito posto dallo scriba Išma–Ja proveniente dalla cittadina sumera di Kiš. Secondo Viola l'enunciato sarebbe il seguente: *Qual è quel numero che moltiplicato per 60 dà 600 (oppure 3.600, 36.000, 360.000, 360.000·6)?*



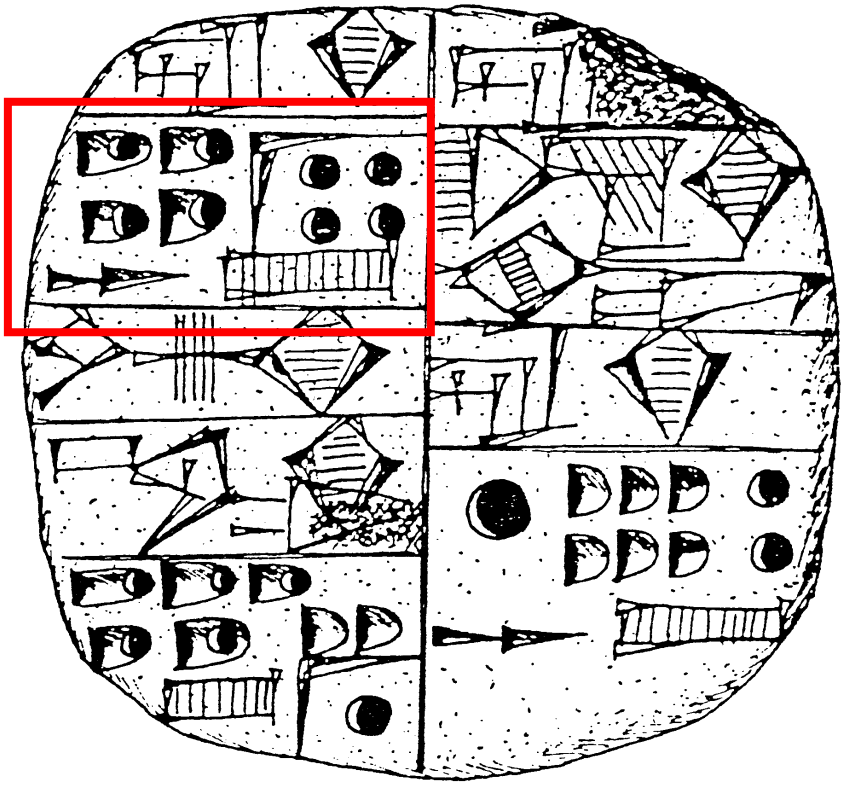
Se l'adozione di un sistema di numerazione in base *10* trova, anche secondo **Vitruvio**, una spiegazione molto naturale, molte sono le tesi formulate a proposito dell'origine del sistema sessagesimale. **Teone di Alessandria**, come anche **John Wallis**, credeva che la scelta del numero *60* fosse dovuta al fatto che è il più piccolo numero naturale avente un così elevato numero divisori: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60*. Come osservò **Neugebauer**, un numero siffatto presentava indiscutibili vantaggi se veniva posto alla base di un sistema di misure: molte frazioni, tra cui le più comuni, come *1/2, 1/3, 1/4*, sarebbero risultate facili da calcolare. **Moritz Cantor** invece azzardò l'ipotesi che i popoli mesopotamici fossero arrivati al *60* dopo aver constatato che, secondo le loro osservazioni astronomiche, l'anno aveva una durata di *360* giorni. Ciò li avrebbe spinti a suddividere il cerchio in *360* parti: poi si sarebbero accorti che riportando la lunghezza del raggio sulla circonferenza, questa veniva suddivisa in *6* parti uguali, di ampiezza

60 ciascuna (è questa la **costruzione con riga e compasso dell'esagono regolare**).
D'altra parte **Tolomeo**, nel suo ***Almagesto***, svolge molti calcoli sessagesimali. Secondo altri la base *60* sarebbe scaturita come combinazione della base *10* e della base *6*, allo stesso modo in cui, secondo Vitruvio, è comparsa la base *16*. Ma l'esistenza di un sistema in base *6* è una mera congettura: non esistono testimonianze storiche a riguardo.

La numerazione babilonese, al contrario di quella egizia, non è sempre additiva. Si può osservare che la base sessagesimale comporta, a volte, un numero elevato di simboli per scrivere un singolo numero. Ad esempio, il numero *2360* in notazione sessagesimale si scrive come

39; 20,

che, nella notazione sumerica, assai povera di segni, equivale a ben *14* segni: *9* unità e *5* decine. Un modo per abbreviare la notazione è quello di rappresentare il numero dato come differenza di quantità, anziché come somma. Nel riquadro in alto a sinistra della tavoletta sumerica



risalente al 2650 a.C., leggiamo



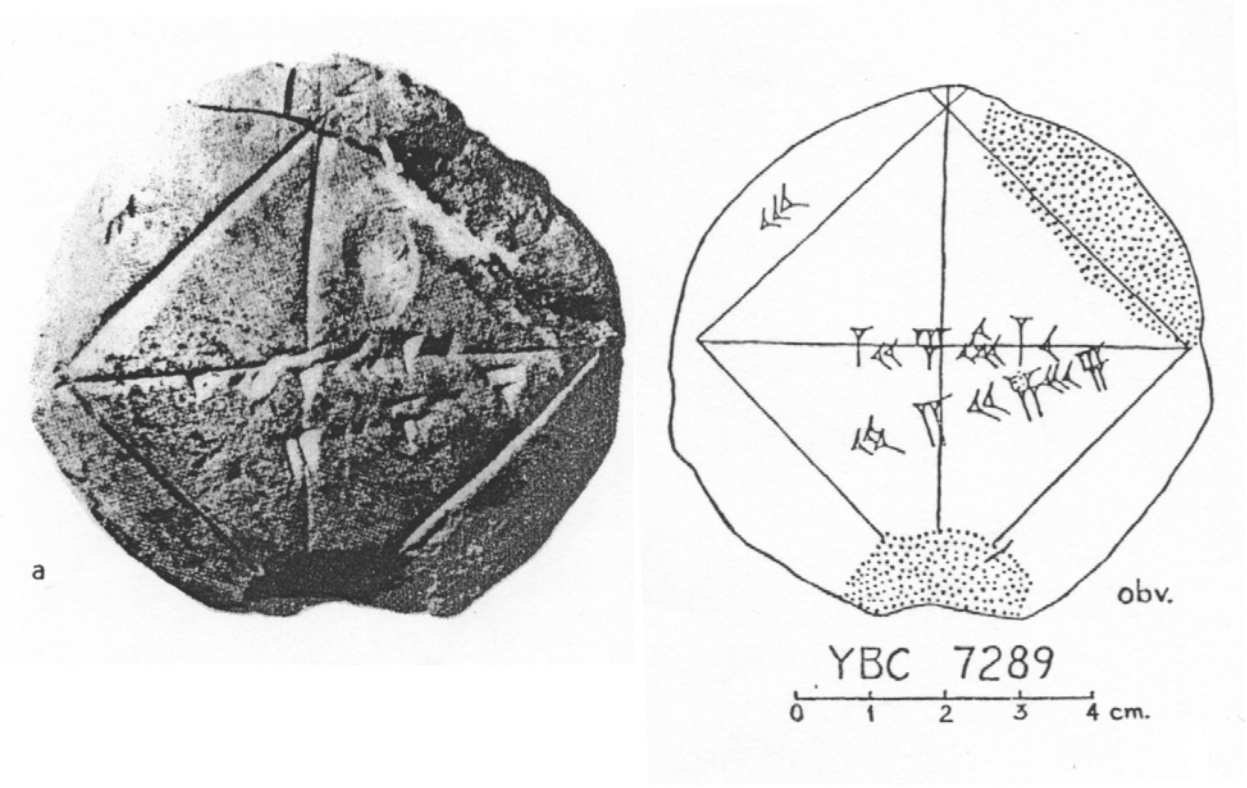
2400 — 40

È una rappresentazione di *2360* che contiene solo *9* segni.

L'approssimazione delle radici di un'equazione algebrica

Un metodo, assai efficace, di estrarre le radici quadrate per approssimazioni successive, risale alla **matematica babilonese**.
Sia a il numero, reale e positivo, del quale si cerca la radice quadrata. Sia a_1 una prima approssimazione, diciamo per eccesso, della radice. Allora $b_1 = a/a_1$ è un'approssimazione per difetto. Pertanto la media aritmetica $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ costituisce, con tutta probabilità, una approssimazione migliore. Si tratta ancora di un'approssimazione per eccesso, dunque $b_2 = a/a_2$ è una nuova approssimazione per difetto. Riapplicando il procedimento si ottengono approssimazioni sempre migliori. Questa tecnica viene spesso erroneamente attribuita ad **Archita di Taranto** o ad **Erone di Alessandria** o a **Teone da Smirne**.

I Babilonesi utilizzarono questo metodo per compilare tavole di radici quadrate: in una delle più antiche di queste leggiamo per la radice di *2* il valore *1;25*, che nel sistema decimale equivale a *1 + 25/30*, cioè *1,4166...*; altrove vediamo *1;30*, cioè *1+ 30/60 = 1,5*. Ma su di una tavoletta d'argilla del 1900-1600 a.C., conservata presso la Yale University con il codice YBC 7289, troviamo un'approssimazione molto migliore: *1;24,51,10,* ossia *1,414213*, che differisce solo di *0,000001* dal valore reale, approssimato alla sesta cifra dopo la virgola! Ciò che maggiormente sorprende è che $\sqrt{2}$ è raffigurato come la diagonale di un quadrato: i Babilonesi conoscevano dunque **il Teorema di Pitagora**, con un anticipo di più di mille anni sul



matematico al quale ne viene solitamente attribuita la scoperta.

Proviamo ora ad applicare il metodo babilonese al calcolo di $\sqrt{2}$ usando il valore $a_1 = 1,5$ come prima approssimazione (per eccesso). Si ottiene $b_1=1,333$ e quindi $a_2 = 1,416$ come nuova approssimazione (per eccesso). Se ne ricava l'approssimazione (per difetto) $b_2 = 1,411$, e quindi l'ulteriore, ottima, approssimazione $a_3 = 1,414215$. (Le espansioni decimali dei valori calcolati sono state troncate per comodità.)

Un metodo per la risoluzione approssimata delle equazioni di secondo grado fu inventato dai Cinesi prima del secolo XIV. Un noto trattato del 1303 d.C. riporta diversi esempi di applicazione di questa tecnica, che l'autore chiama *fan-fa*, ma che oggi è nota come *metodo di Horner.*

Prendiamo 19 come prima approssimazione di una delle radici dell'equazione quadratica

$$x^2 + 252x - 5292 = 0.$$

Quindi sostituiamo all'incognita x l'espressione $y + 19$. Otteniamo una nuova equazione quadratica:

$$(y +19)^2 + 252(y +19) - 5292 = 0, \quad \text{cioè} \quad y^2 + 290y - 143 = 0.$$

Il nuovo valore incognito è la differenza tra la radice approssimata 19 e la vera radice dell'equazione di partenza. Si riapplica il metodo alla nuova equazione, prendendo $143/(1+290)$ come valore approssimato di una delle radici. Il nuovo valore approssimato di x è quindi $19 + 143/291 = 19,49140...$. Il vero valore della radice positiva dell'equazione è $19,49226$….Iterando il procedimento si ottengono approssimazioni sempre migliori.

Un altro metodo fu inventato da **Viète**. Supponiamo che x_1 sia una prima approssimazione di una radice dell'equazione

$$x^2 + mx = n.$$

Sia $x_1 + x_2$ il vero valore della radice cercata. Sostituendo questa espressione nell'equazione si ottiene

$$(x_1 + x_2)^2 + m(x_1 + x_2) = n,$$

cioè

$$x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 + m\,x_1 + m\,x_2 = n.$$

Assumendo che x_1 sia una buona approssimazione della radice, e quindi x_2 sia vicino allo zero, si potrà trascurare il valore di x_2^2 a primo membro. Si otterrà dunque

$$x_2 = (n - x_1^2 - m\,x_1)/(2\,x_1 + m).$$

Si ripeterà dunque il procedimento, prendendo $x_1 + x_2$ come nuova approssimazione della radice.
Il metodo di Viète, come del resto quello di Horner, può essere esteso ad equazioni di grado superiore al secondo. Viète se ne servì, ad esempio, per approssimare le radici dell'equazione

$$x^6 + 6000x = 191.246.976.$$

È possibile approssimare le soluzioni di un'equazione anche mediante le **frazioni continue** (v. le ***Lezioni Elementari di Matematiche*** dell'Abbé Marie)

Un metodo di approssimazione dall'*Algebra* di Giuseppe Bertrand

Philippe de La Hire risolve un'equazione di terzo grado

L'astronomia babilonese

L'astronomia nasce come scienza matematica fin dagli albori della civiltà. Ci sono pervenute iscrizioni cuneiformi antichissime, contenenti nomi di pianeti e costellazioni, associati a numeri. Esse testimoniano che i Babilonesi erano in grado di formulare congetture sulle distanze tra i pianeti, e di calcolare le loro posizioni. Tramite una serie di osservazioni, avevano riconosciuto la periodicità dei moti della Luna e del Sole. Furono loro ad introdurre la suddivisione del tempo in anni solari (di 360 giorni circa), composti a loro volta di 12 mesi lunari (di circa 30 giorni, detti *tithi*). Per descrivere con precisione matematica la posizione degli astri in un dato momento, i Babilonesi avevano suddiviso la volta celeste, considerata circolare, in 360 settori (ecco perché un angolo giro vale 360 gradi!). Ognuno di questi corrispondeva allo spazio percorso dagli astri in un giorno. I settori erano raccolti in 12 fasce uguali, corrispondenti ai mesi: così è nato lo **zodiaco**, che, già a quell'epoca, veniva utilizzato per formulare previsioni basate su calcoli matematici.
A questo punto è quasi superfluo aggiungere che furono i Babilonesi ad inventare il calendario, che, dovremmo, forse, chiamare più propriamente *lunario*, visto che esso era basato sulle fasi lunari, minuziosamente descritte mediante tavole numeriche, dette *effemeridi*.
Fenomeni come la variabilità della durata del mese lunare (periodo tra due lune nuove) erano spiegati mediante le reciproche posizioni della Luna e del Sole. Certi mesi erano più lunghi di altri: in quei momenti dell'anno la Luna, pur avendo superato l'orizzonte, non risultava subito visibile perché troppo vicina al Sole. La conoscenza babilonese sulle congiunzioni ed opposizioni Sole-Luna era così accurata da permettere la previsione delle eclissi.



I Babilonesi sapevano che l'astro del mattino e l'astro della sera erano, in realtà, lo stesso corpo celeste.

Carta babilonese del mondo

La numerologia babilonese

I Babilonesi ereditarono dai Sumeri il culto dei numeri divinizzati, che erano 10, 12, 15, 20, 30, 40, 50 e 60. Quest'ultimo, detto *Anu* (o *Abu*), era considerato il padre degli dei, e da esso derivavano tutte le altre divinità, che corrispondono alle sue parti frazionarie. Il numero 50 (5/6) era *Enlil*, il "dio sulla montagna", speciale guardiano dell'umanità; il numero 40 era chiamato *Ea,* il "dio delle acque dolci" ed organizzatore della terra; il numero 30 (1/2) era *Sin,* la Luna, ed il numero 20 (1/3) *Shamash,* il Sole; il numero 15 (1/4) aveva nome *Ishtar*, e rappresentava la donna come vergine, moglie o padrona di tutti; il numero 12 (1/5) era impersonato da *Nergal,* il dio degli inferi; il numero 10 (1/6), infine, era detto *Bel*: si trattava di una divinità minore, che però, col passare dei millenni, finì per prendere il posto di *Enlil*. Da lui trassero origine le figure bibliche del (falso) dio Baal (Antico Testamento, Primo e Secondo Libro dei Re) e di Belzebù (Nuovo Testamento), principe dei demoni.

Il misticismo dei numeri in Mesopotamia rifletteva pienamente la predilezione di Sumeri e Babilonesi per il numero 60, che era alla base dei loro **sistemi di numerazione**.

Un'analoga fusione di religione ed aritmetica si ritroverà, decine di secoli più tardi, nella scuola di **Pitagora**.

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Riccardo Baltzer
Elementi di Matematica
Genova, 1875-1884
(tradotto da L. Cremona)

L'opera, destinata alle scuole secondarie del regno d'Italia, consta di 6 parti.
Nella Parte Prima, **Aritmetica ordinaria**, vengono introdotte le quattro operazioni con i simboli attuali.
La Parte Seconda, **Aritmetica generale**, presenta le quattro operazioni del calcolo letterale, prosegue con le potenze, le radici di **numeri irrazionali** e **complessi**, l'ordinario **teorema del binomio**, le combinazioni e le loro più importanti applicazioni, le **serie** esponenziale, binomiale e **logaritmica**.
La Parte Terza, **Algebra**, contiene la trattazione delle proporzioni, dei concetti fondamentali sulle **funzioni** e sul metodo analitico. Si passa poi alla teoria delle equazioni e dei sistemi di equazioni. Segue la **risoluzione di equazioni cubiche**, biquadratiche, trascendenti numeriche e dei più semplici **problemi diofantei**.
Nelle parti successive è presentato lo studio della geometria nello spazio, in particolare della geometria della sfera e dei **poliedri**, con particolare riferimento a problemi di cubatura.
L'ultima parte è dedicata alle funzioni trigonometriche, alla **trigonometria sferica** e contiene una sezione dedicata a formule proiettive, ai teoremi di **Ceva**, **Menelao**, **Carnot**, **Pascal** e **Brianchon**, alle involuzioni e al **teorema di Desargues**.
Curioso l'inizio del brano intitolato **Nozioni Fondamentali**:

"Due cose possono essere paragonate fra loro rispetto alla loro qualità o rispetto alla loro quantità. Rispetto alla qualità esse sono omogenee se una può essere surrogata dall'altra o da una parte di questa; eterogenee se ciò non ha luogo. Rispetto alla quantità esse si chiamano grandezze e sono oggetto delle Scienze Matematiche."

Il testo, probabilmente per completezza ed organicità, ha avuto grande risonanza e diffusione, come testimoniano le numerose citazioni di autori contemporanei e posteriori.

ELEMENTI DI MATEMATICA

DEL

D.r RICCARDO BALTZER

PROFESSORE NEL GINNASIO CIVICO DI DRESDA.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

FATTA SULLA SECONDA EDIZIONE DI LIPSIA

ED AUTORIZZATA DALL' AUTORE,

per

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITA' DI BOLOGNA.

Opera destinata alle scuole secondarie del Regno d' Italia.

Parte 2.ª Aritmetica generale.

GENOVA

TIPOGRAFIA DEL R. I. DE' SORDO-MUTI

1863

ARITMETICA GENERALE

§ 1. Nozioni fondamentali.

1. Due cose possono essere paragonate fra loro o rispetto alla loro *qualità* o rispetto alla loro *quantità*. Rispetto alla qualità esse sono *omogenee* se una può essere surrogata dall' altra o da una parte di questa; *eterogenee* se ciò non ha luogo. Rispetto alla quantità esse si chiamano *grandezze* e sono oggetto delle scienze *matematiche*.

Due quantità omogenee sono o *eguali* o *disuguali;* di due quantità disuguali la più grande è quella della quale l' altra è una parte. L' affermazione che la grandezza A è eguale alla grandezza B dicesi *equazione* e si scrive

$$A = B.$$

Le grandezze paragonate diconsi *membri* (primo e secondo) dell' equazione. Se la grandezza C è maggiore della grandezza D (ossia D minore di C), si scrive la *disuguaglianza*

$$C < D.$$

Il sistema di due disuguaglianze come

$$C < D, \quad D > E$$

dicesi *limitazione* per la grandezza D.

2. La riunione di più cose omogenee si esprime con un *numero:* una di queste cose dicesi *unità*, ed è o *uno* senza altra determinazione (unità astratta) ovvero una determinata grandezza (unità concreta), p. e. una decina, una serqua, uno scudo, una crazia, un piede, un grado, una libbra, un' ora, ecc. Un numero è più grande di un altro quando contiene un maggior numero di unità. I numeri astratti formano la *serie naturale de' numeri* che si prolunga senza fine. Per esprimere i numeri naturali con poche parole e pochi segni (cifre) i popoli civili hanno adottato il *sistema decimale*, secondo il quale dieci unità formano una decina, dieci decine un centinaio, dieci centinaia un migliaio, mille migliaia un milione, un milione di milioni un bilione, un milione di bilioni un trilione, ecc.

I Greci, del pari che i popoli semiti, indicavano le unità, le decine, le centinaia rispettivamente con nove lettere del loro alfabeto; le migliaia coi simboli delle unità accompagnati da un piccolo tratto; le decine, centinaia, ... di migliaia coi simboli delle unità, decine, ... seguiti dalla parola *miriadi*. La distribuzione dei grandi numeri in miriadi non è stata imitata da altri popoli. I Romani rappresentavano una unità, una decina, un centinaio, un migliaio, poi cinque unità,

cinque decine, cinque centinaia con caratteri che più tardi non si distinsero da certe lettere dell' alfabeto comune; esprimevano quattro e nove unità ponendo un *uno* davanti a *cinque* e a *dieci;* ecc.

Queste maniere di scrivere i numeri cominciarono ad andare in disuso quando i Latini conobbero, per mezzo di Boezio, il sistema neopitagorico dell' abaco a colonne: e furono poi del tutto abbandonate nel secolo 12.° per la diffusione della più perfetta notazione indoaraba, secondo la quale le unità sono espresse con segni particolari, le decine pel loro posto a sinistra delle unità, le centinaia, le migliaia, le decine di migliaia.... pel loro posto a sinistra delle decine, centinaia, migliaia, ... La voce *milione* è di antica origine italiana. Le parole *bilione*, *trilione* ..... (GIRARD) ..... *miliardo* (mille milioni) sono di più recente formazione.

3. I numeri e le operazioni sui medesimi costituiscono l' oggetto dell' *aritmetica. Calcolare* significa eseguire un' operazione sui numeri. Per indicare le operazioni da eseguirsi si sono adottati certi *segni.* I numeri in generale, cioè i numeri qualisivogliano che debbano essere combinati fra loro nelle operazioni, si esprimono con *lettere* diverse (maiuscole, minuscole, accentate, con indici) p. e.

$$A,\ B,\ C,\ \ldots.\ a,\ b,\ c,\ \ldots.\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.$$

$$a',\ a'',\ a''',\ \ldots.\ a^{(n)},\qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_n,$$

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots.\ a_{1n},\qquad a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots.\ a_{2n}.$$

Perciò l'*aritmetica generale* si chiama anche *calcolo letterale* (*arithmetica speciosa*, *universalis*), in opposizione all' arte del conteggio ordinario (*logistica*, *arithmetica numerosa*) che è un' applicazione di quella. Per *aritmetica superiore* (*teorica dei numeri*) s' intende la dottrina delle proprietà dei numeri interi e delle forme a numeri interi.

In Euclide i numeri generali sono indicati con segmenti rettilinei e le operazioni sui numeri sono esplicate per mezzo di costruzioni. Diofanto (seconda metà del 4.° secolo d. C.) adoperava le lettere iniziali dei nomi di quantità indeterminate come simboli numerici, che verso la fine del medio evo (Paccioli 1494) furono chiamati *numeri cossici*, (*cossa, cosa*), e più tardi *specie*. Più manifesti germi del calcolo letterale si trovano in Regiomontano 1460 (*Algorithmus demonstratus*, Nürnberg 1534. Cfr. Chasles *Aperçu hist.* p. 528) ed in Stifel (*Arithm. integra* 1544 fol. 252); ma con maggior estensione e in modo sistematico per la prima volta in Vieta (seconda metà del secolo 16.°) vero inventore del calcolo dei simboli (*logistica speciosa*).

4. Le proposizioni delle scienze matematiche sono o *definizioni*, o *teoremi*, o *assiomi*. La *definizione* (ὁρισμός) serve a chiarire un concetto composto. Un *teorema* (θεώρημα) dimostra il nesso fra una supposizione (ὑπόθεσις) ed una conclusione (θέσις). *Assioma* (ἀξίωμα) è un' affermazione che si può esigere venga accettata senz' altro. Il celebrato rigore delle scienze matematiche posa su di ciò che il numero dei loro assiomi è estremamente piccolo e che i loro teoremi si possono dimostrare (logicamente) e verificare (empiricamente). La *dimostrazione* (ἀπόδειξις) è *diretta* quando si ricava la tesi dall'ipotesi mediante argomentazione; *indiretta* (apagogica, ἀπαγωγή, *deductio ad absurdum*) se dalla negazione della tesi si deduce mediante argomentazione la negazione dell' ipotesi. Un' argomentazione (συλλογισμός) consta delle premesse e della conclusione; p. e. se $A = B$, e $B = C$ sarà $A = C$; se $A > B$, e $B > C$, sarà $A > C$; grandezze eguali aumentate o diminuite di grandezze eguali danno risultati eguali, ecc.

Fatta astrazione da queste argomentazioni che emergono dal concetto dell' eguaglianza, la prima parte delle scienze matematiche (aritmetica, algebra, analisi) non ha bisogno di alcun assioma; mentre le altre parti (geometria, meccanica) non si possono stabilire senza certi assiomi.

Ne' vecchi trattati, *corollario* significa un teorema che è subordinato ad un altro e che da esso si ricava facilmente; *lemma* (da λαμβάνω) è un teorema appartenente ad un' altra serie di concetti che si antepone per istabilire una proposizione più generale.

La numerazione greca
La numerazione romana
Boezio
Euclide
Diofanto
Pacioli
Vieta
Deductio (o reductio) ad absurdum

La famiglia Bernoulli



Jakob
(1654-1705)



Johann
(1667-1748)

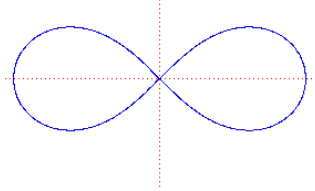


Nikolaus
(1695-1726)



Daniel
(1700-1782)

Questa famiglia calvinista di Basilea produsse otto matematici nell'arco di tre generazioni. Quattro di questi sono passati alla storia per i loro innovativi contributi che, ispirandosi alla matematica di **Leibniz**, seppero dare nel campo del **calcolo infinitesimale**. La parola ***integrale*** fu coniata da Jakob.
I fratelli Jakob e Johann studiarono con successo le **serie numeriche** e le proprietà analitiche delle curve; fu Jakob a determinare l'equazione della **catenaria** e a scoprire che la **cicloide** è brachistocrona.
Nella sua opera principale, pubblicata negli ***Acta Eruditorum*** (1694), Jakob introdusse una nuova curva, la ***lemniscata***, che da lui prese il nome:



La curva che più di tutte lo affascinò fu però la **spirale logaritmica**, di cui scoprì tante sorprendenti caratteristiche, e che volle incisa sulla sua tomba.

Johann formulò una delle prime definizioni del concetto di **funzione**. Inventò la famosa regola per calcolare il **limite** di un quoziente di funzioni, in cui numeratore e denominatore tendono entrambi a zero: essa è oggi nota col nome de **l'Hospital**, poiché questi, che era stato allievo di Bernoulli a Parigi, la pubblicò come propria. Un altro caso di presunto plagio oppose Johann a suo figlio Daniel: l'oggetto del contendere era il contenuto dell'opera ***Hydrodynamica*** (1738), che, stando alle accuse del primo, il secondo avrebbe scritto attingendo indebitamente dal suo trattato ***Hydraulica***. Questa circostanza appare, tuttavia, storicamente infondata. È quasi sicuramente Daniel il vero scopritore del ***principio di Bernoulli*** secondo cui la pressione interna di un fluido perfetto soggetto alla sola forza di gravità è tanto minore quanto maggiore è la sua velocità di scorrimento: è grazie a questa legge che gli aerei volano.

Con il trattato ***Ars conjectandi*** (1713), pubblicato postumo, Jakob gettò le basi della **teoria della probabilità**. In quest'opera i coefficienti dello sviluppo del binomio $(a + b)^n$, già determinati da **Newton**, vengono ricavati mediante il calcolo delle combinazioni. Qui viene anche enunciata la famosa ***legge dei grandi numeri***:

Se, in un esperimento, un certo evento si verifica con probabilità p, e P(n) è il numero di volte che l'evento si verifica in n esperimenti, allora, al tendere di n ad infinito, il rapporto P(n)/ n tende a p.

Ci siamo espressi secondo il moderno linguaggio matematico: **la formulazione originaria** di Bernoulli è leggermente diversa.

Questa legge consente di effettuare previsioni sulla base della probabilità: nasce così il concetto di *speranza matematica*. In base alla speranza di vincita vengono fissate le quote nelle scommesse sportive. E lo stesso principio può essere applicato a tutti i giochi di fortuna, come il **lotto**. Su questa nozione Nikolaus, il fratello maggiore di Daniel, formulò un problema, simile al **problema delle parti**. Si immagina che due giocatori, che chiameremo *A* e *B*, lancino ripetutamente in aria una moneta, dopo aver fissato questa regola: *A* riceve da *B* una moneta se il primo lancio dà testa; se ciò non avviene, ma il secondo lancio dà testa, *A* riceve da *B* due monete; se compare testa per la prima volta al terzo lancio, *A* riceve da *B* quattro monete, e così via. Si domanda quale sia la giusta cifra che *A*

dovrebbe versare a *B* all'inizio del gioco. I calcoli danno come risultato una somma infinita, il che contraddice sia l'intuizione, sia la verifica empirica sulla base della legge dei grandi numeri. Questo problema restò famoso presso la comunità dei matematici per tutto il secolo XVIII, col nome di *paradosso di Pietroburgo.* È infatti nell'antica capitale russa che Nikolaus lo ideò: qui egli era stato chiamato nel 1725, insieme al fratello Daniel, a coprire una cattedra presso la locale Accademia. Purtroppo la morte lo colse a pochi mesi dal suo arrivo. Fu Daniel a proseguire le ricerche sul problema della speranza matematica. A questa egli ritenne opportuno affiancare, nello studio dei problemi della vita reale, il nuovo concetto di "speranza morale", in cui rientravano anche i fattori psicologici.

La stirpe Bernoulli continuò a generare matematici anche nei decenni successivi. Ma nessuno raggiunse mai la fama dei suoi illustri capostipiti.

Matematica e psicologia

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Giuseppe Bertrand
Trattato di Algebra elementare
Firenze, 1862

Il testo offre un quadro completo di quella che era la conoscenza dell'algebra nella seconda metà del 1800, con l'intento di presentare un intero Corso di Algebra, per uso scolastico ed in un linguaggio accessibile. Partendo dalla spiegazione dei segni algebrici, delle quattro operazioni e delle fondamentali formule algebriche, si spinge fino al confine con la Fisica e il **Calcolo Infinitesimale**. Viene quindi messa in luce l'assenza di una netta separazione fra le varie branche della Matematica. A tal proposito, per esempio, si precisa: *Sarebbe difficile condurre una linea di divisione precisa tra l'algebra e l'aritmetica; infatti i risultati particolari non possono separarsi compiutamente dalle teoriche generali, e le quistioni d'aritmetica conducono quasi necessariamente a proposizioni algebriche.*
Nella nota IV, ponendosi il **problema** della risoluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, quando a è piccolissimo, si introduce il criterio dell'approssimazione, spiegando come determinare la soluzione con 20 cifre decimali esatte e riportando i risultati ottenuti.

La risoluzione approssimata delle equazioni algebriche vanta una lunga tradizione, che va dalla **estrazione delle radici quadrate** della **matematica babilonese**, attraverso **François Viète**, fino al moderno **metodo di Newton-Raphson**.

Il traduttore dell'opera è **Enrico Betti**, noto per essere stato il coautore, con **Francesco Brioschi**, di un'**edizione didattica** degli ***Elementi*** di **Euclide** diffusa nelle scuole nella seconda metà dell'Ottocento.

TRATTATO

DI

ALGEBRA ELEMENTARE

DI

GIUSEPPE BERTRAND

Membro dell' Istituto di Francia.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE ED AGGIUNTE

DI ENRICO BETTI

Professore di Analisi e Geometria superiore nella R. Università di Pisa.

Nuova Edizione, con correzioni.



FIRENZE.

FELICE LE MONNIER.

1862.

NOTA IV.

—

Risoluzione dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, quando a è piccolissimo.

327. La formula generale che dà le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

non è accomodata al calcolo numerico, quando il coefficiente a è molto piccolo. Infatti, dopo aver calcolato approssimativamente $\sqrt{b^2-4ac}$, bisogna dividere il risultato per $2a$, e quindi l'errore commesso resta diviso contemporaneamente per un numero molto piccolo, e per ciò rimane grandemente aumentato. Converrà dunque trovarne un'altra meglio appropriata a questo caso. Consideriamo soltanto la radice che differisce poco da $-\frac{c}{b}$ (100); l'altra si troverà dopo facilmente, poichè la somma di ambedue è conosciuta, è eguale a $-\frac{b}{a}$.

Dall'equazione

$$ax^2+bx+c=0,$$

si deduce

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}, \tag{1}$$

e poichè a è molto piccolo, trascurando $\frac{ax^2}{b}$, avremo

una *prima approssimazione*

$$x = -\frac{c}{b}. \tag{2}$$

L'errore commesso, prendendo questo valore, è $\frac{ax^2}{b}$ e contiene come fattore la prima potenza di a, e perciò si dice di *prim' ordine*.

Se indichiamo con α_1 l'errore che si commette prendendo $x = -\frac{c}{b}$, avremo esattamente

$$x = -\frac{c}{b} + \alpha_1; \tag{3}$$

Ponendo nuovamente questo valore nel secondo membro dell'equazione (1), abbiamo

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} + \alpha_1\right)^2 \tag{4}$$
$$= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \frac{2ac\alpha_1}{b^2} - \frac{a\alpha_1^2}{b}.$$

Se trascuriamo nel secondo membro dell'equazione (4) i termini che hanno per fattori $a\alpha_1$, $a\alpha_1^2$, resta per *seconda approssimazione*

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}. \tag{5}$$

Poichè α_1 è di prim'ordine rispetto ad a, $a\alpha_1$ ed $a\alpha_1^2$ saranno rispettivamente di secondo e terz'ordine, cioè conterranno per fattori a^2 ed a^3. Dunque la seconda approssimazione data dalla formula (5) non ammette altro che errori di *second' ordine*, e quindi se poniamo

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2, \tag{6}$$

α_2 sarà di second'ordine, cioè la sua espressione conterrà a^2 per fattore.

Se mettiamo nuovamente nel secondo membro della formula (1) il valore di x dato dalla formula (6) si ottiene

$$(7) \qquad x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2\right)^2$$

$$= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7} + 2\alpha_2\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3}\right) - \alpha_2^2\frac{a}{b}.$$

Poichè α_2 è di second'ordine, $\alpha_2 a$ e $\alpha_2^2 a$ saranno rispettivamente di terzo e di quint'ordine. Trascurando i termini che contengono $\alpha_2 a$ e $\alpha_2^2 a$, e $\frac{a^3c^2}{b^7}$ che è pure di terz'ordine, otterremo per *terza approssimazione*

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}.$$

Potremo continuare così indefinitamente.

328. OSSERVAZIONE. Le formule di approssimazione

$$x = -\frac{c}{b},$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3},$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5},$$

sodisfanno alle condizioni che richiede un buon sistema di approssimazioni successive.

1°. Ciascuna si ottiene dalla precedente, mediante l'addizione di un termine di correzione:

2°. L'errore commesso dopo l'addizione di ciascun termine è *piccolissimo* rispetto a questo termine.

Infatti, prendendo $x = -\frac{c}{b}$, l'errore commesso ha per fattore a, e quindi è piccolissimo rispetto a $-\frac{c}{b}$.

Ponendo $x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$, l'errore commesso ha per fattore a^2 e quindi è piccolissimo rispetto ad $\frac{ac^2}{b^3}$, e così di seguito.

Da questo ne segue che, per distinguere se il valore ottenuto è maggiore o minore del valore esatto, basterà esaminare il segno del termine di correzione che si avrebbe spingendo più avanti l'approssimazione.

Sia, per esempio, l'equazione

$$0{,}0000047x^2 + 6724x - 334 = 0,$$

abbiamo

$$a = \frac{47}{10^6}, \quad b = 6724, \quad c = -334,$$

onde

$$\frac{c}{b} = -\frac{334}{6724} < \frac{1}{10},$$

ed è facile a vedersi che il 1° termine di x è $< \frac{1}{10}$,

il 2° » $< \frac{1}{10^{10}}$,

il 3° » $< \frac{1}{10^{19}}$,

il 4° » $< \frac{1}{10^{28}}$,

ec.

e per risolvere l'equazione con 20 cifre decimali esatte, basterà calcolare tre soli termini di x, ed anche il terzo termine non avrà influenza altro che sull'ultima cifra.

Avremo dunque

$$-\frac{c}{b} = \frac{334}{6724} = 0,04967281380130874479\ 5$$

$$-\frac{ac^2}{b^3} = -\frac{47 \cdot 334^2}{6724^3 \cdot 10^6} = -\ 1724676624\ 8$$

$$-\frac{2a^2c^3}{b^5} = \frac{2 \cdot 47^2 \cdot 334^3}{6724^5 \cdot 10^{12}} = 1\ 2$$

$$x' = 0,04967281378406197856,$$

e poichè

$$-\frac{a}{b} = -\frac{6724 \cdot 10^6}{47} = -\ 143063829,78723404255319148936 17,$$

sarà

$$x'' = -\frac{b}{a} - x' = -\ 143063829,83690685633725346792,$$

valori esatti fino a 20 decimali.

Avremmo potuto ottenere direttamente i medesimi valori per x' e x'', calcolando la formula generale (89).

Colla divisione si ha primieramente

$$\frac{b}{2a} = \frac{6724 \cdot 10^6}{94} = 71531914,893617021276595744 68,$$

$$b^2 - 4ac = 2 \times 22606088031396;$$
$$= 2 \times 4754586^2,$$

ma

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168 87;$$

dunque

$$4754586 \cdot \sqrt{2} = 6724000,00466924449570182598.$$

e

$$\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{10^3}{94} \times 4754586 \cdot \sqrt{2}$$
$$= 71531914,94328983506065772324.$$

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Enrico Betti - Francesco Brioschi
Problemi e teoremi
Napoli, 1880

L'opera è costituita da sette libri e contiene problemi e teoremi geometrici (circa 450), posti dai due autori come esercizi agli ***Elementi*** di **Euclide**. Riportiamo il testo originale di **un problema di geometria del triangolo**.

Enrico Betti ha tradotto in italiano un altro importante testo didattico: il **Trattato d'algebra elementare di G. Bertrand**.

Francesco Brioschi fu allievo di **Antonio Bordoni**. Assunse nel 1884 la presidenza dell'**Accademia dei Lincei**. Fondò nel 1873 L'Istituto Tecnico Superiore di Milano, l'attuale Politecnico, che diresse fino alla morte, avvenuta nel 1897; vi insegnò idraulica fluviale ed agricola.

Betti e Brioschi furono tra i fondatori degli ***Annali di Matematica Pura ed Applicata***, la prima rivista italiana di sola matematica.

SOLUZIONI E DIMOSTRAZIONI

DEI

PROBLEMI E TEOREMI

DETTATI DAI PROFESSORI

ENRICO BETTI E FRANCESCO BRIOSCHI

COME ESERCIZI AGLI

ELEMENTI D'EUCLIDE

PEL PROFESSORE

ANGELO ANDRIANI

2ª edizione.

riveduta e corretta, con 193 figure nel testo

NAPOLI

LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE

DI B. PELLERANO

Strada di Chiaia, 60 e Largo Nilo 6.

1880

AI LETTORI

Il libro che vi presentiamo, o lettori, non è stato elaborato per acquistarci alcun che di fama, sia per l'umiltà del soggetto, sia per la sua direi quasi volgare trattazione. Il pregio che crediamo possa accompagnarlo, si è, che con esso si giustifichi l'operato di quei due illustri scienziati, E. Betti e F. Brioschi, col aver voluto ristabilire in Italia lo studio degli Elementi d'Euclide. La ragione precipua che adducono parecchi professori contro il ripristinamento dell'Euclide, si è, che l'Euclide non basta da sè solo per l'apprendimento della geometria, per essere non solo privo di molte teoriche moderne, ma poco adatto a conseguire uno scopo pratico. Si può rispondere dapprima col dire che i sullodati benemeriti della scienza non intesero pretendere che col solo studio dell'Euclide si potesse addiventare un geometra, o ingegnere; tanto vero che a coloro che amano progredire nelle matematiche raccomandano, dopo lo studio dell'Euclide, quello del Baltzer. Essi nel proporre l'Euclide s'ispirarono allo scopo cui deve mirare lo studio delle matematiche nei Licei, il quale, come quello di tutte le altre materie, consiste nello sviluppare le facoltà mentali dei giovanetti, e renderle atte quandochesia a saper comprendere ed apprezzare lo studio delle scienze nelle Università. Ora se collo studio dell'Euclide si raggiunga questo scopo non havvi chi nol vegga. Che, a dirla come la sentiamo poi, lo studio dell'Euclide basti a far progredire il giovane da sè solo nelle scienze esatte, il libro che vi presentiamo, o lettori, vi convincerà.

SOLUZIONI E DIMOSTRAZIONI

DEI

PROBLEMI E TEOREMI

POSTI DA

BETTI E BRIOSCHI

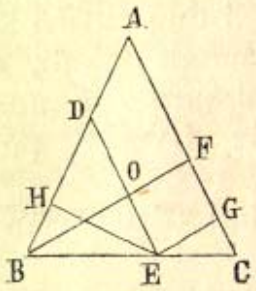
come esercizi agli elementi d'Euclide

Un esempio di problema di geometria del triangolo

Se da un punto qualunque della base d'un triangolo isoscele si conducono le perpendicolari ai lati, la somma di queste è uguale alla distanza d'un termine della base dal lato opposto.

Piano di soluzione

Sia E un punto qualunque della base BC del triangolo isoscele ABC; si deve dimostrare che la somma delle perpendicolari EH, EG menate da E ai lati uguali AB, AC è uguale alla distanza BF d'uno dei termini della base dal lato opposto, cioè, si deve avere



$$EH + EG = BF.$$

Se prendiamo su BF, a partire dal punto F, un segmento FO uguale ad EG, resta a dimostrare che BO è uguale ad EH. Congiungiamo E con O, e risulta $EGFO$ rettangolo.

Allora, se dimostriamo che i due triangoli OBE, HBE sono uguali, conchiuderemo che il teorema proposto è vero. Ma questi due triangoli effettivamente sono uguali, per ragioni facili a vedere, dunque ecc.

Questo metodo deve usarsi a preferenza di qualunque altro nelle dimostrazioni di quei teoremi che richieggono qualche costruzione; perchè lo spirito umano non può vedere le relazioni fra i diversi elementi d'una figura senza separarle con un'analisi accurata e precisa, per quindi compararle fra loro e scegliere quelle che servono all'uopo.

Soluzione (nella nota a margine: soluzione trigonometrica)

Viene utilizzato, tra l'altro, un noto criterio di congruenza fra triangoli, incluso da **Euclide** come **Proposizione 26** del Libro I degli ***Elementi***.

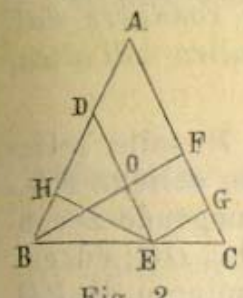


Fig. 2.

Se da un punto E della base BC del triangolo isoscele ABC si conducono le perpendicolari EH, EG ai due lati AB, AC; dico che è $EH + EG = BF$, essendo BF la distanza del termine B dal lato opposto AC.

Dal punto E si conduca $ED \parallel AC$. Risulta $EGFO$ rettangolo, l'angolo BOD retto ed il triangolo DBE isoscele. Ora i triangoli DBO, DHE avendo l'angolo $DOB = DHE$, BDE di comune, il lato $DB = DE$, sono uguali, e quindi $BO = HE$, ed essendo $OF = EG$ sarà $EH + EG = BF$.

Si dimostra pure facilmente che se il punto E è sul prolungamento della base, la differenza delle distanze di esso dai detti lati è costante. È facile ancora dimostrare che se il triangolo è equilatero, la somma delle distanze di un punto preso nel suo piano dai lati è costante.

Trigonometrico
$HE = BC \cdot \operatorname{sen} B$
$EG = EC \cdot \operatorname{sen} C = B$
$HE + EG = BC \cdot \operatorname{sen} B =$
BF

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Giuseppe Bigoni
Problemi e teoremi matematici
Venezia, 1818

È di particolare interesse la **Prefazione** del libro, in cui l'autore discute *sull'utilità, sull'eccellenza, sulla fertilità della Matematica*, che egli, quasi riecheggiando le idee di **Descartes**, considera come la scienza dei principi generali, che trova applicazione in tutte le altre, come l'**astronomia**, l'**ottica**, la **meccanica** e la **filosofia**.
Dall'indice:
Problemi geometrici, problemi trigonometrici.
Teoremi Geometrici, e Conici.
Problemi Conici, e Solidi.
Teoremi e Problemi spettanti a curve degli ordini superiori e trascendenti, ed al Calcolo Sublime.

Il libro contiene problemi geometrici che vengono risolti in più modi: con i *metodi ordinari* (sintetici), tipici della **geometria euclidea**, e poi con i *nuovi metodi* (con l'uso di **coordinate cartesiane**). Il **Problema VIII** riguarda la costruzione della terza proporzionale fra due lunghezze date.

Le sezioni coniche

PROBLEMI

E

TEOREMI

MATEMATICI

DELL'ABATE

GIUSEPPE BIGONI.



VENEZIA

PER ANDREA SANTINI E FIGLIO

1818.

PREFAZIONE.

Fra le umane scienze occupano un posto distintissimo le Matematiche, nè mai è soverchio il pregio, in cui si tengono. Non v'è quasi alcuna scienza, nè alcun' arte, su cui non si veggano signoreggiare. In fatti la loro teoria serve a pressochè tutte di fondamento, e di sostegno; nè si va lungi dal vero, allorchè si chiama la Matematica una scienza universale, di cui le altre non sono che applicazioni particolari. A che mai si ridurrebbero senza di essa le scienze fisiche, particolarmente l'Astronomia, l'Ottica, e la Meccanica? Poco più certamente che ad un misero ammasso di definizioni, e ad un racconto storico di fenomeni. Mancherebbero le più importanti, e più sublimi

cognizioni; perchè mancherebbe il mezzo unico, e sicuro d'acquistarle. Come mai senza la scorta delle Matematiche penetrare tutte le leggi fisiche, a cui fu dal supremo Creatore assoggettato l'universo? Come calcolare le forze de' corpi? Come comprendere l'ordine mirabile, e costante, che regna nella natura, e spezialmente quello de' corpi celesti? Come finalmente spiegare, e predire tanti fenomeni? Oserei quasi dire che senza il sussidio delle Matematiche la scienza de' Filosofi non supererebbe gran fatto quella degl'idioti, nè si avrebbero i mezzi d'estenderne i confini. Se parliamo delle arti, poche ne conosceremmo, e queste sarebbero assai imperfette.

Ma non è soltanto la somma influenza delle Matematiche su quasi tutte le altre umane scienze, e le arti, che le renda pregevolissime; un altro vantaggio ben considerabile da esse riconosciamo. Appoggiate a principj inconcussi, incontrastabili, evidentissimi, esse non guidano la mente alla cognizione delle proposte verità, se non che per una serie ben ordinata di giusti raziocinj. In esse nulla si propone senza dimostrarlo, nulla si dimostra senza un ordine ammirabile, e senza inspirare nell'intelletto un'intima persuasione, e un perfetto convincimento. Tutto ciò, ch'è dubbio, tutto ciò, ch'è opinione, non può qui aver accesso. In

tal guisa ci avvezziamo a non ammettere come vero, se non ciò, ch'è per se stesso evidente, o ch'è suscettibile di solide prove fondate su principj infallibili. In tal guisa si contrae la felice abitudine di ragionar rettamente su tutto: l'ingegno acquista maggior acume, il raziocinio maggior rettitudine; e lo spirito più atto si rende a nuove scoperte, ad importanti imprese. Nè havvi il menomo pericolo, come teme taluno, che la Matematica assuefacendo la mente al rigor delle dimostrazioni, la porti a gettar qualche dubbio sovra quelle verità, che quantunque certissime, mancano d'evidenza. Il Matematico è conscio de' limiti del suo intelletto; e perciò qualora ascoltar voglia la retta ragione, vede qual folle temerità sarebbe il volere oltrepassarli, cercando l'evidenza dove non può trovarla. Lungi dal recare questo pregiudizio, la Matematica pone anzi lo spirito in istato di meglio conoscere la solidità de'fondamenti, su cui si stabiliscono certe verità d'un genere superiore, e di rispingere più agevolmente gli sforzi, che fannosi per combatterle.

Pertanto non è meraviglia se queste sì nobili, ed utili scienze sieno state in ogni tempo con tanta cura coltivate, e se tanti sublimi genj sì antichi, che moderni abbiano ad esse consecrato con trasporto le assidue loro meditazioni. Quindi ne

vennero tante, e sì luminose scoperte, l' invenzione di tanti metodi, la rettificazione e la semplificazione di tanti altri; in guisa che sono oggidì le Matematiche giunte ad un punto ben elevato di grandezza, e di perfezione. Ma per quanti progressi finora esse abbian fatti, non possiam dire però che capaci non siano di ulteriori incrementi. Elleno sono un abisso, di cui scandagliar non si può la profondità. Posson dunque gl' ingegni rinvenirvi di che occuparsi, tentando di contribuire in qualche modo all'avanzamento di tali scienze. Se per una parte a ciò incoraggisce la loro fecondità, eccita, ed alletta per l' altra il loro sommo vantaggio, il loro pregio, e quel vivo, e soave piacere, che seco porta lo scoprimento d'interessanti verità.

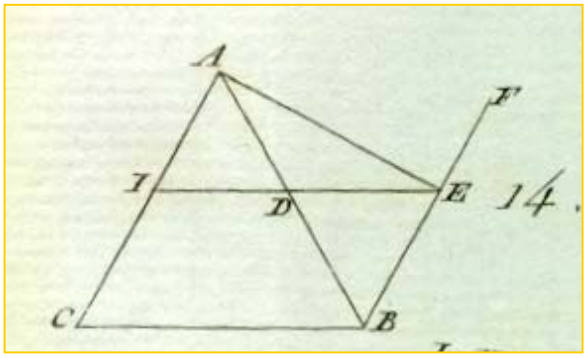
Dopo questi pochi tratti di penna sull'utilità, sull'eccellenza, e sulla fertilità della Matematica, siami permesso un cenno sulla condotta da me tenuta nell' opera, che oso d' offrire al pubblico, e su ciò che contiene. E prima di tutto conoscendo quanto importi il trattare siffatte materie con tutto il rigore, nulla omisi, affinchè tutto riuscisse colla massima evidenza dimostrato, e non avesse la mente del leggitore ad incontrare il menomo inciampo. Alla chiarezza, e facilità si è procurato possibilmente di accoppiare la brevità, e l'eleganza, tra

le diverse vie, che conducono ad alcune verità, quella scegliendo, che breve fosse ad un tempo, e non la peggiore. In quasi tutti i quaranta due problemi geometrici, che di primo lancio s' affacciano, alla soluzione data secondo i metodi ordinarj s' è aggiunta per lo più un'altra conforme ai nuovi metodi, tutto riportando a due coordinate. Dopo sei problemi trigonometrici, che seguono immediatamente i geometrici, si vedranno ventidue teoremi parte geometrici, e parte conici. Alcuni de' primi servono di base ad alcuni de'secondi. In questi ultimi ravvisar puossi una specie di parallelo fra l'ellisse, ed il circolo. Ivi si dimostrano alcune affezioni comuni ad ambedue queste curve, ed alcune altre, nelle quali discordano. Vi si scorgerà inoltre fissato il rapporto non solo fra le aree di due simili ellissi, ma ancor di due ellissi disuguali, e dissimili. Seguon quarantaun problemi conici, e solidi. In alcuni di questi s' è adoprata la sintesi, negli altri l' analisi quasi per tutto conforme ai metodi moderni, aggiungendo alla soluzione analitica la costruzione geometrica, per ottenere dall'intersezione di due curve la ricercata quantità. Vengono finalmente due teoremi, e undici problemi spettanti a curve degli ordini superiori, ed al Calcolo sublime. Ivi si osserverà fra le altre cose trovata una curva, la cui area eguaglia la semidifferenza fra

un circolo, il cui raggio è l'asse di quella curva, e il quadrato circoscritto.

Aggradite, benigno lettore, questa mia opericciuola, se pur qualche cosa in essa vi si presenta, degna del vostro aggradimento. Altrimenti non biasimerete almeno, me ne lusingo, la mia brama d'esser giovevole.

VIII. *Dato il triangolo* BAC, *condurre* DI *parallela alla base, e che sia terza proporzionale dopo* BD, DA.



14.

Prima Soluzione.

Condotta (*Tav. I. Fig.* 14.) l'indefinita *BF* parallela a *CA*, e fatto colla *AE* l'angolo $BAE = \frac{CBA}{2}$, dal punto *E* si conduca *EI* parallela a *BC*.

Dico che la *DI* è la retta ricercata.

Ne' due triangoli *DAI*, *DBE* essendo gli angoli eguali per lo parallelismo di *CA*, *BF*, essi sono simili. Dunque *DB* : *DE* : : *DA* : *ID*. Ma *DE* = *DA*. In fatti la somma de' due angoli *DAE*, *DEA* eguaglia l'esterno *BDE*, e questo eguaglia l'alterno *CBD*; dunque $DAE + DEA = CBD$; è poi $DAE = \frac{CBD}{2}$; dunque anche $DEA = \frac{CBD}{2}$, e perciò *DAE* = *DEA*, e così *DE* = *DA*. Pertanto se, come si è dimostrato, *DB* : *DE* : : *DA* : *ID*, sarà altresì *DB* : *DA* : : *DA* : *ID*. Dunque ec.

Seconda Soluzione.

Sia $AD = x$, $DI = y$, $AB = d$, $BC = a$. Sarà $DB = d - x$.

Condizioni. $d - x : x : : x : y$
$d : x : : a : y$.

Avremo dunque le due equazioni seguenti:

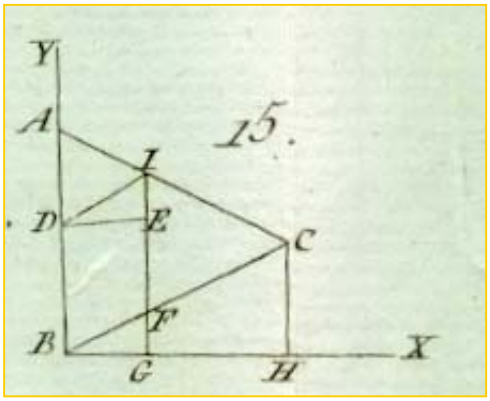
$$dy - xy = x^2$$
$$dy = ax.$$

Si trovi in ambedue il valore di *y*, e sarà

$$y = \frac{x^2}{d-x}, \quad y = \frac{ax}{d}.$$

Dunque $\frac{x^2}{d-x} = \frac{ax}{d}$, cioè $dx^2 = adx - ax^2$;

e perciò $x = \frac{ad}{d+a}$.



Terza Soluzione.

Sia riportato (*Tav. I. Fig.* 15.) il triangolo alle coordinate rettangole BY, BX in guisa, che il lato AB sia sull'asse delle ordinate, e l'angolo B all'origine, e supponga si che la DI sia la retta ricercata.

Sia y' l'ordinata del punto D, y'' quella di A, y''' x' siano le coordinate di I, y^{IV} x'' quelle di C.

Essendo nota BC, e l'angolo CBH, complemento del noto angolo CBA, nel triangolo rettangolo BCH, si fan noti ancora i due cateti CH, BH; poichè $r : \text{sen } CBH :: BC : CH$, e poi $\overline{BC}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{BH}^2$. Conosciamo adunque, oltre y'', anche y^{IV}, e x''.

Per la natura del problema abbiamo queste tre proporzioni:

$$x''^2 + y''^2 : (y''' - y')^2 + x'^2 :: y''^2 : (y'' - y')^2$$

$$y' : y''' - y' :: y'' - y' : \sqrt{\left((y''' - y')^2 + x'^2\right)}$$

$$y^{IV} : x'' :: y''' - y' : x'.$$

Dalla terza si ha $x' = \dfrac{x''(y''' - y')}{y^{IV}}$, il qual valore sostituito nelle altre due, e ridotte queste ad equazione, troveremo

$$(y''' - y')^2 = \frac{(y'' - y')^2 (x''^2 y''^2 + y^{IV4})}{y''^2 y^{IV2} + y''^2 x''^2},$$

$$(y''' - y')^2 = \frac{y''^2 (y'' - y')^4}{y'^2 y^{IV2} + y'^2 x''^2}.$$

Eliminata y''' coll'eguagliare i due valori di $(y''' - y')^2$, ne risulterà l'equazione seguente, in cui y' è inalzata alla seconda potenza:

$$y'^2 \frac{+ 2y''^3 (y^{IV2} + x''^2) y'}{y^{IV2}(2x''^2 + y^{IV2} - y''^2) + x''^2 (x''^2 - y''^2)} = = \frac{y''^4 (y^{IV2} + x''^2)}{y''^2 (2x''^2 + y^{IV2} - y''^2) + x''^2 (x''^2 - y''^2)}.$$

Dunque $y' = \dfrac{-y''^3 (y^{IV2} + x''^2) \pm y'' \sqrt{\left(y''^2 (3y^{IV2} x''^2 + 3x''^4 + y^{IV4}) + x''^6\right)}}{y^{IV2}(2x''^2 + y^{IV2} - y''^2) + x''^2 (x''^2 - y''^2)}$

In tal modo trovato il punto D, si conduca da esso la DI parallela a BC, e sarà sciolto il problema.

Matematica e Arte
Matematica e Letteratura
Matematica e Filosofia

George David Birkhoff
Collected Mathematical Papers
Volume III
New York, 1950

(*Raccolta di scritti matematici*
Volume III
New York, 1950)

L'autore disquisisce sulle più diverse applicazioni della matematica. Per dimostrare la varietà degli argomenti affrontati riportiamo i titoli di alcuni capitoli e paragrafi:
"Scienza e prospettiva spirituale"
"Qualche elemento matematico dell'arte"
"Forme poligonali"
"Una teoria matematica dell'estetica e le sue applicazioni alla poesia ed alla musica"
"Un approccio matematico all'etica"

Scienza e prospettiva spirituale
Una nuova filosofia

Citiamo dall'articolo: *"[...] Considerazioni storiche e filosofiche indicano chiaramente che la conoscenza si dispone naturalmente in una sorta di gerarchia avente cinque livelli: i livelli matematico, fisico, biologico, psicologico e sociale. Ognuno di questi ha il proprio sistema caratteristico di concetti, leggi e terminologia completa. Le principali idee di base ai vari livelli possono essere indicativamente così elencate:* ***Matematiche*** *- classe, relazione, inferenza, astrazione;* ***fisiche*** *- spazio-tempo, materia, elettricità, uniformità;* ***biologiche*** *- organismo, stimolo, funzione, evoluzione;* ***psicologiche*** *- sensazione, memoria, volontà, idea;* ***sociali*** *- personalità, libertà, valore, ideale.*
Per quanto concerne il pensiero attivo, ciascuno di questi livelli è largamente indipendente dagli altri. Ciò significa che il matematico tratta il puramente astratto, il fisico pensa in termini fisici, e così via. Una classificazione fondamentale dei livelli può essere effettuata a seconda che questo pensiero attivo non contenga alcun esplicito riferimento alla mente, oppure comprenda un tale riferimento. In questo senso i livelli matematico e fisico sono ***oggettivi****, in quanto non v'è alcun riferimento alla mente. I livelli psicologici e sociali sono* ***soggettivi*** *per il motivo opposto. Il livello biologico è chiaramente di tipo intermedio.*
Quale livello è per noi il più fondamentale o "reale"? La risposta appropriata è, io penso, la seguente. Qualunque livello può apparire come il più reale se insistiamo a partire da esso e vi restiamo saldamente aggrappati considerandolo primario nel nostro modo di pensare. Se sottolineiamo in questo modo solo il livello matematico, siamo "assoluti realisti", se quello fisico siamo "materialisti", se quello biologico "naturalisti dettagliati", se quello psicologico "positivisti", se quello psicologico "idealisti etici". [...]
La notevole bellezza e straordinaria diversità della matematica moderna non sono universalmente riconosciute, benché sia verosimile che le sue qualità profondamente artistiche col passar del tempo saranno via via più ampiamente apprezzate, più o meno come avviene oggi per la musica. Tuttavia quasi tutti capiscono il numero con le sue leggi aritmetiche, e la geometria come è stata sviluppata logicamente da ***Euclide****. Inoltre i* ***numeri immaginari*** *e la geometria quadridimensionale hanno avuto un posto nel nostro vocabolario se non di più. In virtù di questo retroterra, la matematica apparirebbe a prima vista definibile come la scienza che tratta del numero e della forma geometrica.*

*In conseguenza del recente approfondimento dei **fondamenti logici** del pensiero matematico, questa caratterizzazione è ora considerata piuttosto fuorviante. La matematica è vista oggi come la scienza che tratta dei modelli logici detti "astrazioni".*
Non solo enti geometrici come punti, linee, piani e così via, e numeri come quelli interi, uno, due, tre, e così via, ma un gran numero di altri oggetti ideali del pensiero astratto appartengono all'ambito matematico. La matematica non si occupa del significato delle intuizioni soggiacenti, né delle applicazioni ad altri livelli, ma solo dell'elaborazione architettonica del modello logico completo.
*Il lavoro di Euclide sulla geometria può essere considerato la prima fase dell'adeguata formulazione di un'astrazione. Egli selezionò come fondamentali certi elementi indefiniti come punti, linee e piani; selezionò allo stesso modo certe semplici relazioni indefinite, come l'appartenenza di un punto ad un linea, e così via; e poi, sulla base di poche semplici intuizioni o postulati, ed una serie di inferenze logiche, costruì l'astrazione che chiamò **geometria euclidea**.*
*Naturalmente Euclide pensava alla geometria come alla perfetta espressione della legge spaziale. Dall'avvento della **teoria della relatività**, però, la geometria di Euclide è considerata un sistema astratto che trova un'importante applicazione nella misurazione spaziale, ma che probabilmente non corrisponde esattamente alla realtà fisica. [...]*
*La conoscenza è gerarchica: matematica, fisica, biologica, psicologica e sociale. L'originaria **visione pitagorica** che "**Tutto è numero**" può esser oggi interpretata in senso più ampio dicendo che i modelli logici in quanto tali costituiscono il livello matematico, e che agli altri livelli questi modelli sono universalmente osservati. L'elaborazione logica di questi modelli sembra diminuire coi livelli successivi, a causa dell'incompletezza delle nostre conoscenze, ma il vigore e l'importanza delle intuizioni di base non ne risultano inficiati.*
[...]
I più alti ideali sembrerebbero provenire dall'adozione senza riserve dell'atteggiamento scientifico, non nel senso esclusivo di ciascun livello, ma con un profondo apprezzamento dell'intero spettro naturale-mentale della conoscenza, e, in particolare, delle interrelazioni vitali e della profonda importanza dell'ambito della personalità. Troppo spesso il pensiero scientifico ha trascurato quest'ultima verità, della quale il pensiero religioso è costantemente cosciente. Era per mantenere intatti i valori della visione religiosa che molti grandi scienziati sono rimasti attaccati a credi che sono apparentemente a-scientifici. Il grande fisico

*matematico **Maxwell** dichiarava in tutta franchezza che ogni altra visione gli pareva "impraticabile", e quindi giustificava pragmaticamente la sua posizione religiosa ortodossa.*
C'è un'ulteriore grande verità religiosa soggiacente la cui rilevanza non è ancora stata completamente afferrata da molte persone dalla mente scientifica: tutta l'accettazione, profonda ed incondizionata, di un codice formulato di valori ed ideali, che trascende l'immediato interesse personale e al quale possono essere dedicate le nostre energie vitali, costituisce l'ingrediente essenziale della salvezza individuale nell'unico senso veramente importante. Infelice è davvero colui che vive senza un codice di questo tipo. L'atteggiamento scientifico dovrebbe metterci in condizione di sceglierci il nostro codice personale con ancor maggiore illuminazione. [...]"

Qualche elemento matematico dell'arte

Citiamo dall'introduzione alla conferenza tenuta dall'autore a Bologna nel 1928: *"Quasi tutti gli uomini a tendenza filosofica si sono occupati, prima o poi, del problema del bello. Di conseguenza, esiste attualmente una vastissima bibliografia che tratta l'argomento da molti differenti punti di vista. Io intendo oggi prenderlo in considerazione ancora una volta, ma da un punto di vista un po' matematico, che pare non sia stato finora sviluppato, benché se ne possano trovare in più luoghi delle vaghe idee, fondamentalmente analoghe.*
L'esperienza estetica tipo può essere vista come composta di tre momenti successivi: 1° uno sforzo preliminare, necessario per cogliere bene l'oggetto, e proporzionale alla complessità (C) dell'oggetto; 2° il sentimento del piacere o misura estetica (M) che ricompensa questo sforzo preliminare; 3° una successiva percezione cosciente che l'oggetto gode di una certa armonia o simmetria od ordine (O), più o meno nascosto, che pare essere una condizione necessaria, se non sufficiente, per l'esperienza estetica stessa.
Così si pone immediatamente la questione di determinare, in un dato caso, fino a che punto questa misura estetica non sia altro che l'effetto della densità delle relazioni d'ordine, cioè il rapporto di queste alla complessità. E pertanto sembra molto naturale proporre una formula come

$$M = O/C.$$

1 La misura estetica nelle arti figurative:
La misura estetica di una forma poligonale
La misura estetica di un vaso
La misura estetica per le griglie

2 **La misura estetica in poesia**

La misura estetica di una forma poligonale

La **misura estetica di una forma poligonale** è data dalla formula seguente:

$$M = \frac{O}{C} = \frac{V + E + R + HV - F}{C}$$

ove la quantità *O,* detta *ordine,* misura l'armonia ed il grado di simmetria, mentre la quantità *C*, detta *complessità,* misura quanto la figura è articolata e varia. Il rapporto tra queste due quantità è paragonabile a quello che intercorre fra profitto ed investimento. Precisamente:

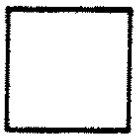
- *C* è il numero di rette su cui giacciono i lati;
- *V* vale *1* oppure *0* a seconda che la forma presenti o meno un asse di simmetria verticale;
- *E* vale *1* se il poligono presenta una simmetria verticale oppure giace su di una base orizzontale sufficientemente lunga, vale *0* se si trova in equilibrio instabile, vale *-1* se non è in equilibrio;
- *R* misura la presenza di una simmetria di rotazione. Se questa è assente, si pone *R=0.* Altrimenti sia *q* il più piccolo valore intero tale che la figura resta uguale se ruotata di un angolo di $360/q°$. Se in più esistono assi di simmetria, si pone $R=q/2$, oppure $R=3$ se $q>6$. Se non esistono assi di simmetria, si pone *R=1;*
- *HV* misura il grado in cui i contorni della figura riempiono una griglia rettangolare, ed i valori possibili sono *0, 1* e *2*;
- *F* misura quanto la figura, nel suo complesso, risulta soddisfacente. Vale *0* se è verificata almeno una delle due condizioni seguenti:
  1. ogni semiretta uscente dal centro del poligono taglia il bordo di quest'ultimo una sola volta, oppure
  2. ogni retta orizzontale o verticale taglia il bordo del poligono non più di due volte. Altrimenti vale *1* se compare non più di uno dei seguenti elementi *insoddisfacenti:* un tipo di lato privo di supporto, due tipi diversi di concavità, tre tipi di direzioni diverse per le linee del bordo, dove le linee orizzontali e verticali sono considerate appartenenti allo stesso tipo. In tutti gli altri casi si pone *F=2.*

Si noti che il valore di *M* può anche essere negativo: in tal caso il poligono è indifferente dal punto di vista estetico.

Dalla **misura estetica delle forme poligonali** si deduce, con qualche passaggio matematico in più, la misura estetica per le **griglie**.

Vedi anche la pagina analoga per le **forme di un vaso**.

1



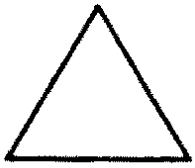
1.50

2



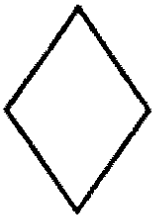
1.25

3



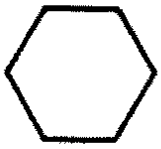
1.16

4



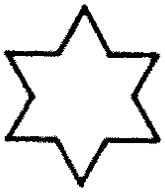
1.00

5



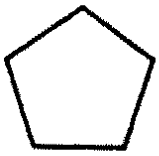
1.00

6



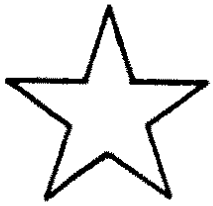
1.00

7



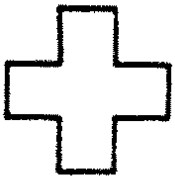
0.90

8



0.90

9



0.75

10



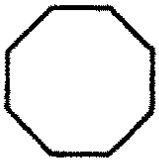
0.71

11



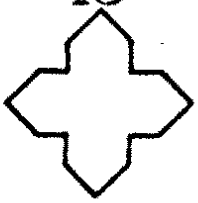
0.63

12



0.62

13



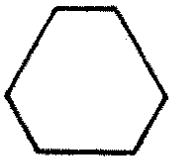
0.62

14



0.58

15



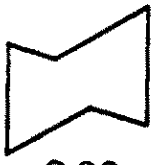
0.58

76



0.00

77



0.00

78



0.00

79



0.00

80



0.00

81



0.00

82



0.00

83



0.00

84



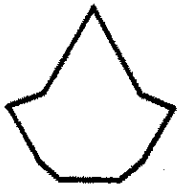
0.00

85



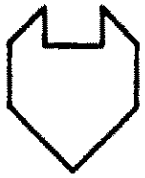
0.00

86



0.00

87



0.00

88



- 0.10

89



-0.11

90



-0.17

La misura estetica in poesia

La **qualità musicale in poesia** è misurata dalla seguente *"formula estetica":*

$$M = \frac{O}{C} = \frac{aa + 2r + 2m - 2ae - 2ce}{C}$$

ove la quantità *O,* detta *ordine,* misura l'armonia ed il grado di simmetria, mentre la quantità *C*, detta *complessità,* misura quanto la poesia è articolata e varia. Il rapporto tra queste due quantità è paragonabile a quello che intercorre fra profitto ed investimento.

- *C* è il numero totale di suoni elementari, maggiorato del numero di coppie di parole che coinvolgono due suoni consonantici adiacenti dello stesso verso e che non ammettono legatura;
- *aa*, detto *elemento di allitterazione ed assonanza*, è il numero di suoni direttamente connessi con altri dello stesso verso o dei versi precedenti, e non direttamente connessi con più di due suoni dominanti o più di quattro suoni in tutto;
- *r*, detto *elemento di rima*, è il numero di gruppi fonetici del verso che rimano con almeno (e in generale, unicamente) con un gruppo fonetico dello stesso verso o di un verso precedente;
- *m*, detto *elemento di vocali musicali*, è il numero di vocali musicali (*a* come in *a*rt, *u* come in t*u*n*e*ful, *o* come in *o*de), maggiorato del numero di vocali *o* come in *o*r ed *a* come in *a*we, che sono direttamente connesse con una vocale musicale lunga precedente *o* oppure *a* rispettivamente;
- *ce,* detto *elemento di eccesso consonantico*, è l'eccesso di suoni consonantici rispetto al doppio del numero dei suoni vocalici in ogni verso;
- *ae,* detto *elemento di eccesso allitterativo ed assonantico*, è il numero dei suoni dominanti direttamente connessi a più di due suoni dominanti precedenti, e di suoni appartenenti ad una sillaba immediatamente successiva ad una sillaba uguale, ma non nella stessa parola, oppure ad una serie uniforme degli stessi suoni contenenti almeno tre suoni precedenti.

Analisi di un verso tratto dal "Kubla Khan" di Coleridge

Un approccio matematico all'etica

Citiamo testualmente dall'articolo dell'autore: *..."Per molti matematici la tendenza verso una crescente matematizzazione di questi tre fondamentali aspetti del pensiero filosofico - logica, estetica ed etica - era quanto ci si poteva aspettare: perché essi probabilmente concordano con il motto del grande filosofo e matematico francese, **René Descartes**, "omnia apud me mathematica fiunt" - con me tutto diventa matematica!*
*Persino nell'Antica Grecia il filosofo **Pitagora** tentò di introdurre l'ordine matematico in campo etico, asserendo che la giustizia è rappresentata da un numero quadrato. A ciò si deve guardare come ad una congettura mistica di reale importanza per l'etica. Similmente **Platone** ed **Aristotele** erano costantemente desiderosi di mostrare lo stretto rapporto tra il buono ed il bello, se non addirittura la loro essenziale identità; ed essi consideravano il bello come ciò che è caratterizzato dall'unità nella varietà. Pertanto è sempre stata osservabile in etica, come anche in estetica, una tendenza verso una formulazione quantitativa. Il traguardo supremo del "summum bonum", adottato dai Greci, è indicativo di ciò; ed il moderno principio utilitaristico del "massimo bene del massimo numero" rivela questa tendenza ancor più chiaramente.*
Un'interessantissima analogia fra estetica ed etica è la seguente. Gli individui dal temperamento cosiddetto artistico spesso guardano alle proprie esperienze personali come ad una sequenza di avventure estetiche dalle quali cercano di trarre il massimo godimento possibile. Similmente, le persone di tipo eminentemente moralistico aspirano ad un massimo di soddisfazione morale prendendo giorno per giorno le decisioni etiche che meglio promuoveranno il benessere materiale e spirituale del loro prossimo.
*Proprio come l'analisi dell'esperienza dal punto di vista estetico fornisce il concetto di **"misura estetica"** - il quoziente di ricompensa estetica e sforzo di attenzione - come fondamentale nella valutazione del piacere estetico, così la considerazione dell'esperienza nei suoi aspetti etici conduce ad un analogo concetto di "**misura etica**" - la quantità di soddisfazione morale basata sul bene compiuto.*
La semplice formula etica evidentemente suggerita è:

M (misura estetica) = G (bene complessivamente compiuto)."

Tabella di raffronto estetica-etica
Esempio di calcolo della misura etica

Estetica

Alcuni dei principali "fattori" estetici sono: (+, di tipo positivo) ripetizione, somiglianza, contrasto, equilibrio, sequenza, centri di interesse o di riposo; (-, di tipo negativo) complessità, ambiguità, ripetizione inopportuna, inutile imperfezione. Questi fattori entrano nei termini O e C della formula estetica,

$$M=O/C.$$

Questi fattori coinvolti nell'ordine O possono essere suddivisi in elementi di ordine formali e connotativi, mentre la complessità C è formale. Solo gli elementi di tipo formale in O ammettono una trattazione quantitativa.In estetica, gli oggetti di una classe definita possono essere confrontati rispetto alle loro misure estetiche relative M. Queste classi sono straordinariamente varie. La teoria della misura estetica è esemplificata al meglio da certi semplici campi formali visivi ed uditivi, forniti più dall'arte che dalla natura.Gli artisti, i cultori ed i critici di ogni genere sono considerati giudici particolarmente competenti nei loro specifici campi estetici. Ma l'opinione collettiva dei comuni, profani osservatori svolge un ruolo vitale. I gusti estetici variano da un individuo all'altro, e sono relativi al periodo ed alla cultura considerata. Ciononostante è possibile individuare un certo grande parallelismo, dovuto alla presenza di certi elementi di ordine assoluti, come, per esempio il ritmo nella musica. Gli uomini colti generalmente sono in grado di capire ed apprezzare oggetti estetici di ogni genere ed epoca. Infine, le principali fasi nella storia delle idee estetiche e della critica letteraria di speciali forme artistiche possono essere concisamente interpretate usando il concetto di misura estetica.

Etica

Alcuni dei principali fattori "etici" sono: (+, di tipo positivo) bene materiale, godimento dei sensi, felicità, appagamento intellettuale e spirituale; ((-, di tipo negativo) spreco e distruzione materiale, dolore fisico e morale, degrado intellettuale e spirituale. Questi fattori entrano nel termine G della formula etica,

$$M=G.$$

Questi fattori coinvolti nel bene, G, possono essere suddivisi in elementi materiali ed immateriali del bene. Solo gli elementi di tipo materiale ammettono una trattazione quantitativa. In etica, ogni singolo problema definito è da considerare a sé, e le possibili soluzioni sono confrontate sulla base delle loro misure etiche, M. Questi problemi sono estremamente vari. Il principale interesse in etica deriva più da problemi di natura pratica che da problemi artificiali. I capi religiosi, gli uomini di stato, i giudici, e gli eletti della società sono considerati i migliori giudici nei loro molteplici campi etici. Ma l'opinione generale intuitiva dell'umanità spesso ha il peso decisivo. I valori e gli ideali etici variano in modo simile. Ciononostante si possono sempre trovare certi elementi assoluti del bene, come, per esempio, il coraggio e la lealtà nelle loro forme socialmente riconosciute. Un attento studio dello sviluppo di queste forme specifiche serve a spiegarle in maniera accettabile agli uomini di tutto il mondo come manifestazioni variate di questi elementi assoluti del bene. Similmente, le principali fasi nella storia delle idee etiche e delle loro molteplici manifestazioni sociali ammettono una concisa interpretazione mediante il concetto di misura etica.

Esempio di calcolo della misura etica

Problema *"Uno di due amici di vecchia data, A e B, deve essere promosso nell'organizzazione in cui entrambi detengono cariche dello stesso livello. Ad A giunge voce che la selezione dipenderà dal giudizio di una certa persona L appartenente alla stessa organizzazione. A dovrebbe passare questa informazione a B? La risposta ovviamente è che nelle circostanze descritte A dovrebbe informare il suo amico B.*
Le ragioni della decisione di A potrebbero essere formalizzate come segue: i beni materiali g(A) e g(B) che crescerebbero per lui o per il suo amico in caso di avanzamento sono gli stessi: g(A)=g(B)=g. Se A informa B, il bene immateriale f della sua amicizia con A sarà conservato. Quindi abbiamo semplicemente

$$M=g.$$

D'altra parte, se A non riferisce a B ciò che ha appreso, l'amicizia tra i due sarà distrutta, anche se B non dovesse mai venire a sapere della slealtà commessa da A. In questo caso avremmo

$$M=g-f.$$

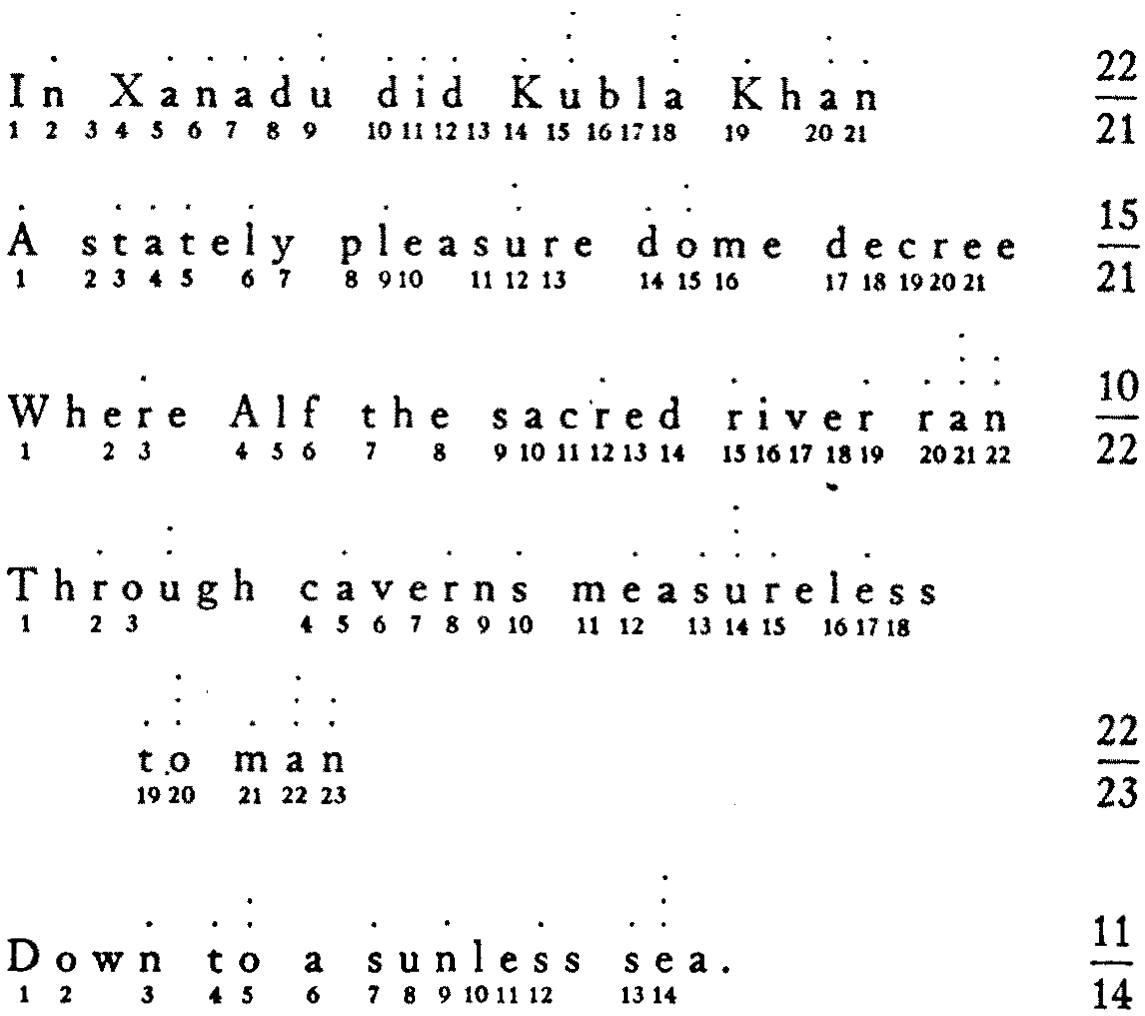
Siccome g è maggiore di g-f, A dovrebbe informare B, benché egli si renda conto di rinunciare ad un concreto vantaggio personale. In questo calcolo abbiamo intenzionalmente tralasciato l'effetto negativo che avrebbe sul carattere di A il fatto di non informare B, anche se questo potrebbe, in effetti, essere l'aspetto più importante di tutti.
Qui si suppone che la decisione di A di passare a B l'informazione venga presa sul piano utilitaristico. Sul piano edonistico, A potrebbe concludere che nel caso non informasse B, allora

$$M=g-f,$$

poiché sarebbe certo di guadagnarsi il favore di L, mentre, in caso contrario,

$$M=g/2,$$

poiché allora avrebbe le stesse probabilità di B. In questo caso dovrebbe soppesare la prospettiva di un avanzamento materiale contro la sua amicizia con B. Ancora, a seconda della misura in cui A si crede inferiore a B, sentirebbe che le sue probabilità diminuirebbero informando B. Tuttavia, se A è un amico sincero, questo genere di pensieri non lo farebbe recedere dalla sua decisione. [...]"


In Xanadu did Kubla Khan
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
22/21
A stately pleasure dome decree
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
15/21
Where Alf the sacred river ran
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
10/22
Through caverns measureless
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
to man
19 20 21 22 23
22/23
Down to a sunless sea.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
11/14

La misura estetica della forma di un vaso

La **misura estetica della forma di un vaso** è data dalla formula seguente:

$$M = \frac{O}{C} = \frac{H + V + HV + T}{C}$$

ove la quantità *O,* detta *ordine,* misura l'armonia ed il grado di simmetria, mentre la quantità *C*, detta *complessità,* misura quanto la figura è articolata e varia. Il rapporto tra queste due quantità è paragonabile a quello che intercorre fra profitto ed investimento. Definiamo il significato delle variabili, precisando che esse sono riferite alla sezione massima longitudinale del vaso, che si suppone sia simmetrica:

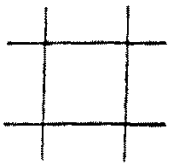
- *C* è il numero di *punti caratteristici,* ossia di punti appartenenti ad una delle seguenti categorie:

1. gli estremi della base inferiore e della base superiore della sezione del vaso;
2. i punti della linea di contorno in cui la tangente è orizzontale o verticale;
3. i punti in cui la direzione della tangente cambia bruscamente;
4. i punti di flesso, in cui la curvatura cambia segno;
5. i punti di intersezione dell'asse verticale con le sezioni orizzontali di lunghezza minima o massima, detti *centri;*

- *V* è il numero di relazioni indipendenti tra le distanze verticali delle rette orizzontali che congiungono due punti caratteristici;
- *H* è il numero di relazioni indipendenti tra le lunghezze dei segmenti individuati da tali rette orizzontali;
- *HV* è il numero di uguaglianze fra i due precedenti tipi di lunghezze;
- *T* è il numero di parallelismi o perpendicolarità fra tangenti nei punti caratteristici, più il numero di siffatte tangenti orizzontali, più il numero di normali nei punti caratteristici passanti per uno dei centri.

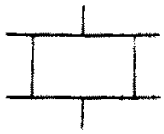
Misura estetica di alcune forme di vaso

a



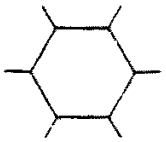
1.00

b



1.00

c



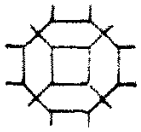
0.83

d



0.75

e



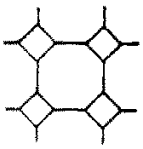
0.75

f



0.50

g



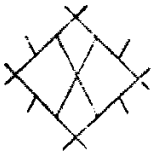
0.35

h



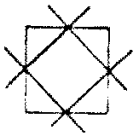
0.31

i



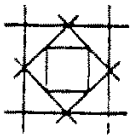
0.20

j



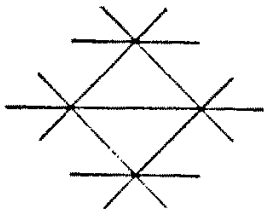
0.20

k



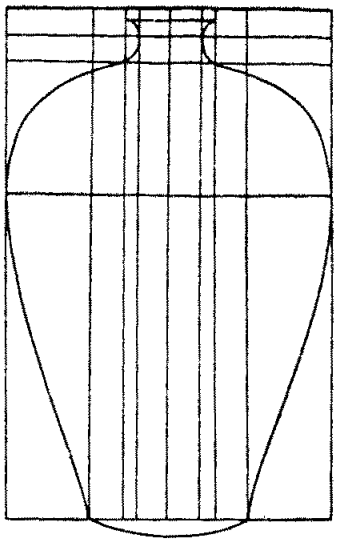
0.11

l



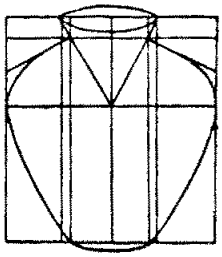
0.00

XXII.



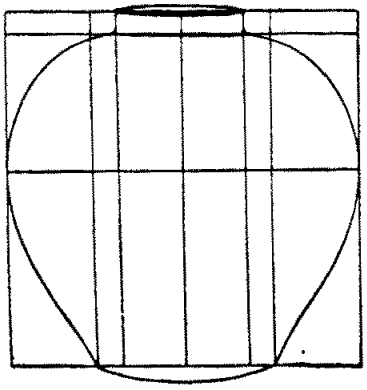
C=10, O=5, M=.50
V=2, h=2, v.h=1, t=0.

XIII.



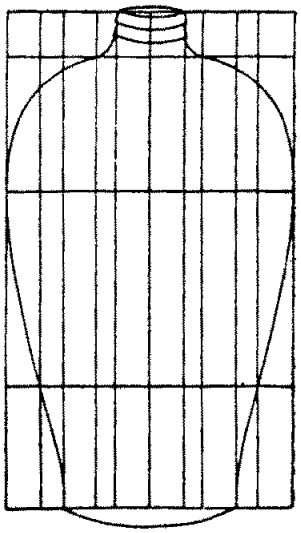
C=8, O=4, M=.50
V=1, h=1, v.h=0, t=2

VIII.



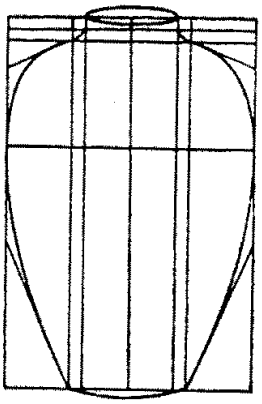
C=8, O=3, M=.37
V=0, h=2, v.h=0, t=1

XXIII.



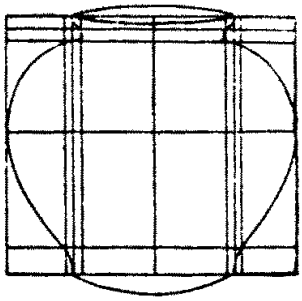
C=10, O=1, M=.10
V=0, h=0, v.h=0, t=1.

XV.



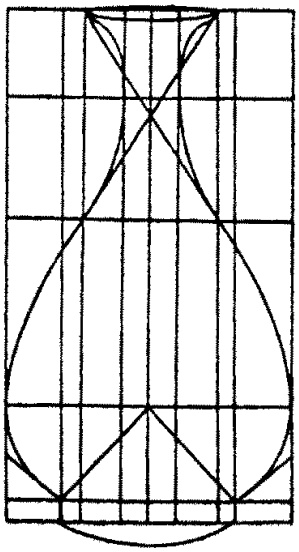
C=10, O=7, M=.70
v=2, h=2, v,h=1, t=2.

VII.



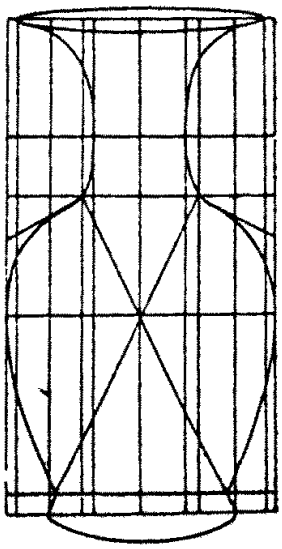
C=12, O=8, M=.67
v=3, h=3, v,h=1, t=1

XXI.



C=12, O=7, M=.67
v=1, h=3, v,h=0, t=3

XXV.



C=12, O=8, M=.67
v=3, h=2, v,h=1, t=2.

Matematica ed Economia

Antonio Bordoni
Proposizioni teoriche e pratiche
Pavia, 1842

La prima parte riporta proposizioni di carattere geometrico che si avvalgono delle proprietà delle figure piane simili.
Alcune proposizioni si riferiscono a questioni di natura squisitamente pratica, come un **problema di minimizzazione dei costi** tratto dal mondo dell'edilizia.
L'ultima parte contiene proposizioni riguardanti le *"comuni contrattazioni di mutui, di compere o vendite e di locazioni di stabili "* che *"potranno riuscire utili a chiunque debba occuparsi di queste specie di affari, e segnatamente a chi debba dirigere l'uno o l'altro od anco ambedue i contraenti siccome occorre più volte agli Ingegneri".*
Vengono effettuati esplicitamente il **calcolo degli interessi** di un capitale e il **calcolo delle rate** di un pagamento dilazionato.

I metodi impiegati sono quelli del **Calcolo Infinitesimale**.

Osservazione VII.

Tutte le volte che mi occorse in iscuola qualche esempio per le regole spiegate di calcolo sublime, scelsi questioni concrete, le cui soluzioni dirette richiedessero l'uso delle regole stesse; così conseguii lo scopo degli esempi e stabilii alcune massime o proprietà interessanti segnatamente per la pratica: tali sarebbero riescite anco le seguenti, come esempj dei massimi e minimi; e la cui utilità per la pratica emerge da esse medesime.

Proposizione V.

Fra le baracche o piccoli magazzini di forma ordinaria aventi le basi rettangolari, i coperti egualmente inclinati all'orizzonte, e le capacità eguali; ed i pavimenti, le pareti, e le teste, ed i coperti formati con materiali di valori dati per ogni loro unità superficiale; trovar quella, che vale o costa meno di qualunque altra di esse medesime; *primo* fra quelle coperte con una sola *ala*, *secondo* fra le coperte con due ale, *terzo* fra quelle coperte con quattro ale?

Si chiamino, i la inclinazione all' orizzonte di ogni ala o del coperto, Q la capacità del magaz-

zino, ed a, b, c, d i valori di ogni unità superficiale delle materie formanti o formandi rispettivamente il suo pavimento, le pareti, il coperto, e le teste. Così, si chiamino per un magazzino qualunque, $2x$ la larghezza, y la lunghezza, e z l'altezza delle due pareti o della meno alta di esse, ed s l' aggetto di ogni gronda verso le pareti longitudinali, e t di quelle verso le teste; in ultimo V il valore di esso.

In primo luogo, il coperto ossia tetto consti di una sola ala. Siccome le aree del pavimento, delle due pareti, delle due teste, e del coperto, sono ordinatamente

$$2xy, \quad yz + (z + 2x\,\text{tang.}\,i)\,y,$$

$$4(z + x\,\text{tang.}\,i)\,x, \quad \frac{2}{\cos.i}(x+s)(y+2t);$$

così si avrà

$$Q = 2(z + x\,\text{tang.}\,i)\,xy,$$

e

$$V = 2axy + 2b(z + x\,\text{tang.}\,i)y + \frac{2c}{\cos.i}(x+s)(y+2t) + 4d(z + x\,\text{tang.}\,i)x$$

e però

$$V = 2axy + \frac{2c}{\cos.i}(x+s)(y+2t) + (by + 2dx)\frac{Q}{xy},$$

ossia

$$V = 2\left(a + \frac{c}{\cos.i}\right)xy + \frac{2cs}{\cos.i}y + \frac{4ct}{\cos.i}x + \frac{4cst}{\cos.i} + \frac{bQ}{x} + \frac{2dQ}{x}.$$

Pel caso del coperto composto di due ale per essere

$$2xy, \quad 2yz, \quad 2(2z + x\,\text{tang.}\,i)x, \quad 2\frac{x+s}{\cos.i}(y+2t)$$

ordinatamente le aree del pavimento, delle due pareti, delle due teste, e delle due ale o dell'intero coperto, si avrà la equazione

$$Q = (2z + x\,\text{tang.}i)\,xy\,,$$

e

$$V = 2axy + 2byz + \frac{2c}{\cos.i}(x+s)(y+2t) + 2d(2z+x\,\text{tang.}i)x,$$

e però

$$V = 2\left(a + \frac{c}{\cos.i} - \frac{b}{2}\text{tang.}i\right)xy + \frac{2cs}{\cos.i}y + \frac{4ct}{\cos.i}x + \frac{4cst}{\cos.i} + \frac{bQ}{x} + \frac{2dQ}{y}$$

Visibilmente questa espressione del V non differisce in altro da quella trovata pel caso antecedente, che pel termine $-\frac{b}{2}\text{tang.}i$ nel coefficiente di xy, il quale manca nella prima.

Si ponga

$$V = Axy + By + Cx + D + \frac{E}{x} + \frac{F}{y}\,,$$

e sarà

$$B = \frac{2cs}{\cos.i}, \quad C = \frac{4ct}{\cos.i}, \quad D = \frac{4cst}{\cos.i},$$

$$E = bQ, \quad F = 2dQ,$$

ed

$$A = 2\left(a + \frac{c}{\cos.i}\right)$$

pel primo caso, ed

$$A = 2\left(a + \frac{c}{\cos.i} - \frac{b}{2}\,\text{tang.}i\right)$$

pel secondo.

La espressione del V dà

$$V'(x)=Ay+C-\frac{E}{x^2},\quad V'(y)=Ax+B-\frac{F}{y^2};$$

$$V''(x)=\frac{2E}{x^3},\quad \left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)=A,\quad \text{e}\quad V''(y)=\frac{2F}{y^3};$$

e però i valori delle x, y, corrispondenti al richiesto del V, saranno fra i soddisfacenti le due equazioni

$$(1).....Ay+C=\frac{E}{x^2},\quad (2).....Ax+B=\frac{F}{y^2},$$

le quali danno

$$\left(A+\frac{C}{y}\right)\left(A+\frac{B}{x}\right)=\frac{EF}{x^3y^3},$$

e però

$$V''(x)V''(y)-\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)^2=4\left(A+\frac{C}{y}\right)\left(A+\frac{B}{x}\right)-A^2$$

quantità *positiva*; e siccome sono positive anco E, F cioè $V''(x)$, $V''(y)$, così i valori anzidetti delle x, y corrisponderanno ad un minimo del V, come si desidera, e si doveva anco aspettare.

La equazione (1) dà

$$y=\frac{E-Cx^2}{Ax^2},$$

per cui la (2) o la equivalente

$$(Ax+B)y^2=F$$

si riduce alla seguente

$$(3).....(Ax+B)(E-Cx^2)^2=A^2Fx^4,$$

che è del *quinto* grado.

Se non vi saranno gronde, o vi siano, ma i loro valori siano trascurabili, sarà

$$s = t = 0,$$

e però anco

$$B = C = D = 0;$$

e la equazione (3) si ridurrà alla

$$AFx^3 = E^3,$$

la quale dà

$$x = E : \sqrt[3]{AEF},$$

e conseguentemente

$$y = F : \sqrt[3]{AEF}, \quad \text{e} \quad V = 3\sqrt[3]{AEF}.$$

Quindi, per essere

$$E = bQ, \quad \text{ed} \quad F = 2dQ,$$

posto $2\sqrt[3]{\frac{Q}{2bdA}} = R$, si avrà

$$2x = bR, \quad y = dR, \quad \text{e} \quad V = 6\frac{Q}{R}.$$

Se nella R contenuta in queste espressioni delle $2x$, y, V si porrà in vece di A il binomio $2a + \frac{2c}{\cos. i}$, si avranno i loro valori pel magazzino coperto con una sola ala; e se si porrà il trinomio $2a + \frac{2c}{\cos. i} - b \operatorname{tang}. i$ avransi quelli pel coperto di due ale. E questi valori delle $2x$, y posti nelle espressioni

$$\frac{Q}{2xy} - x \operatorname{tang}. i, \quad \frac{Q}{2xy} - \frac{x}{2} \operatorname{tang}. i,$$

daranno i corrispondenti per la z.

Visibilmente, per ambedue le forme dei magazzini qui contemplati, le dimensioni $2x$, y stan-

no fra loro come b a d, ciò che è singolare ed utile.

Passo a contemplare il caso del coperto composto di quattro ale in generale due trapezie e due triangolari, ma tutte egualmente inclinate all' orizzonte; ed ammetterò $b=d$, che ha generalmente luogo; e che non vi siano gronde.

Le aree del pavimento, delle pareti, del coperto, e delle teste sono ordinatamente

$$2xy\ ,\quad 2xz\ ,\quad \frac{2xy}{\cos.i}\ ,\quad 4xz;$$

e però avrà luogo la equazione

$$Q=2xyz+\tfrac{1}{3}(3y-2x)x^2\,\text{tang.}i\ ,$$

e

$$V=2axy+2bzy+\frac{2c}{\cos.i}xy+4bxz\ ,$$

ossia

$$(4)\ldots\ldots Q=2xyz+nx^2y-\tfrac{2}{3}nx^3\ ,$$

e

$$V=2(byz+2bxz+mxy)\ ,$$

dove $n=\text{tang.}i$, ed $m=a+\frac{c}{\cos.i}$; e conseguentemente si dovranno verificare anco le due equazioni

$$Q'(x)V'(z)=Q'(z)V'(x)\ ,\quad Q'(y)V'(z)=Q'(z)V'(y),$$

ove Q esprime il primo membro della (4).

Ponendo in queste due equazioni i valori delle derivate $Q'(x)$, $V'(x)$,.... si hanno le

$$ay^2z+a(n-m)xy^2+anxy^2-2anx^3=0\ ,$$

$$4az+(an-2m)y+2anx=0$$

dalle quali, eliminando z, hassi la

$$(2m-an)y^3-2(2m-an)xy^2+4an(y-2x)x^2=0,$$

ossia la seguente

$$(y-2x)((2m-an)y^2+4anx^2)=0,$$

la quale non può essere soddisfatta dal secondo fattore, perchè an è minore di $2m$, almeno pei casi concreti, che possono occorrere; e però avrassi

$$y=2x.$$

Sciogliendo la equazione (4), combinata colle due

$$y=2x, \quad 4az+(an-2m)y+2anx=0,$$

facilmente si trovano

$$2x=y=\sqrt[3]{\frac{6aQ}{3m-2an}}, \quad z=\frac{m-an}{2a}\sqrt[3]{\frac{6aQ}{3m-2an}},$$

le quali danno per minimo valore del materiale

$$6aQ:\sqrt[3]{\frac{6aQ}{3m-an}}.$$

SULLE CONTRATTAZIONI.

Le proposizioni seguenti, vertendo su casi emergibili nelle comuni contrattazioni di *mutui*, di *compere* o *vendite*, e di *locazioni* di stabili, potranno riescire utili a chiunque debba occuparsi di queste specie di affari, e segnatamente a chi debba dirigere l' uno o l' altro od anco ambedue i contraenti, siccome occorre più volte agli Ingegneri.

Proposizione I.

Trovare il montante del capitale c impiegato per n successivi periodi di tempo ciascuno della durata ω; supposto, che ogni unità di capitale frutti $r\omega$ in ogni periodo, e che ogni unità della porzione p di qualsivoglia frutto, quando sia maturato già da m periodi, frutti $s\omega$ in ogni periodo successivo ?

Egli è evidente, che il coefficiente r esprime l' interesse del capitale cioè il frutto di ogni unità di capitale per una *unità* di tempo, ed s l' analogo interesse pei frutti già maturi da m periodi; e p quel numero astratto pel quale si debbano mol-

tiplicare, questi ultimi frutti, per avere le loro porzioni fruttanti nei periodi seguenti.

Si chiami y_x il montante alla fine del tempo x *esatto* moltiplice dell' ω.

Alla fine del periodo $\left(\frac{x}{\omega}+1\right)$*esimo* il montante cioè $y_{x+\omega}$ sarà eguale all' y_x, che già vi era alla fine del periodo $\frac{x}{\omega}$ *esimo*, *più* $r\omega c$ frutto del capitale pel periodo $\left(\frac{x}{\omega}+1\right)$*esimo*, *più* il prodotto $p\,(y_{x-m\omega}-c)\,s\omega$, il quale esprime il frutto pel medesimo periodo $\left(\frac{x}{\omega}+1\right)$*esimo* della porzione p dell' $y_{x-m\omega}-c$ somma di quei frutti, che erano maturi alla fine del periodo $\left(\frac{x}{\omega}-m\right)$*esimo*; vale a dire si avrà la equazione alle differenze

$$(1)\ldots\ldots y_{x+\omega}=y_x+cr\omega\,p\,(y_{x-m\omega}-c)\,s\omega$$

ossia

$$y_{x+(m+1)\omega}-y_{x+m\omega}-sp\omega y_x=c(r-sp)\omega$$

lineare, a coefficienti costanti, e dell' ordine $(m+1)$*esimo*. Dimodochè, si potrebbe conseguire il montante richiesto, trovando la primitiva completa di questa equazione, e determinando le $(m+1)$ costanti arbitrarie, che sarebbero in essa, col soddisfare le $(m+1)$ condizioni particolari seguenti

$$y_0=c,\quad y_\omega=c+cr\omega,$$

$$y_{2\omega}=c+2cr\omega,\ldots\ldots,y_{m\omega}=c+mcr\omega\ ;$$

ma siccome con tal metodo si incontrarebbero calcoli assai prolissi, così usaremo il metodo seguente.

Si chiamino, frutti di *primo* ordine quelli del semplice capitale c; frutti di *secondo* ordine i frutti dei frutti di primo ordine; di *terzo* ordine i frutti di quelli di second' ordine; e così di seguito.

La somma dei frutti di prim' ordine per $\frac{x}{\omega}$ periodi sarà evidentemente

$$\frac{x}{\omega} . cr\omega = rcx ;$$

la somma di quelli di second' ordine alla fine del medesimo periodo $\frac{x}{\omega}$ *esimo* sarà il prodotto di $p.s\omega$ per una funzione di x; quelli dei frutti di terzo ordine sarà essa pure il prodotto di $p^2 s^2 \omega^2$ per un' altra funzione di x;....; e però, pel montante y_x, si potrà supporre

$$y_x = c + crx + \alpha A_x + \alpha^2 B_x + \alpha^3 C_x + \text{ecc.},$$

dove α è posta in vece di ps.

Sostituendo questo supposto valore d'y_x nella equazione (1) o nella sua equivalente

$$(2)..... \Delta y_x = cr\omega + \alpha\omega(y_{x-\theta} - c),$$

dove $\theta = m\omega$, si ha una equazione, la quale, dovendo sussistere, qualunque sia la quantità α dà le seguenti

$$\Delta A_x = cr\omega(x-\theta), \quad \Delta B_x = \omega A_{x-\theta},$$

$$\Delta C_x = \omega B_{x-\theta}, ...$$

cioè

$$A_x = \frac{cr}{2}(x-\theta)(x-\theta-\omega),$$

$$B_x = \frac{cr}{2.3}(x-2)(x-2\theta-\omega)(x-2\theta-2\omega),$$

$$C_x = \frac{cr}{2.3.4}(x-3\theta)(x-3\theta-\omega)(x-3\theta-2\omega)(x-3\theta-3\omega);$$

. . . . . .

per essere evidentemente

$$A_\theta = 0, \quad B_{2\theta} = 0, \quad C_{2\theta} = 0, \quad \ldots\ldots$$

Quindi sarà

$$(3)\ldots y_x = c + cr\left(x+(x-\theta)(x-\theta-\omega)\frac{\alpha}{2} + \text{ecc.}\right)$$

Questo medesimo risultamento si può trovare anco senza il soccorso della equazione (1) o della (2).

Di fatto, si chiami $\overset{x}{F}{}^{(t)}$ la somma dei frutti dell' ordine *tesimo*, e però $\overset{x}{F}{}^{(t+1)}$ quella dei frutti dell' ordine $(t+1)$*esimo*. Evidentemente $\overset{x+\omega}{F}{}^{(t+1)}$, somma dei frutti dell' ordine $(t+1)$*esimo* alla fine del tempo $x+\omega$, sarà eguale alla $\overset{x}{F}{}^{(t+1)}$ somma dei frutti del medesimo ordine alla fine del tempo x, *più* $\omega s.p\overset{x-\theta}{F}{}^{(t)}$ frutti dello stesso ordine $(t+1)$*esimo* maturati alla fine del tempo ω successivo all' x della parte *pesima* di quei frutti dell'ordine *tesimo*, che erano maturi alla fine del tempo $x-\theta$ ossia $x-m\omega$. Vale a dire, sarà

$$\overset{x+\omega}{F}{}^{(t+1)} = \overset{x}{F}{}^{(t+1)} + \alpha\omega\overset{x-\theta}{F}{}^{(t)},$$

e però

$$(4) \ldots\ldots \underset{x}{F^{(t+1)}} = \alpha\omega \Sigma \underset{x-\theta}{F^{(t)}},$$

purchè la primitiva si annulli colla $x = t(\theta+\omega)$; giacchè i fruttti dell' ordine $(t+1)$*esimo* cominciano solamente alla fine del tempo $t.(\theta+\omega)+\omega$.

La relazione (4) manifestamente è il simbolo delle particolari relazioni seguenti

$$\underset{x}{F^{(2)}} = \alpha\omega \Sigma \underset{x-\theta}{F^{(1)}}, \quad \underset{x}{F^{(3)}} = \alpha\omega \Sigma \underset{x-\theta}{F^{(2)}}, \ldots\ldots$$

dove le primitive si annullino ordinatamente per

$$x = \theta + \omega, = 2(\theta+\omega), \ldots\ldots,$$

le quali per essere

$$\underset{x}{F^{(1)}} = c.r\omega.\frac{x}{\omega} = rcx,$$

danno

$$\underset{x}{F^{(2)}} = \frac{\alpha cr}{2}(x-\theta)(x-\theta-\omega),$$

$$\underset{x}{F^{(3)}} = \frac{\alpha^2 cr}{2.3}(x-2\theta)(x-2\theta-\omega)(x-2\theta-2\omega),$$

. . . . . .

Ma il montante y_x è la somma

$$c + \underset{x}{F^{(1)}} + \underset{x}{F^{(2)}} + \underset{x}{F^{(3)}} + \text{ecc.};$$

adunque sarà

$$y_x = c + cr\left(x + (x-\theta)(x-\theta-\omega)\frac{\alpha}{2} + \text{ecc.}\right),$$

come si è trovato sopra.

Ora, si ponga $n\omega$ in vece d' x, ed anco $m\omega$ in vece di θ; e si avrà il richiesto montante $y_{n\omega}$ eguale a

$$c + cr\omega\left(n + (n-m)(n-m-1)\frac{\omega\alpha}{2} + \text{ecc.}\right),$$

purchè si continui il polinomio fra le due grandi parentesi sino all' ultimo termine di quelli, che non contengono fattori *negativi* o nulli. Di fatto, se i frutti dell' ordine più alto fossero quelli del μ*esimo*, l' ultimo termine del polinomio fra le grandi parentesi nel valore di $y_{n\omega}$ dovrebb' essere

$$\left(n-(\mu-1)m,\ n-(\mu-1)m-(\mu-1)\right)\frac{\alpha^{\mu-1}}{(1,\mu)}\omega^{\mu-1},$$

che è l' ultimo anco, che non sia reso *negativo* o *zero* dal valore di μ, il quale deve soddisfare le due relazioni seguenti

$$n>(m+1)\mu-m-1\ ,\quad n<(m+1)\mu+1.$$

Corollario 1. Se sia $\omega=1$, $p=1$, $s=r$ e però $\theta=m$ ed $\alpha=r$, la formula (3) si riduce alla

$$(5)\ldots\ldots y_x=c+cr\left(x+\frac{r}{2}(x-m)(x-m-1)+\text{ecc.}\right),$$

che è quella trovata per questo medesimo identico caso dal sig. Possenti nell' ultima delle quattordici interessanti proposizioni sugli interessi, da lui pubblicate nell' anno 1833, con un metodo analogo a quello sopra usato per trovare la stessa (3).

Corollario 2. Se nella medesima (3) si fa $m=0$, si ha la

$$y_x=c+\frac{cr}{\alpha}\left(\frac{x}{\omega}.\alpha\omega+\frac{x}{2\omega}\left(\frac{x}{\omega}-1\right).\alpha^2\omega^2+\text{ecc.}\right)$$

cioè

$$(6)\ldots\ldots y_x=c+\frac{cr}{sp}\left((1+\omega\alpha)^{\frac{x}{\omega}}-1\right),$$

che pel caso di $\omega=1$ e di $s=r$ riducesi

$$y_x = c + \frac{c}{p}\left((1+pr)^x - 1\right),$$

come trovò lo stesso Possenti nella *undecima* delle anzi citate sue proposizioni.

Corollario 3. La stessa (6), qualora sia $\omega=1$ ed anco $p=1$, somministra la relazione interessante

$$y_x = c + \frac{cr}{s}\left((1+s) - 1\right)^x,$$

la quale, pel caso particolarissimo di $s=r$, si riduce alla notissima

$$y_x = c\,(1+r)^x.$$

Proposizione XIV.

Si dovrebbe pagare la somma S alla fine di un anno, e si conviene di pagarla in vece con n rate eguali, e ad intervalli di tempi eguali, pagando la prima alla fine della prima *nesima* parte dell' anno; e si chiede quale dev' essere ogni rata, accordando compensi, a determinarsi, per le rate anticipate ?

Ecco una proposizione, che non racchiude in sè stessa dati sufficienti per una soluzione determinata od obbligata, per cui essa si scioglie in varie maniere conducenti a risultamenti diversi gli uni dagli altri: io esporrò la soluzione seguente, e poscia quella ammessa comunemente.

La rata richiesta si chiami R. Il compenso per la anticipazione R rata $(n—x)esima$, essendo essa anticipata di x *nesime* parti dell' anno, si rappresenti con $R\varphi(x)$, e la rata stessa alla fine dell'anno varrà

$R+R\varphi(x)$ ossia $Rf(x)$, posto $1+\varphi(x)=f(x)$;

e la somma degli analoghi valori di tutte le n rate

sarà $\overset{o}{\underset{n}{\Sigma}} Rf(x)$: e conseguentemente la R dovrà soddisfare la equazione

$$(11) \ldots\ldots R \overset{o}{\underset{n}{\Sigma}} f(x) = S.$$

Se a soddisfare la rata $(n-x)$*esima* si aspettasse all' epoca della prossima seguente, per essa converrebbe pagare in vece di R il corrispondente suo valore $Rf(1)$, il quale riescendo anticipato di sole $(x-1)$ *nesime* parti dell' anno, alla fine di esso varrebbe $Rf(1)f(x-1)$; e per tanto avrassi

$$Rf(x) = Rf(1)f(x-1)$$

cioè la equazione seguente

$$(12) \ldots\ldots f(x) = f(1)f(x-1),$$

la quale dà immediatamente

$$(13) \ldots\ldots f(x) = f(1)^x,$$

per essere $f(0) = 1$.

Ponendo questo valore della $f(x)$ nella equazione (11), ed eseguendo la primitiva indicata, si ha la

$$R\frac{f(1)^n - 1}{f(1) - 1} = S.$$

Ma dalla stessa equazione (13) hassi $f(n) = f(1)^n$, ed $f(n)$, come montante di una unità di capitale per una unità di tempo, è eguale ad $1+r$, ove r esprime l' interesse; adunque sarà

$$f(1)^n = 1 + r, \quad \text{e però} \quad f(1) = \sqrt[n]{(1+r)};$$

e quindi avrassi

$$R = \frac{S}{r}\left(\sqrt[n]{(1+r)} - 1\right).$$

Se la somma S fosse il frutto per un anno del capitale c, e però eguale ad rc, la rata R sarebbe

$$c\left(\sqrt[n]{(1+r)}-1\right);$$

espressione, che pel caso di $n=2$, cioè di due sole rate, si riduce alla $c\left(\sqrt{(1+r)}-1\right)$, come trovò altrimenti il Possenti nella settima delle sue proposizioni replicatamente citate.

Osservazione 1. Se per determinare la $f(x)$ si ammettesse il montante della somma $Rf(x)$, per $(n-x)$ *nesime* parti di un anno, eguale ad $R.(1+r)$ montante della R per un anno intero, si avrebbe

$$Rf(x)\,f(n-x)=R(1+r)$$

cioè la equazione seguente

$$(14).....f(x)f(n-x)=1+r,$$

la quale darebbe

$$f(x)=(1+r)^{\frac{x}{n}}\,B^{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{n}-1\right)\mu(\beta)}$$

dove B esprime una costante, e $\mu(\beta)$ una funzione qualunque di $\beta=\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\right)^2$, come risulta dalla prima osservazione della proposizione antecedente.

Osservazione 2. Comunemente, occorrendo una transazione analoga a quella contemplata nella proposizione proposta, si conviene, che la somma di tutte le rate insieme unite ai frutti delle anticipate in ragione dei tempi delle rispettive anticipazioni, costituiscano la somma S; dimodochè, chiamata y ogni rata, dev' essere

$$y+y\sum_{n}^{1}\left(1+\frac{n-x}{n}\,r\right)=S,$$

cioè $y=2S:\left(2n+(n-1)r\right)$.

Matematica e Astronomia

Antonio Cagnoli
Trigonometria piana e sferica
Parigi, MDCCLXXXVI

È interessante l'inizio della prefazione in cui l'autore dice: *"L'oggetto di questa opera si è, di porger comodo ai dotti, e facilità ai principianti. I primi vi troveranno una capace raccolta delle vaste risorse della Trigonometria: e mi persuado che i secondi mi sapran grado del sacrifizio, che ho sempre fatto, dell'eleganza de' metodi e delle dimostrazioni, alla chiarezza e alla brevità."*

Deve essere stata un'opera abbastanza nota nel secolo **XVIII** poiché si trova citata da molti altri autori posteriori.
Contiene tra l'altro un metodo per la costruzione delle tavole trigonometriche in **logaritmi**, ed un intero capitolo (XI) "*Pratiche della trigonometria rettilinea* sul *terreno*" in cui tratta della misura di una base, degli angoli, delle altezze, delle distanze, della maniera di levare i piani e formare le **carte** topografiche e quelle geografiche di non molta estensione.
Il cap. XXI tratta di applicazioni della Trigonometria all'Astronomia, ad esempio come determinare la durata del crepuscolo, come trovare la distanza apparente dei centri di due astri.

Viene presentata, tra l'altro, una **risoluzione trigonometrica delle equazioni di secondo e terzo grado** che riprende un'idea già presente nella **matematica araba**.

Storia della risoluzione delle equazioni di terzo grado

La trigonometria sferica

Equazioni

CAPITOLO XII.

Risoluzione numerica di tutte le Equazioni di secondo e di terzo grado, per mezzo della Trigonometria.

348. OGNI equazione di *secondo grado* è rappresentata dalla seguente formola generale:

(A)..... $x^2 + px = q$.

Se ne cava

(B)..... $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

Se p e q sono quantità grandi, o frazionarie, il calcolo di questa equazione divien laborioso. La Trigonometria porge i mezzi di renderlo facile e breve. Già s'intende che, se la quantità sotto il vincolo radicale non è un quadrato perfetto, in nessuna maniera può aversi altro che un valor prossimo di x.

Esaminando il caso del radicale positivo, l'equazione (B) si può esprimere, come segue: $x = -\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$, (14). Facendo, (206),

(C)..... tang.A $= \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

e per conseguenza $\frac{1}{2}p = \frac{\cos.A\sqrt{q}}{\text{sen.A}}$, si avrà $x = -\frac{\cos.A\sqrt{q}}{\text{sen.A}} \times$

$\left(1 - \frac{1}{\cos.A}\right) = \frac{\cos.A\sqrt{q}}{\text{sen.A}} \times \frac{1 - \cos.A}{\cos.A} = \frac{1 - \cos.A}{\text{sen.A}} \times \sqrt{q}.$

E però (I. 40ª)

(D)..... $x = \text{tang.}\frac{1}{2}A\sqrt{q}.$

Dunque trovato che siasi il valore di A per mezzo dell' equazione (C), tosto si avrà dalla (D) quello di x.

349. Considerando al presente nell'equazione (B) il radicale negativo, il che non altera la (C), si ha $x = -\frac{1}{2}p\left(1 + \frac{1}{\cos.A}\right) = -\frac{\cos.A\sqrt{q}}{\text{sen.A.}} \times \frac{1 + \cos.A}{\cos.A} = -\frac{1 + \cos.A}{\text{sen.A}} \times \sqrt{q}$. Dunque il secondo valore di x sarà, (II. 41ª),

(E)..... $x = -\text{cot.}\frac{1}{2}A\sqrt{q}.$

350. Col metodo stesso si troverà, che le formole precedenti servono pure nel caso, in cui l'equazione da risolvere (A) fosse di questa forma, $x^2 - px = q$. La sola differenza è che il valor negativo di x è dato dall' equazione (D), e il valor positivo dalla (E).

351. Sia ora l'equazione da risolvere (A) di questa forma, $x^2 + px = -q$; sarà $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Già si sa che quando q è negativo bisogna che non sia maggiore di $\frac{1}{4}p^2$, altrimenti la quantità sotto il vincolo radicale è immaginaria, nè si dà alcun valor reale di x, che sodisfi all'equazione. Ciò posto, considerando in prima il radicale positivo, si ha $x = -\frac{1}{2}p \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Laonde facendo, (208)

(F)..... $\text{sen.A} = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

il che dà $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\text{sen.A}}$, si avrà $x = -\frac{\sqrt{q}}{\text{sen.A}}(1 - \cos.A)$, o vero (II. 40ª), $x = -\text{tang.}\frac{1}{2}A\sqrt{q}$, che è l'equazione (D) col segno negativo al secondo membro.

Considerando ora il radicale negativo, il che non altera l'equazione (F), si ha $x = -\frac{1}{2}p(1 + \cos.A) = -\frac{\sqrt{q}}{\text{sen.A}}(1 + \cos.A)$, o vero (II. 41ª), $x = -\text{cot.}\frac{1}{2}A\sqrt{q}$, che è l'equazione (E).

352. Finalmente se l'equazione da risolvere (A) fosse di questa forma, $x^2 - px = -q$, il che non altera l'equazione (F), col metodo stesso si troverà, che nel caso del radicale negativo il valore di x è quello dell'equazione (D), e nel caso del radicale positivo quello della (E) col secondo membro positivo.

353. Conchiudiamo, che le equazioni (D), (E) danno i due valori di x in tutti i casi. Quando q è positivo, si ha l'arco A dalla formola (C), e i due valori di x sono sempre di segno contrario. Quando q è negativo, convien cercar l'arco A con la formola (F), e i valori di x sono tutti due negativi se p è positivo, o tutti due positivi se p è negativo.

354. ESEMPIO. Sia proposta da risolvere l'equazione $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$. Si avrà dunque, (C), (D),

$$\text{tang.A} = \frac{88}{7}\sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

$$x = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A}\sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

delle quali equazioni ecco il calcolo.

log.1695 =	3,2291697
compl.log.12716 =	5,8956495
somma	9,1248192
mezza somma	9,5624096
log.88 =	1,94448267
compl.log.7 =	9,15490196
somma o log. tang.A =	0,6617942 = log.tang. 77° 42′ 31″,72
log.tang.$\frac{1}{2}$A =	9,9061115
mezza somma trovata	9,5624096
Somma o log.x =	9,4685211 = log.0,2941176.

Per sapere se questo valor prossimo positivo di x possa essere espresso da una frazione esatta, della quale i due termini siano numeri intieri di poche note, prendo il complemento di log. x, e considerandolo

considerandolo come un log. negativo (164), trovo — 0,5314789 = log. $\frac{1}{3,4}$ esattamente. Con che tosto si vede che, moltiplicando questa frazione per 5, si ha $x = \frac{5}{17}$.

Chi vorrà calcolare il medesimo valore di x per mezzo della formola ordinaria (B), potrà avere un saggio della facilità e speditezza della soluzione trigonometrica.

355. Nel calcolo precedente se, nel luogo di log. tang. $\frac{1}{2}$A, si pone il suo complemento, si avrà log. $— x = 9,6562981 =$ log. — 0,4532085. Questo è il valor prossimo negativo di x, secondo la formola (E). Se si prende il complemento di log. $— x$, si trova $x = — \frac{1}{2,20649}$, che è pure un valor prossimo, il qual però non si può convertire in una frazione esatta e composta di numeri intieri. Ma, per ottenerla, basta aver trovato il valore esatto di $+ x$. Si sa che q è il prodotto di tutte le radici, e che nel caso presente i due valori di x devono avere il segno contrario (353). Dunque, dividendo $\frac{1695}{12716}$ per $\frac{5}{17}$, si trova $x = — \frac{339}{748}$. Si può dar la prova a tutto il calcolo col mezzo dell'altra regola, che la somma delle due radici deve essere uguale a p.

356. Passando ora alla soluzione delle equazioni di *terzo grado*, si sa che, fatto sparire il secondo termine, sono tutte rappresentate dalla seguente formola generale:

(G)..... $x^3 + px + q = 0$.

La soluzione analitica di questa equazione è

(H)... $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)}$

La pongo sotto la forma seguente, (14): $x =$ .....

$$\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}q\sqrt{1 + \tfrac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}q\sqrt{1 + \tfrac{4p^3}{27q^2}}\right)};$$

e facendo, (206), $\frac{4p^3}{27q^2} =$ tang.^{2}B, o vero

(K)..... tang.B $= \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$,

ne risulta $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 - \frac{1}{\cos.B}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 + \frac{1}{\cos.B}}\right)}$.
Sia, per maggior semplicità, $2\sqrt{\frac{1}{3}p} = R$, il che dà $p = \frac{3}{4}R^2$; l'equazione (K) diverrà $tang.B = \frac{R^3}{4q}$, donde si cava $q = \frac{R^3}{4\,tang.B}$. Sostituendo questo valore di q, si ha $x = \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8\,tang.B} \times \frac{cos.B - 1}{cos.B}}$ $+ \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8\,tang.B} \times \frac{cos.B + 1}{cos.B}} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt[3]{\frac{1 - cos.B}{sen.B}} - \sqrt[3]{\frac{1 + cos.B}{sen.B}}\right) =$ $\frac{1}{2}R\left(\sqrt[3]{tang.\frac{1}{2}B} - \sqrt[3]{cot.\frac{1}{2}B}\right)$, (I. 40ª, 41ª), o sia $x = -R \times \frac{\sqrt[3]{cot.\frac{1}{2}B} - \sqrt[3]{tang.\frac{1}{2}B}}{2}$. Ma (I. 38ª), $cot.2A = \frac{cot.A - tang.A}{2}$. Comparando insieme le due ultime equazioni, se si fa

(L)..... $tang.A = \sqrt[3]{tang.\frac{1}{2}B}$,

e per conseguenza $cot.A = \sqrt[3]{cot.\frac{1}{2}B}$, sarà $x = -R\,cot.2A$. Dunque, rimettendo il valore di R, si ha finalmente

(M)..... $x = -cot.2A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

Si perviene pertanto a trovare il valore di x per via di tre equazioni molto semplici: 1°. per mezzo della (K) si trova un arco B; 2°. colla (L) si trova un arco A; 3°. dalla (M) si ricava il valore cercato di x.

Se l'equazione da risolvere (G) fosse di questa forma, $x^3 + px - q = 0$, allora, nella soluzione analitica (H), $-\frac{1}{2}q$ divien positivo. Procedendo come sopra, si giungerà similmente alle stesse equazioni (K), (L), (M), colla sola differenza, che il secondo membro dell'ultima avrà il segno positivo.

357. Sia ora l'equazion da risolvere (G) di questa forma:

$$x^3 - px + q = 0;$$

il che rende $\frac{1}{27}p^3$ negativo nella soluzione analitica (H); sarà $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$.
Se si fa, (208), $\frac{4p^3}{27q^2} = sen.^2B$, o vero

(N)..... $sen.B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$,

ne risulta $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1-\cos.B}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1+\cos.B}\right)}$. Ma l'equazione (N) dà $q = \frac{R^3}{4 \text{ sen.B}}$, facendo al solito $R = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e per conseguenza $p = \frac{3}{4}R^2$. Dunque $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1-\cos.B}{\text{sen.B}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1+\cos.B}{\text{sen.B}}} = -R \times \frac{\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B} + \sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}B}}{2}$. Ma (I. 9ª), $\frac{\text{tang.A} + \text{cot.A}}{2} = \frac{1}{\text{sen.2A}}$. Dunque, adottando l'equazione (L), sarà $x = -\frac{R}{\text{sen.2A}}$, o vero

(O)..... $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\text{sen.2A}}$.

Si perviene pertanto a trovare il valore di x per mezzo delle tre equazioni (N), (L), (O).

Si troverà che le medesime servono ancora quando l'equazione da risolvere (G) fosse di questa forma

$$x^3 - px - q = 0;$$

e solo il secondo membro della (O) divien positivo.

Questa soluzione richiede che non sia $\frac{4p^3}{27q^2} > 1$; altrimenti non potrebbe farsi $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{sen.}^2B$, giacchè un seno non può mai esser maggiore del raggio.

358. Se però avvenga che, p essendo negativo, sia $4p^3 > 27q^2$, o vero $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, la quantità $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ si presenta sotto aspetto immaginario, e costituisce il *caso irreduttibile*, che fu così detto, per non essersi mai potuta trovare una soluzione analitica esatta che sia libera dall'immaginarietà: anzi di fresco dall'insigne Geometra Sig. Cavalier Lorgna è stata trattata con sottil discussione l'impossibilità di trovarla (*Memorie della Società Italiana*, Tom. I. Verona, 1782). E pure egli è certo che in questo caso l'equazione ha tre radici reali, non già una solamente come in tutti gli altri casi che abbiamo fin quì esaminati e risolti.

359. Per trovare con somma facilità le tre radici suddette,

per mezzo della Trigonometria, conviene abbandonare la soluzione analitica, implicata di quantità immaginarie, ed investigar tra le formole trigonometriche una che sia comparabile a quella che è proposta da risolvere,

$$x^3 - px \pm q = 0.$$

Se si prende l'equazione (125), sen.3A = 3 sen.A − 4 sen.^{3}A, che, resa omogenea (55), diviene R^2 sen.3A = $3R^2$ sen.A − 4 sen.^{3}A; dividendo per 4, e trasportando, si avrà

(P)..... sen.^{3}A − $\frac{3}{4}$ R^2 sen.A + $\frac{1}{4}$ R^2 sen.3A = 0.

Comparando questa equazione, termine a termine, con la proposta, in cui piglio per ora q positivo; se si fa x = sen.A, si avrà 1°. $p = \frac{3}{4} R^2$, il che dà $R^2 = \frac{4}{3} p$, e $R = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; 2°. $q = \frac{1}{4} R^2$ sen.3A = $\frac{1}{3}p$ sen.3A, donde si cava sen.3A = $\frac{3q}{p}$. Questo seno è proporzionale al raggio dell' equazione, che è $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Per poterlo trovar nelle tavole, bisogna dunque (25) dividerlo pel detto raggio, onde si ha

(Q)..... sen.3A = $\frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}$.

Trovato il valore di 3A, col mezzo di questa equazione, sarà noto anche quello di A, e per conseguenza quello di x = sen.A. Ma perchè sen.A si prende nelle tavole, dove R = 1, fa d' uopo moltiplicarlo per il raggio dell'equazione; e però

(S)..... x = sen.A $\times$ $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

360. Se nell'equazione (P) si pone 120° + A in vece di A, bisognerà mettere 360° + 3A in vece di 3A. Ma sen.(360° + 3A) = sen.360° cos.3A + cos.360° sen.3A = sen.3A, (42). Dunque l'equazione (Q) può esser la stessa, quantunque in vece di x = sen.A, si abbia x = sen.(120° + A). Questo è dunque un secondo valore di x, il qual sodisfa all'equazione (P). Ma sen.(120° + A) = sen.(60° − A). Si avrà perciò

(T)..... x = sen.(60° − A) $\times$ $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

Similmente, se nell'equazione (P) si pone $240° + A$ in vece di A, il che dà $720° + 3A$ in vece di 3A, sarà sen.$(720° + 3A)$ = sen.$(360° + \overline{360° + 3A})$ = sen.3A; e mentre l'equazione (Q) sussiste, si avrà un terzo valore di x, che sarà x = sen.$(240° + A)$. Ma sen.$(240° + A)$ = sen.$(180° + \overline{60° + A})$ = — sen.$(60° + A)$. Dunque

(Z)..... x = — sen.$(60° + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

L'equazione (Q) suppone evidentemente che non sia $4p^3 < 27q^2$. Donde si vede che queste soluzioni non sono applicabili ai casi risolti (357), se non quando fosse $4p^3 = 27q^2$. Allora le formole (S), (T) danno due valori eguali di x, e la (Z) un terzo valore; laddove la soluzione (357) non dà che un valore di x, cioè quello stesso della formola (Z).

Or si noti il grande avvantaggio delle soluzioni trigonometriche nel caso irreduttibile. Col mezzo di quattro sole equazioni, (Q), (S), (T), (Z), brevissime da calcolare, poichè hanno tutte una quantità comune, cioè $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, si ottengono, o esatti, o prossimi, i tre valori di x, che le più volte non possono aversi dall'analisi, se non per vie molto laboriose.

Il Calcolo Infinitesimale

Chiunque s'interessi, direttamente o indirettamente, di Matematica, sa che l'**Analisi Infinitesimale** (o **Calcolo Infinitesimale**) nasce ufficialmente nella seconda metà del **XVII secolo** e si sviluppa e si consolida nel secolo successivo. Tuttavia, come avviene per ogni altra branca del sapere, essa non nasce dall'oggi al domani, ma affonda le sue radici nello studio di alcuni "classici" problemi oggetto di ricerche sin dal V secolo a.C. e di altri problemi affini aggiuntisi via via.
In particolare, i problemi di: *determinazione della* ***tangente*** *ad una curva, massimi e minimi, cinematica* hanno portato al *Calcolo Differenziale*, mentre i problemi di: ***calcolo di aree e volumi***, *determinazione di baricentri*, hanno portato al *Calcolo Integrale.*
Lo studio di questi problemi si è intrecciato spesso con speculazioni filosofiche e metafisiche. In particolare, protagoniste di questa storia sono state, più o meno esplicitamente, le idee di **Infinito e Infinitesimo**.
Conviene dare subito un cenno, con un buon grado di semplificazione, di queste idee nelle due forme in cui si incontrano: *potenziale e attuale*.

Infinito potenziale = possibilità di pensare una grandezza più grande di una grandezza arbitrariamente data.
Infinitesimo potenziale = possibilità di pensare una grandezza non nulla più piccola di una grandezza non nulla arbitrariamente data.
Infinito attuale = grandezza più grande di ogni numero.
Infinitesimo attuale = grandezza non nulla minore di ogni altra grandezza.

È facile, specie se si possiede il concetto di limite, fare esempi di infinito e infinitesimo potenziali: la successione $(n)_{n\in IN}$ dei numeri naturali è un *infinito potenziale* e la successione dei loro reciproci $(1/n)_{n\in IN}$ è un *infinitesimo potenziale*.
All'infinito e all'infinitesimo *attuali,* concetti meno chiari e quasi metafisici, sono ispirate le concezioni degli enti geometrici, come quella secondo cui una figura piana è composta da un numero infinito (attuale) di elementi di spessore infinitamente sottile (infinitesimo attuale), concezione che si incontra nello sviluppo del Calcolo Infinitesimale (***teoria degli indivisibili***).
Solo in tempi recenti, i concetti di infinito e di infinitesimo *attuali* sono stati ufficialmente accolti nell'Analisi Matematica. Dopo la scoperta

degli insiemi infiniti (**Cantor**, 1878-1883) i *numeri aleph*, cioè le cardinalità di insiemi infiniti, sono infiniti *attuali*. Inoltre, nel 1891, **Veronese** ha ampliato il corpo dei numeri reali, in un corpo non archimedeo di numeri comprendente infiniti e infinitesimi attuali.
Un esempio di *infinitesimo attuale* si ottiene usando la seguente definizione. Poniamo:
0_f = ordine di infinito di f per $x \to x_0$
ove:

$0_f = 0$ se f non è infinita,

$0_f > 0$ se f è infinita,

$0_f < \alpha \in R^*_+$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) | x - x_0 |^{\alpha} = 0$

È subito visto che nel caso particolare in cui f è la funzione logaritmo naturale $(f(x) = \ln x)$ e $x_0 = 0$, si ha che 0_f è un infinitesimo attuale, poiché $0 < 0_f < \alpha$, $\forall \alpha \in R^*_+$.

Nello studio dei problemi sopra esposti si possono distinguere due indirizzi:

- Applicazione di un **metodo rigoroso** che, per il calcolo delle aree o dei volumi, coincideva con il **metodo di esaustione**, prescindeva da infiniti e infinitesimi attuali, ma che era macchinoso, basato *su ragionamenti per assurdo e richiedeva la preliminare conoscenza del risultato da dimostrare.* Questo metodo fu usato da **Archimede**, da **Valerio**, da **Guldino**.
- Applicazione di un **metodo eterodosso**, intuitivo, basato su infiniti e infinitesimi attuali, più agile e potente ma di scarso affidamento, data l'incertezza delle basi. I risultati con questo metodo potevano essere ritrovati col metodo rigoroso. Questo metodo fu adoperato dallo stesso **Archimede**, da **Keplero**, da **Cavalieri** e da **Torricelli**.

La diversità dei due metodi appare chiaramente nel *calcolo delle aree*. **Archimede** fece uso di entrambi, mantenendoli però nettamente distinti. Nel ***Metodo sui teoremi meccanici***, opera che Heiberg ritrovò, nel 1906, a Costantinopoli, esaminando un palinsesto proveniente dal Santo Sepolcro di Gerusalemme, egli spiega il metodo euristico, non rigoroso, con cui considerando le figure piane e solide come composte da infiniti *"elementi indefinitamente sottili"* perviene ai risultati, che poi però dimostra rigorosamente con il metodo di esaustione.

Solo dopo molto tempo, nel Rinascimento italiano, la ricerca sul calcolo delle aree e delle tangenti ripartì con nuovo vigore, grazie alle varie traduzioni delle opere di Archimede, tra le quali ricordiamo quella del Tartaglia.
Significativi contributi si ebbero nel 1500 e nella prima metà del 1600, in Italia, grazie a **Valerio** (1552-1619), **Guldino** (1557-1643), **Galileo Galilei** (1563-1642), **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647), **Evangelista Torricelli** (1608-1647), **Pietro Mengoli** (1626-1686) e, fuori dall'Italia, con **Johannes Kepler** (1571-1630), **Pierre de Fermat** (1601-1665), **Isaac Barrow** (1630-1677) e, finalmente, nella seconda metà del 1600, con quelli che sono universalmente riconosciuti come i fondatori della Analisi Infinitesimale: **Isaac Newton** (1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), i cui contributi sono organici e fondamentali dal punto di vista teorico.
Il secolo successivo vede i grandi sviluppi del **Calcolo Infinitesimale** grazie alla **famiglia Bernoulli**, al marchese **Guglielmo de l'Hospital**, matematico dilettante, allievo di Leibniz e di Giovanni Bernoulli, ed autore del *primo trattato di Calcolo Infinitesimale* del 1696, al grande **Eulero**.
Si precisa la nozione di **funzione** e di **continuità** ed il francese **A. Cauchy** dà una sistemazione rigorosa delle basi di questa disciplina, fondandola sul concetto di **limite**, e quindi su infiniti ed infinitesimi potenziali, e giungendo attraverso tale concetto a quello di **derivata** e di **integrale**.
Sembra, dunque, che *infiniti ed infinitesimi potenziali prevalgano su infiniti ed infinitesimi attuali* e sulle impostazioni del **Leibniz**. Tutto ciò perdura fino al XX secolo quando, nel 1960, **A. Robinson**, basandosi sui grandi sviluppi della **Logica Matematica** ed in particolare sulla **Teoria dei Modelli**, reintroduce con l'**Analisi non standard**, in modo rigoroso, infiniti ed infinitesimi attuali, provando che in fondo le idee di **Leibniz** non erano poi tanto strampalate.

Il concetto di funzione

Una prima definizione di funzione si trova in un lavoro di **Leibniz** (1692): *"Funzione di una grandezza variabile x è una quantità y ottenuta componendo in un modo qualunque x con delle costanti".*
Questa definizione viene precisata successivamente da **Eulero** (1748): *"Una funzione di quantità variabili è un'espressione analitica composta in modo qualunque da quelle quantità e da numeri o quantità costanti".*
Per espressione analitica Eulero intende un'espressione ottenuta eseguendo operazioni algebriche (addizione, moltiplicazione,..., elevazione a potenza, estrazione di radice) o trascendenti (logaritmo, seno, ..., esponenziale).
Ricordiamo che le funzioni seno e coseno hanno la loro origine in antichissimi studi astronomici; nella matematica greca (V secolo a.C.) si ritrova lo studio delle relazioni tra le corde di un cerchio e gli angoli al centro; in **Euclide** si trovano proposizioni che possono essere interpretate come relazioni trigonometriche; Ipparco (180-125 a.C.) ideò la suddivisione della circonferenza in 360 parti e compilò la prima tavola trigonometrica; **Tolomeo** di Alessandria (I secolo d.C.) scrisse *"Sintassi matematica"* o ***"Almagesto"***, l'opera più significativa della trigonometria antica; in India, nell'opera "*Siddhantas*" (Sistemi astronomici, III secolo d.C.), anziché studiare il rapporto fra corde del cerchio e angolo al centro, si studia *"la corrispondenza fra la metà della corda e la metà dell'angolo che sottende la corda",* dando così origine alla funzione "seno".
Regiomontano (1436-1476) con *"De triangulis omnimodis"* (1464) scrisse il primo trattato moderno di trigonometria con l'esposizione sistematica dei metodi per risolvere problemi relativi ai triangoli; il **Viète** (1540-1603) con *"Canon mathematicus"* (1579) compilò le prime tabelle complete delle funzioni trigonometriche. Di origine più recente è, invece, il logaritmo (**Neper**, 1614) di cui **Mercator** (1668) trovò lo sviluppo in **serie** di potenze:

$$log(x+1) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots.$$

Ritornando al concetto euleriano di funzione, osserviamo che non si avrebbe una funzione ponendo, ad esempio,
$y = 0$ se $x \leq 0$, e $y = x^2$ se $x > 0$.
Inoltre, le funzioni nel senso di Eulero sono necessariamente "continue, derivabili, ecc ...", anzi, addirittura, "localmente sviluppabili in serie di potenze".

La controversia fra **D'Alembert** ed Eulero (1750), circa il modo in cui intendere "l'arbitrarietà" delle funzioni ϑ_1, ϑ_2, che ricorrono nella formula di D'Alembert che fornisce la soluzione generale $y = \vartheta_1(x+ t) + \vartheta_2(x - t)$ dell'equazione della corda vibrante

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \frac{d^2 y}{dt^2}$$

per $a = 1$, fa progredire il concetto di funzione.
D'Alembert riteneva che sia ϑ_1 sia ϑ_2 dovessero esprimersi analiticamente mediante *x, t;* Eulero, per comprendere fra le soluzioni anche quelle determinate da configurazioni iniziali della corda con punti angolosi (in corrispondenza della parte "pizzicata"), non richiede l'esistenza per ϑ_1, ϑ_2 di un'unica rappresentazione analitica in tutto l'intervallo e ammette che la "curva soluzione" possa essere composta da più pezzi di curva corrispondenti ciascuna ad una funzione esprimibile analiticamente, senza che l'intera curva corrisponda ad una funzione dello stesso tipo.
Eulero chiama curve continue quelle corrispondenti ad una sola funzione (analitica) della variabile e discontinue quelle ottenute per giustapposizione (affiancamento) di curve continue.

Nel 1755 lo stesso Eulero dà una definizione più generale di funzione (anche se in pratica si limita sempre alle funzioni analitiche): *"Se delle quantità dipendono da altre in modo che dalle mutazioni di queste dipendono anche le prime (cioè subiscono delle variazioni), esse si usano chiamare funzioni di queste. Questa denominazione è molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre".*
Il senso di questa definizione è precisato da **Condorcet** (1765), più noto come uomo politico che come matematico: *"Suppongo di avere un certo numero di quantità x, y,..., F e che, per ogni valore determinato di x, y, ... , F abbia uno o più valori determinati che corrispondono ad essi, io dico allora che F è una funzione di x, y, ... anche se non conosco né la maniera di esprimere F mediante x, y,... né la forma dell'equazione fra F, x, y,..."*
Con le ultime parole Condorcet sembra riferirsi alle funzioni implicite.
Nel 1787 l'Accademia di Pietroburgo bandì un premio sulla natura delle funzioni cui si perviene nell'integrazione di equazioni alle derivate parziali. Vinse il premio **L.F. Arbogast** (1759-1803) con un lavoro (1791) in cui fra l'altro dice:

"La legge di continuità consiste nel fatto che una quantità non può passare da uno stato all'altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge. Le funzioni algebriche sono considerate continue poiché i differenti valori di queste funzioni dipendono nella stessa maniera da quelli della variabile e, supponendo che la variabile cresca continuamente, la funzione subirà variazioni in modo corrispondente ma tuttavia non passerà da un valore ad un altro senza passare attraverso tutti i valori intermedi.
Quindi l'ordinata y di una curva algebrica, quando l'ascissa x varia, non può passare bruscamente da un valore ad un altro, non ci può essere un salto fra un'ordinata e un'altra che differisce da essa di una quantità prefissata, ma tutti i successivi valori di y devono esser collegati fra loro da una stessa legge... Questa continuità può essere vanificata in due modi.
1) La funzione può cambiare la sua forma, cioè la legge secondo cui la funzione dipende dalla variabile può cambiare del tutto. Una curva formata dall'unione di più curve differenti è di questo tipo.
Non è neppure necessario che la funzione y debba essere espressa da una equazione in un certo intervallo della variabile; essa può continuamente cambiare la sua forma e la linea che la rappresenta, al posto di essere l'unione di curve regolari, può essere tale che in ognuno dei suoi punti diventi una curva differente, in altre parole può essere interamente irregolare e non seguire alcuna legge per ogni intervallo comunque piccolo. Tale sarebbe una curva tracciata a caso dal libero movimento della mano. Questo tipo di curva non può essere rappresentato né da una né da più equazioni algebriche o trascendenti [...]
2) La legge di continuità viene meno anche quando le "differenti parti di una curva non si congiungono fra loro ..."
Le funzioni di questo secondo tipo sono chiamate *discontigue* da Arbogast e corrispondono alle nostre funzioni *discontinue*, mentre le funzioni del primo tipo sono per noi continue anche se, secondo Arbogast, violano la legge di continuità.
Le precisazioni di Arbogast sono interessanti ma sono ancora molto legate al modo di rappresentare una funzione.
Un passo decisivo nell'evoluzione del concetto di funzione si ebbe in seguito ai lavori (1807 e seguenti) di **Fourier** sulla propagazione del calore, nei quali si fa vedere che anche una linea composta di tratti fra loro scollegati (cioè una funzione discontinua nel senso moderno) può essere rappresentata da una serie trigonometrica.

Poiché la somma di una serie di funzioni non poteva non chiamarsi funzione, ciò portò ad una generale definizione di funzione non implicante la continuità.
P.G.L. Dirichlet, (1829) precisa i risultati di Fourier sulle serie trigonometriche e dà la seguente definizione:
"Funzione di una variabile x in un certo campo è una quantità y che assume per ogni valore della x un valore ben determinato",
e dà il celebre esempio
$f(x) = 1$ se $x \in [0, 1]$ è razionale,
$f(x) = 0$ se $x \in [0, 1]$ è irrazionale.
che mette in luce il fatto che *essenziale* nel concetto di funzione *non è la calcolabilità* analitica di $f(x)$ ma la *libera associazione* del valore di $y = f(x)$ al valore di x: è irrilevante il modo in cui $y = f(x)$ si possa ottenere da x.
È sostanzialmente la definizione moderna caratterizzata da *due insiemi A, B e dall'associazione ad ogni* $x \in A$ *di un ben determinato unico* $y \in B$. Una volta abbandonato il concetto elementare e primitivo di funzione per cui ogni funzione era implicitamente continua, si andò precisando anche il concetto di **funzione continua**.

Il concetto di limite

Barlumi di questo concetto si possono trovare anche nella remota antichità.
Si è visto che nei metodi rigorosi di **Eudosso** e **Archimede**, fondati sul **metodo di esaustione**, applicati sino ai tempi moderni, vi è un'idea di successione di grandezze che si avvicina indefinitamente ad una grandezza data, nel senso che la differenza diventa sempre più piccola.
Molti matematici del 1500 e del 1600, nel dimostrare certe formule di quadratura, fanno considerazioni che si possono collegare all'idea di limite.
L. Valerio, con riferimento a tentativi di perfezionamento dei metodi archimedei, formula con linguaggio oscuro proposizioni sui limiti.
Newton, esponendo nei ***Principia*** il **metodo delle prime e ultime ragioni**, afferma di non voler considerare somme e rapporti di parti indivisibili ma limiti di somme e rapporti: *"L'ultimo rapporto di quantità evanescenti si deve intendere non il rapporto delle ultime quantità ma il limite al quale il rapporto si avvicina sempre illimitatamente più di qualsiasi differenza..."*.
P. Mengoli (1625-1686), discepolo di **Cavalieri**, nel tentativo di fondare rigorosamente il **Calcolo infinitesimale** nell'opera *Geometria speciosa*, precorre il concetto di limite (e quello di integrale) di **Cauchy**:
"Sia f(x) una quantità positiva definita per tutte le grandezze x < t, allora f(x) sarà detta quasi infinita se, fin dove è determinabile (cioè nelle vicinanze di t) può essere determinata in modo da risultare maggiore di qualsiasi quantità assegnata ..." Sia f(x) una quantità positiva definita per tutte le grandezze x < t e sia a una certa quantità positiva. Allora f(x) si dirà quasi identica ad a se, fin dove è determinabile, può essere prossima ad a più di qualsiasi altra grandezza l ≠ a".

J. D'Alembert (1717-1783) alle voci *differenziale* e *limite* della *Encyclopédie* scrive che *"la differenziazione di un'equazione consiste sempre nel trovare il limite del rapporto di due differenze finite di due variabili che compaiono nell'equazione"* e che *"una quantità è limite di un'altra quantità (variabile) se questa si avvicina alla prima così tanto che la differenza sia inferiore a qualsiasi quantità data (senza effettivamente coincidere con essa)."*
A. Cauchy (1789-1857) dà una formulazione più precisa e aritmetica del concetto di limite di D'Alembert, ma con linguaggio sempre

cinematico: *"Quando i valori successivi attribuiti ad una variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fissato così che finiscono col differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, questo valore fissato viene detto il limite di tutti gli altri".*

Heine, nell'opera *Elemente* (1872), ispirata alle lezioni di **K. Weierstrass**, dà quella che oggi viene assunta come rigorosa definizione di limite: *"Se data una grandezza ε esiste una η_0 tale che per $0 < \eta < \eta_0$ la differenza $f(x_0 \pm \eta) - L$ sia minore di ε in valore assoluto, allora L è il limite di $f(x)$ per $x = x_0$".*

Con Cauchy viene fondata l'**Analisi matematica** moderna, sulla sintesi dei metodi rigorosi con quelli intuitivo-infinitesimali usati dai predecessori. Ciò è ottenuto prendendo come concetto base del calcolo il concetto di limite, estromettendo dal calcolo infiniti e infinitesimi attuali, a favore di infiniti e infinitesimi potenziali.

Cauchy definisce, quindi, la *derivata come limite del rapporto incrementale*, *l'integrale definito come limite di una determinata somma finita*, costituendo così, finalmente in modo indipendente l'una dall'altra, le due operazioni fondamentali del calcolo: derivazione e **integrazione**, legate dal noto teorema di inversione. Cauchy precisa anche il concetto di *convergenza delle **serie*** (prima trattate con molta disinvoltura) dando i primi criteri di convergenza.

Il concetto di funzione continua

Molti studiosi cercarono di caratterizzare le **funzioni** continue nei primi anni del 1800.
B. Bolzano (1817): *"Una funzione f è da dirsi variabile con la legge di continuità per tutti i valori di x .... soltanto se x è un tale valore che la differenza f(x + w) - f(x) possa essere fatta minore di qualsiasi assegnata grandezza, se w è piccolo tanto come è pur sempre possibile determinare."*
A. Cauchy, nel suo *"Cours d'Analyse"* (1821), in cui basa i concetti fondamentali dell'Analisi sul concetto di **limite**, dà la seguente definizione di continuità: *"Una funzione f sarà, entro i limiti assegnati per x, funzione continua di x, se per ogni valore in detto intervallo, il valore numerico della differenza f(x + w) - f(x) decresce indefinitamente con quello di w. In altre parole, f è continua nella variabile x, se un accrescimento infinitamente piccolo della variabile produce sempre un accrescimento infinitamente piccolo della funzione".* C'è da osservare che per Cauchy, "*infinitamente piccolo*" aveva un senso preciso dato dal concetto di limite.
Osserviamo anche che nel suo trattato, nella dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue, Cauchy attribuiva a queste la proprietà della uniforme continuità (il che è lecito se l'insieme di definizione è un intervallo chiuso e limitato).
Più precisa la definizione scoperta in un manoscritto di **B. Riemann**, (1866), dopo la sua morte: *"W è una funzione continua di z se per ogni ε può determinarsi a tale che per ogni intervallo di z di ampiezza minore di a, la differenza fra i due valori di W sia minore di ε".* (Questa, in realtà, è una definizione di funzione uniformemente continua).
Solo nel 1872 negli *"Elemente*" di **Heine**, che risentono delle lezioni del maestro **K. Weierstrass**, appaiono le definizioni rigorose moderne di funzione continua e di funzione uniformemente continua (e la dimostrazione del teorema che lega continuità e uniforme continuità).
A Bolzano e Weierstrass sono dovuti esempi di funzioni continue non derivabili in alcun punto. Contemporaneamente si era venuto costituendo il concetto di limite.

Il concetto di integrale

Nel 1821, **Cauchy**, ricollegandosi alle idee ed ai metodi dei ricercatori dei 2000 anni precedenti (**Archimede**, **Cavalieri**, **Fermat**, **Torricelli**, **Valerio**, **Mengoli**,...), dà la definizione di ***integrale definito***, che è l'astrazione del procedimento di calcolo delle aree.
Fondandosi sul concetto di **limite**, abbandonando **infiniti e infinitesimi attuali**, l'area di una figura piana è il limite di una somma finita di aree di rettangolini di spessore finito ma tendente a zero. Si ha così la seguente:
Definizione di integrale secondo Cauchy.
Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, si effettua una partizione di $[a, b]$, $D = \{x_0, x_1,\ldots,x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
e si calcola la somma

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Si dimostra che esiste il $\lim_{|D|\to 0} \sigma(f, D)$, dove $|D| = \max_{0\le i\le n-1} (x_{i+1} - x_i)$

e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|D|\to 0} \sigma(f, D)$$

Se, poi, f ha un punto di discontinuità c con $a < c < b$, si pone:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

se esistono finiti entrambi i limiti a secondo membro.

Con la scoperta della serie di Fourier si ampliò il concetto di funzione (Dirichlet) e si poterono dare esempi di funzioni con infiniti punti di discontinuità. Fu necessario ampliare il concetto di integrale.

Definizione di integrale secondo Riemann (1854).
Si considera una funzione f limitata nell'intervallo $[a, b]$, si effettua una partizione $D = \{x_0, x_1,\ldots, x_n\}$ di $[a, b]$ e si considera la somma

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ove ξ_i è un punto arbitrario di $[x_i,, x_{i+1}]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|D|\to 0} \sigma(f, D)$$

sempre che esista finito il limite a secondo membro (cosa non più necessariamente vera se f non è continua), nel qual caso f dicesi integrabile.
Una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia integrabile è che l'insieme X dei suoi punti di discontinuità abbia *misura nulla* (secondo Lebesgue), il che significa che per ogni ε esiste una successione (I_n) di intervallini tale che $X \subset \bigcap_{n \geq 1} I_n$ e $\sum_{n \geq 1} mis\,(I_n) < \varepsilon$.

Ovviamente, la definizione di Riemann estese moltissimo il campo di applicabilità dell'integrale.

Definizione secondo Darboux (1875).
Darboux modifica la definizione di integrale di Riemann, introducendo le somme inferiori e le somme superiori.
Se f è limitata in $[a, b]$ e se $D = \{x_0, x_1,\ldots,x_n\}$ è una partizione di $[a, b]$, si pone

$$m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x),$$

si calcolano le somme

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(x_{i+1} - x_i), \qquad S(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i),$$

quindi si denomina *integrale inferiore* di f, denotato con

$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$, l'estremo superiore di $s(f, D)$ al variare di D.

Analogamente si denomina integrale superiore di f, denotato con

$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$, l'estremo inferiore di $S(f, D)$ al variare di D.

f si dice ***integrabile secondo Riemann*** se e solo se l'integrale superiore e quello inferiore di f coincidono e si indica il loro valore comune con:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si prova facilmente che la **funzione di Dirichlet** non è integrabile secondo Riemann perché l'integrale superiore vale *1* mentre quello inferiore vale *0*.

Definizione di misura di un insieme (**G. Peano**, 1887; **C. Jordan**, 1893). Nonostante le ricerche condotte per millenni sul calcolo di aree e volumi, non si erano mai date definizioni di *misurabilità* e di *area* o di *volume*.
Solo alla fine dell'Ottocento, Peano (per le parti di **R**) e Jordan (per le parti di $\mathbf{R}^k$) colmarono questa lacuna logica. Il loro procedimento è il seguente (riferito per semplicità agli insiemi piani).
1) Si definisce, in modo ovvio, l'area di un intervallo (cioè di un rettangolo coi lati paralleli agli assi).
2) Si definisce, quindi, in modo altrettanto ovvio, l'area di un pluriintervallo, cioè di un insieme che sia unione di un *numero finito* di intervalli a due a due disgiunti.
3) Considerato un insieme limitato E, si pone $m^{(i)}(E)$ (detta misura interna di E) l'estremo superiore delle aree dei pluriintervalli contenuti in E, $m^{(e)}(E)$ (detta misura esterna di E) l'estremo inferiore dei pluriintervalli contenenti E.
4) E dicesi *misurabile* se e solo se $m^{(i)}(E) = m^{(e)}(E)$ e in tal caso il loro comune valore si dice *area* di E e si denota con $m(E)$.
5) Si dà un esempio di insieme non misurabile.
La teoria della misura di Peano-Jordan permise l'estensione dell'integrale di Riemann alle funzioni di più variabili. Comunque l'integrale di Riemann risultò "incompleto" (senza entrare in dettagli tecnici la situazione sarebbe identica a quella che si avrebbe nell'insieme dei numeri razionali, se non si tenesse conto dei numeri reali). Perciò si congetturò l'esistenza di uno spazio più ampio di funzioni "integrabili", contenente quello delle funzioni integrabili secondo Riemann. Fu **H. Lebesgue** che nella sua tesi di laurea (1902) risolse questo problema.

Definizione di misura e di integrale secondo Lebesgue.
Lebesgue premise una sua teoria della misura che esponiamo brevemente per insiemi di $\mathbf{R}^2$.

6) Se A è un aperto limitato, si dice misura di Lebesgue di A e si denota $\mu(A)$ la misura interna di A secondo Peano-Jordan.

7) Se C è un chiuso limitato, si dice misura di Lebesgue di C e si denota $\mu(C)$ la misura esterna di C secondo Peano-Jordan.

8) Se E è un insieme limitato qualunque, si dice misura interna di E secondo Lebesgue e si denota $\mu^{(i)}(E)$ l'estremo superiore delle misure degli insiemi chiusi contenuti in E; invece si dice misura esterna di E secondo Lebesgue e si denota $\mu^{(e)}(E)$ l'estremo inferiore delle misure degli insiemi aperti limitati contenenti E.

9) Un insieme E limitato dicesi misurabile *secondo Lebesgue* se e solo se $\mu^{(i)}(E) = \mu^{(e)}(E)$ e in tal caso il loro comune valore si dice misura di E secondo Lebesgue e si denota con $\mu(E)$.

10) Un insieme E non limitato dicesi misurabile *secondo Lebesgue se* e solo se per ogni intervallo I di $\mathbf{R^2}$ risulta $I \cap E$ misurabile, e in tal caso dicesi misura di E secondo Lebesgue l'estremo superiore di $\mu(I \cap E)$ al variare di I in $\mathbf{R^2}$.

La misura di Lebesgue viene, così, ad essere una funzione definita nell'insieme M degli insiemi di $\mathbf{R^2}$ misurabili secondo Lebesgue, a valori in $[0, +\infty]$, che si dimostra godere dell'importante proprietà della numerabile additività. In altre parole, se $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sono insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale è anche la loro unione e, inoltre, se detti insiemi sono a due a due disgiunti:

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(E_n).$$

Ricorrendo all'**assioma di Zermelo** si prova l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue.
Lebesgue dà, quindi, il concetto di funzione misurabile.
Assegnata $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, f dicesi misurabile se e solo se per ogni intervallo I di $\mathbf{R}$, $f^{-1}(I)$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue.
Lebesgue estende il concetto di integrale a tutte le funzioni misurabili e limitate (comprendenti come caso particolarissimo le funzioni continue su un intervallo $[a, b]$). Egli osserva preliminarmente che la definizione di integrale di Cauchy e Riemann basata su una suddivisione di $[a, b]$ con intervallini $[x_i, x_{i+1}]$, va bene per le funzioni continue in quanto queste hanno in ciascun $[x_i, x_{i+1}]$ un'oscillazione (ossia differenza fra estremo superiore ed estremo inferiore) che diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallino stesso, non va

bene per le funzioni discontinue per le quali non si verifica quanto ora detto. Lebesgue escogita un nuovo modo di suddividere $[a, b]$ non in intervallini ma in insiemi misurabili E_i nei quali l'oscillazione di f, anche in caso di discontinuità, non superi un valore fissato a priori.
Lebesgue procede nel modo seguente. Data $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ misurabile e limitata, se $\forall\ x \in [a, b] : m \leq f(x) < M$, si effettua una suddivisione $D = \{m_0, m_1, \ldots, m_p\}$ dell'intervallo $[m, M[$ in intervallini $[m_i, m_{i+1},[$ e si pone $E_i = f^{-1}([m_i, m_{i+1},[)$.

Gli insiemi E_i $(0 \leq i \leq p - 1)$ sono misurabili, a due a due disgiunti, costituiscono una partizione dell'insieme di definizione, e sono tali che, per definizione, in E_i l'oscillazione della funzione non supera $m_{i+1} - m_i$. Posto allora:

$$h_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \qquad H_i = \sup_{x \in E_i} f(x),$$

$$s_f(D) = \sum_{i=0}^{p-1} h_i\, \mu_i(E_i), \qquad S_f(D) = \sum_{i=0}^{p-1} H_i\, \mu_i(E_i),$$

si dice integrale inferiore di f:

$$\underline{\int}_a^b f(x)\, dx = \sup_D s_f(D),$$

mentre si dice integrale superiore di f:

$$\overline{\int}_a^b f(x)\, dx = \inf_D S_f(D).$$

Infine, si dimostra che l'integrale superiore e quello inferiore di f coincidono, perciò il comune valore prende il nome di integrale di Lebesgue di f e lo si denota con il solito simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Questo concetto si estende, quindi, a funzioni di più variabili e, con le opportune cautele, a funzioni definite su insiemi non limitati.
Si realizza una teoria di grande generalità e potenza, che costituisce un punto di arrivo nello sviluppo dell'Analisi Matematica.

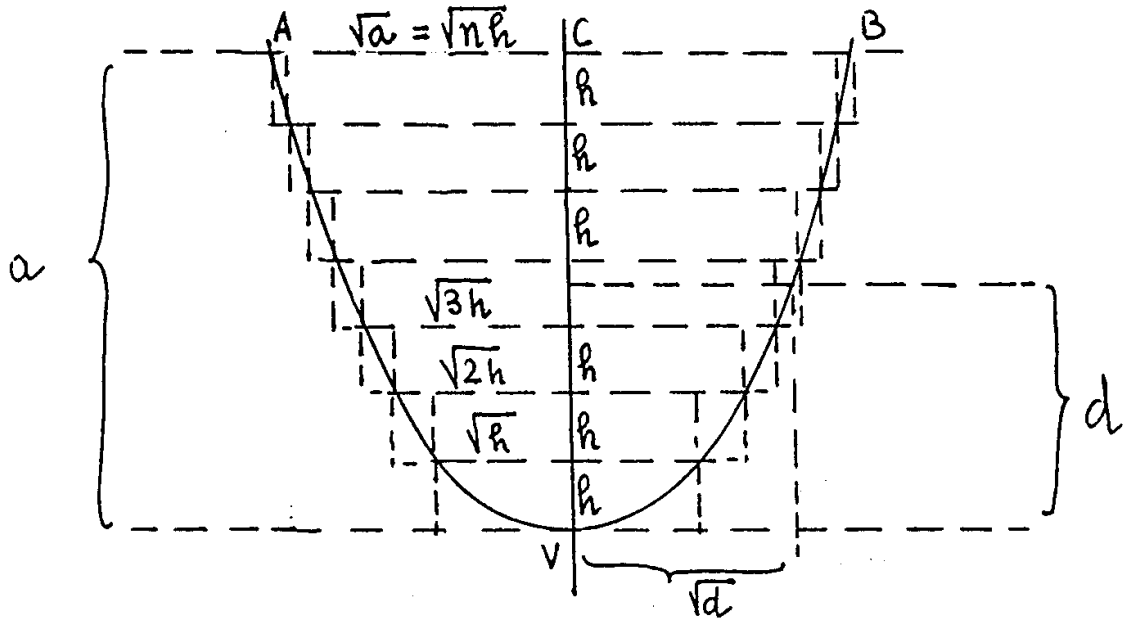
Il metodo di esaustione

Lo schema del metodo di esaustione è il seguente.
Se S e S' sono due grandezze e si deve dimostrare che $S = S'$, ragionando **per assurdo** si suppone $S' < S$ (o il contrario) e si costruisce una successione di grandezze $(X_n)_{n\in IN}$ tale che $X_n < S'$, $X_n < S$ per ogni n, ed inoltre si abbia:

$S - X_1 < (1/2)S$,
$S - X_2 < (1/2)(S - X_1) < (1/2^2)S$, . .
.....
$S - X_n < (1/2)(S - X_{n-1}) < (1/2^n)S$, . . .

Per il postulato di **Eudosso**-**Archimede**, esisterà un numero m tale che risulti $(1/2^m)S < S - S'$ e, quindi, tale che $S - X_m < S - S'$, da cui segue $S' < X_m$, il che è assurdo.
Si noti che alla base del metodo vi è un'implicita idea di successione convergente.

Illustriamo il metodo calcolando il volume di un segmento di un paraboloide rotondo di altezza a.



Il paraboloide P è generato dalla rotazione intorno all'asse VC della parabola AVB di equazione $y = x^2$. Si divide VC in n parti uguali ad $a/n = h$. I piani per i punti di divisione perpendicolari all'asse segano

il paraboloide in cerchi di raggi $\sqrt{h}$, $\sqrt{2h},\ldots,\sqrt{nh}$ e determinano lo scaloide q_n (risp. Q_n) inscritto (risp. circoscritto) al paraboloide e costituito dai cilindri di altezza h e basi πh, $\pi 2h$, $\pi(n-1)h$ (risp. πh, $\pi 2h$, ..., πnh).
Si ha:

$$s_n = vol(q_n) = \pi h^2(1+2+\ldots+(n-1)) = \frac{(n-1)n\pi h^2}{2} = \frac{\pi a^2(n-1)}{2n};$$

$$S_n = vol(Q_n) = \pi h^2(1+2+\ldots+n) = \frac{(n+1)n\pi h^2}{2} = \frac{\pi a^2(n+1)}{2n};$$

1) $s_n < \frac{\pi a^2}{2} < S_n$;

2) $S_n - s_n = \frac{\pi a^2}{n}$.

Si dimostra che

3) $vol(P) = \pi a^2/2$ *(pari a metà del volume del cilindro circoscritto).*

Infatti, se fosse $vol(P) < \pi a^2/2$, si avrebbe $s_n < vol(P) < \pi a^2/2$.

D'altra parte, per un certo n, tenendo presenti le 1), 2) è:

$$\pi a^2/2 - s_n < S_n - s_n = \pi a^2/2 < \pi a^2 - vol(P),$$

da cui si deduce $s_n > vol(P)$, in contrasto con la precedente $s_n < vol(P)$.
Si perviene, di nuovo, ad una contraddizione supponendo $\frac{\pi a^2}{2} < vol(P)$, ed è dunque provata la 3).

Altre applicazioni del metodo di esaustione sono:

- **il confronto tra il volume del cono e del cilindro** secondo **Euclide**;
- **il calcolo del baricentro del paraboloide rotondo** secondo **Galileo**;
- **il calcolo del baricentro della calotta sferica** secondo **Torricelli**.

L’allievo di Galileo **Bonaventura Cavalieri** sviluppò, insieme a Torricelli, un altro metodo per il calcolo di aree e volumi, la **teoria degli indivisibili**. Torricelli ne ricavò, tra l’altro, **un metodo più semplice per calcolare il volume del paraboloide rotondo.**

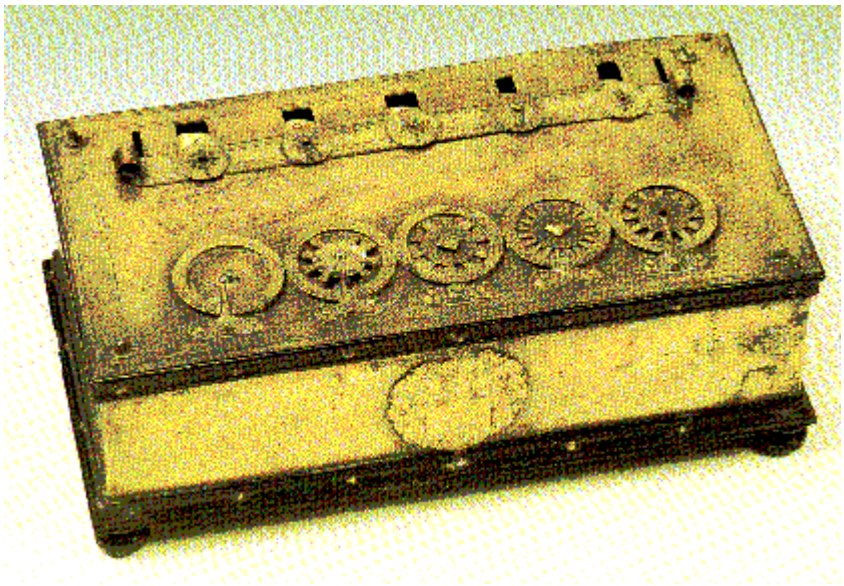
Il Calcolo Meccanico

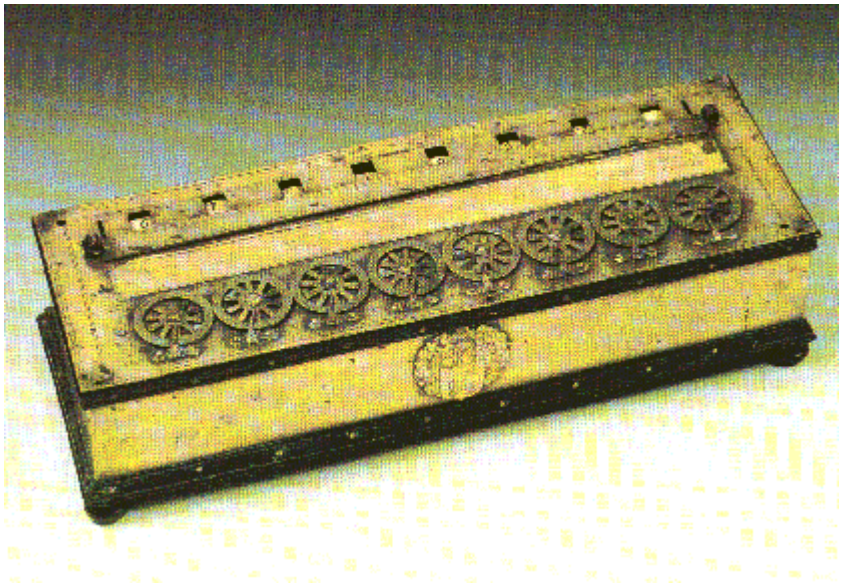
Appare, oggi, abbastanza ovvia l'idea che, di fronte alla necessità di effettuare calcoli più o meno lunghi e laboriosi, l'uomo abbia realizzato prontuari per i **numeri primi**, per i quadrati, per i cubi, per i logaritmi e per le funzioni trigonometriche (**Thesaurus**) ed abbia tentato di costruire macchine capaci di eseguire calcoli.
Il primo esemplare di un tale congegno è la **pascalina** di Blaise **Pascal**, seguita da altre realizzazioni come le macchine di **Lord Stanhope** ed il **calcolatore di Leibniz**.
Nel 1654, **R. Bissaker** realizzò il regolo logaritmico (o regolo calcolatore) e negli anni trenta del ventesimo secolo cominciarono a diffondersi le calcolatrici, incapaci però di affrontare problemi di alta matematica, a differenza degli attuali computer.
Le tavole nautiche, sviluppate fino all'Ottocento per la determinazione di latitudine e **longitudine** in mare, erano piene di errori di calcolo, dovuti al fatto che i complicati conti erano svolti a mano. Sotto la spinta dell'esigenza di maggiore precisione, **Charles Babbage**, inglese, progettò nel 1823 la "macchina delle differenze n.1", calcolatore con 25.000 ingranaggi, mai realizzato, come anche il modello successivo. Sul principio ideato da Babbage furono però basati i primi elaboratori elettronici, costruiti durante la Seconda Guerra Mondiale, ed utilizzati per crittare e decrittare messaggi segreti. Di codici segreti si era occupato, molti anni prima, anche **Cardano**, che per primo ebbe l'idea di un alfabeto per non vedenti, formato di segni riconoscibili al tatto, che sarebbe poi stato realizzato da **Braille**. Anche lo studioso rinascimentale **Leon Battista Alberti** aveva scritto un **trattato** sugli alfabeti segreti. I primi decrittatori di messaggi segreti della storia furono il francese **François Viète**, nel Cinquencento, e l'inglese **John Wallis**, un secolo più tardi.
La creazione del primo computer è legata al nome dell'inglese **Alan Turing**.
Nel 1938, dopo un periodo trascorso presso la Princeton University, Turing tornava a Cambridge. In quegli anni, che risentivano del disorientamento suscitato dai **teoremi** di incompletezza di **Gödel** (1931), Turing era impegnato nel tentativo di trovare, se esisteva, un criterio per stabilire quali questioni fossero decidibili e quali fossero non decidibili. Data l'inadeguatezza delle calcolatrici dell'epoca, egli pensava ad una macchina immaginaria capace di eseguire calcoli infiniti.
Nel settembre del 1940, fu contattato dalla ***Government Code and Cypher School*** per la decrittazione dei messaggi in codice dei

tedeschi (siamo in piena seconda guerra mondiale). Le premesse teoriche, a partire dalla logica matematica di **Boole**, c'erano già; occorreva però che i calcoli fossero effettuati rapidamente ed era quindi necessario renderli automatici mediante una macchina.
I tedeschi utilizzavano per tutte le loro comunicazioni diverse versioni di un unico sistema cifrato, basato sulla macchina ***Enigma***, costruita negli anni venti e successivamente perfezionata.
A *Bletchley*, un gruppo di matematici, guidato da Turing, cercò di costruire immagini speculari della Enigma. Le macchine inventate da Turing, soprannominate *bombe,* erano alte più di due metri e larghe altrettanto, impiegavano relè elettromeccanici e riuscirono a violare il codice della Enigma.
Durante questi anni, Turing non abbandonò i suoi obiettivi matematici ed alla fine della guerra contribuì alla costruzione di ***Colossus***, macchina totalmente elettronica, costituita da 1500 valvole più veloci dei relè impiegati nelle *bombe*.
Si trattava di un computer nel senso moderno, considerato da Turing come una specie di cervello primitivo: *aveva memoria, poteva elaborare informazioni, era dotato di grande velocità ed i suoi stati somigliavano a quelli della mente umana.*
A Turing si deve anche la costruzione dell'***ACE*** (Automatic Computing Engine) e del primo computer con un programma elettronico incorporato (Manchester 1948).
Morì nel 1954, senza vedere come la sua macchina avrebbe cambiato, in molte cose, l'esistenza dell'uomo.

Curiosità Alcuni disegni di ingranaggi ritrovati nei manoscritti di **Leonardo da Vinci** ricordano da vicino quelli delle prime macchine calcolatrici. Tuttavia non è chiaro quale fosse esattamente la natura di quell'invenzione.

Due immagini della pascalina (1642-1643)



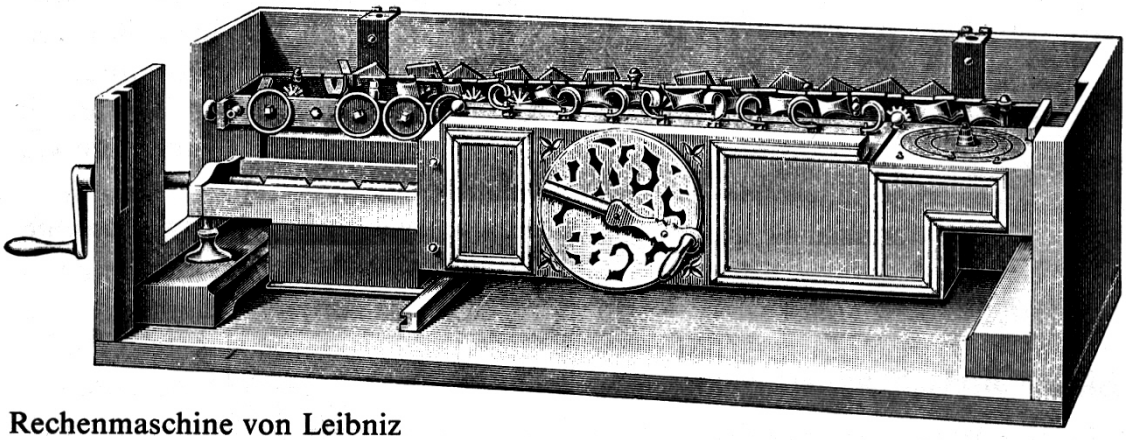


Oggetti esposti al Musée du Ranquet, Clermont-Ferrand, Francia

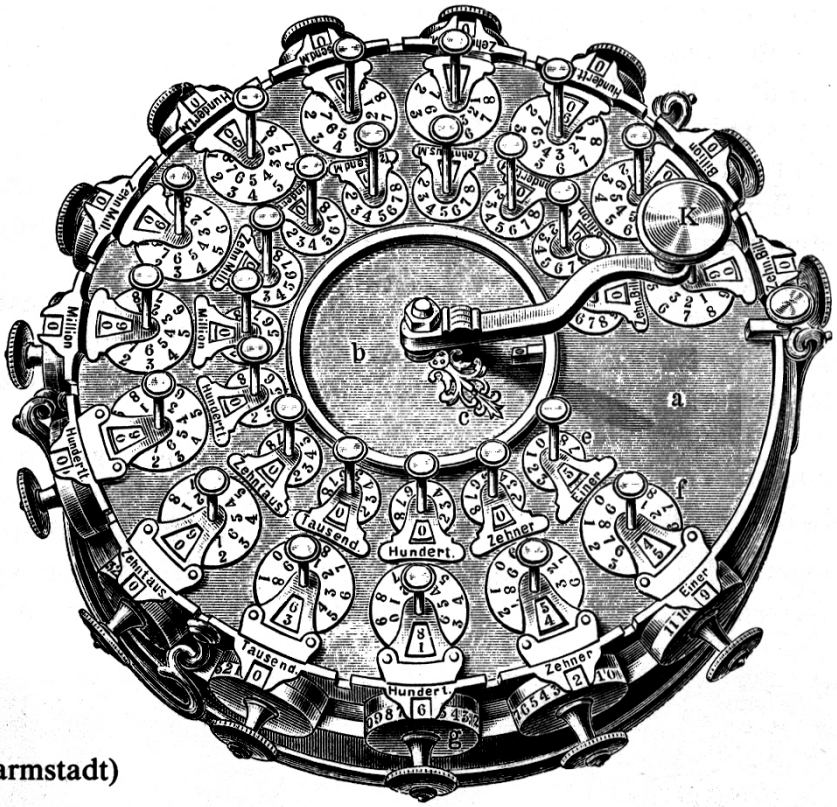
"La macchina aritmetica produce effetti che si avvicinano al pensiero più di tutto quello che fanno gli animali, ma non fa niente che possa far dire che abbia una volontà, come gli animali."

(B. Pascal, *Pensieri*)

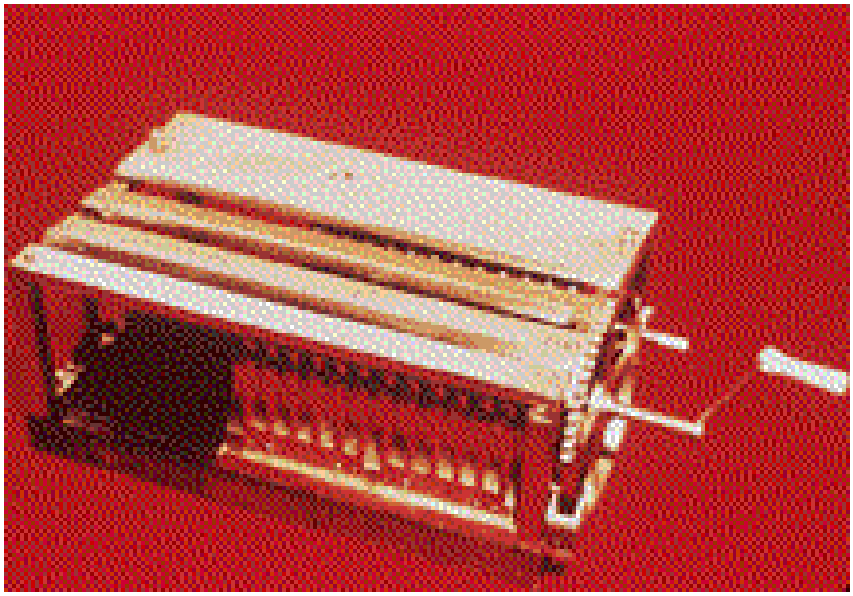
La pascalina fece presto il giro delle corti europee. Nel 1652 un esemplare fu regalato alla regina Maria Cristina di Svezia, la stessa che, poco tempo prima, aveva chiamato **Descartes** come precettore.



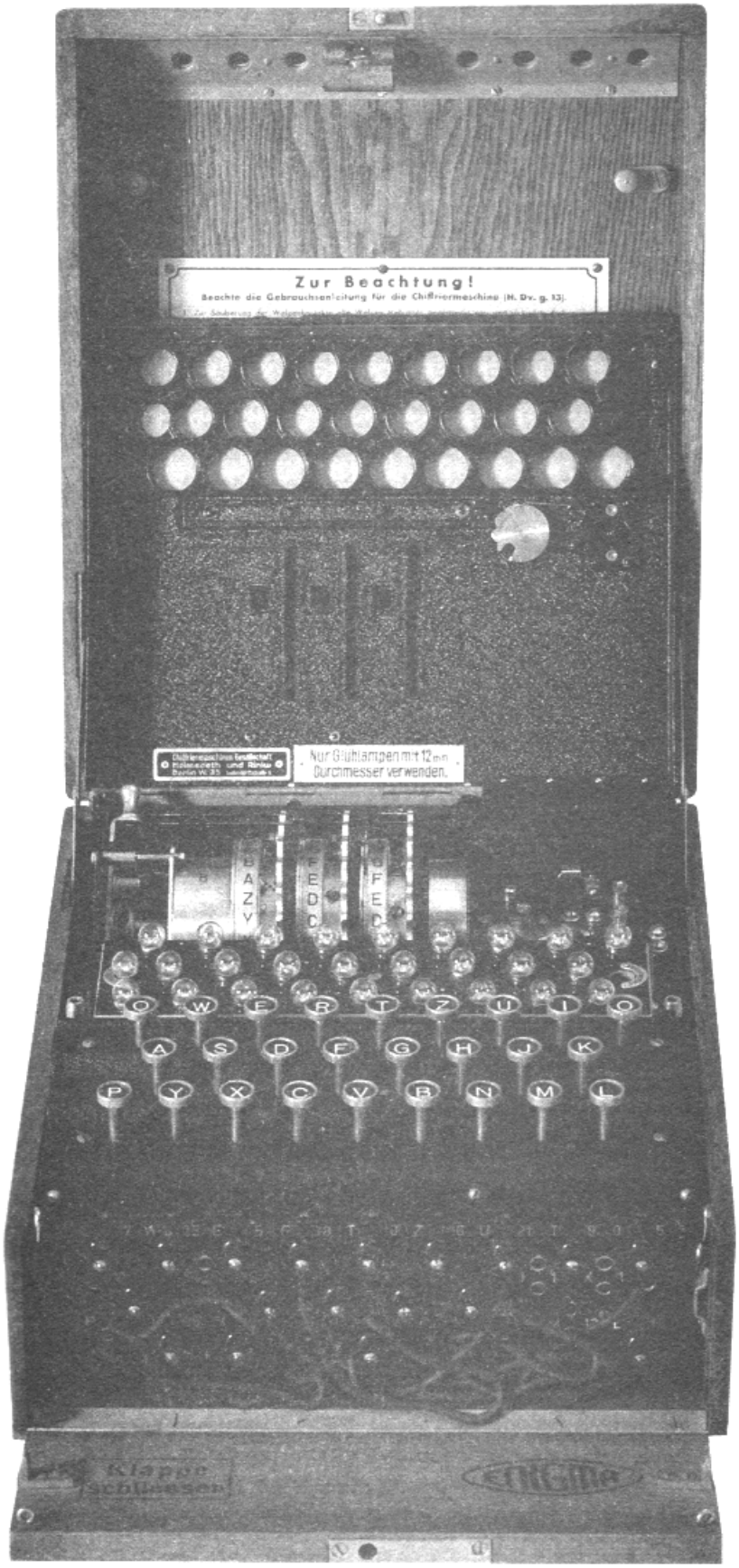
Rechenmaschine von Leibniz
(1673, Hannover)



J. H. Müllers
Rechenmaschine
(1782, Museum in Darmstadt)



La macchina calcolatrice di Stanhope (1775)
David Weil, Computer Museum of America


Zur Beachtung!
Beachte die Gebrauchsanleitung für die Chiffriermaschine (H. Dv. g. 13).
Nur Glühlampen mit 12 mm Durchmesser verwenden.
Klappe schliessen!

René Descartes (Cartesio)
nato il 31 marzo 1596 a La Haye (Francia)
morto l'11 febbraio 1650 a Stoccolma (Svezia)



Rimasto orfano di madre quando era ancora in tenera età, crebbe circondato dalle amorevoli cure del padre, appartenente alla bassa nobiltà francese. Compì gli studi scolastici al collegio dei Gesuiti di La Flèche, e si laureò in legge a Poitiers. Trascorse buona parte della sua giovinezza viaggiando per l'Europa, anche in qualità di soldato, al seguito degli eserciti olandese, bavarese e francese.
A Parigi divenne membro della Accademia fondata da **Mersenne**. Di quest'ultimo era grande amico, come testimonia anche un ricco **carteggio** scientifico, protrattosi per anni.
La visione epistemologica di Descartes, basata sul primato della ragione, è presentata nelle ***Regulae ad directionem ingenii*** *(Regole per la guida dell'intelligenza)* (1627-1628), oltre che nel famoso trattato ***Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*** *(Discorso sul metodo per ragionare bene e per cercare la verità nelle scienze)* (1637). Insieme a quest'opera furono pubblicate tre appendici: ***La Géométrie***, ***La Dioptrique*** e ***Les Météores***, che contengono i suoi principali risultati scientifici. Nel 1649 si recò a Stoccolma su invito della regina Maria Cristina di Svezia, che lo voleva come suo precettore. Ma non sopravvisse all'inverno nordico: morì di polmonite, poco dopo aver redatto il programma della costituenda Accademia delle Scienze.

Tra le sue principali opere ricordiamo anche ***Le Monde*** (1630-1633), un trattato sulla formazione del cosmo e sulla natura della

luce, ed i ***Principia philosophiae*** (1644), una raccolta di osservazioni su quasi tutte le discipline studiate da Descartes: la metafisica, l'epistemologia, l'astronomia, la meteorologia, la chimica, la termologia, l'ottica fisica e geometrica, il magnetismo, la biologia. Nel ***Compendium Musicae*** (1650) Descartes espose i risultati dei suoi studi sulle armonie musicali.

Descartes contende al suo contemporaneo **Fermat** il merito di aver ideato la moderna **geometria analitica**: pare che i due matematici francesi fossero divisi da una forte rivalità scientifica. Di quella che egli considerava la sua invenzione, Descartes, in una lettera a Mersenne del 1637, disse che ella stava alla geometria dell'epoca come la retorica di Cicerone stava all'*ABC* dei bambini.

Cartesio, noto forse più come filosofo che come matematico, è considerato il fondatore del razionalismo, assertore del primato della ragione, che volle rompere con la tradizione. Il **Leopardi**, nella sua *Storia dell'astronomia,* dirà, citando dal *Dictionnaire de Physique* di Paulian, che la filosofia di Descartes era diretta contro la *"vil turba dei Peripatetici, privi di geometria, schiavi piuttosto che seguaci di Aristotele, e al tempo istesso amanti di quel giogo, che li opprimea, e di quelle tenebre, che rendeanli ciechi adoratori degli Dei della scuola."* Queste parole ricordano la posizione assunta da **Galilei** nei confronti della cultura accademica seicentesca. L'approccio metodologico di Galilei si distingue, tuttavia, da quello di Cartesio, in quanto pone sullo stesso piano ragione e percezione. Il pensiero, secondo lo scienziato pisano, nulla può senza il supporto dell'evidenza sperimentale. Cartesio obietta che in questo modo il campo di conoscenza viene ristretto ad alcuni fenomeni particolari, senza poter mai pervenire alla formulazione di principi generali.

Curiosità su Cartesio

La scienza di Cartesio

Curiosità su Descartes



- Questo ritratto di **Descartes**, conservato al Museo del Louvre, è opera del pittore olandese Frans Hals (1580 ca. – 1666). Forse è proprio un esemplare di questo dipinto che, secondo la testimonianza di un contemporaneo, era accompagnato dai seguenti quattro versi:

Talis erat vultu NATURÆ FILIUS: unus
Qui Menti in Matris viſcera pandit iter.
Aſſignanſque ſuis quævis miracula cauſis,
Miraclum reliquum ſolus in orbe fuit.

(Tale era il volto del Figlio della Natura: l'unico che con la Mente si sia fatto strada nelle viscere della Madre. Scoprendo di ogni miracolo la causa, restò lui il solo miracolo sulla Terra).

Il figlio maggiore di **Huyghens**, il fisico che era stato suo grande amico, compose per Descartes il seguente epitaffio in versi:

"Epitaphe de Des Cartes par Ch. Huyghens"

Sous le climat glacé de ces terres chagrines,
Où l'hiver est suivi de l'arriere-saison,
Te voici sur le lieu que couvrent les ruines,
D'un fameux bastiment qu'habita la Raison.

Par la rigueur du sort et de la Parque infame,
Cy gist Descartes au regret de l'Univers.
Ce qui servoit jadis d'interprete a son ame,
Sert de matiere aux pleurs et de pâture aux vers.

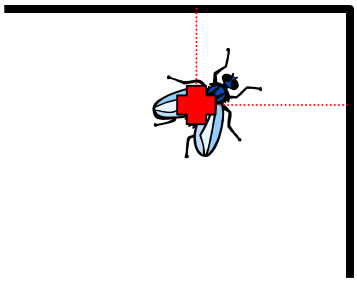
Cette ame qui tousjours, en sagesse feconde,
Faisoit voir aux esprits ce qui se cache aux yeux,
Après avoir produit le modele du monde,
s'informe desormais du mystere des cieux.

Nature, prends le deuil, viens plaindre la premiere
Le Grand Descartes, et monstre ton desespoir;
Quand il perdit le jour, tu perdis la lumiere:
ce n'est qu'a ce flambeau que nous t'avons pu voir.

(Sotto il clima gelido di queste tristi terre, dove l'inverno è seguito dall'autunno, eccoti sul luogo delle rovine di un illustre edificio in cui abitò la Ragione. Per la crudezza della sorte e della Parca infame, qui giace Descartes, compianto dall'Universo. Ciò che un tempo faceva da interprete alla sua anima, è ora solo oggetto di lacrime, e cibo per i vermi. Quest'anima che ognora, con la sua fertile saggezza, mostrava alle menti ciò che si cela agli occhi, dopo aver creato il modello del mondo, sta indagando ormai sul mistero dei Cieli. Natura, indossa il lutto, vieni a piangere per prima il Grande Descartes, e fai vedere la tua disperazione; quando di lui si spensero i giorni, in te si spense la luce: il solo bagliore che ci permise di vederti.)

- Descartes condusse, nella maturità, una vita piuttosto appartata, rifugiandosi in un isolamento da cui usciva solo per curare i suoi rapporti, per lo più epistolari, con il mondo scientifico. Il suo motto era: *Bene vixit qui bene latuit"* (Visse bene chi ben si nascose).

- Pare che l'idea del sistema di coordinate sia venuta a Descartes osservando un insetto che si muoveva, sul soffitto, in prossimità di un angolo. Il matematico allora pensò che avrebbe potuto determinare, in ogni momento, la posizione dell'insetto, conoscendo la sua distanza da ciascuna delle due pareti.



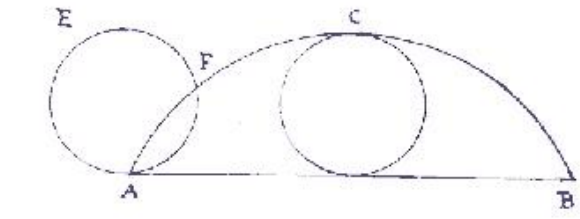
Il carteggio scientifico di Descartes

Descartes intrattenne per più di vent'anni un intenso scambio epistolare con altri studiosi, in particolare con gli amici **Mersenne** e **Huyghens**.
Gli argomenti trattati sono molto vari, principalmente si tratta di problemi riguardanti la matematica e la fisica, ma non mancano questioni di carattere pratico o filosofico: in una lettera Descartes propone un modo per impedire che il fumo del caminetto invada la stanza, in un'altra esprime il proprio pensiero sull'essenza del bello, parla dell'immaginazione nel giudicare i suoni, del vapore e del vento, citando, tra l'altro, l'**eolìpila** di **Erone**, tratta degli specchi, della corona intorno alla candela, della neve, del suono dei flauti.

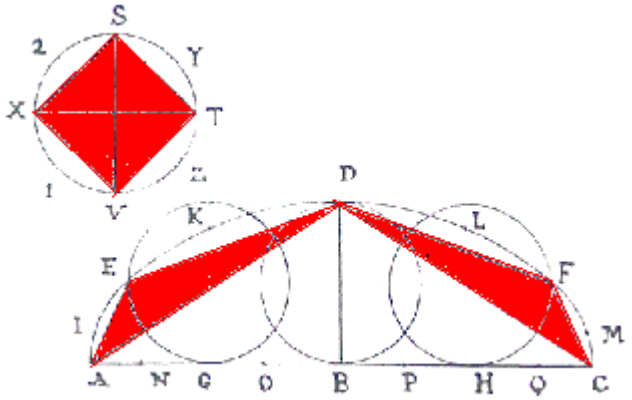
Descartes scrive a Mersenne sul problema della lingua universale
Descartes scrive a Mersenne a proposito di Fermat
Descartes scrive a Mersenne sulla cicloide
Descartes risolve un problema aritmetico

L'area sottesa alla cicloide

Il 27 maggio del 1638 **Descartes** scrive una lettera all'amico **Mersenne**, descrivendo un metodo per calcolare l'area sottesa ad un arco di **cicloide**. La parte principale del testo recita più o meno così:



"Mio Reverendo Padre,
ho ricevuto i vostri pacchi del 28 aprile e del primo maggio con la stessa spedizione, e, senza contare le altre lettere che Voi mi inviate, vi trovo 26 pagine scritte di vostro pugno, alle quali sono debitore di risposta. […] Voi iniziate parlando di una scoperta del Signor de Roberval, riguardante lo spazio compreso dalla linea curva descritta da un punto della circonferenza di un cerchio, che si immagina ruoti su di un piano, alla quale scoperta confesso di non avere mai pensato prima, ed è un'osservazione piuttosto bella; ma non vedo perché fare tanto rumore, per aver trovato una cosa così facile, che chiunque sappia un po' di Geometria non può non trovare, purché la cerchi.



Perché se ADC è questa linea curva, e AC un segmento lungo quanto la circonferenza del cerchio STVX, una volta diviso questo

segmento AC in 2, 4, 8, … parti uguali con i punti B, G, H, N, O, P, Q, …, è evidente che la perpendicolare BD è uguale al diametro del cerchio, e che tutta l'area del triangolo ADC è doppia di quella del cerchio. Quindi, chiamando E il punto in cui questo stesso cerchio interseca la curva AED, quando esso poggia sul punto G della base, e detto F il punto in cui esso interseca la curva, quando poggia sul punto H della base, è evidente che i due triangoli AED e DFC sono equivalenti al quadrato STVX inscritto nel cerchio. E allo stesso modo, chiamati I, K, L, M i punti in cui il cerchio interseca la curva, quando esso poggia sui punti N, O, P, Q della base, è evidente che i quattro triangoli AIE, EKD, DLF e FMC sono complessivamente equivalenti ai quattro triangoli isosceli inscritti nel cerchio, SYT, TZV, V1X, X2S, e che gli altri otto triangoli, inscritti nella curva sui lati di questi ultimi quattro, saranno equivalenti agli otto inscritti nel cerchio, e così via, all'infinito. Da ciò si deduce che tutta l'area dei due segmenti della curva, aventi per basi le linee AD e DC, è uguale a quella del cerchio; e, di conseguenza, tutta l'area compresa tra la curva ADC e la retta AC è tripla di quella del cerchio."

Riassumiamo il ragionamento esposto da Descartes. Le aree dei triangoli *ABD* e *BCD* sono uguali a quella del cerchio. Le regioni colorate hanno la stessa area. Se si sostituisce il quadrato *XVTS* inscritto nel cerchio con un altro poligono regolare inscritto, con un numero maggiore di lati, la sua area sarà più vicina a quella dei segmenti di cerchio *AIEKD* e *DCMFL.* Al limite – quando il poligono viene a coincidere con il cerchio, come ci insegnano **Archimede** ed **Euclide** – le aree saranno uguali. Così si prova che l'area sottesa alla cicloide è pari a tre volte quella del cerchio.

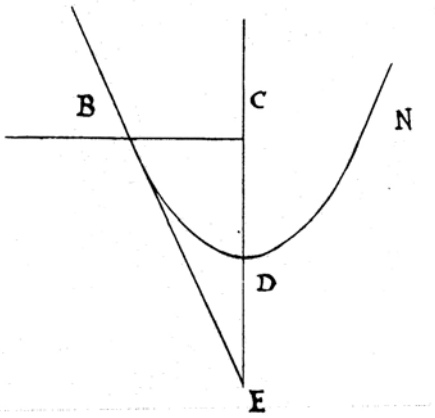
Le tangenti ad una curva

In una lettera datata 3 maggio 1638, **Descartes**, rispondendo all'amico padre **Mersenne**, commenta il metodo inventato da **Fermat** per determinare la retta tangente condotta ad una curva da un punto dato. Questo metodo è contenuto nell'opera ***Methodus ad disquirendam maximam et minimam***, il cui argomento principale è la ricerca dei valori massimi e minimi di quantità geometriche variabili. L'idea di Fermat era stata attaccata da alcuni matematici: in effetti essa conteneva degli errori. Tuttavia Descartes, nella lettera, la difende, mostrandone la validità a meno di piccole correzioni.

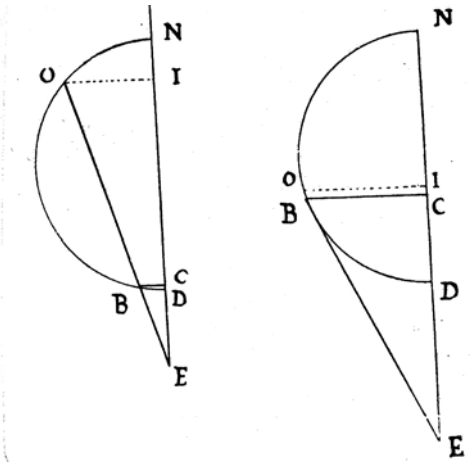
"Mio Reverendo Padre,
sono già passati alcuni giorni da quando ho ricevuto la vostra lettera del 26 marzo, nella quale mi mandate le obiezioni di coloro che sostengono lo scritto del Signor Fermat de maximis &c. *Ma esse hanno così poco colore che non ho ritenuto valesse la pena di rispondere. Tuttavia, poiché non ho più avuto vostre notizie, e temo che sia l'attesa della mia risposta a trattenervi dallo scrivermi, preferisco dire qui una volta per tutte ciò che penso, in modo da non avere mai più bisogno di parlarne. In primo luogo, nel momento in cui dicono che non vi sono* maxima *nella parabola, e che il Signor Fermat trova le tangenti con una regola del tutto separata da quella che egli usa per trovare i* maxima*, gli fanno torto facendo credere che egli abbia ignorato che la regola che insegna a trovare i valori più grandi, serve anche a trovare le tangenti delle linee curve, il che sarebbe un'ignoranza davvero grossolana, dato che è proprio a ciò che la regola deve servire; ed essi smentiscono il suo scritto, in cui egli, dopo aver spiegato il metodo per trovare i più grandi valori, dice espressamente:* Ad Superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscunque curvis reducimus. *È vero che egli non ha seguito la regola nell'esempio addotto per la parabola, ma il motivo è manifesto: essendo la regola difettosa per quel caso e per i casi analoghi (almeno nel modo in cui egli la propone), egli avrà visto che seguendola, i conti non gli tornavano, e ciò l'avrà obbligato a prendere un'altra strada, mediante la quale, giungendo alla conclusione che egli per altra via sapeva essere vera, ha pensato di aver proceduto correttamente, e non ha badato a ciò che mancava nel suo ragionamento."*

L'errore commesso da Fermat riguarda le tecniche di calcolo, e non è questo il luogo per discuterne. Ci limitiamo, dunque, ad accennare al metodo risultante dalle correzioni di Descartes.

L'idea di Fermat è semplice: la tangente condotta ad una curva, ad esempio una **parabola** oppure una circonferenza, da un punto esterno dato *E,* è una retta che interseca la curva e tale che la lunghezza del segmento delimitato da *E* e dal più vicino punto *B* di intersezione con la curva sia la più grande possibile.



La retta è determinata univocamente dal passaggio per il punto *B.* Per determinare quest'ultimo analiticamente, Descartes propone di considerare, per una generica retta secante la curva, i due punti d'intersezione *B* ed *O,* e di imporre l'uguaglianza *EB* = *EO.*



Come osserva Descartes in un biglietto allegato alla lettera, al variare della secante considerata, la lunghezza *EB* sarà tanto maggiore, quanto minore sarà la lunghezza *EO.* D'altra parte *EB* è sempre minore uguale di *EO*, quindi il valore massimo della prima si avrà

quando essa sarà uguale alla seconda, cioè quando *EB=EO.* Ma questo è proprio il caso in cui i punti *B* ed *O* d'intersezione della retta con la conica coincidono, cioè la retta è tangente. La sua equazione analitica si ottiene considerando che i triangoli rettangoli *EBD* ed *EOI* sono simili, e sfruttando la proporzionalità tra i lati.

Le tangenti ad una conica
Il carteggio di Descartes con Mersenne

Cartesio risolve un problema aritmetico

In una delle numerose lettere del suo **carteggio scientifico**, datata 3 giugno 1638, **Cartesio** tratta alcuni problemi indeterminati propostigli da un certo Monsieur De Sainte Croix. Sono problemi in cui si ricercano le soluzioni intere di equazioni a più incognite a coefficienti interi, dello stesso tipo di quelle presentate da **Diofanto** nella sua ***Arithmetica***.
Il primo di questi problemi riguarda i **numeri poligonali**. Lo riportiamo più che altro per il linguaggio usato, basato sulle parole più che sulle formule, che ricorda lo stile dell'***algebra retorica***, usato dai matematici fino a tutto il Cinquecento. Questo modo di esprimere la matematica risulta a tratti molto oscuro e complicato per i lettori di oggi, abituati alla concisione del moderno simbolismo.

Nella speranza che qualcuno raccolga la sfida e voglia divertirsi a tradurre in formule la lettera di Cartesio, spieghiamo il significato di alcuni termini inconsueti che vi compaiono.

Per *trigono* Cartesio intende *numero triangolare,* mentre *tetragono* significa per lui *numero quadrato.* Un *trigono tetragono* sarà un numero che è contemporaneamente triangolare e quadrato. La *metà minore* di un numero dispari *2n+1* è il numero *n*, la sua *metà maggiore* è il numero *n+1.*
La formula del generico numero triangolare è *n(n+1)/2*, ove *n* è normalmente un numero naturale, detto *radice.* Cartesio prende in considerazione anche l'eventualità che *n* sia una frazione: in tal caso il corrispondente numero triangolare è anch'esso frazionario.

LA PRIMA QUESTIONE È QUESTA

TROVARE UN TRIGONO CHE, + UN TRIGONO TETRAGONO, FACCIA UN TETRAGONO: E ANCORA. E CHE LA SOMMA DEI LATI DEI TETRAGONI RISULTI IL PRIMO DEI TRIGONI, E DELLA MOLTIPLICAZIONE DI QUESTA PER LA SUA METÀ, IL SECONDO. IO HO TROVATO 15 E 120. ASPETTO CHE QUALCUNO TROVI ALTRI NUMERI SODDISFACENTI QUESTA PROPRIETÀ, O CHE MOSTRI CHE LA COSA È IMPOSSIBILE.

Qui io osservo in primo luogo che dalla moltiplicazione del primo trigono per la sua metà deve risultare un secondo trigono, il che sarebbe chiaramente impossibile, se si intendesse parlare solo della metà esatta, e si supponesse che questi trigoni dovessero necessariamente essere numeri interi. Ma questa difficoltà è eliminata dall'esempio dato

di 15 e 120, in quanto 8, per il quale si moltiplica 15 per ottenere 120, non è l'esatta metà di 15. E quindi io vedo che per soddisfare il senso della domanda, occorre che il primo trigono sia un numero dispari, e che lo si moltiplichi o per la metà maggiore o per la metà minore, come 15 per 8 o per 7, 21 per 11 o per 10, e così via, poiché in questo modo si produce sempre un trigono. È vero che se si ammette che anche questi trigoni possano essere frazioni, siano, cioè, la somma della metà di un numero (razionale) *quadrato e della metà della sua radice, si può fare in modo che un trigono moltiplicato per la sua metà esatta produca un altro trigono. Ad esempio, 3/8 è un trigono, la cui radice è 1/2; infatti la metà di 1/4, che è il suo quadrato, più la metà di 1/2, fa 3/8; e moltiplicando questo trigono per la sua metà esatta, cioè per 3/16, si ottiene 9/128, che è anch'esso un trigono, la cui radice è 1/8; infatti la metà di 1/64, che è il suo quadrato, più la metà di 1/8, fa 9/128. Ma normalmente i trigoni sono considerati solo come numeri interi e l'esempio di 15 e 120, che sarebbe errato nel caso in cui si considerassero le frazioni, mi costringe a trascurare completamente queste ultime.*

Inoltre devo rilevare l'ambiguità dell'espressione: e ancora. *Infatti con questa parola si può intendere che occorre trovare un altro trigono che, più lo stesso trigono tetragono che è stato aggiunto al trigono precedente, faccia un tetragono, oppure un trigono che, più un altro trigono tetragono, faccia un tetragono, oppure, infine, un trigono che, più lo stesso trigono tetragono e ancora un altro trigono tetragono, faccia un tetragono. E benché l'esempio di 15 e 120 si accordi solo col primo significato, il secondo non è affatto escluso, e l'espressione* e ancora *sembra favorire il terzo.*

Ora, per il primo significato, è facile dimostrare che è impossibile dare un altro esempio di numeri interi, a parte 15 e 120. Infatti i calcoli mostrano che, cercando genericamente un numero che, aggiunto a un trigono tetragono dia un tetragono, e tale che questo numero moltiplicato per la sua metà e aggiunto allo stesso trigono tetragono dia ancora un tetragono, la radice del quale, aggiunta alla radice dell'altro tetragono, sia uguale al primo numero, occorre che la radice quadrata del trigono tetragono sia composta di (3-1Q)/2N, ossia di 3 meno un numero quadrato diviso per il doppio della radice di questo stesso quadrato; almeno se si suppone che questo primo numero debba essere moltiplicato per la sua metà maggiore, cioè per la sua metà esatta più un mezzo. E se si suppone che debba essere moltiplicato per la sua metà esatta, la radice quadrata del trigono tetragono sarà

(2-1Q)/2N. E infine, se deve essere moltiplicato per la sua metà esatta meno un mezzo, la radice sarà (1-1Q)/2N: ciò non può produrre alcun numero intero, a meno che non si consideri la metà maggiore, e che si prenda N uguale all'unità. E allora il primo numero deve essere composto da 7 + 2N + 6/1N, che è 15.

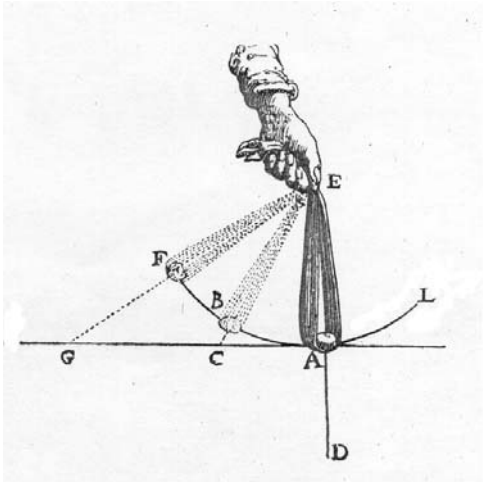
Un altro problema affrontato da Cartesio nella stessa lettera riguarda le ***terne pitagoriche***: il suo interlocutore gli chiede di trovare un triangolo rettangolo i cui lati siano numeri interi, e tale che questi lati siano pari alle aree di altrettanti triangoli rettangoli coi lati interi. Gli propone, come prima soluzione, la terna *210, 720, 750.* Cartesio ne trova un'altra: *145530, 194040, 242550.*

La scienza di Descartes

Descartes rivolge la propria attenzione soprattutto alle discipline come l'ottica e l'astronomia, alle quali meglio si applicano il metodo d'indagine razionale ed i modelli di tipo geometrico. La matematica è per lui la scienza che governa tutte le altre, perché di esse studia i principi generali. Il compito didattico della matematica è quello di aprire la mente alle leggi dell'universo, con un linguaggio semplice e conciso, e passaggi logici stringati ed efficaci. I criteri sovrani devono essere la chiarezza e la concretezza: Descartes rifiuta certe oscure e complesse astrazioni della matematica greca, riportando la geometria di **Pappo** e l'algebra di **Diofanto** su di un binario comune, in cui l'una serve l'altra, ed insieme esse contribuiscono ad una migliore descrizione dell'universo: così egli dà vita alla ***geometria analitica***, che ancor oggi costituisce il supporto di tanta parte della fisica matematica. L'idea-guida dell'opera di Descartes pare splendidamente descritta in un passo del **Leopardi**:

"Il raziocinio è un'operazione matematica dell'intelletto, e materializza e geometrizza anche le nozioni più astratte." (da: ***Zibaldone***, Luglio 1820)

Leggendo le sue opere dedicate alle scienze naturali, si ha l'impressione che Descartes non stacchi mai gli occhi dal mondo, osservando con attenzione anche i fenomeni più semplici, ed apparentemente insignificanti, cui costantemente ricorre per illustrare il funzionamento del cosmo: nei piccoli eventi della quotidianità egli vede le manifestazioni delle leggi naturali, così un sasso fatto roteare con una fionda permette di comprendere il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole. Fu Descartes a scoprire la **forza centrifuga**, mentre **Huyghens** introdusse la forza centripeta: quest'ultimo termine fu, però, coniato da **Newton**.



Cartesio scrive in un frammento giovanile: "La conoscenza umana delle cose naturali avviene solo per somiglianza di quel che cade sotto il senso; e riteniamo così che abbia filosofato con maggior verità chi sia meglio riuscito ad avvicinare le cose cercate a quelle conosciute col senso." *(***Cogitationes privatae,** *21)*

E tanti sono i problemi della vita pratica che vengono trattati nei suoi scritti: dal modo di evitare che il fumo del caminetto invada la stanza, che descrive in una delle sue numerose lettere a **Mersenne**, alla tecnica per la produzione del vetro,

sino alla causa dell'autocombustione del fieno, che spiega nei ***Principia Philosophiae*** (Parte IV, 92,124). In gioventù aveva perfino ceduto al fascino della cosiddetta *"scienza dei miracoli"*, ossia della fisica applicata alla costruzione di giochi e trucchi, che egli aveva appreso dalle invenzioni di **Erone**. Questa non va confusa con la falsa scienza, come l'alchimia, la magia e la **numerologia**, che Descartes condannava.

La scienza di Descartes, pur materialistica e meccanicistica, trova un suo fondamento metafisico in Dio, la cui esistenza è razionalmente necessaria: Egli è il Primo Motore, colui che ha impresso all'universo il movimento, ma è anche un essere immutabile, che non interviene più sul Creato per modificarne le leggi, né per aggiungervi o togliervi nulla. Il movimento primordiale avrebbe fatto sì che il mondo, seguendo le leggi della natura immesse da Dio negli oggetti materiali, si formasse da sé, costituendo un ordine nel caos. Da qui Descartes deduce ***la legge di conservazione del moto***, *secondo la quale un corpo, in assenza dell'azione da parte di altri corpi, si muove con velocità costante, e mantenendo sempre la stessa direzione* (moto rettilineo uniforme). È questa la prima enunciazione corretta del ***principio d'inerzia***, che era stato intuito da **Galilei**, e che verrà completato da Newton. Per Galilei il moto inerziale non era rettilineo, ma circolare uniforme.

La visione cartesiana dell'universo sarà contestata da Newton e da **Pascal**, che, nei suoi ***Pensieri***, scriverà: *"Non posso perdonare Cartesio: avrebbe voluto, in tutta la sua filosofia, poter fare a meno di Dio, ma non è riuscito a evitare di fargli dare un colpetto al mondo per metterlo in movimento; dopo di che, di Dio non sa più che farsene."*

Leibniz contesterà a Cartesio il fatto di aver basato la sua visione del mondo fisico su di una concatenazione di causa ed effetto, senza interrogarsi sulle finalità degli esseri e degli oggetti: questa indagine metafisica non avrebbe soltanto gettato un po' più di luce sul progetto divino, ma avrebbe anche aiutato a meglio comprendere il funzionamento dell'universo ed il possibile impiego delle risorse naturali.

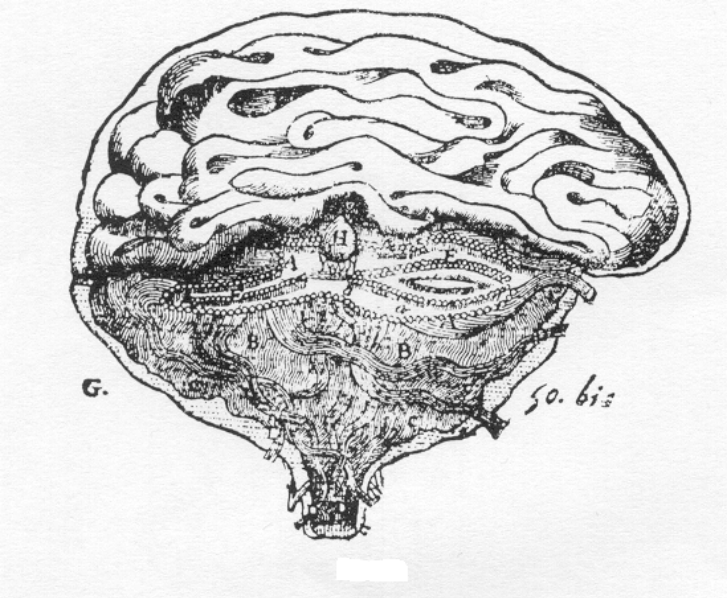
A difendere il meccanicismo cartesiano provvide Mersenne, che vi vedeva un ottimo baluardo contro l'occultismo imperante nel Rinascimento.

Leibniz e Newton troveranno anche errori *"memorabili"* nella formulazione di alcune leggi meccaniche della fisica cartesiana. Il **Leopardi**, nella sua ***Storia dell'astronomia***, plaudirà a quella che egli considererà la sconfitta di Descartes; per lui Newton *"rovesciò il trono di Descartes, quasi appena fondato."* E però Leopardi non manca di sottolineare la grandezza del matematico francese: *"Descartes soccombé, ma egli è tuttavia simile a quei re detronizzati che, benché privi di corona e di scettro, mostrano nondimeno di esser nati per comandare."*

Nell'universo di Descartes niente può essere in contrasto con l'evidenza matematica: per questo egli rifiuta l'**atomismo**, in quanto incompatibile con il fatto che ogni figura geometrica estesa è indefinitamente divisibile in parti più piccole.

Descartes si dedicò anche a discipline più lontane dalla matematica e più vicine all'uomo, come testimoniano i trattati ***La Description du Corps Humain***, e ***De la Formation du Fœtus***, nonché alcuni paragrafi dei ***Principia***, dedicati agli organi di senso, e la Parte V del ***Discorso sul metodo***, in cui descrive la circolazione sanguigna. Si ricordino, a questo proposito, anche le pagine de ***La Dioptrique*** e de ***Les Météores*** dedicate alla struttura dell'occhio ed ai meccanismi della visione. A questi studi si aggiungono la psicologia de ***Le passioni dell'anima***, e l'antropologia e l'etica delle ***Lettere sulla morale***, indirizzate alla principessa Elisabetta di Boemia.

Per Descartes il corpo degli uomini e degli animali è una macchina.



Gli atti involontari sono retti da processi meccanici, anzi, per meglio dire, idraulici. Gli impulsi si trasmettono dal cervello attraverso i nervi, e sono come fluidi che scorrano lungo un sistema di tubazioni, esteso a tutte le membra. Gli atti volontari sono invece frutto di un'anima ragionevole, e sono quindi una prerogativa dell'uomo. Solo in virtù di quella egli può pensare e parlare, azioni che nessun meccanismo potrà mai compiere. Le affermazioni di Descartes si sono rivelate tutt'altro che infondate. Le ricerche nel campo dell'intelligenza artificiale non hanno ancora permesso di realizzare una macchina che sia in grado di comprendere il linguaggio naturale.

Matematica e Informatica

Pascal contro Descartes

René Descartes
Regole per la guida dell'intelligenza

Ventuno regole per pervenire alla conoscenza, esposte facendo costante riferimento alla matematica. È vero solo ciò che appare con inoppugnabile chiarezza alla ragione umana, che è diretta emanazione di Dio, *"la pura intelligenza"*, come **Descartes** la definisce in un frammento giovanile. Esistono alcune verità primarie, che vengono colte immediatamente con l'*intuito*, ed altre che da queste vengono tratte con la *deduzione*. Questo è il modo di operare delle discipline scientifiche, che, al contrario di quelle umanistiche (*"liberali"*), non si muovono in un mondo confuso e ricco d'inganni, ma hanno valore universale ed assoluto. La regina delle scienze è la matematica, che si occupa dell'*ordine* e della *misura* in quanto tali, indipendentemente dagli oggetti in cui questi concetti si manifestano, siano essi oggetti astratti come i numeri e le figure, o concreti come gli astri ed i suoni. Per questo le discipline come l'astronomia, la musica, l'ottica, la meccanica sono subordinate alla matematica, essendone espressioni particolari. Così dice Descartes all'inizio dell'opera: *"Ed è da ritenere che tutte le scienze sono così connesse tra loro, che è di gran lunga più facile impararle tutte insieme, che separare una sola di esse dalle altre."* La matematica è quella *mathesis universalis*, nella quale, usando le parole di Brunschvicg, Descartes vuole realizzare *"l'unità nella conoscenza della natura"*. Nel suo ***Studium bonae mentis*** egli la pone al vertice delle cosiddette *scienze cardinali*, dedotte dai principi più generali e più noti alla maggioranza degli uomini. D'altronde in Descartes l'universalità e la generalità si coniugano sempre con la semplicità e la chiarezza. Non a caso, nella sua **lettera a Mersenne** datata 20 novembre 1629, egli propone un'idea di lingua universale, che a suo avviso potrebbe senz'altro realizzarsi *"se qualcuno avesse spiegato bene quali sono le idee semplici che sono nell'immaginazione degli uomini, e di cui è composto tutto ciò che pensiamo."*

Ne ***La ricerca della verità mediante il lume naturale*** egli immagina un dialogo fra tre personaggi, Eudosso, Epistemone e Poliandro: il primo è un uomo di intelligenza media, e non molto istruito, il secondo ha ben assimilato tutta la cultura scolastica, il terzo è del tutto incolto. L'opera ci è pervenuta incompleta, ma c'è da aspettarsi che tutti e tre finiranno per concordare sulle verità che Descartes dice di poter trarre con la sola forza della ragione. Ed è proprio l'individuo che meno ha studiato, che meno è stato *"sviato da false credenze"*, quello che è più libero di usare la ragione nella

"purezza che gli proviene interamente dalla natura". Ognuno ha *"i mezzi per trovare in se stesso, e senza valersi affatto dell'aiuto altrui, tutto il sapere che gli è necessario per la guida della sua vita, ed i mezzi d'acquistare in seguito col suo studio tutte le più rare conoscenze che è capace di possedere."* Descartes propone di reagire al sapere imposto per autorità o tradizione. E s'impegna a rinnovare la matematica, nella forma e nei contenuti, per renderla più accessibile all'umanità. A certi autori del passato egli rimprovera il fatto di aver nascosto la bellezza di certe proposizioni dietro uno sterile, fitto intrico di deduzioni logiche. Ed inventa la ***geometria analitica***, che, col linguaggio conciso dell'algebra, permette di ridimostrare in maniera semplice certi teoremi che nell'antichità erano stati faticosamente ricavati: basta confrontare le risoluzioni del **problema di Pappo** trovate da **Apollonio** e da Descartes.

Descartes invita a riscoprire *"quell'arte che con nome barbaro chiamano algebra, solo che possa essere liberata dai molteplici numeri e dalle inesplicabili figure di cui viene sovraccaricata, e così non manchi più ad essa quella perspicuità e facilità somma che diamo per ammesso doversi trovare nella matematica".* Qui il pensiero dell'autore va certamente a **Diofanto**, di cui apprezzava il contributo dato all'aritmetica, ma condannava gli artifici formali. Così, con un abile ed efficace gioco di parole, egli consigliava agli insegnanti: *"Quando sono in discussione questioni trascendentali, siate chiari in modo trascendentale."*
La chiarezza espositiva si basa, per Descartes, su tre elementi:

1. la concisione, che egli realizza introducendo lettere per indicare le grandezze numeriche, distinguendo quelle note (indicate da *a,b,c,…*) da quelle incognite (indicate da *A,B,C,…* oppure da *x,y,z*); egli ricorre, inoltre, a coefficienti ed esponenti: scrive $2A$, anziché $A+A$, ed a^3 anziché *aaa*;

2. l'ordine e la classificazione per categorie, quella che lui chiama "*enumerazione*", un criterio che, d'altronde, si deve applicare un po' a tutte le attività umane, come Descartes vuole evidenziare col seguente esempio: "*Fra le opere meno importanti dell'uomo ce ne sono anche molte, per il cui ritrovamento il metodo consiste tutto nel seguire tale ordine: così se vuoi formare il migliore anagramma dalla combinazione delle lettere di un nome, non c'è bisogno di passare dalle cose più facili alle più difficili, né di distinguere le assolute dalle relative, e infatti coteste distinzioni qui non trovano posto; ma basta che tu ti proponga un tale ordine nell'esaminare le*

combinazioni delle lettere, che non mai si ripercorreranno due volte le medesime e che il loro numero, per esempio, sia così distribuito in certe classi, che appaia subito in quale ci sia maggiore speranza di trovare ciò che si cerca; in tal modo infatti si avrà spesso un lavoro non lungo, ma semplicemente puerile";

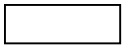
3. l'efficacia rappresentativa, che lo spinge a rappresentare le grandezze numeriche, e le operazioni aritmetiche, con **figure geometriche** (*"il concetto di figura è tanto comune e semplice, da essere implicato in ogni sensibile"*).

In effetti nei ***Principia Philosophiae*** leggiamo: *"Così il numero che consideriamo in generale, senza riflettere nessuna cosa creata, non esiste, fuori del nostro pensiero, non più di tutte le altre idee generali, che nella scuola si comprendono sotto il nome di universali."* Per concretizzare l'idea astratta di numero, Descartes suggerisce di *"tracciare queste figure e presentarle ai nostri sensi, affinché in tal maniera il nostro pensiero sia più facilmente mantenuto attento. In qual modo poi debbano essere tracciate, affinché, mentre esse vengono poste dinanzi agli occhi, si formino più distintamente le loro immagini nella nostra immaginazione, è di per sé evidente: innanzi tutto rappresenteremo l'unità di tre modi, ossia mediante il quadrato*

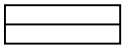


se facciamo attenzione ad essa in quanto lunga e larga, oppure mediante la linea

se la consideriamo solo come lunga, oppure infine mediante il punto, •, se non badiamo ad altro all'infuori del fatto che con essa si compone una moltitudine. […] Così anche, i termini di una premessa, se si deve far attenzione a due simultanee grandezze diverse di essi, saranno rappresentati agli occhi mediante il rettangolo,



due lati del quale saranno le due grandezze proposte: in questo modo, quando siano non misurabili con l'unità ; o così



o così

• • •
• • •

se siano misurabili. […]"

Tutti questi principi sono efficacemente messi in pratica ne ***La Géométrie***, in cui Descartes mette insieme i metodi geometrici ed algebrici dando vita alla ***geometria analitica***: *"in questo modo avrei preso tutto il meglio dell'analisi geometrica e dell'algebra, e avrei corretto i difetti dell'una per mezzo dell'altra."* (da: ***Discorso sul metodo***, Parte II). Alcuni vogliono vedere, nella geometria analitica, quella *meravigliosa invenzione* che Descartes si era proposto di cercare, fin dalla giovinezza, onde realizzare l'unità della matematica.

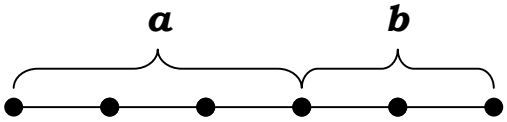
Le operazioni figurate

Nelle ***Regulae ad directionem ingenii*** **Descartes** così descrive un modo per rappresentare graficamente le quattro operazioni aritmetiche:

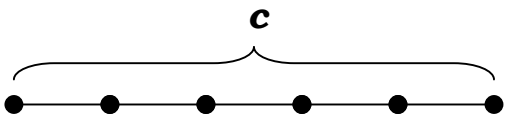
"Se si debbono fare un'addizione o una sottrazione, noi concepiamo l'oggetto sotto la forma di una linea oppure sotto la forma di una grandezza estesa, in cui si deve tener conto della sola lunghezza: infatti se si deve aggiungere la linea a alla linea b,



noi aggiungiamo l'una all'altra in questo modo a+b



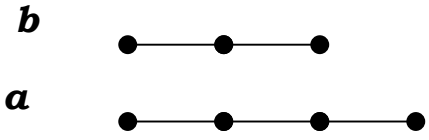
e si produce c.



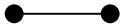
Se poi si deve togliere la minore dalla maggiore, e cioè da a,



applichiamo l'una sull'altra in questo modo:

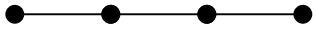


e così si avrà quella parte della maggiore che non può esser coperta dalla minore, e cioè

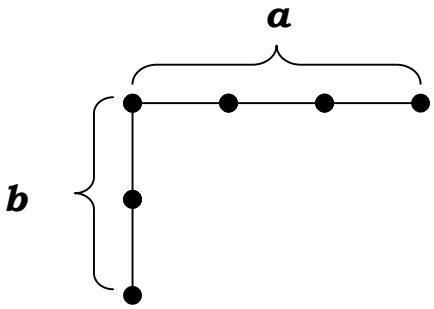


Nella moltiplicazione noi concepiamo anche grandezze date sotto forma di linee; ma immaginiamo che da esse derivi un rettangolo: poiché se moltiplichiamo a per b,

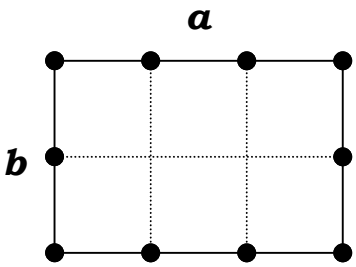




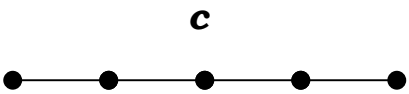
accomodiamo l'una all'altra ad angoli retti in questo modo,



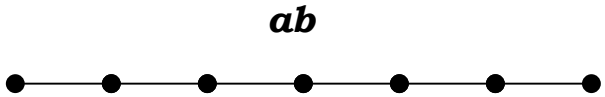
e si forma il rettangolo



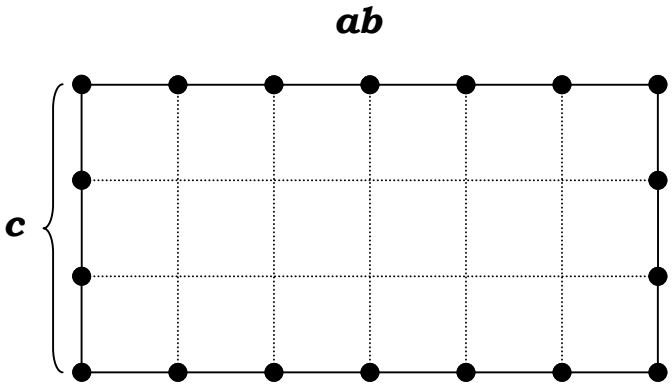
D'altra parte, se vogliamo moltiplicare ab per c



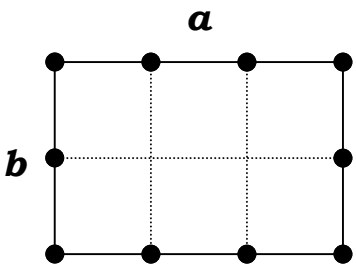
Bisogna concepire ab come linea, ossia ab,



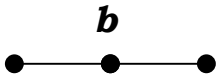
in maniera che in luogo di abc si abbia



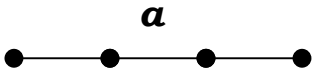
Infine nella divisione, in cui è dato il divisore, immaginiamo che la grandezza da dividere sia un rettangolo, un lato del quale è il divisore, e l'altro è il quoziente: così quando il rettangolo ab si debba dividere per a:



si toglie da esso la larghezza a e rimane b come quoziente:



o, al contrario, se esso si divida per b, si toglie l'altezza b, e il quoziente sarà a."



Le operazioni figurate appartengono alla tradizione della matematica greca: **Euclide**, negli ***Elementi***, ne fa abbondante uso. Anche in uno

dei dialoghi di **Platone**, il ***Teeteto***, troviamo la rappresentazione del prodotto di numeri mediante rettangoli e quadrati.

I numeri figurati

René Descartes
Discorso sul metodo

La vera conoscenza è solo quella che si presenta come indubitabile al pensiero razionale: ecco il caposaldo dell'epistemologia cartesiana. E poco importa come si è arrivati alla verità: l'importante è che essa venga riconosciuta come tale dalla ragione, in modo chiaro ed indistinto: "*Che anche se sognando ci accadesse di avere qualche idea ben distinta, per esempio se un geometra scoprisse in sogno qualche nuova dimostrazione, non per questo essa sarebbe meno vera."* In effetti **Descartes** non ha poi completamente sacrificato, sull'altare della ragione, la fantasia ed i liberi moti dello spirito. Ecco cosa scrive in un frammento giovanile autobiografico, per introdurre un racconto sul potere rivelatore dei sogni: "*Non gli restava che l'amore della verità, la cui ricerca doveva costituire da allora in poi l'unica occupazione della sua vita. E fu questo il punto unico su cui tormentò allora il suo spirito. Ma i mezzi per giungere a quella felice conquista non gli cagionarono minori difficoltà dello scopo medesimo. La ricerca di tali mezzi gettò il suo spirito in violente agitazioni, che andarono via via aumentando per la continua tensione in cui lo teneva, senza cercare un diversivo in passeggiate o compagnie. E lo affaticò in modo tale che il cervello gli s'infiammò, ed egli fu preso in una specie di entusiasmo che pose il suo spirito già abbattuto nella disposizione atta a ricevere le impressioni dei sogni e delle visioni." (da:* ***Olympica***, 1619?). Nella prima fase del suo pensiero, Descartes vede il sogno come un momento di sprofondamento in una dimensione metafisica, in cui si rivela lo Spirito della Verità. Questa scoperta viene inizialmente attribuita da Descartes alla forza dell'*entusiasmo*, simile a quella che anima poeti ed artisti. La maturità lo porta a smorzare la componente emozionale del processo conoscitivo, senza, però, estrometterne la metafisica.

Il primissimo risultato contenuto nel ***Discorso sul metodo*** è, infatti, il seguente: una volta sbarazzata la mente dalle proposizioni dubbie e dai pregiudizi, la ragione perviene a due principi fondamentali: l'esistenza dell'io pensante e di Dio.

"Intanto: poiché i nostri sensi talvolta c'ingannano, volli supporre non esserci nessuna cosa che fosse quale essi ce la fanno immaginare. E poiché ci sono uomini che cadono in abbagli e paralogismi ragionando anche intorno ai più semplici argomenti di geometria, pensai ch'io ero soggetto ad errare come ogni altro, e però respinsi come falsi tutti i ragionamenti che avevo preso sin allora per dimostrazioni: in fine, considerando che gli stessi pensieri, che noi abbiamo quando siam

*desti, possono tutti venirci anche quando dormiamo benché allora non ve ne sia alcuno vero, mi decisi a finger che tutto quanto era entrato nel mio spirito sino a quel momento non fosse più vero delle illusioni dei miei sogni. Ma subito dopo, m'accorsi che, mentre volevo in tal modo pensare falsa ogni cosa, bisognava necessariamente che io, che la pensavo, fossi pur qualcosa. Per cui, dato che questa verità: "**Io penso, dunque sono**, è così ferma e certa che non avrebbero potuto scuoterla neanche le più stravaganti supposizioni degli scettici, giudicai di poterla accogliere senza esitazione come il principio primo della mia filosofia. […]*
In seguito a ciò, riflettendo sul fatto che io dubitavo, e che chiaramente vedevo essere maggiore perfezione il conoscere del dubitare, per cui l'esser mio non era del tutto perfetto, mi proposi di cercare donde avessi appreso a pensare qualcosa di più perfetto ch'io non fossi; e conobbi con evidenza che doveva essere da una natura realmente più perfetta di me."

L'essere perfetto è Dio, del quale egli dimostra l'esistenza anche per altra via, osservando che l'esistenza è un attributo della perfezione:

"Passai, dopo, ad altre ragioni. Presi in esame l'oggetto della geometria, ch'io concepivo come un corpo continuo, ossia come uno spazio indefinitamente esteso in lunghezza, larghezza e altezza o profondità, divisibile in parti, che potevano avere figura e grandezza diversa, ed essere mosse o trasportate in tutti i modi: insomma, così come i geometri considerano il loro oggetto. Ma, ripensando ad alcune delle più semplici dimostrazioni, notai subito che la grande certezza da tutti a esse attribuita si fonda soltanto sul fatto che son concepite con evidenza, secondo la regola esposta sopra da me, e che, perciò, non c'era assolutamente nulla in esse che mi assicurasse dell'esistenza del loro oggetto. Per esempio: vedevo bene che, supposto esserci un triangolo, era necessario che i suoi tre angoli fossero uguali a due retti; ma non vedevo, per questo, nulla che mi assicurasse esserci al mondo alcun triangolo. Invece, ritornando a esaminare l'idea che avevo dell'Essere perfetto, trovavo che l'esistenza vi era compresa nel modo stesso ch'è compresa in quella di triangolo l'uguaglianza dei suoi angoli a due retti, o in quella d'una sfera l'uguale distanza di ogni sua parte dal centro. […]"

Il ricorso alla matematica per sostenere il ragionamento metafisico è un *leitmotiv* dell'opera di Descartes. D'altra parte è proprio dallo studio di questa disciplina che egli trae il ***metodo***, che qui riassume in quattro regole: evidenza, suddivisione (di ogni problema nelle sue

parti), ordine (dal più semplice al più complesso, dal generale al particolare) e classificazione (degli oggetti di studio in categorie). Egli mira a semplificare la logica, e a liberare la matematica tanto dagli eccessivi particolarismi quanto dalle inutili astrazioni, per renderla una disciplina universale, che abbracci tutte le scienze, e ne insegni i principi generali. E in effetti ci sembra di ritornare, per un attimo, alla filosofia di **Pitagora**, quando leggiamo: "*[…] osservando come tutte [le scienze], per quanto i loro oggetti sian diversi, son d'accordo a considerare questi soltanto dal lato dei rapporti e delle proporzioni, pensai che era meglio esaminare soltanto questi rapporti o proporzioni, in generale, supponendoli in quegli oggetti che potevano facilitarmene la conoscenza, ma senza limitarli a essi in nessun modo, per poterli dopo applicare ugualmente bene a tutti gli altri oggetti.*"

Molti dei concetti qui espressi sono già presenti nelle ***Regole per la guida dell'intelligenza.***

A proposito dell'esistenza di Dio e dell'anima, **Newton** troverà una contraddizione nella visione cartesiana del mondo, sviluppata nei ***Principia Philosophiae***: se, come vuole Descartes, l'universo è geometria realizzata, tutto ciò che esiste coincide con lo spazio che occupa (*res extensa*), dunque non c'è posto per Dio, né per l'anima, che sono privi di estensione, in quanto formati di puro pensiero (*res cogitans*).

Pur riconoscendo a Newton una decisa superiorità su Descartes, il Leopardi, nella *Storia dell'Astronomia,* dirà:

"L'uomo aveva bisogno di un metodo, che regolasse i suoi pensieri. Descartes lo propose. Egli vide il mondo schiavo dell'Antichità, adoratore di errori, incerto e confuso fra il falso, che non sapeva distinguere, e il vero che non sapeva separare dal falso. Vide che per giungere a sapere, convenia por tutto in oblio. Distrusse tutto, per di nuovo crear tutto. Ecco la vera epoca del risorgimento delle scienze."

Leopardi, tuttavia, gli rimprovererà l'*"errore"* di aver sottovalutato l'importanza dei sensi, considerandoli *"ingannatori"*.

Il frontespizio dell'edizione del 1637

DISCOURS

DE LA METHODE

Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher la verité dans les ſciences.

PLUS

LA DIOPTRIQVE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

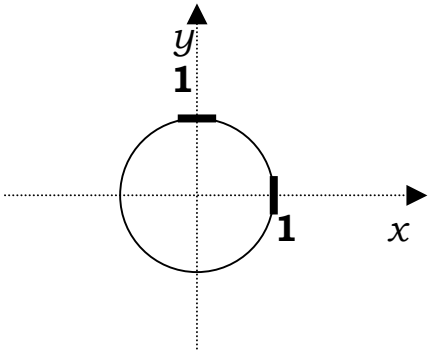
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.



A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c xxxvii.
Auec Priuilege.

René Descartes
La Géométrie

Quest'opera venne pubblicata come appendice al trattato filosofico ***Discours de la méthode***. Essa segna la nascita della ***geometria analitica***. Qui, per la prima volta, si propone di rappresentare certi enti geometrici tramite l'algebra: fissato nel piano un **sistema di coordinate**, determinate curve risultano essere i luoghi dei punti le cui coordinate *(x,y)* sono legate da una relazione algebrica (*equazione cartesiana).* Così, ad esempio, la circonferenza:



è rappresentata dall'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = 1.$$

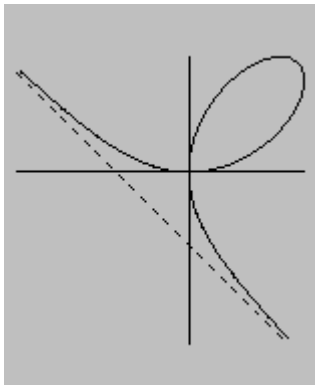
Se si modificano la posizione e l'orientazione degli assi, l'equazione cambierà, ma sarà sempre un'equazione algebrica di grado due. È comunque curioso il fatto che Descartes non abbia mai disegnato, ne ***La Géométrie,*** gli assi coordinati.

Descartes chiama "curve geometriche" le curve che sono rappresentate da un'equazione algebrica. Sono curve geometriche le rette, rappresentate da equazioni di grado uno, tutte le **sezioni coniche** (ellisse, iperbole, parabola), rappresentate da equazioni di grado due, ma anche la **concoide** e la **cissoide**, rappresentate da equazioni di grado tre e quattro. Le altre curve non geometriche sono dette "curve meccaniche": lo sono la **cicloide** e la **spirale logaritmica**. Descartes trae questa denominazione dai Greci, che così chiamavano le curve che, pur non essendo costruibili con riga e compasso, potevano essere disegnate utilizzando appositi congegni.

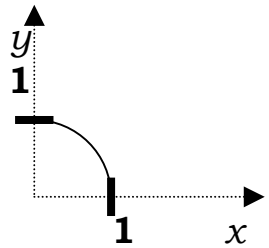
Viceversa, data un'equazione algebrica nelle incognite *x,y,* in molti casi il luogo dei punti le cui coordinate *(x,y)* la verificano è una curva, che può essere disegnata nel piano. Questa osservazione permette di trovare infinite nuove curve. Ad esempio, l'equazione di terzo grado

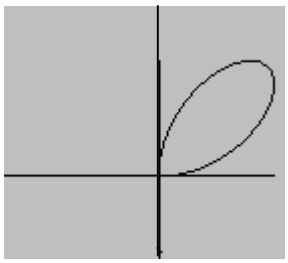
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

dà origine alla curva



che ha preso il nome di *folium di Cartesio*: questa curva non è presente ne ***La Géométrie***, compare in una lettera indirizzata a **Mersenne**.
Si tenga presente che Descartes non dava significato alle coordinate negative: egli chiamava infatti "falsi" i numeri negativi. Quindi riconosceva solo le parti delle curve comprese nel quadrante superiore destro:





Sarà **John Wallis**, nella seconda metà del sec. XVII, il primo a considerare anche le coordinate negative.

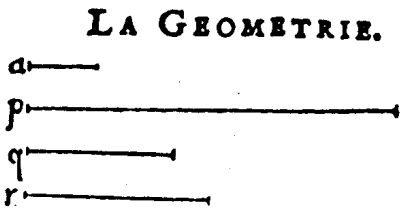
Una volta dato un significato geometrico ad ogni equazione algebrica, è naturale servirsi di metodi geometrici per trovarne le soluzioni (*radici).* Nel **Libro I** Descartes indica un **metodo** per costruire, dato un segmento di lunghezza *a*, un segmento la cui lunghezza sia $\sqrt{a}$: ciò corrisponde a trovare la radice positiva (che lui chiama "vera") dell'equazione di secondo grado

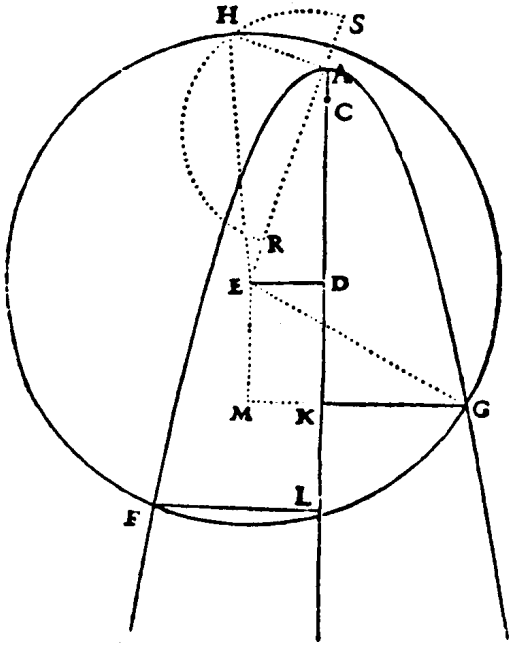
$$x^2 - a = 0.$$

L'altra radice è $-\sqrt{a}$: quindi l'equazione è completamente risolta. D'altra parte, secondo le **formule di Newton**, le eventuali soluzioni reali di un'equazione di secondo grado si trovano estraendo una radice quadrata, e, pertanto, possono essere trovate graficamente col metodo indicato da Descartes. La costruzione utilizza solo riga e compasso. Nel **Libro III,** invece, per risolvere le equazioni di grado 3 o 4, egli deve ricorrere anche a coniche. Vediamo, ad esempio, la risoluzione grafica dell'equazione

$$x^4 = px^2 - qx + r,$$

ottenuta con l'ausilio di una **parabola**:





Una soluzione dell'equazione è la lunghezza del segmento *GK*.

D'altra parte, come aveva dimostrato **Vieta**, certe equazioni di terzo grado sono la traduzione algebrica di problemi di geometria costruttiva, nel piano, come la **trisezione dell'angolo**, e nello spazio, come la **duplicazione del cubo**: il cerchio si chiude, l'interazione fra geometria e algebra è completa.

Sarà **Galois**, nella prima metà del sec. XIX, a completare la caratterizzazione algebrica della costruibilità con riga e compasso.

Descartes risolve anche equazioni di grado superiore, e mostra come, trovata una radice *a*, si possa abbassare di uno il grado dell'equazione, dividendola per il monomio *x-a*: utilizza quello che oggi chiamiamo **Teorema di Ruffini**. Se i coefficienti dell'equazione sono numeri interi, esiste un facile criterio per trovare le radici razionali. E anche quella che conosciamo come ***regola dei segni*** *di Cartesio* è presentata in quest'opera: il numero di radici "vere" e "false" di un'equazione è legato ai segni dei suoi coefficienti. Ad esempio, nel polinomio

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120,$$

i coefficienti, hanno, nell'ordine, i segni + - - + -. In questa sequenza le variazioni da + a – e viceversa sono *3:* ciò implica che il polinomio ha al più tre radici "false". Questo criterio, di per sé, non permette di concludere che il polinomio ha effettivamente quel numero di radici false: infatti esso, a priori, potrebbe non avere radici reali. La regola dei segni prevede, per il polinomio

$$x^2 - 2x + 2,$$

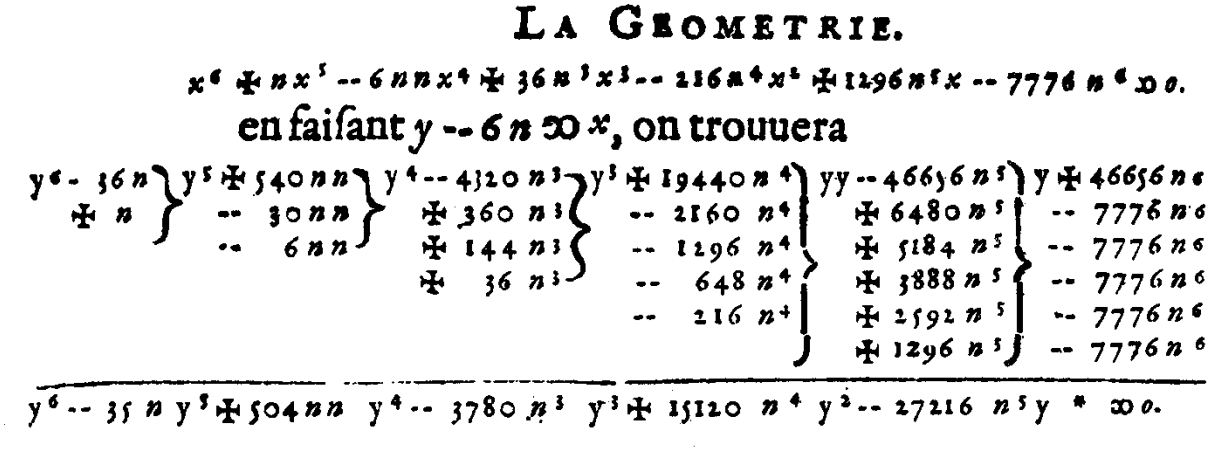
al più due radici "false". In realtà il discriminante è negativo, quindi non esistono radici reali, e quindi nemmeno radici "false". Un **criterio** che stabilisca il numero di radici reali ed immaginarie sarà sviluppato da **Newton**.

Le notazioni impiegate da Descartes sono assai vicine al moderno simbolismo, da cui si distinguono solo in alcuni segni:

Segni di Descartes	Segni moderni
✠	+
--	−
∋○	=

Il segno " = ", in realtà, era già stato introdotto: compare per la prima volta nel 1557, nel primo trattato inglese di algebra, *The Whetstone of Witte,* scritto dal matematico **Robert Recorde**, di Cambridge: l'ispirazione gli venne pensando a due rette parallele, oggetti più che mai simili fra loro.

Descartes fa uso degli esponenti, tranne che per il quadrato: egli scrive *xx* anziché x^2. Diverso da quello dei giorni nostri è anche l'impiego delle parentesi per raccogliere i termini:


LA GEOMETRIE.

$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \propto 0.$

en faisant $y - 6n \propto x$, on trouuera

$y^6 - 36n + n \}\ y^5 + 540nn - 30nn - 6nn \}\ y^4 - 4320n^3 + 360n^3 + 144n^3 + 36n^3 \}\ y^3 + 19440n^4 - 2160n^4 - 1296n^4 - 648n^4 - 216n^4 \}\ yy - 46656n^5 + 6480n^5 + 5184n^5 + 3888n^5 + 2592n^5 + 1296n^5 \}\ y + 46656n^6 - 7776n^6 - 7776n^6 - 7776n^6 - 7776n^6 - 7776n^6$

$y^6 - 35n\,y^5 + 504nn\,y^4 - 3780n^3\,y^3 + 15120n^4\,y^2 - 27216n^5\,y + 7776n^6 \propto 0.$

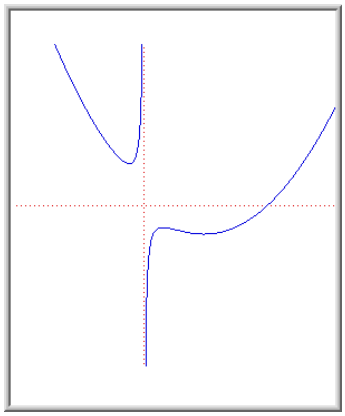
Il **Libro II** è dedicato a problemi più prettamente geometrici, come, ad esempio, quello di **trovare la tangente o la normale ad una curva in un punto dato**. Il metodo da lui sviluppato differisce da quello trovato da **Fermat**, che egli commenta in una sua **lettera a Mersenne**.

Gran parte del **Libro II** è dedicata alla determinazione di luoghi geometrici. Qui Descartes affronta il famoso **problema di Pappo**: dato, nel piano, un certo numero di rette, si tratta di trovare il luogo dei punti del piano dai quali è possibile condurre un uguale numero di rette aventi determinate proprietà. Nel caso di 3 o 4 rette **Pappo** aveva provato che il luogo cercato è una conica. Descartes ridimostra questo risultato con i metodi della geometria analitica, ed inoltre prova che, nel caso di 5 o 6 rette, il luogo è una curva di grado 3, nel caso di 7 od 8 rette il luogo è una curva di grado 4, e così via.

Egli risolve anche esplicitamente un caso particolare con 5 rette, nel quale la curva ausiliaria ha un'equazione della forma:

$$x^3 - 2ax^2 - axy - a^2x + 2a^3 = 0$$

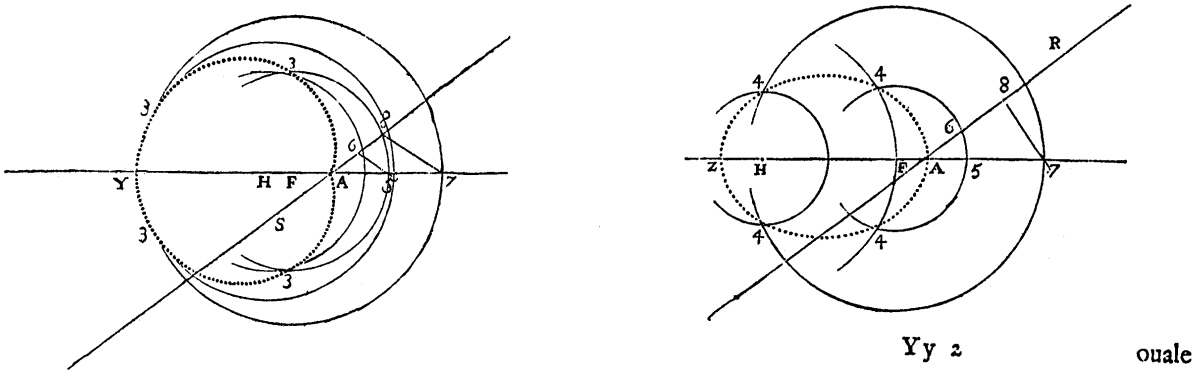
Descartes non disegnò questa curva, lo fece più tardi Newton, che la battezzò ***tridente***:



Un altro luogo geometrico venne suggerito a Descartes dai suoi studi compiuti per ***La Dioptrique***: egli cercava una superficie di separazione fra due mezzi tale che i raggi provenienti dal primo mezzo venissero rifratti dalla superficie in modo da convergere tutti in uno stesso punto. E trovò che una superficie siffatta è quella ottenuta ruotando una curva, che è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che:

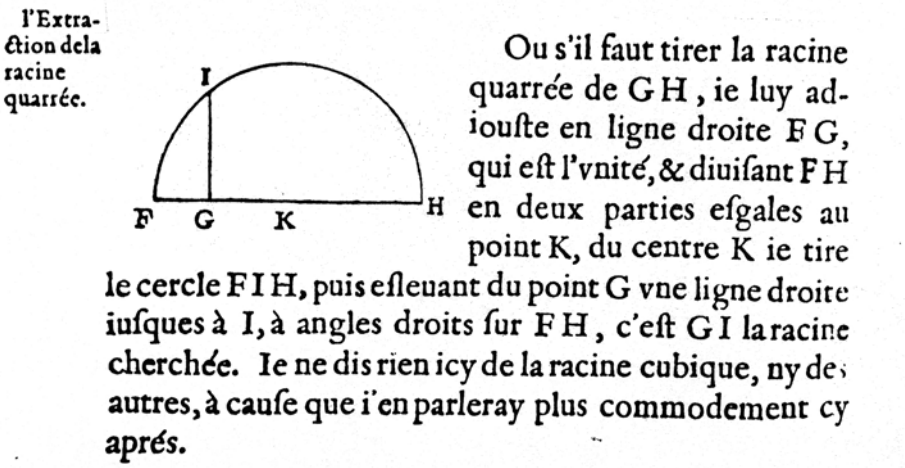
$$PF + nPG = costante,$$

dove F e G sono punti del piano fissati, ed n è un numero reale fissato. Se $n=1$, questa curva è un'ellisse, ma, nel caso generale, è definita da un'equazione di grado 4: essa è oggi nota con il nome di ***ovale di Cartesio***.



L'estrazione della radice quadrata

Descartes, nella ***Géométrie***, descrive un modo per costruire, con riga e compasso, la radice quadrata di un dato numero reale positivo. Conformemente al metodo esposto nelle ***Regulae***, Descartes rappresenta ogni numero positivo come la lunghezza di un segmento:

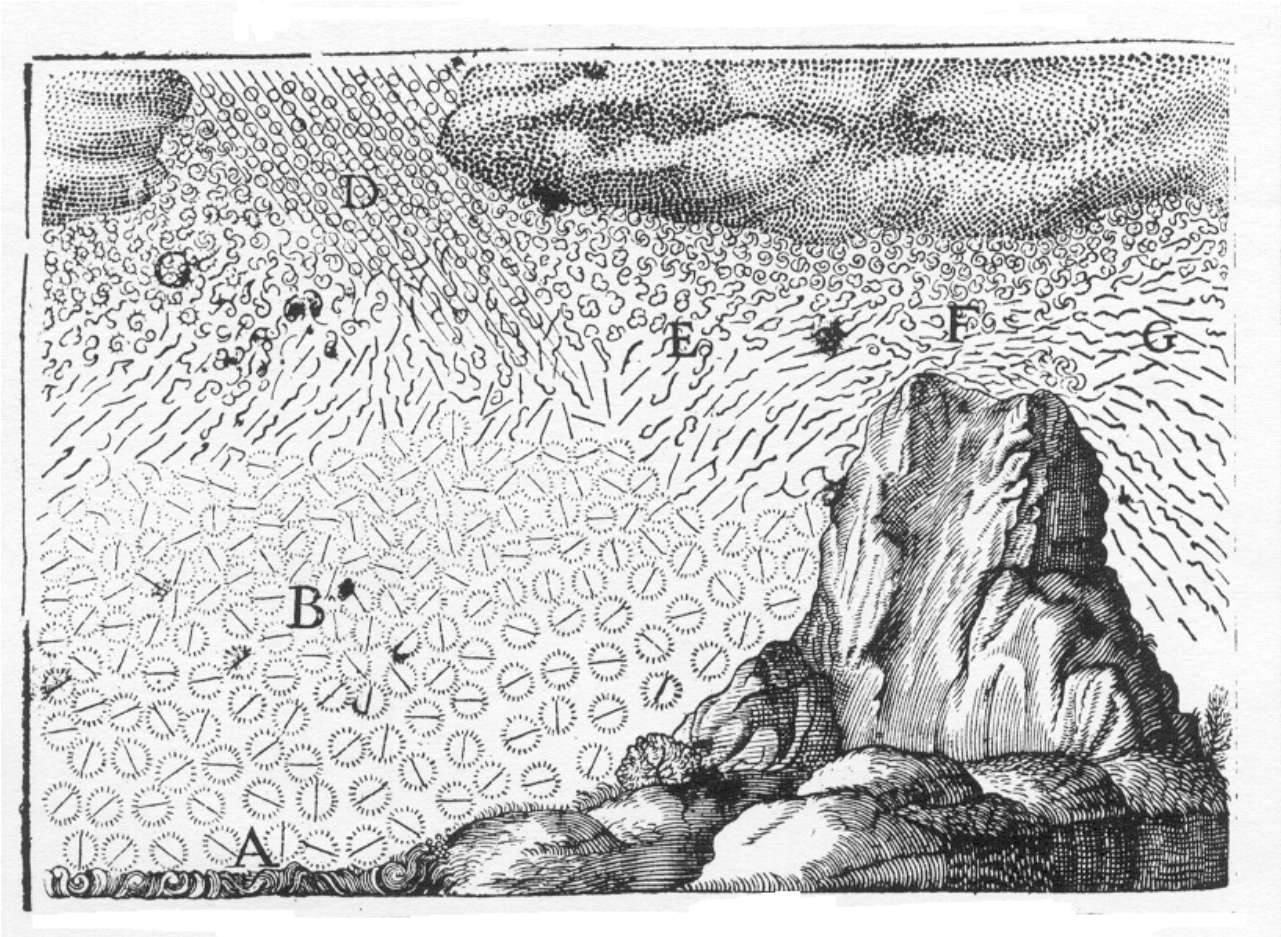


l'Extraction dela racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

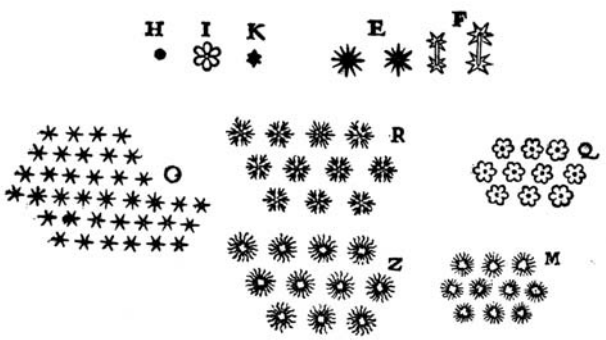
GH è il segmento la cui lunghezza è il numero reale positivo dal quale si vuole estrarre la radice, *FG* è un segmento di lunghezza unitaria, che prolunga *GH*. Si traccia un semicerchio (di centro *K*) avente *FH* come diametro. Sia *I* il punto d'intersezione col semicerchio della perpendicolare a *FH* passante per *G*. Allora la lunghezza di *GI* è la radice cercata.

René Descartes
Les Météores



Un'opera dedicata alla spiegazione dei fenomeni meteorologici, come la formazione delle nubi, della nebbia, la pioggia, il vento, il tuono e **l'arcobaleno**.

Con minuziosi ragionamenti fisici **Descartes** ci illustra, ad esempio, perché le gocce d'acqua sono sferiche, come si formano i cristalli di sale, ed in virtù di quali proprietà meccaniche e termiche i chicchi di grandine da lui osservati in giorni diversi presentano forme e colori differenti.

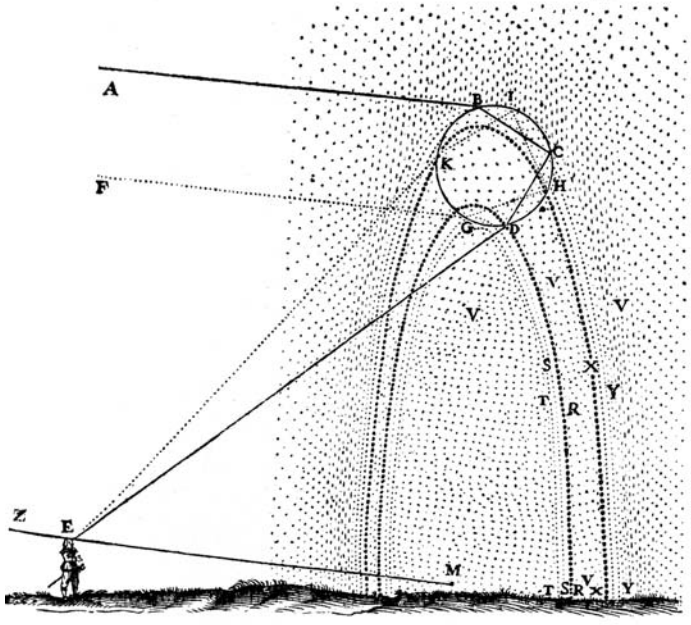


Anche **Keplero**, in un **trattatello** poco conosciuto, si interrogò sulla causa della forma esagonale dei **fiocchi di neve**. La simmetria di questa ed altre formazioni naturali ha continuato ad attirare l'interesse dei matematici fino ai giorni nostri: **Hermann Weyl** vi ha dedicato bellissime pagine.

DE L'ARC-EN-CIEL.

Diſcours Huitieſme.

L'ARC-EN-CIEL eſt vne merueille de la nature ſi remarquable, & ſa cauſe a eſté de tout tems ſi curieuſement recherchée par les bons eſprits, & ſi peu connuë, que ie ne ſçaurois choiſir de matiere plus propre a faire voir comment par la methode dont ie me ſers on peut venir a des connoiſſances, que ceux dont nous auons les eſcrits n'ont point euës. Premierement ayant conſideré que cet arc ne peut pas ſeulement paroiſtre dans le ciel, mais auſſy en l'air proche de nous toutefois & quantes qu'il s'y trouue pluſieurs gouttes d'eau eſclairées par le ſoleil, ainſi que l'experience fait voir en quelques fontaines: il m'a eſté ayſé de iuger, qu'il ne procede que de la façon que les rayons de la lumiere agiſſent contre ces gouttes & de la tendent vers nos yeux. Puis ſçachant que ces gouttes ſont rondes, ainſi qu'il a eſté prouué cy deſſus, & voyant que pour eſtre plus groſſes ou plus petites elles ne font point paroiſtre cet arc d'autre façon; ie me ſuis auiſé d'en faire vne fort groſſe, affin de la pouuoir mieux examiner. Et ayant rempli d'eau, a cet effect, vne grande fiole de verre toute ronde & fort tranſparente, iay trouué que le ſoleil venant, par exemple, de la partie du ciel marquée A F Z, & mon œil eſtant au point E, lorſque ie mettois cete boule en l'endroit B C D, ſa partie D me paroiſſoit toute rouge, & incomparablement plus eſclatante que le reſte; Et que ſoit que



ie l'approchaſſe, ſoit que ie la reculaſſe, & que ie la miſſe a droit, ou a gauche, ou meſme la fiſſe tourner en rond autour de ma teſte, pourvû que la ligne D E fiſt touſiours vn angle d'enuiron 42 degrés auec la ligne E M, qu'il faut imaginer tendre du centre de l'œil vers celuy du ſoleil, cete partie D paroiſſoit touſiours eſgalement rouge; Mais que, ſitoſt que ie faiſois cet angle D E M tant ſoit peu plus grand, cete rougeur diſparoiſſoit; & que ſi ie le faiſois vn peu moindre, elle ne diſparoiſſoit pas du

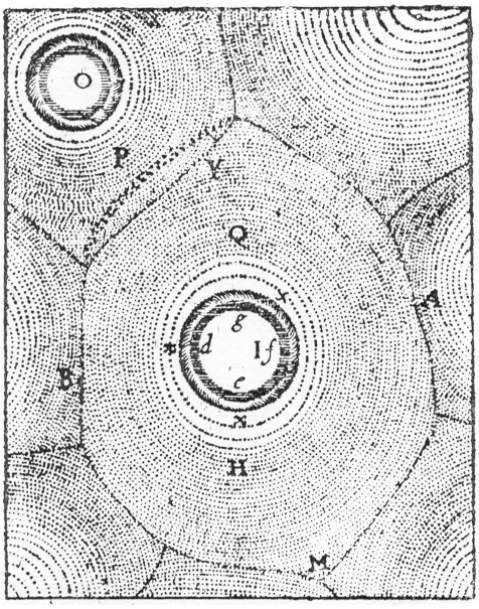
L'astronomia e l'ottica di Descartes:
Il Mondo* ovvero *Trattato della luce
La Dioptrique
Principia Philosophiae

Ne ***Il Mondo*** **Descartes** espone le sue teorie circa la formazione ed il moto dei corpi celesti, soffermandosi sulla natura della luce che alcuni di essi emanano, ed il modo in cui noi la percepiamo. Alcune delle sue osservazioni in materia di ottica ricompariranno ne ***La Dioptrique***.

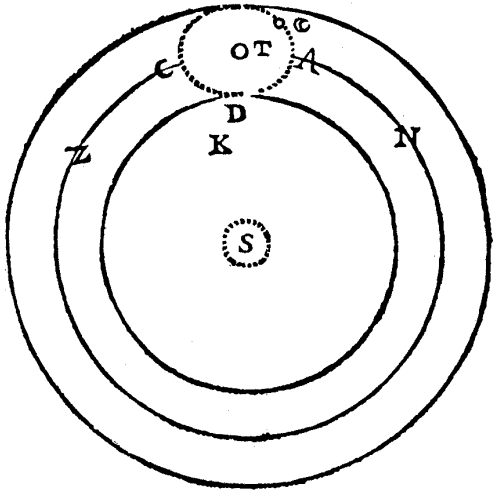
La prima edizione di quest'opera risale al 1664, a più di quattordici anni dopo la morte dell'autore. Egli non ebbe infatti mai il coraggio di pubblicarla, nel timore che la Chiesa lo potesse condannare per aver sostenuto le tesi di **Copernico** e **Tycho Brahe**. Egli terminò la stesura del manoscritto nel 1633, proprio l'anno in cui il Consiglio del Sant'Uffizio pronunciò la **sentenza** contro **Galileo**, mettendo all'indice il suo ***Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo***. Descartes non abbandonò la prudenza nemmeno quando, alcuni anni più tardi, diede alle stampe i ***Principia Philosophiae***, nei quali le sue teorie astronomiche venivano sì fedelmente riproposte, ma l'eliocentrismo appariva soltanto come un'*"ipotesi, che forse è lontanissima dalla realtà"* (Parte III, § 44). Non mancano, nei ***Principia***, veri e propri tributi alla dottrina ecclesiastica, con i quali l'autore cerca di premunirsi, prima di presentare la sua visione meccanicistica e materialistica dell'universo: *"E ben lungi dal volere che si creda a tutte le cose che scriverò, pretendo, anzi, di proporne qui alcune che credo assolutamente essere false. Cioè, io non dubito che il mondo non sia stato creato al principio con tanta perfezione, quanta ne ha, di modo che il Sole, la Terra, la Luna, le stelle sono state sin d'allora, e la Terra non ha avuto solamente in sé i semi delle piante, ma le piante stesse ne han coperto una parte; e Adamo ed Eva non sono stati creati bambini, ma in età di uomini perfetti […] egualmente, noi faremo comprendere meglio qual è generalmente la natura di tutte le cose che sono al mondo, se possiamo immaginare dei principi che siano intelligibilissimi e semplicissimi, dai quali facciamo vedere chiaramente che* ***gli astri e la terra ed infine tutto il mondo visibile avrebbe potuto essere prodotto come da alcuni semi, benché sappiamo che esso non è stato prodotto in questo modo****."* (Parte III, § 45). Descartes passa poi a esporre queste sue *"supposizioni"*, quindi, per poter procedere nel ragionamento, si affretta ad aggiungere *"che la loro falsità non impedisce che quello che ne sarà dedotto sia vero."* (Parte III, § 46-47).

Questa precauzione non impedì la messa all'indice delle opere cartesiane, avvenuta nel 1663.

Secondo Descartes il cosmo sarebbe pieno di un'unica materia, che si manifesta sotto forma di tre elementi: il **fuoco**, di cui sono composte le stelle, l'**aria**, che è la sostanza dei cieli, la **terra**, che è la materia dei pianeti e delle comete. Nell'universo non esistono spazi vuoti: pertanto la materia, che Dio ha posto in movimento al momento della Creazione, non può che muoversi in maniera circolare. Per effetto di questo moto, i corpi celesti, formandosi, sarebbero diventati tondeggianti. Poiché la materia, all'inizio del tempo, era agitata in maniera non uniforme, si sono prodotti molti centri del moto, sparsi per tutto l'universo: il cosmo risulta così composto da *vortici.*



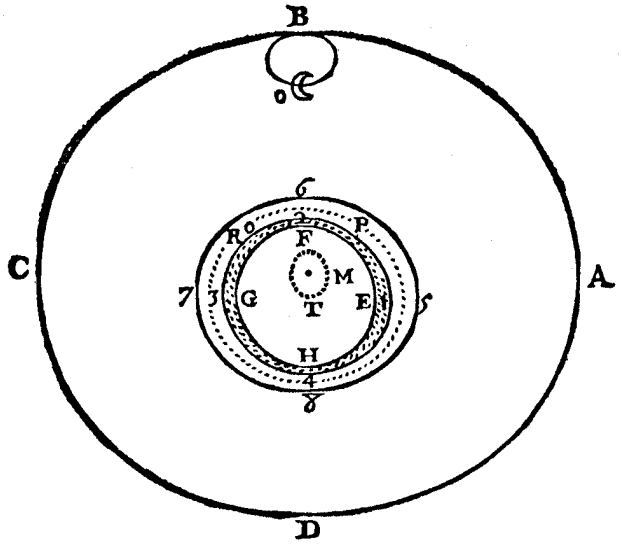
Ogni vortice è un cielo sferico, che ruota intorno ad una stella posta nel suo centro. Esso può contenere uno o più pianeti, che trascina nel suo moto rotatorio. Così è fatto anche il nostro sistema solare.



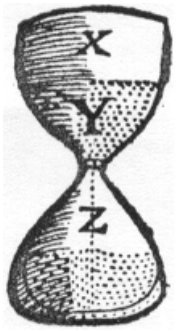
Nei ***Principia*** Descartes cerca di mitigare la sua posizione eliocentrica definendo "improprio" il moto della Terra: il nostro pianeta si sposta rispetto alle cosiddette stelle fisse. Ma perché non ammettere, allora, che siano queste ultime a muoversi, mentre la Terra è in quiete? Per quanto riguarda poi il moto della Terra intorno al Sole, Descartes fa presente che *"essa è in riposo, e che non ha propensione al movimento, visto che non ne notiamo in essa; ma non crediamo nemmeno che questo possa impedire che essa sia portata dal corso del cielo che segna il suo movimento, senza, peraltro, muoversi:*

come un vascello, che non è trasportato dal vento, né da remi, e che non è nemmeno trattenuto da ancore, resta fermo nel mezzo del mare, benché forse il flusso o riflusso di quella gran massa d'acqua lo porti insensibilmente con sé." (Parte III, § 26).

Anche la Terra è dotata di un suo piccolo cielo, nel quale si trova la Luna, e che, come Descartes spiega ne ***Il Mondo***, dà origine alla forza di gravità (*"la pesantezza"*) ed alle maree. Ben diversa è la spiegazione data da **Galileo** nei ***Discorsi***.

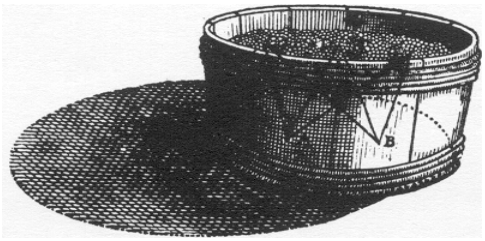


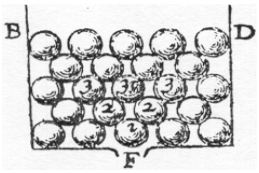
I corpi vengono spinti verso il centro della Terra dalla compressione degli strati d'aria circostanti, che prevale sulla forza centrifuga dovuta al moto rotatorio, che tenderebbe invece ad allontanarli. D'altra parte, l'aria che ruota, nel passare tra la Terra e la Luna, incontra una strettoia, per cui, in quel tratto, essa scorre più velocemente, trascinando con sé la superficie del mare, che da quel lato del globo risulta così rialzata. Dalla parte opposta l'acqua necessariamente si abbassa, a causa della rotazione della Terra intorno al proprio asse, poi, il punto d'innalzamento, che rimane praticamente fisso rispetto alla Luna, si sposta rispetto alla superficie terrestre, determinando in dodici ore un ciclo completo di flusso e riflusso.

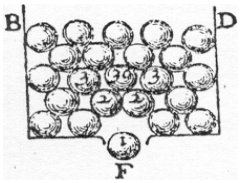


L'ottica fisica, alla quale sono dedicate pagine di tutte e tre le opere, si basa sul ***modello corpuscolare***, anche se è presente un lieve accenno alla teoria ondulatoria. Tutti i fenomeni legati alla propagazione della luce sono spiegati immaginando il moto di piccole sfere del primo elemento (il fuoco) che sospingono le particelle d'aria o

di terra secondo le leggi della meccanica. Così la luce si trasmette attraverso il cielo come i granellini di sabbia passano da una parte all'altra della clessidra, o il mosto sgorga da un foro praticato sul fondo di una tinozza piena d'uva, prendendo via via il posto dell'aria.



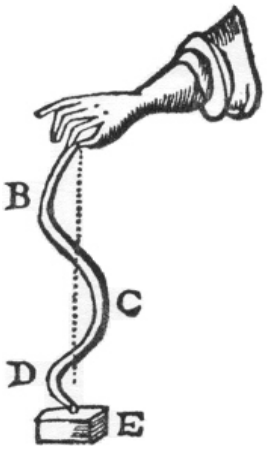


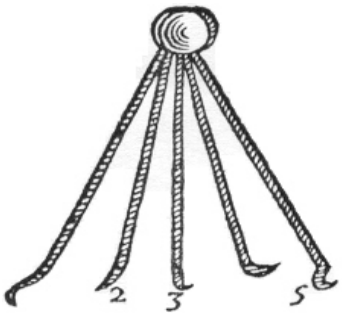


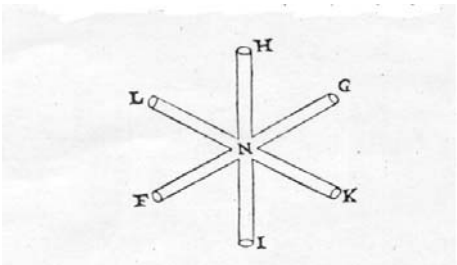
La **riflessione** avviene esattamente come il rimbalzo di una palla lanciata contro una parete, la **rifrazione** come la deviazione cui è soggetta la stessa palla quando viene gettata in acqua. Tutto trae origine dal gioco di forze che le singole sferette, compresse nello spazio, esercitano una sull'altra.

Il paragone con una mano che spinge un corpo con un bastone storto permette di capire come la luce si trasmetta sempre in linea retta, anche se le sferette sono disposte in maniera irregolare. I raggi provenienti da direzioni diverse possono convergere in un solo punto, esattamente come, tirando più corde, è possibile sollecitare uno stesso oggetto. I raggi che concorrono in uno stesso punto da direzioni opposte non si intralciano, come, del resto, avviene anche per i flussi di aria che attraversano un sistema di tubi disposti a raggiera.







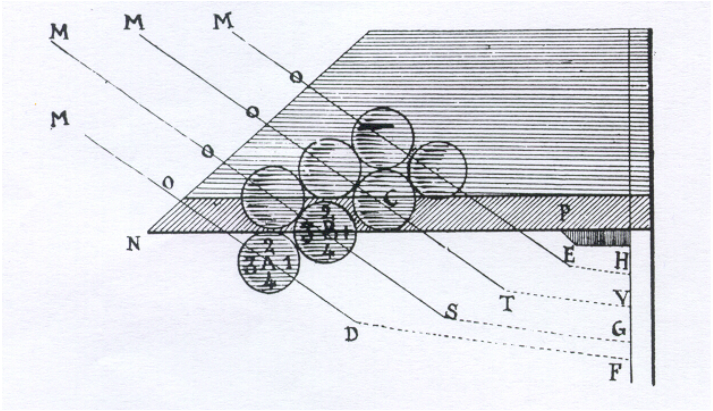


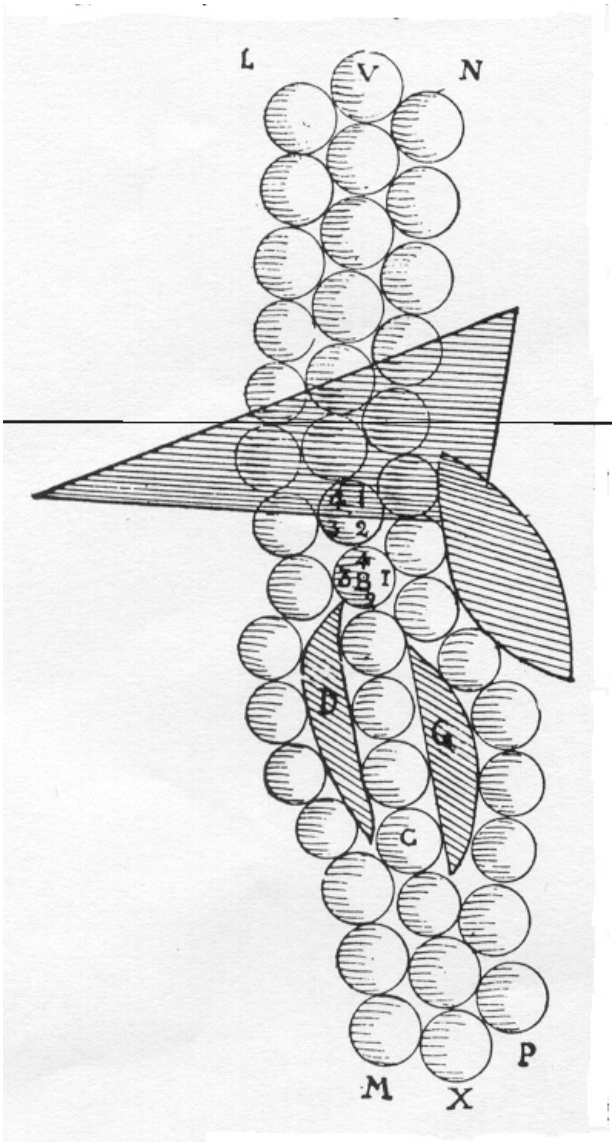
La **visione umana** è concepita come un effetto della sollecitazione esercitata dalla luce sull'aria, e trasmessa da questa alla retina. In

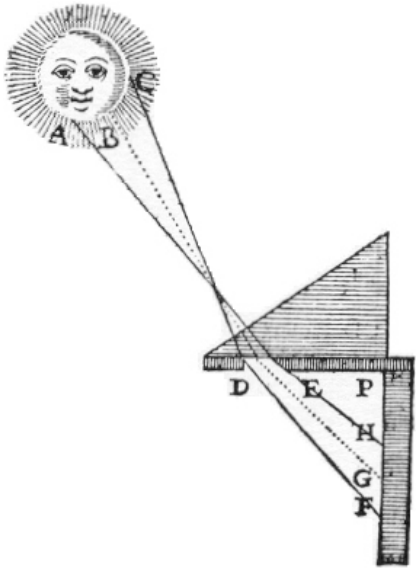
pratica, il meccanismo non è diverso da quello in base al quale un cieco “vede” attraverso il suo bastone.



L’ottica geometrica è sviluppata più diffusamente ne ***La Dioptrique***, dove sono enunciate le leggi della riflessione e della rifrazione, che vengono applicate allo studio delle lenti di varie forme, tra cui le cosiddette **ovali di Cartesio**. In quest’opera Descartes dimostra di aver letto le opere ottiche di **Keplero**.



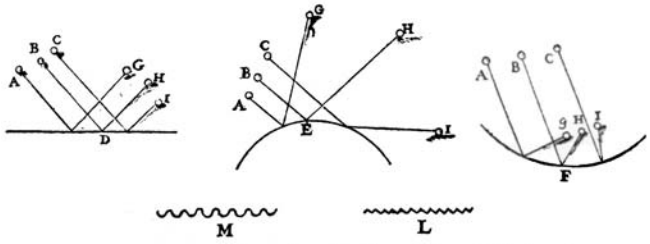




Descartes si preoccupa perfino di descrivere i **macchinari** per il taglio delle lenti impiegate negli strumenti ottici. In quegli anni gli strumenti ottici, come il microscopio ed il cannocchiale, cominciavano a diffondersi tra gli scienziati.

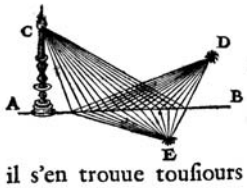
Il cannocchiale di Descartes
Il cannocchiale di Galileo

rencontrent vne ſuperficie ineſgale, comme L, ou M, elles ſe refleſchiſſent vers diuers coſtés, chaſcune ſelon



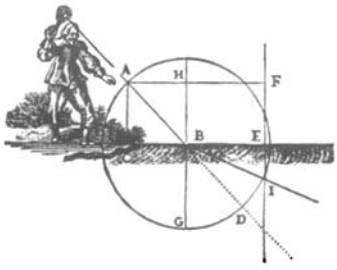
la ſituatiõ de l'endroit de ceſte ſuperficie qu'elle touche. Et elles ne changent rien que cela en la façon de leur mouuement, lors que ſon ineſgalité ne conſiſte qu'en ce que ſes parties ſont courbées diuerſement. Mais elle peut auſſy conſiſter en pluſieurs autres choſes & faire par ce moyen que ſi ces bales n'ont eu auparauant qu'vn ſimple mouuement droit, elles en perdent vne partie, & en acquerent au lieu vn circulaire, qui peut auoir diuerſe proportion auec ce qu'elles retienent du droit, ſelon que la ſuperficie du cors qu'elles rencontrent peut eſtre diuerſement diſpoſée. Ce que ceux qui iouent a la paume eſprouuent aſſés, lors que leur bale rencontre de faux quareaux, ou bien qu'ils la touchent en biaiſant de leur raquette, ce qu'ils nõment, ce me ſemble coupper ou friſer. En fin conſiderés que ſi vne bale qui ſe meut rencontre obliquement la ſuperficie d'vn cors liquide, par lequel elle puiſſe paſſer plus ou moins facilement, que par celuy d'ou elle ſort, elle ſe détourne & change ſon cours en

conſiſte la Nature de chacune de ces couleurs, & le faire voir par experience; mais cela paſſe les bornes de mon ſuiet. Et il me ſuffit icy de vous auertir, que les rayons, qui tombent ſur les cors qui ſont colorés, & non polis, ſe refleſchiſſent ordinairement de tous coſtés, encores meſme qu'ils ne vienent que d'vn ſeul coſté. Comme encore que ceux qui tombent ſur la ſuperficie du cors blanc A B, ne vienent que du flambeau C, ils ne laiſſent pas de ſe refleſchir tellement de tous coſtés, qu'en quelque lieu qu'on poſe l'œil, comme par exemple vers D, il s'en trouue touſiours pluſieurs venans de chaſque endroit de ceſte ſuperficie A B, qui tendent vers luy. Et meſme ſi l'on ſuppoſe ce cors fort delié comme vn papier ou vne toile, en ſorte que le iour paſſe au trauers, encores que l'œil ſoit d'autre coſté que le flambeau, comme vers E, il ne lairra pas de ſe refleſchir vers luy quelques rayons de chacune des parties de ce cors. En fin conſiderés que les rayons ſe detournent auſſy, en meſme façon qu'il a eſté dit d'vne bale, quand ils rencontrent obliquement la ſuperficie d'vn cors tranſparant, par lequel ils penetrent plus ou moins facilement, que par celuy d'où ils vienent, & cette façon de ſe détourner s'apelle en eux Refraction.



DE

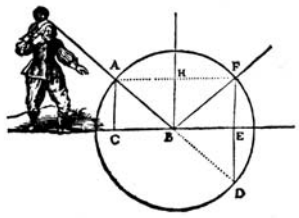
en y entrant: cõme par exemple, ſi eſtant en l'air au point A on la pouſſe vers B, elle va bien en ligne droite depuis A iuſques à B, ſi ce n'eſt que ſa peſanteur ou quelqu' autre cauſe particuliere l'en empeſche, mais eſtant au point B ou ie ſuppoſe qu'elle rencontre la ſuperficie de l'eau C B E elle ſe detourne & prend ſon cours vers I, allãt derechef en ligne droite depuis B iuſques a I, ainſy qu'il eſt ayſé à verifier par l'experience. Or il faut penſer en meſme façon, qu'il y a des cors qui eſtant rencontrés par les rayons de la lumiere les amortiſſent, & leur oſtent toute leur force, a ſçauoir ceux qu'on nõme noirs, les quels n'ont point d'autre couleur que les tenebres. Et qu'il y en a d'autres qui les font refleſchir, les vns au meſme ordre qu'ils les reçoiuent; a ſçauoir ceux qui ayant leur ſuperficie toute polie peuuent ſeruir de miroirs tant plats que courbés, & les autres confuſement vers pluſieurs coſtés. Et que derechef entre ceux cy les vns font refleſchir ces rayons ſans aporter aucun autre changemẽt en leur action; a ſçauoir ceux qu'on nomme blancs: & les autres y aportent auec cela vn changement ſemblable a celuy que reçoit le mouuement d'une balle quand on la frize; a ſçauoir ceux qui ſont rouges, ou iaunes, ou bleus, ou de quelq; autre telle couleur. Car ie penſe pouuoir determiner en quoy

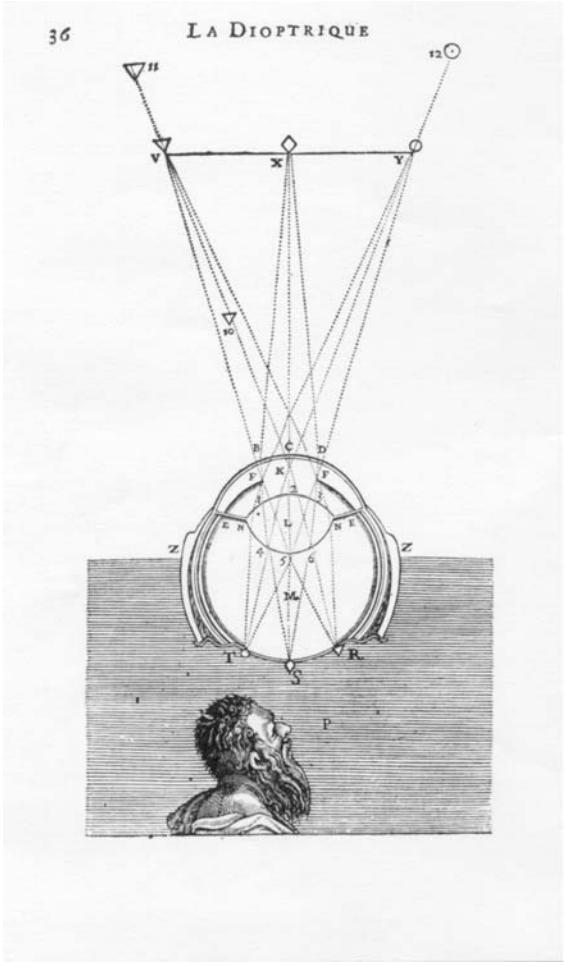


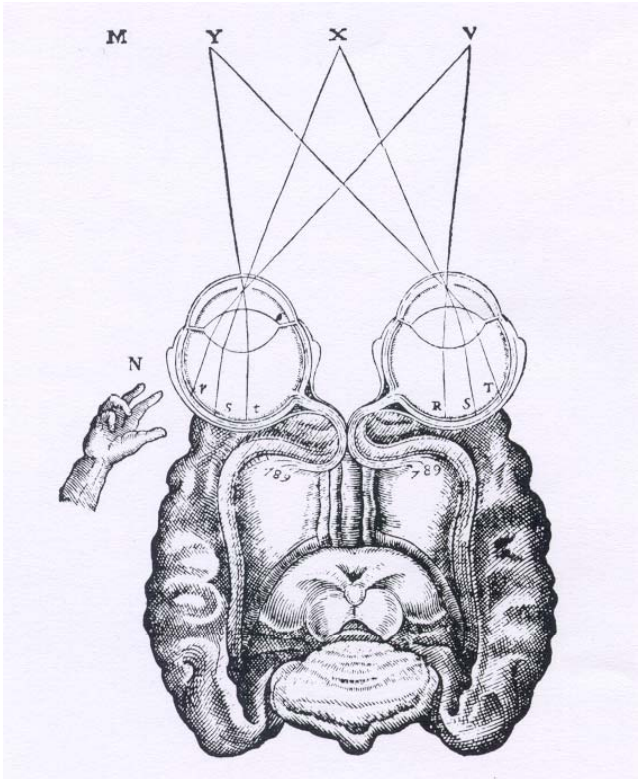
DE LA REFRACTION

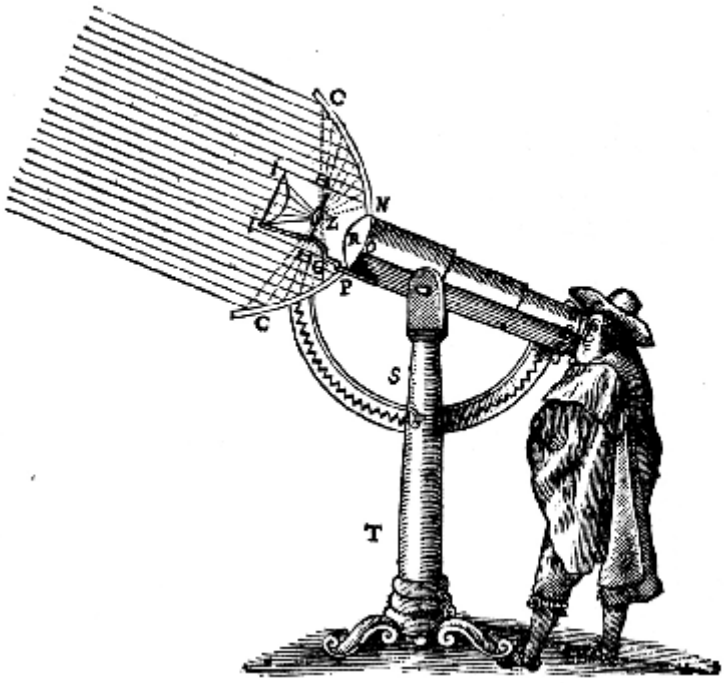
Diſcours Second.

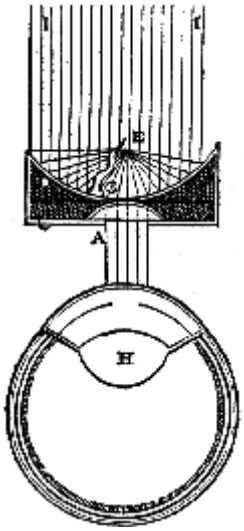
D'AUTANT que nous aurons beſoin cy aprés de ſçauoir exactement la quantité de cette refraction, & qu'elle peut aſſés commodément eſtre entendue par la comparaiſon, dont ie viens de me ſeruir, ie croy qu'il eſt à propos, que ie taſche icy tout d'vn train de l'expliquer, & que ie parle premierement de la reflexion, afin d'en rendre l'intelligence d'autant plus ayſée. Penſons donc, qu'vne bale eſtant pouſſée d'A vers B, rencontre au point B, la ſuperficie de la terre C B E, qui l'empeſchant de paſſer outre, eſt cauſe qu'elle ſe detourne; & voyons vers quel coſté. Mais afin de ne nous embaraſſer point en des nouuelles difficultés, ſuppoſons que la terre eſt parfaitement platte & dure, & que la balle va touſiours d'eſgale viteſſe, tant en deſcendant, qu'en remontant, ſans nous enquerir en aucune façon de la puiſſance, qui continue de la mouuoir, apres qu'elle n'eſt plus touchée de la raquette, ny conſiderer aucun effect de ſa peſanteur, ny de ſa groſſeur, ny de ſa figure. Car il n'eſt pas icy queſtion d'y regarder de ſi prés, & il n'y a aucune

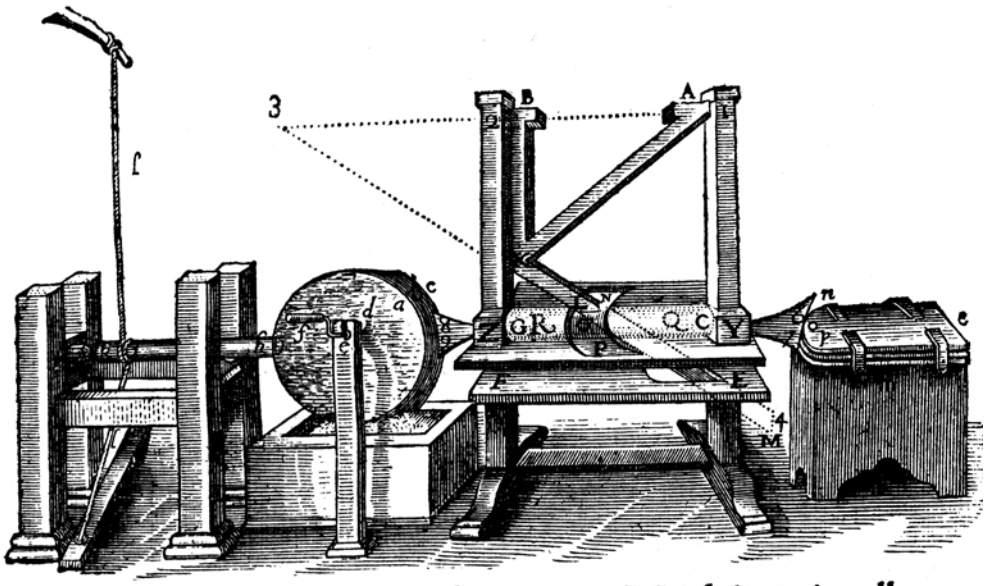



V
X
Y
B
C
D
Z
Z
T
R
S
P


M
Y
X
V
N


C
N
P
C
S
T

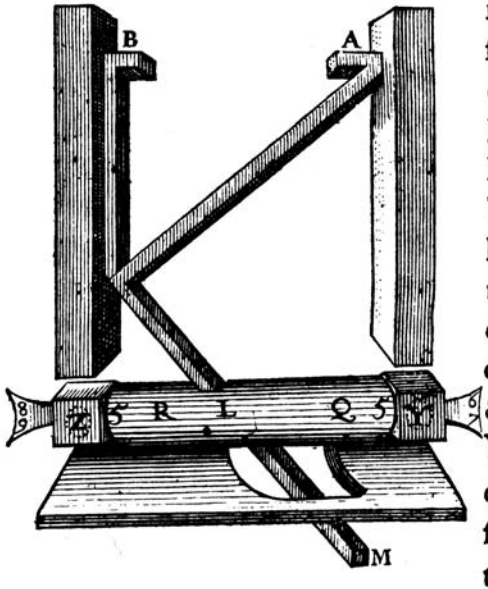

E
A
H



telle figure qu'on voudra, mais K L M doit auoir celle d'vne reigle ou autre tel cors, dont les lignes qui terminent ſes ſuperficies ſoient paralleles : & elle doit eſtre tellement inclinée, que la ligne droite 4 3 qu'on imagine paſſer par le centre de ſon eſpaiſſeur eſtant prolongée iuſques a celle qu'on imagine paſſer par les poles 1, 2, y face vn angle 2 3 4 eſgal a celuy qui a tantoſt eſté marqué des lettres H T V. C G, E F ſont deux planches paralleles a l'aiſſieu 1 2, & dont les ſuperficies qui ſe regardent ſont fort plates & vnies, & couppées a angles drois par le plan 1 2 G O C. Mais au lieu de s'entretoucher comme deuant elles ſont icy iuſtement autant eſloignées l'vne de l'autre qu'il eſt beſoin pour donner paſſage entre elles deux a vn cylindre ou roulleau, Q R, qui eſt exactement rond, & par tout d'eſgale groſſeur. Et de

Voyés en la figure de la page 142.

de plus elles ont chaſcune vne fente, N O P, qui eſt ſi longue & ſi large, que la reigle K L M paſſant par dedans peut ſe mouuoir ça & la ſur les poles 1,2, tout autant qu'il eſt beſoin pour tracer entre ces deux planches vne partie d'vne hyperbole, de la grandeur du diametre des verres qu'on veut tailler. Et cette reigle eſt auſſy paſſée au trauers du roulleau Q R, en telle façon, que le faiſant mouuoir auec ſoy, ſur les poles 1, 2, il demeure neantmoins touſiours enfermé entre les deus planches C G, E F, & parallele a l'aiſſieu 1 2. Enfin Y 6 7, & Z 8 9, ſont les outils qui doiuent ſeruir a tailler en hyperbole tel cors qu'on voudra, & leurs manches Y Z ſont de telle eſpaiſſeur que leurs ſuperficies qui ſont toutes plates touchent exactement de part & d'autre celles des deux planches C G, E F, ſans qu'ils laiſſent pour cela de gliſſer entre deux, a cauſe qu'elles ſont fort polies. Et ils ont chaſcun vn trou rond, 5,5, dans lequel l'vn des bouts du roulleau Q R eſt tellement enfermé, que ce roulleau peut bien ſe tourner autour de la ligne droite 5 5, qui eſt comme ſon aiſſieu, ſans les faire tourner auec ſoy, a cauſe



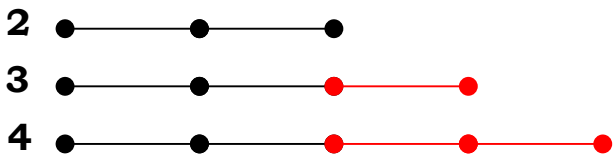
La *Dioptrique* di Cartesio

René Descartes - Isaac Beeckman
Compendium Musicae

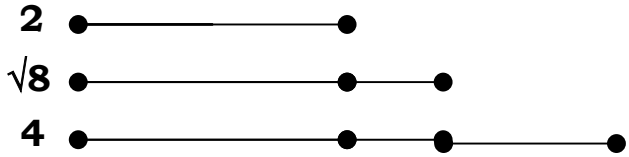
Sotto questo titolo, in Olanda, nel 1650, anno della morte di **Descartes**, videro la luce alcuni suoi scritti di carattere musicale raccolti, e forse rielaborati, da Beeckman. Quest'ultimo era un medico, oltre che maestro della scuola di latino a Dordrecht, e con lui Descartes aveva intrattenuto un carteggio scientifico e filosofico. L'opera costituisce un dono personale dell'autore al suo amico.

Descartes riprende la tradizione, millenaria, risalente a **Pitagora**, sulla **natura aritmetica delle armonie musicali**. L'autore insiste sull'importanza della proporzione come origine del piacere estetico. Ecco come, nella premessa, espone questo principio:

1° Tutti i sensi sono capaci di provare piacere.
2° È però necessario che sussista una giusta proporzione fra l'oggetto che produce il piacere ed il senso che lo deve percepire. Per questo il rumore di uno scoppio o di un tuono non sono adatti a produrre musica, perché ledono l'orecchio, proprio come lede gli occhi la luce solare troppo intensa.
*3° L'oggetto deve essere tale da non presentarsi al senso in maniera troppo difficile o confusa. Così, in un **astrolabio**, una figura complessa come quella della "madre" non piacerà quanto quella della "rete", che è formata da linee più regolari.*
4° L'oggetto che è meglio percepito dai sensi è quello nel quale minore è la differenza tra le parti.
5° Consideriamo meno differenti tra loro le parti di un oggetto tra le quali sussiste una maggiore proporzione.
*6° Quella proporzione deve essere **aritmetica**, e non **geometrica**, perché la prima è più apprezzabile della seconda. Ad esempio, tra le linee:*



la seconda delle quali è la media aritmetica delle altre due, l'occhio avverte subito una regolarità, che invece non è in grado di percepire tra le linee:



la seconda delle quali è la media geometrica delle altre due. In effetti, le differenze tra le lunghezze delle linee nel secondo caso sono incommensurabili, contrariamente a quanto avviene nel primo caso.
7° Tra gli oggetti dei sensi, il più gradito allo spirito non è né quello che viene percepito con troppa facilità, né quello che viene percepito con troppa difficoltà: il primo non soddisfa appieno i desideri, il secondo affatica i sensi.
8° Pertanto la varietà è sempre gradita, in ogni cosa.

Le scale musicali

Nella teoria musicale di Pitagora le frequenze delle note musicali sono espresse da quozienti di numeri interi. Nel corso della storia sono state inventate molte diverse scale musicali, che presentano tutte questa caratteristica. La più nota è la ***scala naturale***, introdotta da Aristosseno come perfezionamento della scala pitagorica, ed adottata anche da **Tolomeo**:

1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1	9/4
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do+	Re+

In questa scala gli intervalli tra due note consecutive – cioè i rapporti fra le loro frequenze - sono di tre tipi: 9/8 (*tono maggiore*), 10/9 (*tono minore*) e 16/15 (*semitono*). Questa scala musicale ha in comune con quella di Pitagora gli intervalli 1/1, 4/3, 3/2 e 2/1. Ma le restanti note vengono determinate in modo diverso, formando ***medie aritmetiche***:

5/4 è la media aritmetica di 1/1 e 3/2
9/8 è la media aritmetica di 5/4 e 1/1
5/3 è la media aritmetica di 4/3 e 2/1
15/8 è la media aritmetica di 3/2 e 9/4.

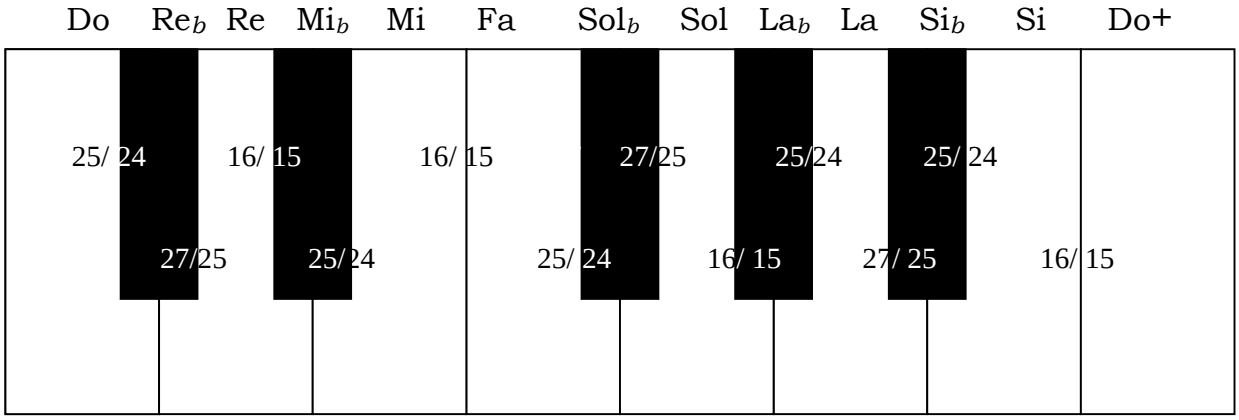
La scala musicale naturale viene completata con l'aggiunta di note intermedie, per un totale di 12 note in un'ottava:

Do Re$_b$ Re Mi$_b$ Mi Fa Sol$_b$ Sol La$_b$ La Si$_b$ Si

In questa scala, detta ***cromatica dodecafonica***, gli intervalli tra due note consecutive sono sempre pari ad un semitono di valore variabile: 25/24 (*semitono minore)*, 27/25, 16/15 (*semitono maggiore*). In effetti, gli intervalli determinati dalle note aggiunte sono:

Re$_b$ (Re bemolle) 25/24
Mi$_b$ (Mi bemolle) 6/5
Sol$_b$ (Sol bemolle) 25/18
La$_b$ (La bemolle) 8/5
Si$_b$ (Si bemolle) 9/5

Questa scala si ottiene inserendo una nota tra due note consecutive separate da un tono:



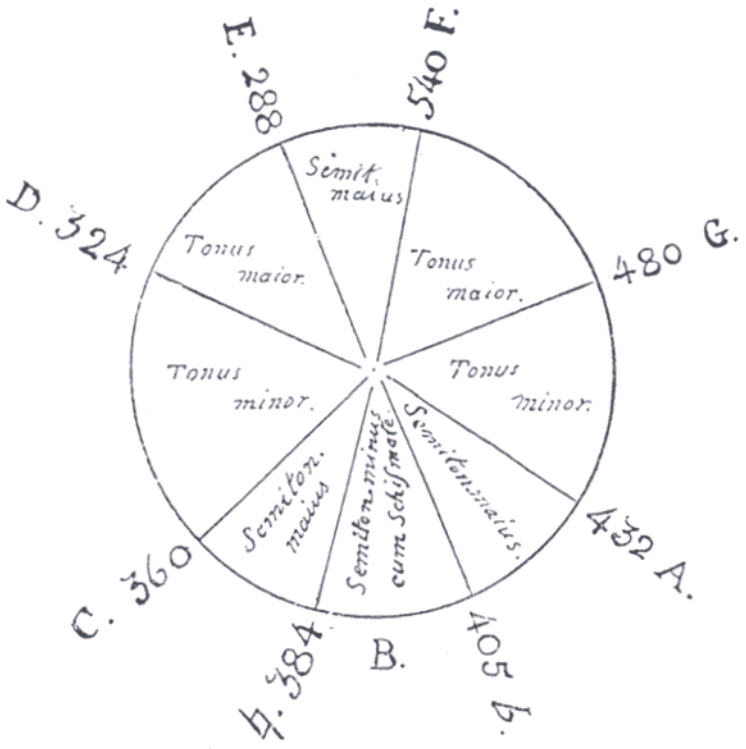
Il simbolo $_b$ (*bemolle*) indica l'abbassamento di un semitono. A volte si usa il simbolo # (*diesis*) per denotare l'innalzamento di un semitono. Così, ad esempio, si scrive Re# anziché Mi$_b$.

Nella scala di Do (pitagorica e naturale) gli intervalli musicali fra due toni consecutivi sono, nell'ordine: tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono. Ora: questa successione si può costruire anche a partire da altre note. Ad esempio, iniziando con il Fa:

Fa Sol La Si_b Do Re Mi Fa+

Questa è la scala di Fa. Tutte le scale di questo tipo si dicono ***scale maggiori***.

Ecco come Descartes raffigura una scala musicale:



Si dice invece ***scala minore naturale*** ogni scala in cui gli intervalli sono: tono, semitono, tono, tono, semitono, tono, tono.

Esempio:

La Si Do Re Mi Fa Sol La+

Una composizione che utilizza questa scala (*tonalità*) si dice *in La minore.* Le tonalità precedentemente introdotte si dicono, invece, naturalmente, *Do maggiore* e *Fa maggiore.* La scala di *Do minore* è la seguente:

Do Re Mi_b Fa Sol La_b Si_b Do+

Questa scala differisce da quella di Do maggiore solo nella terza, sesta e settima nota. La scala minore naturale è stata poi modificata, per motivi di eufonia. Fu inizialmente sostituita dalla scala minore armonica, in cui la settima nota venne innalzata di un semitono, e, successivamente, dalla scala minore melodica, quella che oggi è maggiormente in uso, ottenuta elevando anche la sesta nota di un semitono. In essa gli intervalli si susseguono secondo lo schema: tono, semitono, tono, tono, tono, tono, semitono. Le scale melodiche di La minore e Do minore sono allora, nell'ordine:

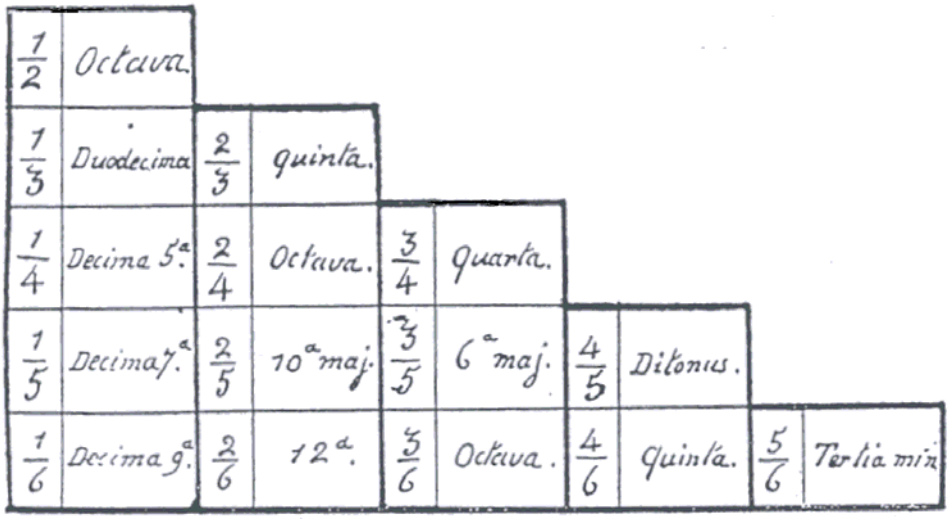
La Si Do Re Mi Fa# Sol# La+

e

Do Re Mi_b Fa Sol La Si Do+ .

Gli accordi

Ecco una tabella di Descartes contenente alcuni intervalli musicali:

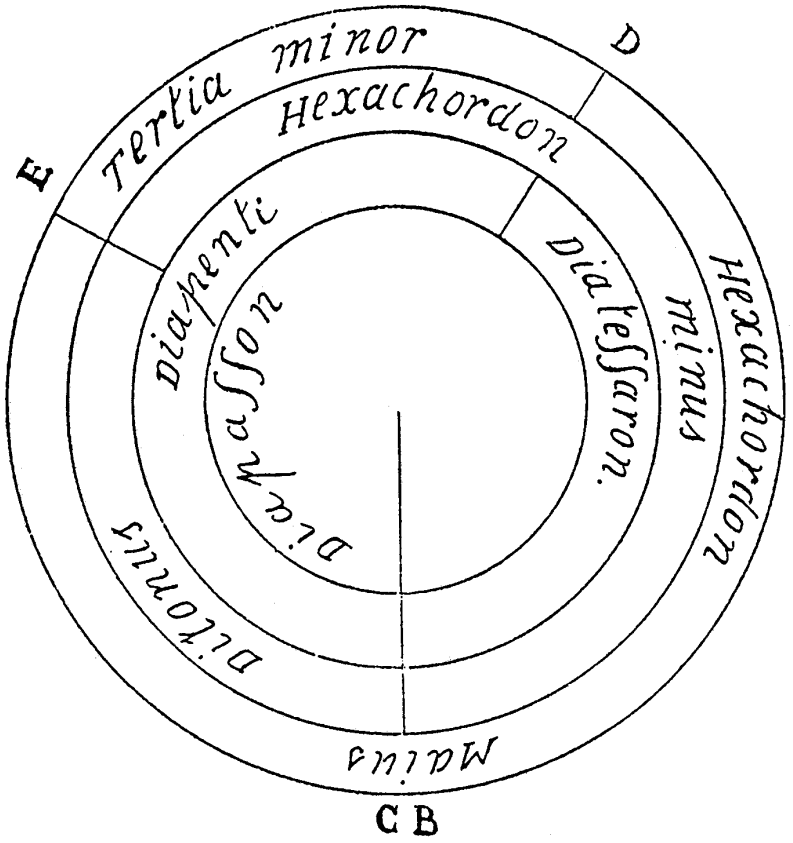


Il rapporto è sempre calcolato fra la nota più bassa e quella più alta.

Descartes concentra la propria attenzione sugli intervalli musicali relativi a coppie di note che, suonate simultaneamente, danno luogo ad una consonanza armoniosa. Eccoli riportati in tabella, con le rispettive denominazioni greche (per i primi tre, quelli più antichi, di origine pitagorica) e latine (per quelli relativi alla scala naturale):

ottava	*diapason*	1:2	Do – Do+
quinta	*diapente*	2:3	Do – Sol Fa – Do+
quarta	*diatessaron*	3:4	Do - Fa Sol – Do+
terza maggiore	*ditonus*	4:5	Do – Mi La$_b$ - Do+
sesta minore	*hexachordon minus*	5:8	Do – La$_b$ Mi – Do+
sesta minore	*hexachordon maius*	3:5	Do – La Mi$_b$ – Do+
terza minore	*semiditonus*	5:6	Do - Mi$_b$ Mi - Sol La – Do+

Questi intervalli, presi a due a due, nell'ordine, si completano ad un'ottava. I prodotto dei loro rapporti è uguale al rapporto dell'ottava: si tratta delle coppie *diapente-diatessaron (2:3 – 3:4), ditonus-hexachordon minus (4:5 – 5:8), hexachordon maius - semiditonus (3:5 – 5:6).* Descartes rappresenta queste relazioni in figura:



Molte altre suggestive raffigurazioni si trovano in **Boezio**

Vale forse la pena di spiegare l'origine dei nomi degli intervalli. Prendiamo, per esempio, le *terze*: esse si chiamano così perché sono gli intervalli tra la prima e la terza nota di una scala musicale. La *terza maggiore* si riferisce ad una qualunque scala maggiore, la *terza minore* ad una qualunque scala minore. Un discorso analogo vale per le *seste,* e – possiamo aggiungere – per le *settime.* La *settima maggiore* è data dal rapporto

$$\text{Do} : \text{Si} = 1/1 : 15/8 = 8:15$$

e la *settima minore* dal rapporto

$$\text{Do} : \text{Si}_b = 1/1 : 9/5 = 5:9.$$

Esistono invece, come sappiamo, un'unica quarta ed un'unica quinta, perché le scale maggiori e minori non differiscono nella quarta e nella quinta nota.

Perché Descartes non include le settime nel suo elenco? La risposta ci viene dall'esperienza...acustica. Esse producono, infatti, sgradevoli dissonanze (*intervalli ingratissimi*, come li definisce Girolamo Saladini, matematico e teorico della musica del 1700). Sono dissonanti anche le *seconde* (ad esempio: Do-Re). Saladini, proseguendo la sua classificazione degli intervalli musicali, considera la quarta e la quinta come consonanze *meno grate* dell'ottava. Aggiunge, però, che se il primo, il quinto e l'ottavo tono vengono suonati simultaneamente, *"si sentirà una gratissima armonia, per cui niente resta da desiderare"*. Ecco un esempio di accordo di tre note: esso corrisponde ai rapporti 1: 3/2 : 2, cioè 2:3:4. Sono consonanti anche gli accordi basati sui rapporti 4:5:6 nelle scale maggiori (ad esempio: Do – Mi – Sol), e 10:12:15 nelle scale minori (ad esempio: Do – Mi$_b$ – Sol). Si tratta in ogni caso della prima, terza e quinta nota di una scala.

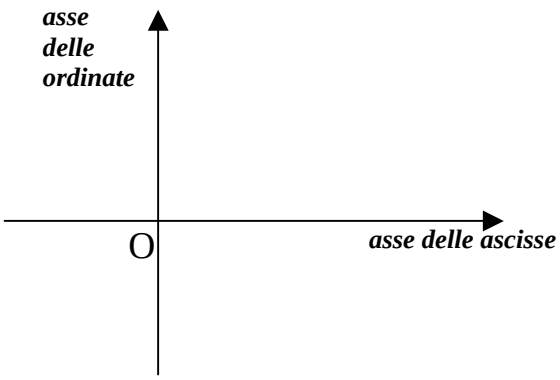
Osserviamo che nelle sequenze 2,3,4 e 4,5,6 il secondo numero è la media aritmetica degli altri due. Ciò è vero, con buona approssimazione, anche per 10,12,15, il che conferma l'importanza della ***media aritmetica*** nell'armonia musicale, dando ragione a Descartes. Esiste, però anche una scala musicale basata ***sulla media geometrica***: si tratta della ***scala temperata***, in cui ogni ottava è suddivisa in dodici semitoni del valore pari alla radice dodicesima di 2.

Ogni intervallo musicale può essere rappresentato indifferentemente da un quoziente o dal suo reciproco: la quarta corrisponde a 3/2 o a 2/3, a seconda che si voglia mettere a numeratore la nota più alta o quella più bassa. Per questo motivo, accanto alla ***media aritmetica*** si considera spesso la ***media armonica*** di due intervalli musicali, che è il reciproco della media aritmetica dei reciproci dei medesimi intervalli. Il nome stesso sottolinea il ruolo fondamentale svolto nella determinazione delle consonanze musicali. Ecco perché il Saladini, nel suo *Nuovo metodo delle proporzioni geometrica,*

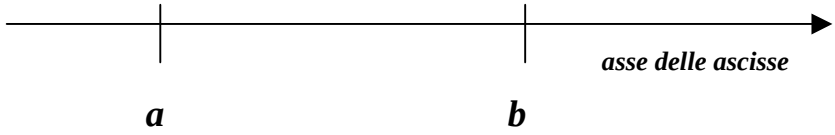
aritmetica ed armonica, così presenta la sua opera: *"per far intendere in qualche parte come la proporzione Armonica s'ingerisca nella Musica, e quanto sia necessario lo studio della Geometria, e dell'Aritmetica a coloro che si danno ad una tal facoltà."*

Il piano cartesiano

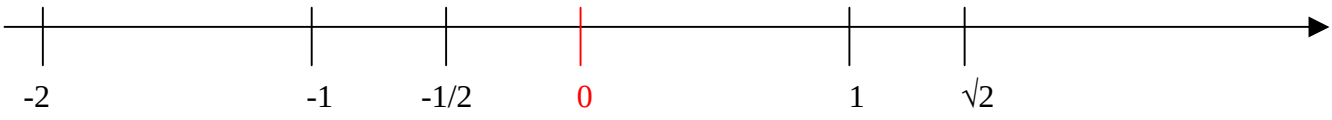
Un ***sistema di riferimento*** nel piano è costituito da due rette perpendicolari, orientate (dotate, cioè, di un verso di percorrenza) ed incidenti. Le due rette sono dette ***assi cartesiani***, l'una è detta ***asse delle ascisse***, l'altra è detta ***asse delle ordinate***. Il loro punto d'intersezione è detto ***origine*** del sistema di riferimento, ed è denotato *O*. I versi di percorrenza sono spesso indicati da una freccia:



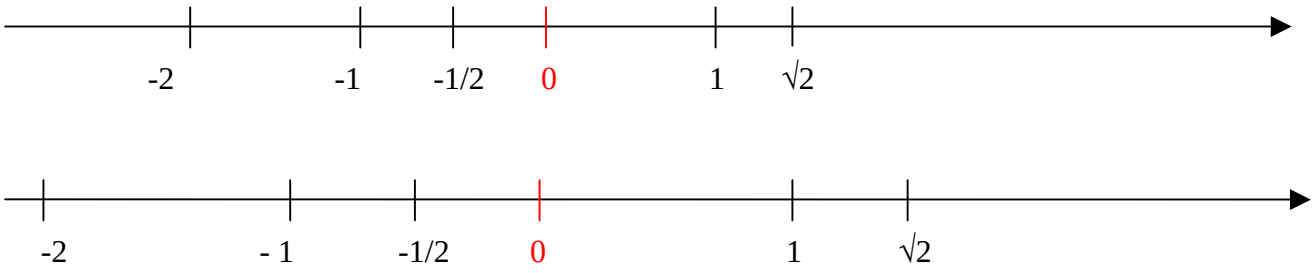
Ogni punto dell'asse delle ascisse rappresenta un numero reale. Si sceglie innanzitutto il punto *O* come rappresentante dello zero. Gli altri numeri reali saranno rappresentati dagli altri punti dell'asse, in modo che, se *a* e *b* sono numeri reali, e *a* è minore di *b*, allora il punto che rappresenta *b* seguirà, secondo il verso fissato, quello che rappresenta *a*.



In particolare, in figura, i punti che rappresentano i numeri negativi saranno tutti quelli situati a sinistra dell'origine, e quelli che rappresentano i numeri positivi saranno tutti quelli situati a destra dell'origine.



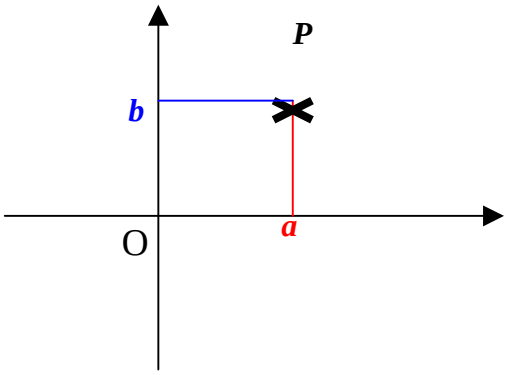
Il modo di attribuire un punto ad ogni numero reale non è unico: ne esistono, in realtà, infiniti. Eccone altri due:



Tutto dipende da come si decide di collocare il punto corrispondente al numero 1. Una volta fissato quest'ultimo, risultano fissati i punti corrispondenti a tutti gli altri numeri reali: basta rispettare le proporzioni tra le distanze.

Una volta stabilita la corrispondenza tra i numeri reali ed i punti della retta, l'asse delle ascisse diventa una copia della cosiddetta ***retta reale***.

Con un analogo procedimento, anche l'asse delle ordinate viene reso una copia della retta reale.



Inoltre, la scelta sui due assi dei punti *U* e *V* cui attribuire il numero *1* va fatta in modo che i segmenti *OU* ed *OV* abbiano la stessa estensione.
Dato un punto *P* del piano, si traccino le perpendicolari da *P* agli assi coordinati. Il piede della perpendicolare all'asse delle ascisse corrisponderà ad un certo numero reale *a*, il piede della perpendicolare all'asse delle ordinate ad un numero reale *b*. È chiaro che la coppia di numeri *(a,b)* identifica univocamente la posizione del punto *P* del piano. Il numero *a* si dice l'***ascissa*** di *P*, il numero *b* si dice l'***ordinata*** di *P*; *a* e *b* si dicono le ***coordinate*** di *P*.

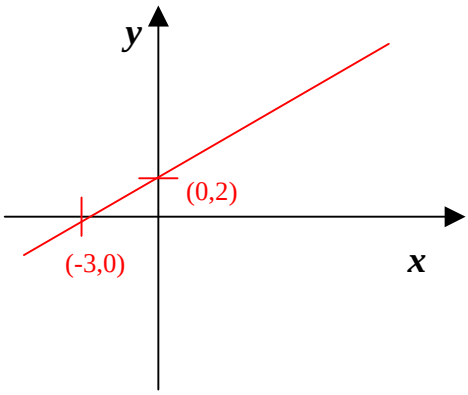
Il piano munito di un sistema di riferimento del tipo descritto è detto ***piano cartesiano***, dal nome italianizzato ***Cartesio*** con cui è noto il matematico francese **René Descartes**. Fu lui il primo a sfruttare la rappresentazione dei punti mediante le coordinate per lo studio algebrico dei luoghi geometrici del piano. Molti luoghi geometrici possono infatti essere rappresentati con equazioni algebriche. Ad esempio, la circonferenza di centro l'origine e raggio *1* è il luogo (cioè l'insieme) dei punti del piano cartesiano le cui coordinate *(x,y)* sono soluzioni di

$$x^2 + y^2 = 1,$$

che è detta ***equazione cartesiana*** della circonferenza.
Ogni retta del piano cartesiano ha un'equazione cartesiana della forma:

$$ax + by + c = 0,$$

dove *a,b,c* sono numeri reali fissati, e *a,b* non sono entrambi nulli.



Equazione cartesiana della retta in figura:

$$2x - 3y + 6 = 0$$

L'asse delle ascisse ha equazione cartesiana *y=0,* l'asse delle ordinate ha equazione *x=0.*

Molte **curve** del piano posso essere rappresentate mediante equazioni cartesiane, che possono comprendere anche espressioni non polinomiali.

É possibile, più in generale, introdurre sistemi di riferimento cartesiani nello spazio euclideo a *n* dimensioni.

La lingua universale secondo Cartesio

In una lettera a padre **Mersenne** del 20 novembre 1629, **Descartes** scrive le sue considerazioni circa un progetto di lingua universale, in sei proposizioni, formulato da un certo des Vallées. Si tratta di una lingua formata da un vocabolario semplice, da apprendere mediante l'uso di un dizionario, da un'ortografia basata sul semplice accostamento di segni corrispondenti ai singoli suoni che formano una parola, e da poche regole grammaticali, prive di eccezioni, per la coniugazione dei verbi e la declinazione dei sostantivi.
Dopo aver espresso forti perplessità sulla possibilità che i popoli possano fare propria questa lingua artificiale senza fatica e senza distorsioni, Descartes osserva che, in ogni caso, bisognerebbe compiere un'operazione preliminare di fondamentale importanza: rimettere ordine nelle idee dell'uomo.

"Per il resto, trovo che si potrebbe aggiungere a ciò un'invenzione, sia per comporre le parole primitive di questa lingua, sia per i loro caratteri; di modo che essa potrebbe essere insegnata in pochissimi termini, e cioè per mezzo dell'ordine, ossia, stabilendo un ordine fra tutti pensieri che possono entrare nella mente umana, allo stesso modo in cui ve n'è uno naturale fra i numeri; e come si può apprendere in un giorno a nominare tutti i numeri fino all'infinito, e scriverli in una lingua sconosciuta, il che comporta pur sempre un'infinità di parole differenti, così si dovrebbe poter fare lo stesso con tutte le altre parole necessarie ad esprimere tutte le altre cose che vengono in mente agli uomini. Se una cosa simile fosse trovata, io non dubiterei minimamente che questa lingua sarebbe ben presto corrente in tutto il mondo; perché vi sono moltissime persone che impiegherebbero volentieri cinque o sei giorni di tempo per potersi far capire da tutti gli uomini. Ma io non credo che il Vostro autore ci abbia pensato, sia perché nelle sue proposizioni non v'è nulla che lo testimoni, sia perché l'invenzione di questa lingua dipende dalla vera Filosofia; perché altrimenti è impossibile elencare tutti i pensieri degli uomini, e metterli in ordine, e nemmeno distinguerli in mondo che essi siano chiari e semplici, che, a mio avviso, è il più grande segreto che si possa avere per acquisire la buona scienza. E se qualcuno avesse spiegato bene quali sono le idee semplici che sono nell'immaginazione degli uomini, e di cui è composto tutto ciò che pensano, e se ciò fosse recepito da tutti, io oserei sperare, di lì a poco, in una lingua universale facilissima da imparare, da pronunciare e da scrivere, e, ciò che più conta, [una lingua] che aiuterebbe nel giudizio, presentandogli tutte le cose così distintamente, che gli sarebbe quasi impossibile sbagliarsi; invece, al contrario, le parole che abbiamo

hanno quasi esclusivamente significati confusi, ai quali la mente degli uomini si è abituata da lungo tempo, di modo che essa non capisce quasi nulla perfettamente. Ora io ritengo che questa lingua sia possibile, e che si possa trovare la scienza dalla quale essa dipende, per mezzo della quale i villici potrebbero giudicare la verità delle cose meglio di quanto adesso non facciano i filosofi. Ma non sperate di vederla mai in uso; ciò presuppone grandi cambiamenti nell'ordine delle cose, e bisognerebbe che tutto il mondo non fosse che un paradiso terrestre, il che non è concepibile se non nel paese dei romanzi."

Il problema della ricerca di lingua universale percorre tutta la storia, ma fu particolarmente sentito dai filosofi del secolo XVIII. Di fronte al moltiplicarsi di tentativi, anche bizzarri, di realizzare questo antico sogno dell'umanità, ci fu chi, usando anche parole di fuoco, energicamente dissentì. È interessante confrontare le teorie di Descartes con quello che, a questo proposito, il Leopardi scrisse nello ***Zibaldone***.

La lingua universale secondo Peano

Giacomo Leopardi

Zibaldone

Sul problema della lingua universale

"Una lingua strettamente universale, qualunque ella mai si fosse, dovrebbe certamente essere di necessità e per sua natura, la più schiava, povera, timida, monotona, uniforme, arida e brutta lingua, la più incapace di qualsivoglia genere di bellezza, la più impropria all'immaginazione, e la meno da lei dipendente, anzi la più da lei per ogni verso disgiunta, la più esangue ed inanimata e morta, che mai si possa concepire; uno scheletro un'ombra di lingua piuttosto che lingua veramente; una lingua non viva, quando pur fosse da tutti scritta e universalmente intesa, anzi più morta assai di qualsivoglia lingua che più non si parli né scriva.

Ma si può pure sperare che perché gli uomini sieno già fatti generalmente sudditi infermi, impotenti, inerti, avviliti, scoraggiati, languidi, e miseri della ragione, ei non diverranno però mai schiavi moribondi e incatenati della geometria. E quanto a questa parte di una qualunque lingua strettamente universale, si può non tanto sperare, ma fermamente e sicuramente predire che il mondo non sarà mai geometrizzato, non meno di quel che si possa con certezza affermare ch'ei non ebbe una tal favella mai, se non forse quando gli uomini erano così pochi, e di paese così ristretti, e niente vari di opinioni, costumi, usi, riti, governo e vita, che la lingua era universale solo perciò che più d'una nazione d'uomini, almeno parlanti, non v'aveva, onde universale era la lingua perch'era una al mondo, né altra lingua mai s'era udita, ed una era e sempre era stata la lingua, perché una sempre la nazione infino allora, o una, se non altro, la nazione che di lingua avesse uso e notizia. (23. Agosto. 1823)"

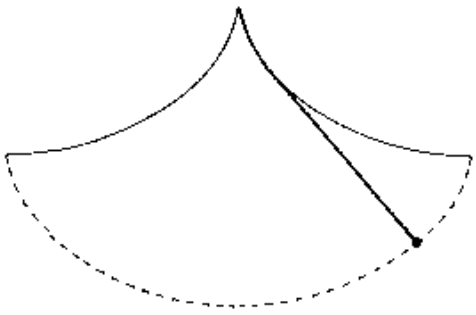
Leopardi da un lato condivide l'universalità della ragione, dall'altro si oppone al primato di questa sull'immaginazione, propugnando proprio quella varietà ed indeterminatezza che **Descartes** considera la principale nemica del giusto pensiero. Sfogliando le pagine del Leopardi capita di trovare la ragione accostata alla mediocrità, e l'immaginazione all'originalità; la geometria viene spesso usata come sinonimo di sterile rigidità, contrapposta alla fertilità della poesia.

“Chi vuol vedere quanto abbia la natura provveduto alla varietà, consideri quanto l’immaginazione sia più varia della ragione, e come tutti si accordino in ciò che spetta o è fondato su questa, e viceversa. Per esempio osservi come fossero varie le lingue antiche architettate sul modello della immaginazione, e quanto monotone quelle moderne che più sono architettate sulla ragione. Osservi come una lingua universale debba esser modellata e regolata in tutto e perfettamente dalla ragione, appunto perché questa è comune a tutti, ed uguale e uniforme in tutti. (13. Maggio 1821)”

Christian Huyghens (o Huygens) (L'Aia, Olanda 1629 –1695)

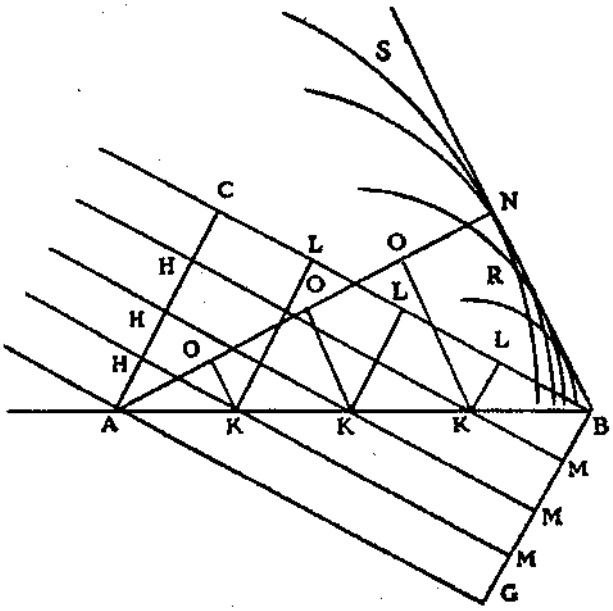


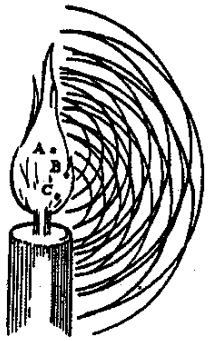
Grande matematico, fisico ed astronomo olandese, studiò a Leida, in Olanda, ed iniziò a pubblicare articoli all'età di 22 anni. Si occupò dapprima del problema della **quadratura del cerchio** e delle **coniche** in generale, trovando nuove approssimazioni per il numero π. Più tardi avrebbe esteso i suoi studi ad altre curve, come la **cissoide** e la **catenaria**. Introdusse la **trattrice**.

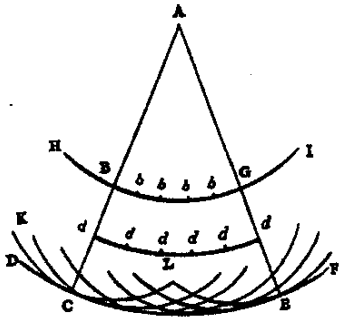


Fu geniale inventore: a lui si deve l'**orologio a pendolo** (1656), che egli costruì perfezionando un'idea di **Galileo**. Nel 1673 scoprì che la **cicloide** è la curva *tautocrona*, il che gli permise di costruire il primo *pendolo cicloidale*. Inoltre ideò, con l'aiuto del fratello, una tecnica per realizzare nuove e più potenti lenti per i telescopi: queste gli permisero di vedere distintamente gli **anelli di Saturno**, che Galileo, alcuni decenni prima, aveva scambiato per due satelliti (curiosità: la

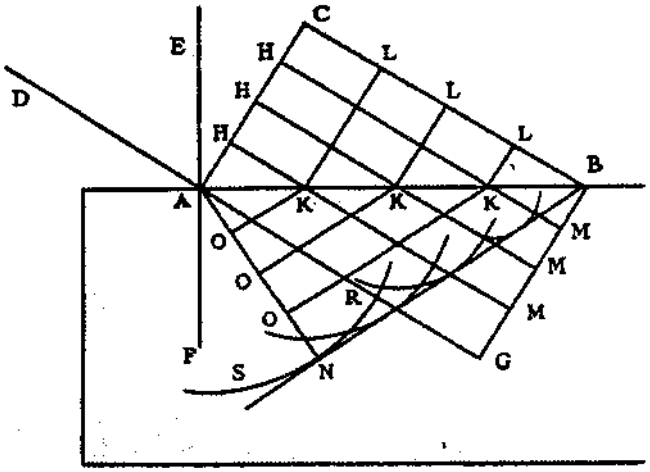
scoperta venne diffusa sotto forma di **anagramma letterale**). Avvistò, inoltre, una nuova galassia nella costellazione di Orione. Studiò la propagazione della luce, formulando l'ipotesi secondo cui i raggi luminosi non sarebbero che sequenze di impulsi formanti fronti sferici: è questo il principio della **teoria ondulatoria**,











che sarà ripresa, due secoli più tardi, da **Cauchy**. Dedusse per via geometrica le **leggi della riflessione e della rifrazione**.

Scrisse il primo trattato formale di **calcolo delle probabilità**, ispirandosi ai lavori di **Pascal** e **Fermat**.
In fisica approfondì lo studio della forza centrifuga (fu lui il primo ad usare questo nome), un fenomeno già osservato da **Descartes**; inoltre introdusse la **forza centripeta** (il termine venne in seguito coniato da **Newton**).
Frequentò a Parigi l'Accademia fondata da **Mersenne**, e divenne amico di Descartes. A quest'ultimo uno dei suoi figli dedicò un **epitaffio** in versi. Venne anche a contatto con Newton, che conobbe durante un viaggio in Inghilterra nel 1689. Del fisico inglese egli apprezzò l'opera matematica, ma contestò la teoria della gravitazione

universale, cui preferì la **teoria dei vortici** di Cartesio: egli, come molti suoi contemporanei, non poteva infatti accettare l'idea di un'azione a distanza tra i corpi.

Le sue opere principali sono:

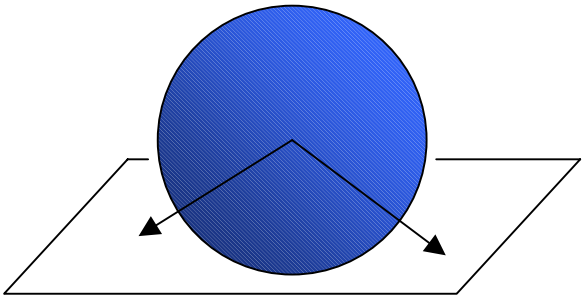
Theoremata de Quadratura Hyperbolae, Ellipsis et Circuli (1651)
De Circuli Magnitudine Inventa (1654)
Systema Saturnium (1659)
Horologium Oscillatorium sive de Motu Pendulorum (1673)

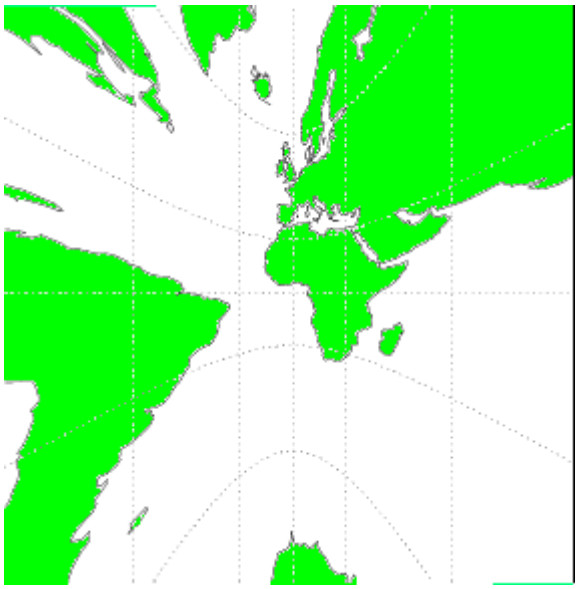


Immagine di Saturno secondo Huyghens

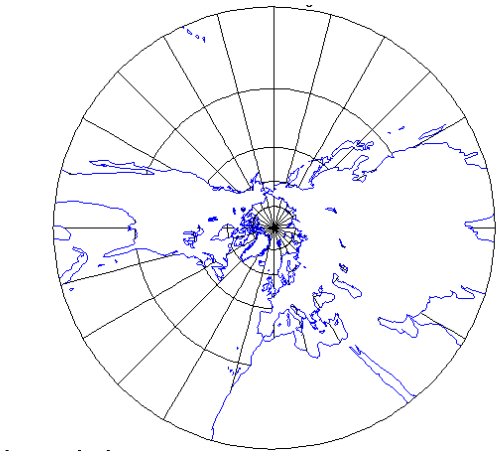
La cartografia

Il desiderio di rappresentare sulla carta i luoghi terrestri conosciuti è antico quanto l'uomo: se ne possono trovare chiare tracce nella storia della civiltà egizia, nella mitologia greca, nella Bibbia. Il primo tentativo documentato di disegnare una mappa dell'*ecumene*, quello che allora veniva considerato il mondo abitato, è dovuto al filosofo presocratico **Anassimandro da Mileto** (610-546 a.C.), appartenente alla scuola di **Talete**, che propone il primo esempio di applicazione alla cartografia della ***proiezione centrografica*** o ***gnomonica***, che veniva originariamente utilizzata per le meridiane solari. Essa veniva applicata per le mappe di piccole regioni: si immaginava di proiettare la superficie terrestre dal centro della Terra su di un piano tangente in un punto della regione considerata.





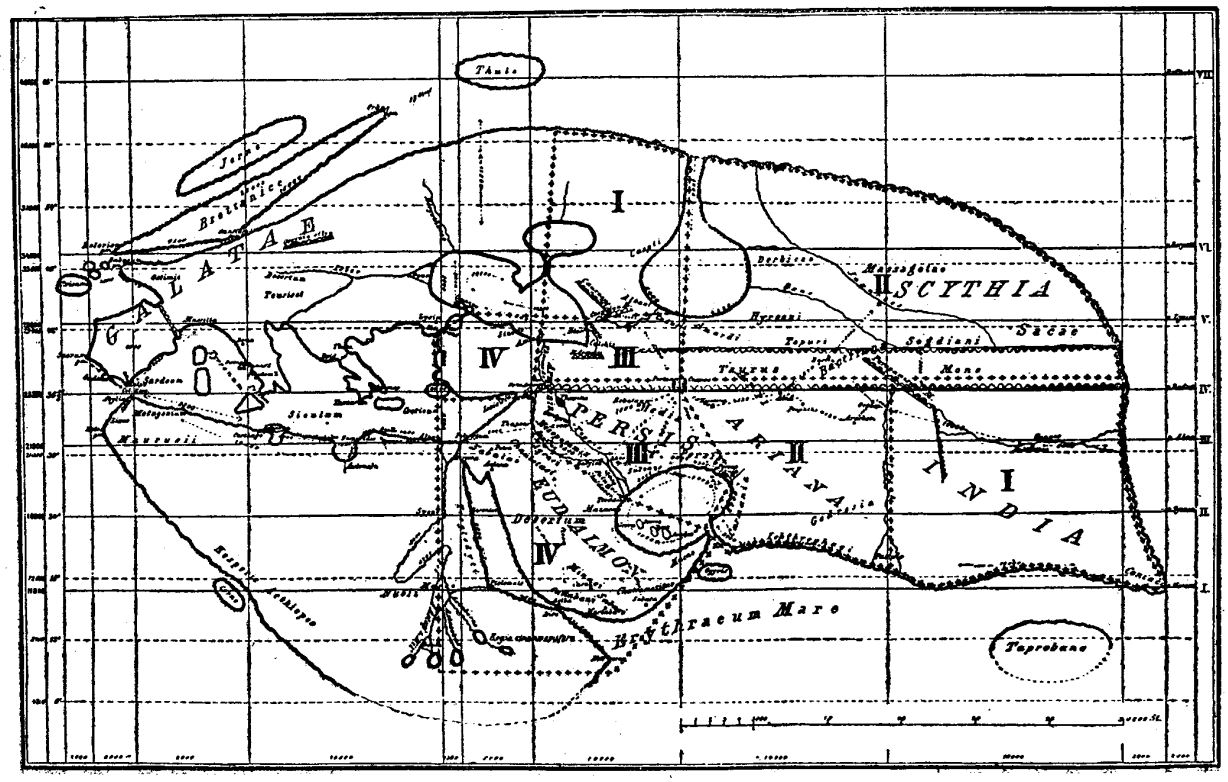
Piano tangente in un punto dell'equatore



Piano tangente nel Polo Nord

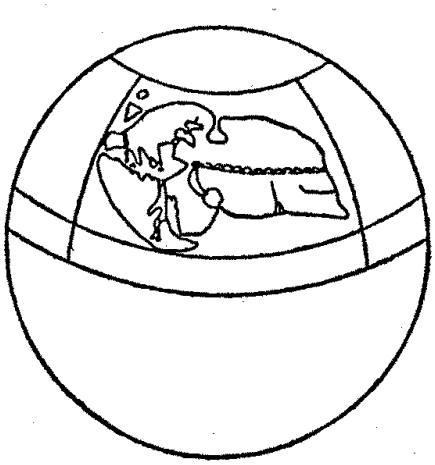
È evidente la distorsione nelle zone lontane dal punto di tangenza

Pare che anche **Eudosso di Cnido**, nel secolo IV a.C., abbia realizzato tavole geografiche. Intorno al 300 a.C, comparvero i paralleli e i meridiani. Ad introdurli fu il messinese **Dicearco** (sec. IV a.C.) che ebbe l'idea di tracciare una linea da oriente a occidente, da lui chiamata *diaframma*, che suddivideva il mappamondo in due parti uguali. Questo antenato dell'*equatore* passava per Rodi. E per Rodi passava un'altra linea retta, perpendicolare, quella che noi chiameremmo meridiano 0, che doveva formare con l'equatore una sorta di sistema di coordinate. L'unità di misura era lo *stadio olimpico*.
Parmenide fu invece il primo a suddividere la Terra in cinque zone, delimitate dalle linee che costituiscono, rispettivamente, l'equatore, i tropici ed i circoli polari.
Il matematico alessandrino **Eratostene** trasse da ciò lo spunto per cercare di acquisire conoscenze più accurate sulle reali dimensioni della Terra, basate in parte sui racconti dei viaggiatori, in parte su osservazioni astronomiche. Poiché il valore della circonferenza terrestre da lui calcolato superava l'estensione delle terre allora conosciute, concluse che il resto del globo dovesse essere coperto da una vasta distesa marina, che egli battezzò *Oceano Atlantico*.



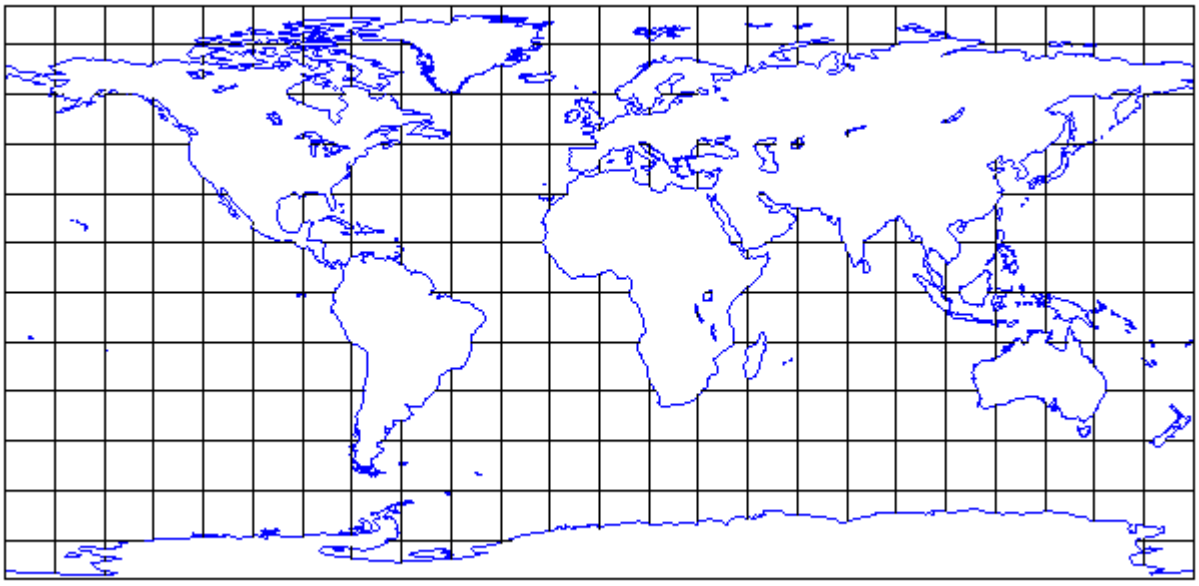
Il mondo abitabile secondo Eratostene (ricostruito da K. Miller)

I metodi di misurazione terrestre furono progressivamente perfezionati sino all'avvento dell'era cristiana, che vide le prime opere monumentali. Intorno all'anno 1 lo scrittore greco **Strabone** compose la sua ***Geografia*** in 17 libri.



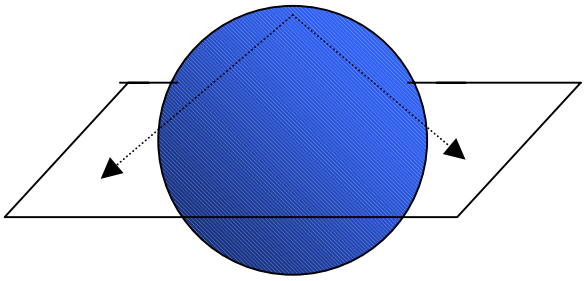
Le terre abitate secondo Strabone

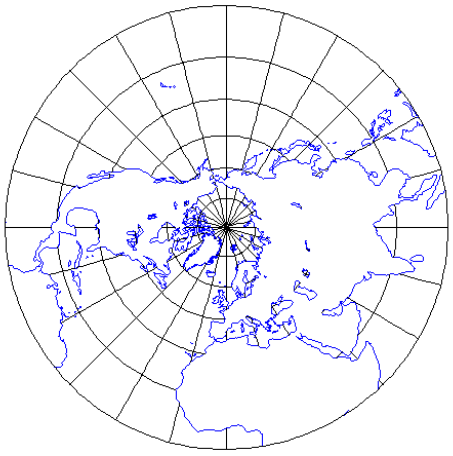
Occorre aspettare un altro secolo per vedere tavole composte secondo un criterio matematico preciso: sono quelle di **Marino di Tiro** (andate perdute), il primo a ricorrere ad una *proiezione piana* in cui i meridiani ed i paralleli vengono riprodotti come linee perpendicolari ed equidistanti. Si tratta della ***proiezione cilindrica equidistante****:*



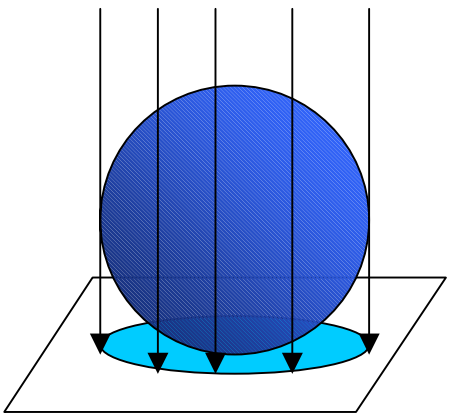
Altre innovazioni portate da Marino sono la scelta delle attuali Isole Canarie come origine dei meridiani, e la misura della longitudine in ore. Un'ora corrisponde a 15° gradi trigonometrici. L'idea di sostituire alle distanze espresse in stadi le ampiezze dei corrispondenti angoli al centro era stata formulata già da **Ipparco** nel secolo II a.C.. Egli aveva anche proposto di fare affidamento più sui moti dei corpi celesti che sui rilevamenti effettuati sulla terra e per mare dai naviganti. E le osservazioni astronomiche stanno alla base dell'atlante composto dal matematico egiziano **Claudio Tolomeo**: l'opera, intitolata ***Geografia***, in otto libri, comprendeva ventisette carte di singole regioni, precedute da un elenco alfabetico dei nomi di tutti i luoghi allora conosciuti, circa ottomila, seguiti dalle rispettive latitudini e longitudini, espresse in gradi. I dati erano tanto accurati da consentire, a chiunque avesse in mano l'opera, di costruire da sé tutte le carte geografiche del mondo.

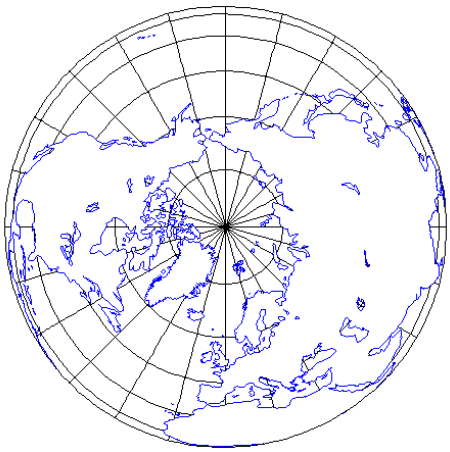
I metodi proposti da Tolomeo sono due. Il primo metodo è la ***proiezione stereografica polare*** che egli presenta nel suo trattato ***Planisferium***: ogni punto del globo viene proiettato dal Polo Sud o dal Polo Nord sul piano dell'equatore.



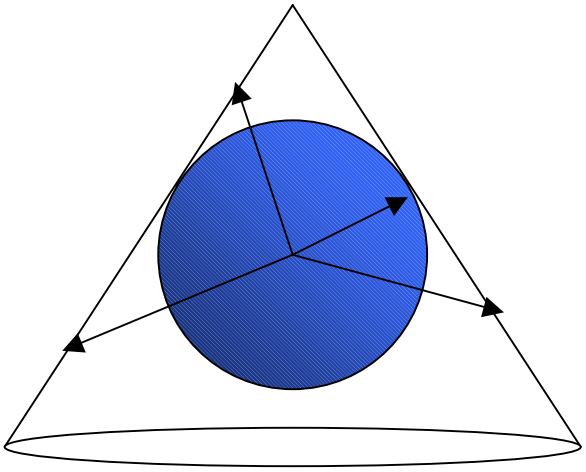


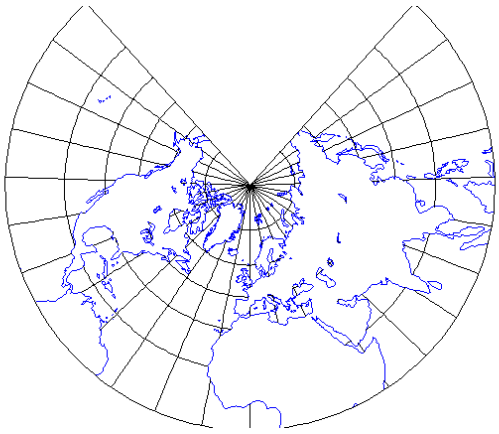
Questa tecnica è ispirata a quella usata da Ipparco, che proiettava la Terra ortogonalmente sul piano tangente al globo nel polo sud (***proiezione ortografica***).



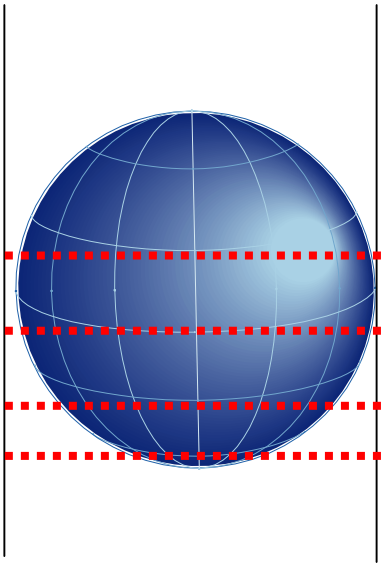


In entrambe queste proiezioni risulta visibile, nel disco delimitato dall'equatore, solo uno dei due emisferi. Nel secolo XVII il geometra francese **Philippe de La Hire** propose una variante della proiezione polare che riduce al minimo la distorsione: il centro era collocato sul raggio passante per il polo, ad una distanza dal centro pari al raggio diviso √2.
Il secondo metodo di Tolomeo è la ***proiezione conica gnomonica***: ogni punto di una regione viene proiettato dal centro del globo su di un cono tangente al globo stesso lungo un certo parallelo.

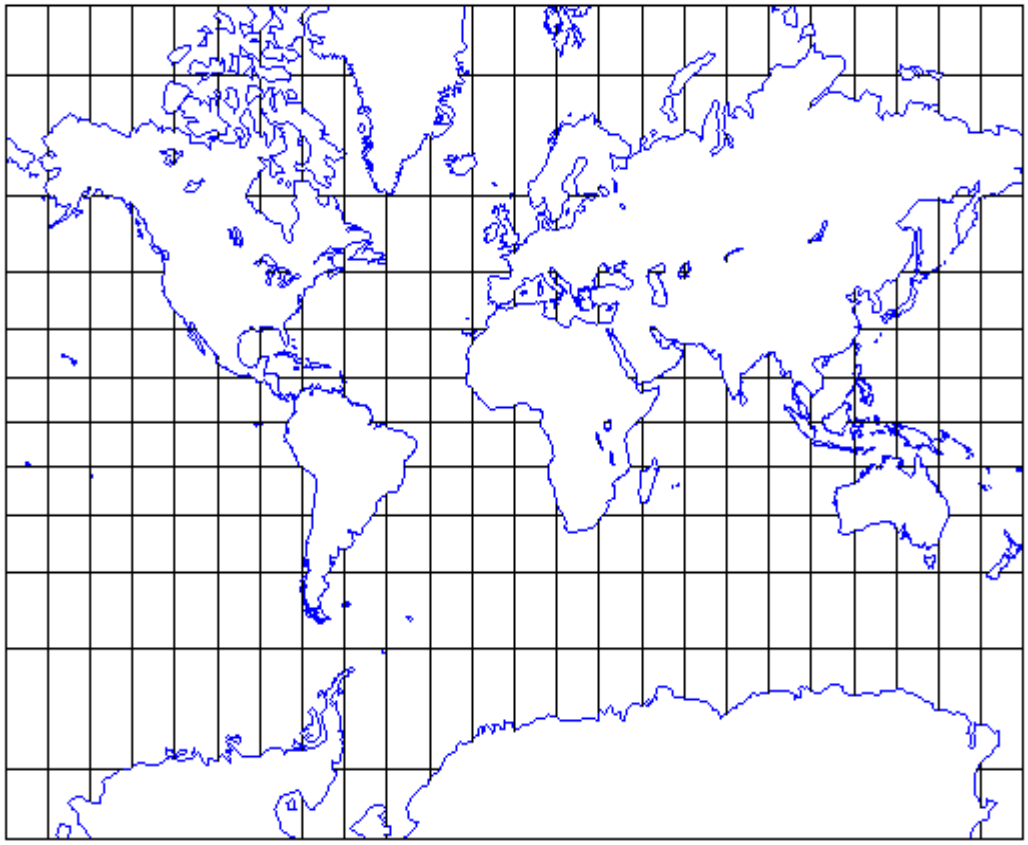




Nel corso della storia sono stati sviluppati molti altri tipi di proiezioni, tra cui la ***proiezione di Mercator***, che porta il nome latinizzato di Gerhard Kremer, un geografo fiammingo del Cinquecento. Egli perfezionò la ***proiezione cilindrica***: questa in origine prevedeva di proiettare i punti della superficie terrestre perpendicolarmente su di un cilindro circoscritto alla Terra e contenente l'equatore. Essa aveva lo svantaggio di falsare le direzioni, risultando assai poco utile in navigazione:

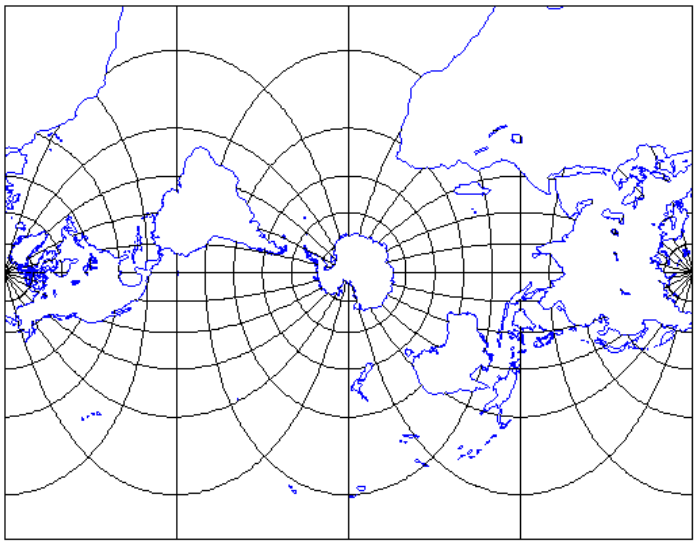


Mercator apportò le necessarie correzioni, e nel 1569, nell'opera ***Nova et aucta orbis terrae descriptio***, ideò la ***proiezione cilindrica isogonica***: la superficie terrestre viene proiettata dal centro della sfera su un cilindro circoscritto all'equatore. Questa tecnica non rimedia al difetto della deformazione in prossimità dei poli, non conserva distanze e aree, però riproduce fedelmente, sul piano, gli angoli misurati sulla superficie terrestre.



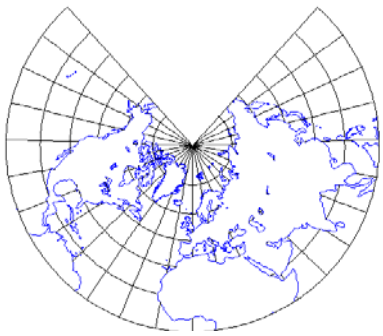
Un'applicazione che gode di questa proprietà viene oggi detta ***conforme***, ed è uno degli oggetti di studio di una disciplina che proprio dalla cartografia ha tratto origine, soprattutto grazie al contributo di **Eulero**: la **geometria differenziale**. Essa generalizza lo studio delle mappe a superficie di ogni forma, anche astratte, e a spazi geometrici aventi un numero di dimensioni comunque elevato. Si occupa, tra l'altro, della determinazione delle ***linee geodetiche***, ossia delle linee che hanno lunghezza minima tra quelle che congiungono due punti assegnati. Una proiezione conforme, pur non conservando le lunghezze, conserva gli angoli, e quindi conserva, localmente, i rapporti fra le lunghezze. Quando diciamo "localmente" intendiamo "all'interno di una piccola regione" e "con buona

approssimazione". In effetti, nella proiezione cilindrica di Mercator, sulla carta, una distanza misurata vicino ai poli viene resa, rispetto alla stessa distanza misurata all'equatore, con un elevato fattore di contrazione.
Per ovviare a questa deformazione le carte topografiche vengono oggi realizzate utilizzando la proiezione su di un cilindro circoscritto al globo lungo il meridiano che attraversa il centro della regione considerata: questa tecnica, dovuta a **Gauss**, è detta ***proiezione di Mercator trasversale universale (MTU)***.



La differenza più evidente tra la proiezione di Mercator e quella cilindrica equidistante è il fatto che nella prima i paralleli sono sempre più vicini man mano che ci si avvicina ai poli: in questo modo si rende ragione del fatto che, al diminuire della latitudine, la distanza fra due gradi di longitudine diventa sempre più piccola. Poiché gli angoli sulla superficie vengono conservati, le linee che formano lo stesso angolo con tutti i meridiani, dette ***lossodrome***, nella proiezione di Mercator corrispondono a linee rette, mentre nella proiezione stereografica sul piano dell'equatore sono **spirali logaritmiche**.

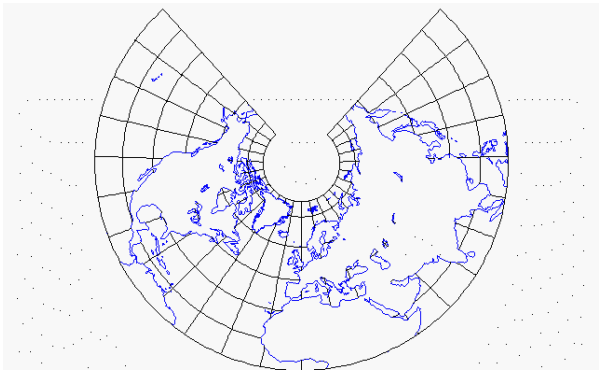
Una versione perfezionata e conforme della proiezione conica di Tolomeo fu invece introdotta, nel Settecento, dal matematico svizzero **Lambert** (ricordato, fra l'altro, per aver contribuito alla nascita delle **geometrie non euclidee**):

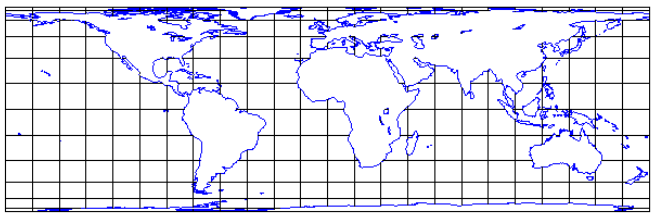


L'inconveniente della deformazione delle

regioni sulle carte geografiche ha dato origine allo studio delle cosiddette ***superficie sviluppabili***, che sono oggetto della geometria differenziale: si tratta, in poche parole, delle superficie che possono essere tagliate e srotolate su di un piano. Evidentemente la sfera non è di questo tipo: ne erano convinti anche i cartografi antichi, ma la dimostrazione venne solo nel Settecento. Tuttavia è sicuramente utile cercare superficie simili alla sfera per le quali questa operazione sia possibile. Oggi sappiamo che le superficie siffatte sono solo i coni, i cilindri e le superficie rigate (cioè formate da rette) circoscritte a curve nello spazio.
Eulero si occupò sia di cartografia pratica (realizzò una carta della Russia) sia della teoria generale delle applicazioni conformi, cui applicò i **numeri complessi**.

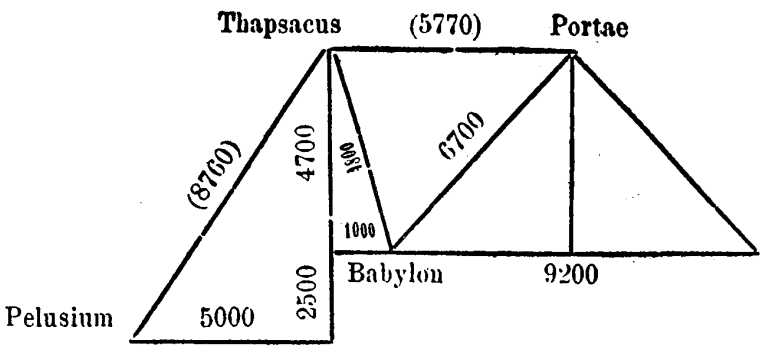
Le proiezioni conformi non conservano le aree. Esistono però varianti delle proiezioni coniche e cilindriche, dette equivalenti, che conservano le aree:



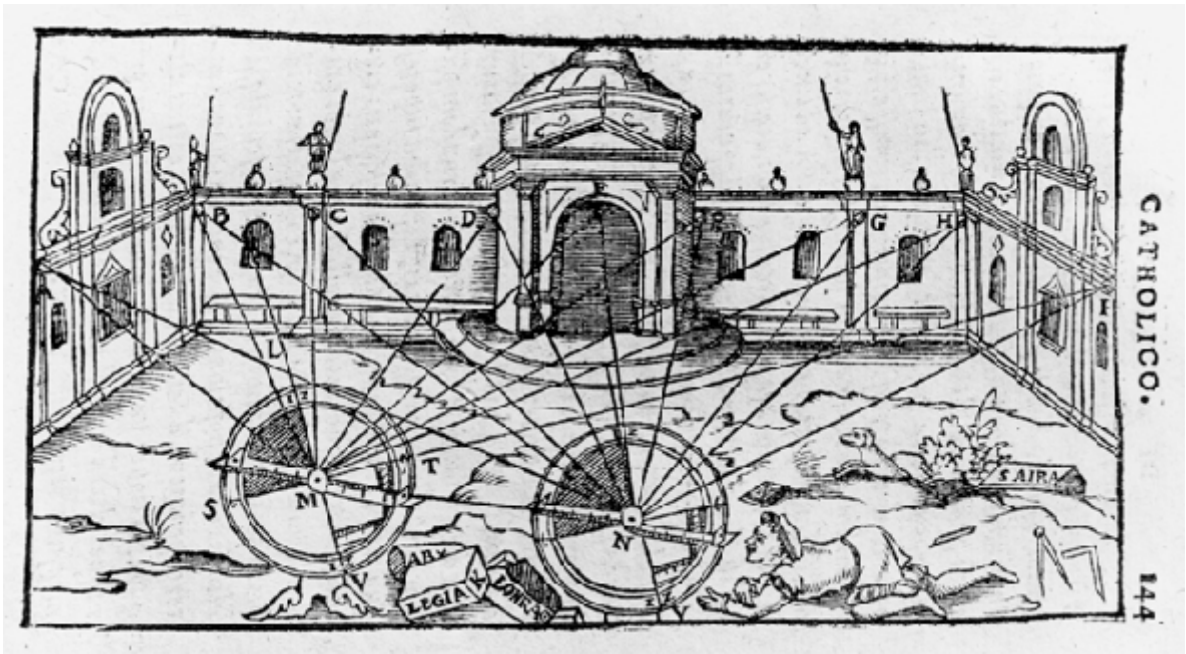


Il primo problema che gli uomini dovettero affrontare per poter tracciare sulla carta i contorni di terre e mari fu quello della misurazione delle distanze. Fin dall'antichità si ricorse alla trigonometria, più precisamente, alle proprietà dei triangoli, così brillantemente esposte, ad esempio, negli ***Elementi*** di **Euclide**. Ecco perché le antiche carte geografiche presentano un reticolato di triangoli.

La **triangolazione** d'Ipparco era basata su triangoli rettangoli: conoscendo due lati, era noto anche il terzo:



In generale, è possibile ricorrere alle proprietà dei triangoli simili per determinare distanze che non sia possibile misurare direttamente: il primo ad utilizzare questi metodi fu il filosofo presocratico **Talete**, considerato l'ideatore delle tecniche per misurare "l'inaccessibile mediante l'accessibile": utilizzando il famoso **teorema** di geometria piana che da lui ha preso il nome, riuscì a calcolare l'altezza della piramide di Cheope a partire dalla lunghezza della sua ombra. Lo stesso principio matematico compare in alcune pagine dei ***Ludi matematici*** di **Leon Battista Alberti** e della ***Geometria Pratica*** del **Perini**. Su questi metodi si basa anche il funzionamento del ***teodolite***, lo strumento dotato di un goniometro graduato, utilizzato nei rilevamenti topografici.



Esso consente di misurare le lunghezze sia in orizzontale, sia in verticale, determinando gli angoli visuali – detti, rispettivamente, *azimutali* e *zenitali* – con cui queste lunghezze appaiono agli occhi dell'osservatore. Il teodolite ha un antichissimo precursore nella ***diottra***, un rudimentale apparato descritto, ad esempio, dal matematico greco-alessandrino **Erone**.

Il principio dell'angolo visuale è anche alla base della ***prospettiva***, studiata dall'Alberti con rigore matematico, e della teoria astronomica della **parallasse**, applicata da **Tycho Brahe** e da **Copernico**.

Un altro importante aspetto messo in luce dalle ricerche intorno alla cartografia è la possibilità di trasformare un oggetto geometrico in un altro, di forma anche molto diversa, proiettandolo su di un piano. La classificazione degli oggetti che sono legati da questa relazione è

compito della **geometria proiettiva**. Se ne vedono le prime tracce nel Seicento, nelle opere di **Keplero** e, soprattutto, in quelle di **Pascal** e di **Desargues**. Ad esempio, sono proiettivamente equivalenti tutte le **sezioni coniche** non degeneri: la circonferenza, l'ellisse, la parabola e l'iperbole. L'una può essere trasformata nell'altra proiettandola da un punto su di un piano.

Recentemente, da quando è possibile scattare dettagliate fotografie dallo spazio, ad esempio tramite i satelliti meteorologici, la realizzazione di carte geografiche ha, naturalmente, cessato di essere un problema matematico di misurazione. Recentemente, lo shuttle Endeavour ha registrato, mediante un sofisticato sistema di radar, un'immagine tridimensionale ad alta definizione dell'intera superficie terrestre. Si tratta del primo atlante mondiale realizzato con dettagli di 30 metri in orizzontale e 6 metri in verticale. Hanno partecipato al progetto, realizzato dalla NASA, anche l'Agenzia Spaziale Italiana e l'Alenia.

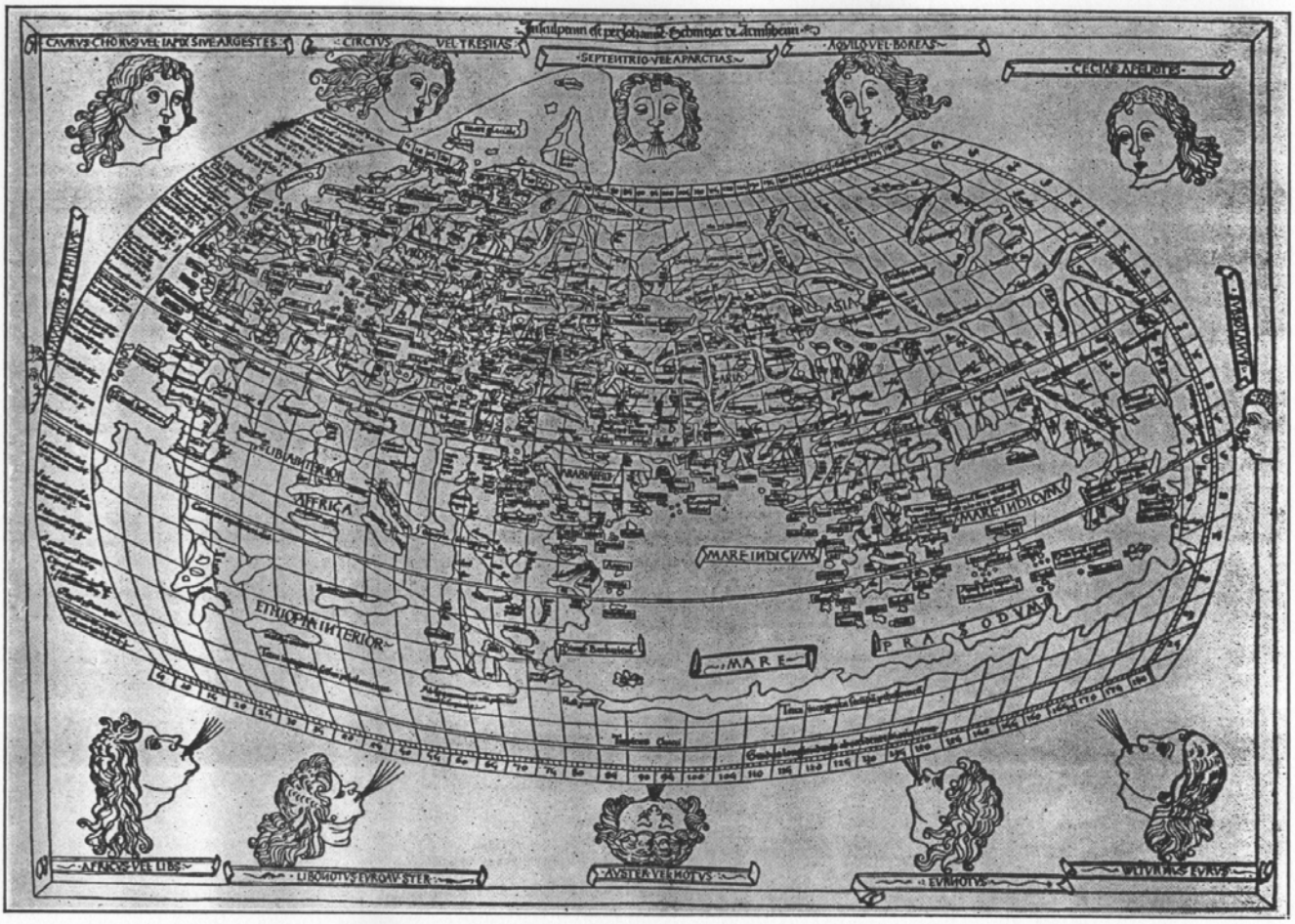


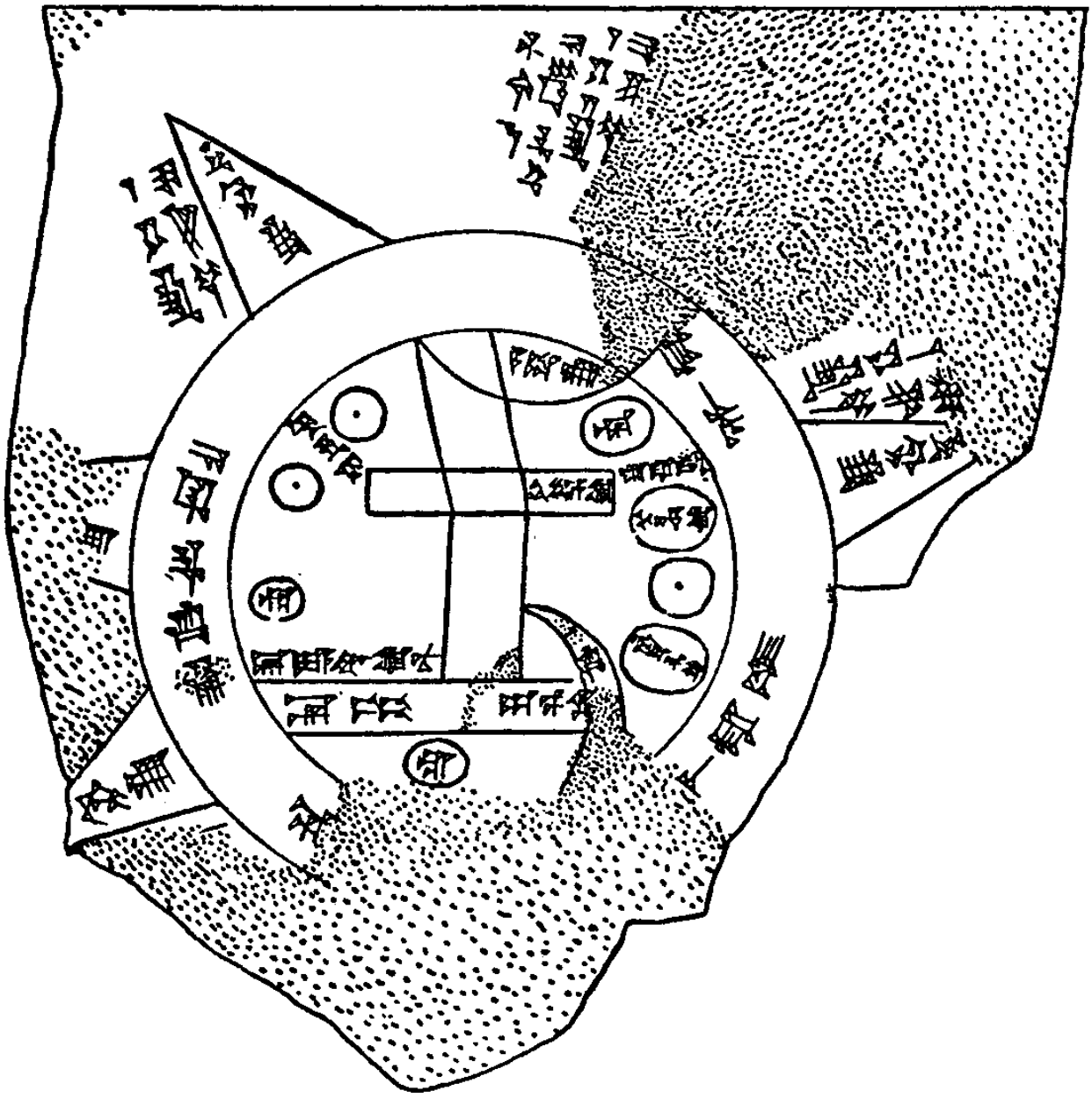


Un'immagine della penisola di Kamčatka (Russia)
(foto da "La Stampa" del 24/2/2000)

Curiosità Alle carte geografiche piane è ispirato il noto **teorema dei quattro colori**, che è stato per lungo tempo una delle maggiori croci dei matematici di tutto il mondo.

Carta del mondo babilonese
Carta del mondo di Tolomeo


CAVRVS CHORVS VEL IAPIX SIVE ARGESTES
CIRCIVS VEL TRESIAS
SEPTENTRIO VEL APARCTIAS
AQVILO VEL BOREAS
CECIAS AFELIOTES
ASIA
AFFRICA
ETHIOPIA INTERIOR
MARE INDICVM
MARE INDICVM
MARE
PRASODVM
AFRICVS VEL LIBS
LIBONOTVS EVROAVSTER
AVSTER VEL NOTVS
EVRNOTVS
VLTVRNVS EVRVS



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)





Studiò ingegneria civile all'Ecole Polytechnique di Parigi – la stessa che avrebbe rifiutato **Galois** – dove divenne professore nel 1817. Con i numerosi lavori scritti in giovane età si era fatto notare dai maggiori matematici francesi, come **Laplace** e **Lagrange**. Esiliato a seguito della rivoluzione del 1830, riparò in Italia. Frequentò a Milano il salotto di Alessandro Manzoni. Per qualche tempo insegnò latino e italiano, poi accettò una cattedra di fisica teorica – allora detta *fisica sublime* – offertagli da re Carlo Alberto di Savoia. A Roma incontrò i matematici delle Scuole Pie ed ottenne un'udienza privata da papa Gregorio XVI, cui era giunta la fama del matematico francese, noto anche come fervente cattolico.
Nel giugno del 1833, improvvisamente, Cauchy lasciò l'Italia alla volta di Praga, dove il re esule Carlo X di Borbone l'aveva chiamato come istitutore dell'erede al trono Duca di Bordeaux. Rientrato in Francia nel 1837, fu reintegrato nella sua posizione accademica solo nel 1848, anno in cui, in seguito alla detronizzazione di Luigi Filippo di Orléans e alla proclamazione della repubblica, poté assumere la cattedra di astronomia matematica. Poté conservarla anche quando, nel 1852, la repubblica finì e Napoleone III si autoproclamò imperatore: una speciale disposizione lo dispensò infatti da quel giuramento di fedeltà che mai, nella sua vita, aveva voluto prestare.

Genio precoce ed eclettico, può essere elencato insieme con **Eulero** e a **Cayley** tra i matematici più produttivi della storia. La sua *opera omnia,* pubblicata in Francia tra il 1882 ed il 1970, comprende 27 grossi volumi.

A lui si deve la sistemazione moderna e rigorosa del **calcolo infinitesimale**, da cui scaturirono molte ricche esposizioni didattiche (***Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique,* 1821, *Leçons***

données a l'Ecole Polytechnique,* 1823**). Il suo nome è noto a tutti gli studenti dei corsi matematici universitari per i famosi ***criteri di convergenza per le* serie**. Cauchy approfondì il **calcolo integrale**, che utilizzò da un lato per la determinazione delle lunghezze delle curve e delle aree sottese, dall'altro per la risoluzione delle ***equazioni differenziali: in queste le incognite sono funzioni e le loro derivate. Studiò le funzioni definite sul campo dei **numeri complessi**. Applicò i metodi dell'analisi alla fisica, in particolare all'astronomia e all'ottica: aderendo alla **teoria ondulatoria** della luce, fondata da **Huyghens**, nella sua ***Mémoire sulla Théorie des Ondes***, del **1815**, studiò la propagazione dei raggi luminosi, espressa da equazioni differenziali.

In **algebra** si occupò di **teoria dei numeri** e della risoluzione delle equazioni algebriche. Le sue osservazioni su queste ultime permisero ad **Abel** di dimostrare l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado. Scrisse di **probabilità** e **geometria**. Tra i suoi risultati di formulazione elementare vale la pena di ricordare le sue **generalizzazioni** della **formula di Eulero** per i **poliedri**, che furono oggetto del suo primo scritto matematico, presentato all'Ecole Polytechnique nel febbraio del 1811, da *"Augustin Cauchy, ingegnere dei ponti e delle strade".*

A Cauchy e al matematico tedesco **Karl Gustav Jacobi** è dovuto lo sviluppo della teoria dei **determinanti**, che è alla base della risoluzione algoritmica dei sistemi di equazioni lineari in più incognite. Gli studi sull'argomento saranno successivamente ripresi da Cayley.

Curiosità

- Lo studente **Federico Menabrea**, che seguì i corsi di Cauchy, ha lasciato questa testimonianza scritta del suo singolare modo di fare lezione:

"I suoi corsi erano confusi. Saltava improvvisamente da un'idea all'altra, da una formula alla successiva senza nessuno sforzo per connetterle in qualche modo. Le sue lezioni erano delle oscure nuvole illuminate di tanto in tanto da lampi di puro genio. Di fatto, di trenta che si erano iscritti al suo corso, io sono stato l'unico a vederne la fine."

Generalizzazioni della formula di Eulero

Dato un **poliedro** convesso, il numero v dei vertici, il numero s degli spigoli ed il numero f delle facce sono legati dalla formula

$$v - s + f = 2,$$

trovata da **Descartes** e ripresa da **Eulero**, di cui oggi porta il nome. Il giovane **Cauchy** esordì nel mondo scientifico con un lavoro sui poliedri, in cui provò molti interessanti teoremi legati a questa famosa identità.

Cauchy precisò il risultato di Eulero provando che, se a, b, c, d, e,... sono i numeri di facce triangolari, quadrangolari, pentagonali, esagonali, ettagonali, ecc. del poliedro, questi sono legati al numero dei vertici v dall'identità:

$$4v - 8 = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots.$$

Cauchy dimostrò anche che la formula di Eulero continua a valere se si sostituiscono alle facce singole raggruppamenti di più facce: il numero v ed il numero s indicano allora rispettivamente il numero di vertici ed il numero di spigoli che delimitano questi raggruppamenti, che Cauchy chiamava *porzioni*.

Immaginiamo ora di decomporre un poliedro convesso in altri poliedri, aggiungendo un qualunque numero di vertici al suo interno. Se v, f, s indicano, rispettivamente, i numeri complessivi dei vertici, delle facce e degli spigoli, e p indica il numero dei poliedri, vale l'identità:

$$v + f = s + p + 1.$$

In assenza di decomposizione, il poliedro è uno solo, cioè $p=1$. Si ottiene allora, come caso particolare, la formula di Eulero.

Aggiungendo, ad esempio, un vertice al centro di un cubo, lo si suddivide in sei piramidi, aventi per basi le sue facce. In tal caso $v = 9$, $f = 18$, $s = 20$, e questi valori verificano l'identità

$$9 + 18 = 20 + 6 + 1.$$

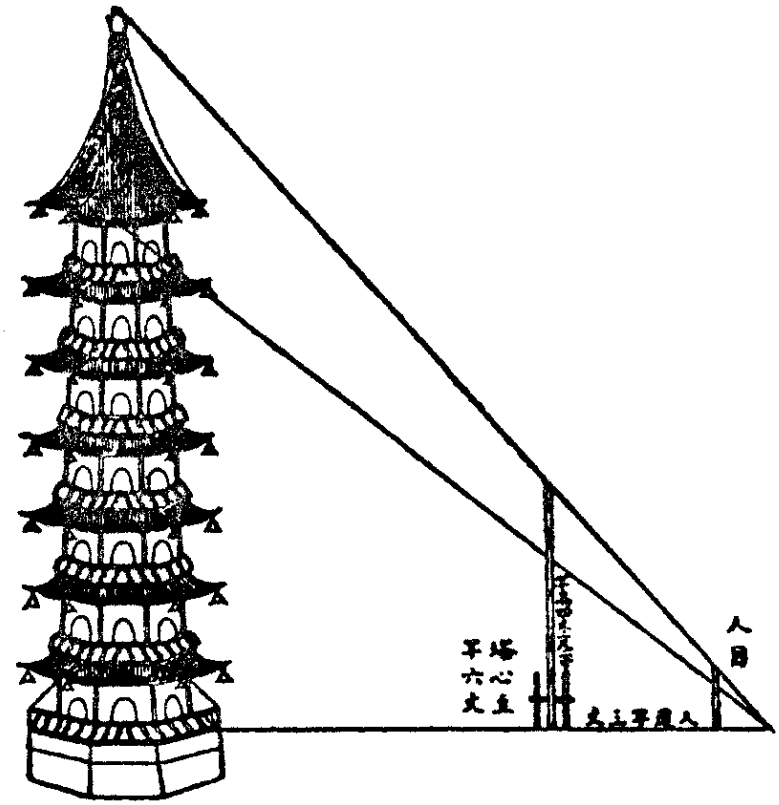
La matematica cinese

I due più antichi trattati di matematica sono il *Chou Pei Suan Ching* (Classico aritmetico dello gnomone delle orbite circolari del cielo) ed il *Chiu Chang Suan Shu* (Nove capitoli sulle arti matematiche): entrambi di datazione incerta, sono sicuramente anteriori all'anno 100 d.C..

L'aspetto più curioso del *Chou Pei* è il fatto che esso contiene il **teorema di Pitagora**, descritto sotto forma di **dialogo**, e corredato di una dimostrazione grafica. Viene addirittura citata la formula

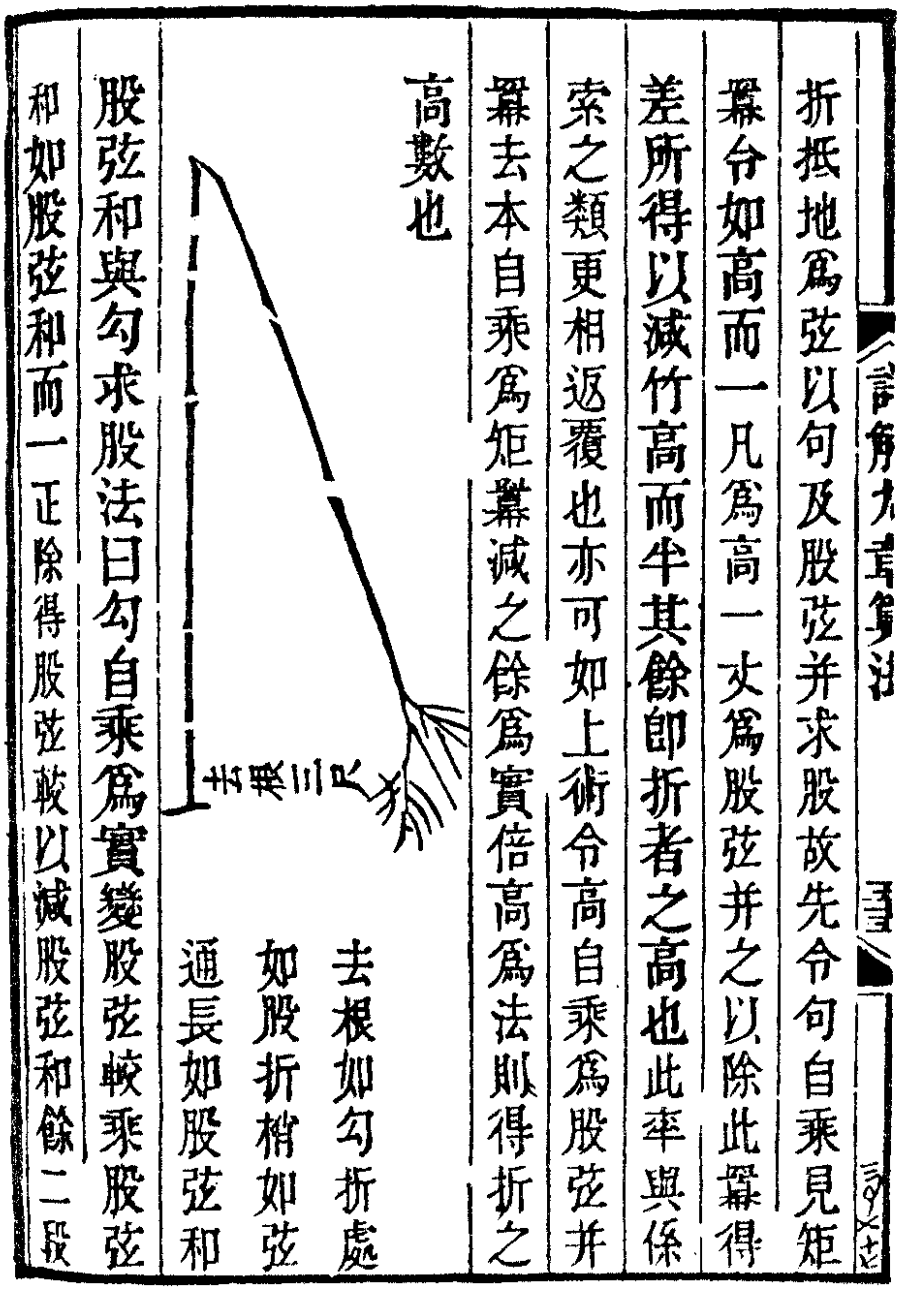
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che viene così descritta a parole: "moltiplica l'altezza del palo e la lunghezza dell'ombra per i loro valori, aggiungi i quadrati ed estrai la radice quadrata della somma ottenuta". Il testo originale è: *kou ku ko tzu chhêng, ping erh khai fang chhu chih.* Lo studio del triangolo rettangolo fu approfondito nei secoli seguenti, soprattutto in funzione delle applicazioni pratiche alla misurazione delle altezze degli edifici e della profondità dei corsi d'acqua.



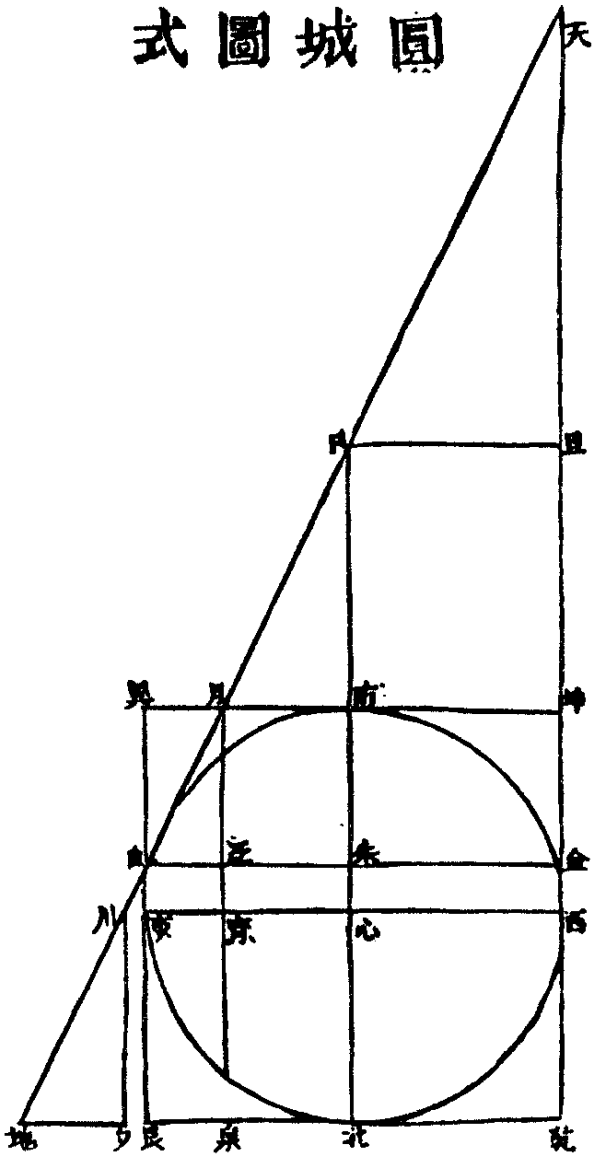
Nel *Chiu Chang,* nel capitolo intitolato *Kou Ku* (angoli retti) leggiamo il seguente problema. Una canna sporge di un piede dalla superficie dello specchio d'acqua, di cui si conosce l'estensione, e quando viene tirata verso il bordo dello stagno sfiora appena la superficie. Si tratta di determinare, a partire da questi dati, quanto è profondo lo stagno. Ovviamente occorre tradurre il problema in un'equazione algebrica di secondo grado: lo stesso capitolo ne contiene una scritta esplicitamente nella forma

$$x^2 + (20+14)x - 2 \times 20 \times 1775 = 0.$$



Un bambù spezzato: **un esempio di triangolo rettangolo tratto dalla natura**

In effetti i Cinesi, oltre alle tecniche di calcolo aritmetico impiegate nell'attività commerciale, seppero sviluppare metodi avanzati per la risoluzione, esatta o approssimata, di equazioni algebriche. Nel *Tshê Yuan Hai Ching* di Li Yeh (1248), ritroviamo il triangolo rettangolo, circoscritto ad un cerchio.



Tuttavia incontriamo soprattutto equazioni algebriche, di grado anche superiore al secondo. Vediamo, ad esempio, l'equazione cubica:

$$2x^3 + 15x^2 + 166x - 4460 = 0,$$

che l'autore scrive sovrapponendo i coefficienti secondo l'ordine crescente dei gradi:



Lo zero di 4460 è barrato, per indicare che al numero va anteposto il segno meno. Il livello raggiunto dall'algebra in Cina nel secolo XIII era sicuramente molto più avanzato rispetto all'Europa: poco avevano saputo fare i greci e gli **arabi**, e si potrebbe pensare che se **Fibonacci**, nel 1225, stupì Federico II di Svevia ricavando con straordinaria precisione decimale la radice irrazionale di un'equazione di terzo grado, ciò sia dovuto semplicemente ai numerosi viaggi in Oriente compiuti dal matematico pisano.

L'abilità dei Cinesi si spinse fino all'introduzione di matrici per risolvere i sistemi di equazioni lineari: fu però un giapponese, Seki

Kōwa, ad inventare i determinanti: egli pubblicò la sua idea nel 1683, dieci anni prima di **Leibniz**.

Già nel secolo IV, in Cina si risolvevano problemi indeterminati che oggi chiameremmo ***congruenze lineari***. Eccone un esempio:

Abbiamo un certo numero di oggetti, ma non sappiamo esattamente quanti. Se li contiamo a tre per volta ne rimangono due. Se li contiamo a cinque per volta ne rimangono tre. Se li contiamo a sette per volta ne rimangono due. Quanti oggetti ci sono?

In notazione moderna, il problema si traduce in un sistema di tre congruenze lineari:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

Questo sistema può essere risolto con un metodo che ancor oggi si chiama, non a caso, ***teorema cinese dei resti***.

I Cinesi sapevano anche risolvere equazioni algebriche a più incognite, che rappresentavano sotto forma di matrici, in cui i coefficienti occupavano posizioni prefissate. La risoluzione consisteva in una manipolazione di queste matrici secondo precise regole.

Secondo la traduzione di Donald B. Wagner, il **Problema 1** del **Capitolo 8** recita così:

Il rendimento di 3 fasci di cereali di qualità superiore, di 2 fasci di cereali di qualità media e di 1 fascio di qualità inferiore è di 39 tou.
Il rendimento di 2 fasci di cereali di qualità superiore, di 3 fasci di cereali di qualità media e di 1 fascio di qualità inferiore è di 34 tou.
Il rendimento di 1 fascio di qualità superiore, di 2 fasci di qualità media, e di 3 fasci di qualità inferiore è di 26 tou.
Qual è il rendimento della qualità superiore, media ed inferiore?
Risposta:
1 fascio di cereale di qualità superiore 9 ¼ tou,
1 fascio di cereale di qualità media 4 ¼ tou,
1 fascio di cereale di qualità inferiore 2 ¾ tou.

Il problema è equivalente ad un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x,y,z:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26,$$

cui è associata la matrice:

3	*2*	*1*	*39*
2	*3*	*1*	*34*
1	*2*	*3*	*26*

L'autore del trattato descrive i passaggi aritmetici che consentono di ridurre il sistema lineare ad una forma più semplice. Dopo aver compiuto certe operazioni sulle righe della matrice – che corrispondono a sommare e sottrarre opportunamente tra loro le equazioni del sistema - il sistema diventa *triangolare*:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$5y + z = 24$$
$$36z = 99,$$

e la soluzione si ricava facilmente. Si determina prima il valore di z dall'ultima equazione, lo si sostituisce nella seconda e si ricava il valore di y. Sostituendo i valori di z e y nella prima equazione si ottiene infine anche il valore di x.

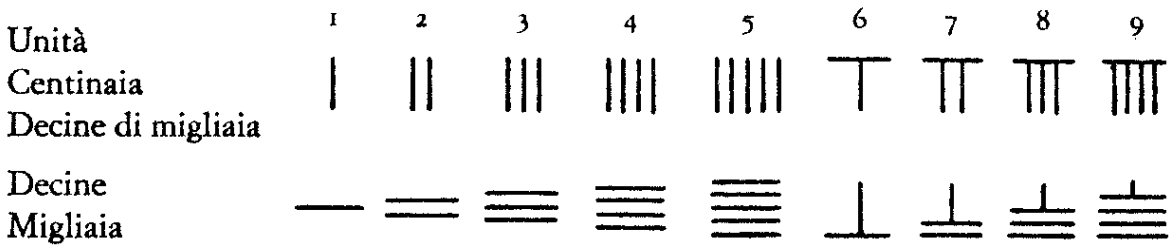
La numerazione cinese
La numerologia cinese

La numerazione cinese

Attualmente in Cina i numeri sono indicati con ideogrammi,

	Forme moderne di uso corrente		Forme di uso contabile
1	一	*i*	弌 o 壹
2	二	*erh*	弍 o 貳
3	三	*san*	叁
4	四	*ssu*	肆
5	五	*wu*	伍
6	六	*liu*	陸
7	七	*chhi*	柒
8	八	*pa*	捌
9	九	*chiu*	玖
10	十	*shih*	拾
100	百	*pai*	佰
1 000	千	*chhien*	仟
10 000	萬	*wan*	萬
0	零	*ling*	零

Per moltissimi secoli, però, i numeri furono indicati con simboli derivati dalle disposizioni delle bacchette di calcolo. Ecco le forme risalenti al III secolo d.C.:



Questa notazione è di tipo posizionale e presenta una curiosa particolarità. Una stessa cifra viene indicata in maniera diversa a seconda della posizione che occupa. Ad esempio, la cifra 5 viene denotata con cinque bacchette, che sono verticali per indicare 5, 500, e 50.000, e sono invece orizzontali in 50 e 5.000. Il numero

54.453

veniva così scritto dai Cinesi:



Successivamente venne introdotto lo zero, probabilmente di importazione indiana. Il primo lavoro a stampa in cui compare il simbolo 0 è un trattato del 1247, che contiene la sottrazione

1.470.000 – 64.464 = 1.405.536,

cioè

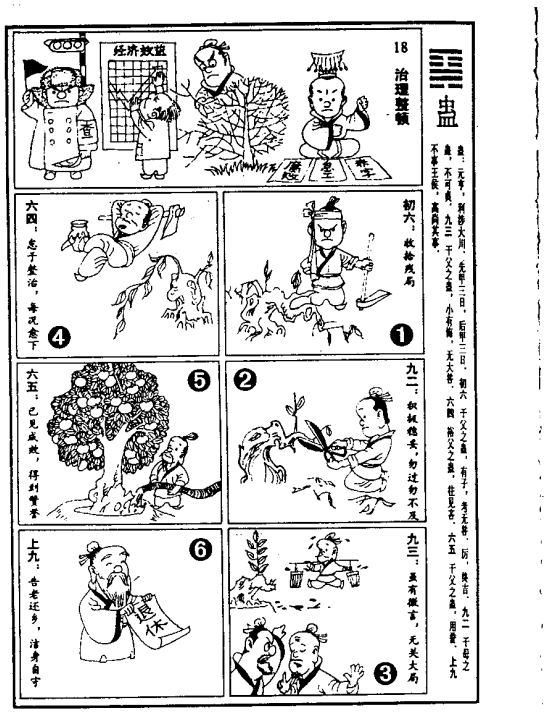


La numerologia cinese

Il fatto che i numeri avessero, per gli antichi Cinesi, un particolare significato magico, è testimoniato da varie pratiche divinatorie, basate, soprattutto, sulle diverse combinazioni di simboli. Nel ***Libro dei mutamenti (I Ching)*** vengono ricavati pronostici dall'esito dei sei lanci di una moneta, rappresentati da una sequenza di segni



Sono così formati i cosiddetti **esagrammi**, cui anche **Leibniz** dedicò la sua attenzione.



Esagramma 18
GU (gu)
IL LAVORO
(011.001) **Vento sotto/Monte sopra**

Testo dell'esagramma
Gu: grande fortuna. È propizio attraversare il grande fiume, ma solo tre giorni prima o dopo il giorno A*.

Definizione dell'esagramma
Gu: il trigramma duro si trova sopra quello morbido; il vento viene fermato. Questo è l'esagramma Gu, il quale presagisce grande fortuna e prevede l'ordine sociale in tutto il mondo. «È propizio attraversare il grande fiume», ciò significa che bisogna andare avanti nelle proprie faccende. «Ma solo tre giorni prima o dopo il giorno A». Con ogni fine nasce un inizio: questa è la legge del Cielo.

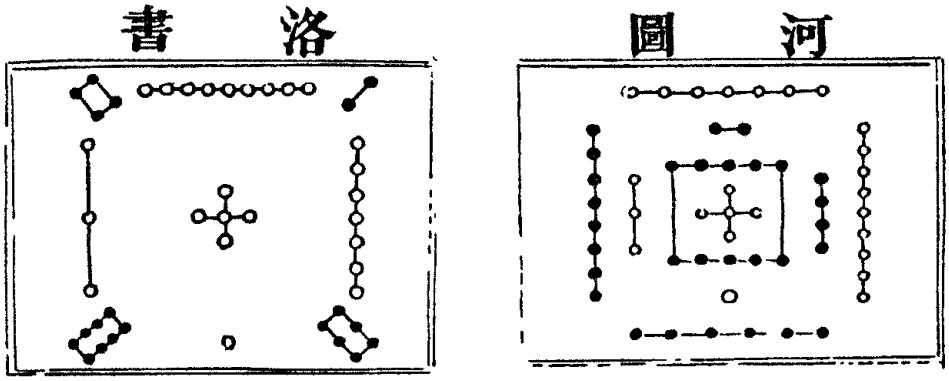
Commento al simbolo dell'esagramma
Ai piedi del Monte soffia il Vento: questa è l'immagine dell'esagramma Gu. Ispirandosi ad essa, il signore tiene alto il morale della gente e nutre la virtù.

* Nel calendario della Cina antica, con «il giorno A» s'intendeva il primo, l'11° ed il 21° giorno di ogni mese.

(da: I Ching. Il libro della mutazione, a cura di Yuan Huaqing, Vallardi, Milano 1993)

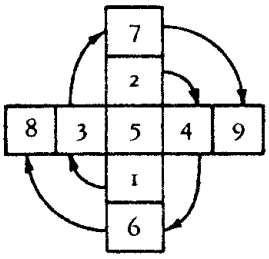
L'arte *chhê tzu*, detta *glifomanzia*, consisteva invece nel formulare previsioni sul destino di una persona permutando gli ideogrammi che ne componevano il nome, in modo da formare nuove parole: riscontriamo qui un'evidente analogia con la *cabala.*

Il gusto per le manipolazioni combinatorie si ritrova nei ***quadrati magici***, che traggono origine da una leggenda antichissima. Questa narra di un cavallo-drago che sarebbe emerso dal Fiume Giallo, e di una tartaruga uscita dal fiume Lo, due animali soprannaturali che avrebbero aiutato l'imperatore Yü il Grande a governare. Essi avrebbero portato in dono il *Ho Thu* ed il *Lo Shu*, due diagrammi numerici aventi le forme seguenti:

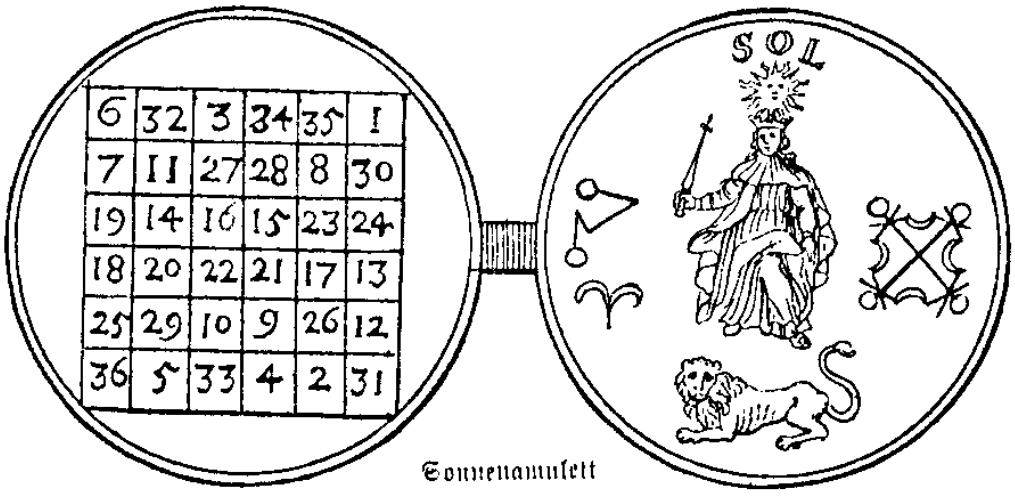


4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il diagramma Lo Shu.



Il diagramma Ho Thu.

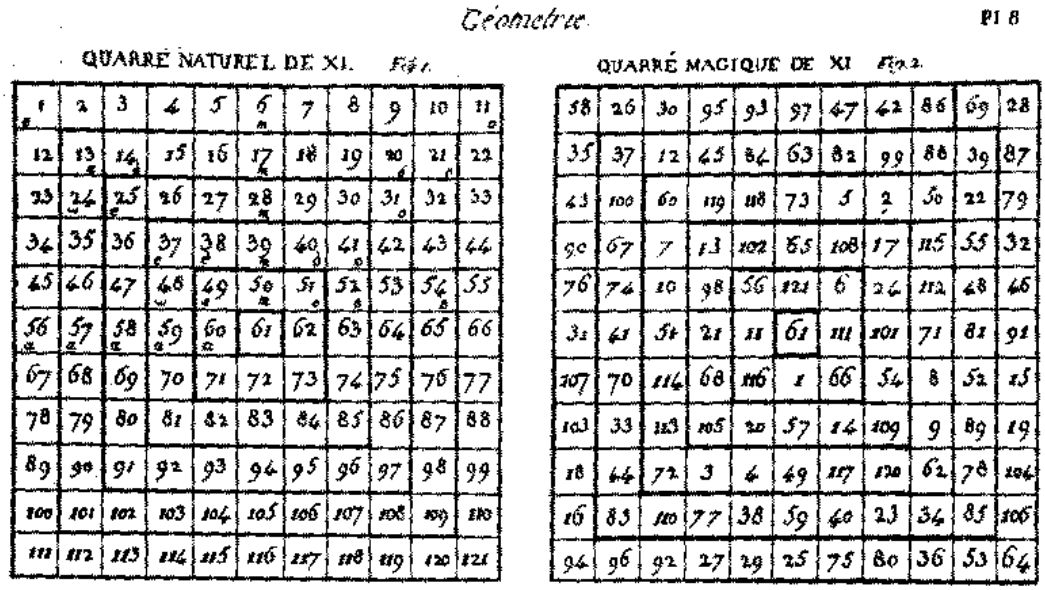


Dalla Cina i quadrati magici si diffusero in India e nel Vicino Oriente, e da lì in Europa. Il numero delle caselle aumentò, e mutarono, via

via, i significati magici ad essi attribuiti. Il cabalista tedesco Agrippa von Nettesheim compose, per ogni pianeta, un diverso quadrato magico. Quello dedicato al Sole è di tipo *6×6*, e presenta la proprietà più tipica dei quadrati magici: la somma dei numeri su ciascuna riga, su ciascuna colonna e sulle due diagonali è la stessa. Nel caso specifico si tratta di *111*, numero associato all'intelligenza solare, che è legato anche al *666*, noto numero del diavolo.

Un **quadrato magico** di tipo *4×4* compare nell'opera ***Melanconia*** del pittore tedesco **Albrecht Dürer**.

Fermat, in una lettera indirizzata a **Mersenne**, dichiara di poter determinare almeno una dozzina di quadrati magici *6×6*. **Pascal** dedicherà uno dei suoi scritti alla ***Soluzione di uno dei più celebri e dei più difficili problemi d'aritmetica, chiamato comunemente "I quadrati magici"***, in cui descrive regole per compilare quadrati magici di ogni ordine. Ecco alcuni esempi di ordine *11* e *12:*



Géometrie. Pl 8

QUARRÉ NATUREL DE XI. Fig. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

QUARRÉ MAGIQUE DE XI Fig. 2.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	85	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	54	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	123	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QUARRE NATUREL DE XII *Fig.3*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

QUARRE MAGIQUE DE XII *Fig.4*

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	11
17	52	24	109	104	69	45	108	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	140	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	106	77	129	73	67	66	84	56	68	37	70
38	69	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

È curioso osservare come popoli molto lontani tra loro abbiano sviluppato, in maniera indipendente, analoghi culti dei numeri.

Nelle *Metamorfosi della vita (I Pên Ming),* opera risalente al secolo II a.C., troviamo una descrizione dell'universo in termini aritmetici che ricorda da vicino la **filosofia di Pitagora**:

"Il Cielo è 1, la Terra 2, l'Uomo 3. 3×3 fa 9, 9×9 fa 81. Il numero 1 domina il sole. Il numero del sole è 10. Perciò l'uomo nasce nel decimo mese di sviluppo.
8×9 fa 72. Qui un numero pari segue uno dispari. I numeri dispari dominano il tempo. Il tempo domina la luna. La luna domina il cavallo. Perciò il cavallo ha un periodo di gestazione di 11 mesi.
7×9 fa 63. 3 domina l'Orsa Maggiore (il Mestolo del Nord). Questa costellazione domina il cane. Perciò il cane nasce dopo 3 mesi soltanto.
6×9 fa 54. 4 domina le stagioni. Le stagioni dominano il maiale. Perciò il periodo di gestazione del maiale è di 4 mesi.
5×9 fa 45. 5 domina le note musicali. Le note dominano la scimmia. Perciò la scimmia nasce dopo uno sviluppo di 5 mesi.
4×9 fa 36. 6 domina i diapason a fiato. I diapason a fiato dominano il cervo; perciò esso rimane 6 mesi nel grembo materno.
3×9 fa 27. 7 domina le stelle. Le stelle dominano la tigre. Perciò la tigre nasce nel settimo mese.

2×9 fa 18. 8 domina il vento. Il vento domina gli insetti. Ecco perché gli insetti subiscono dei mutamenti nell'ottavo mese dell'anno."

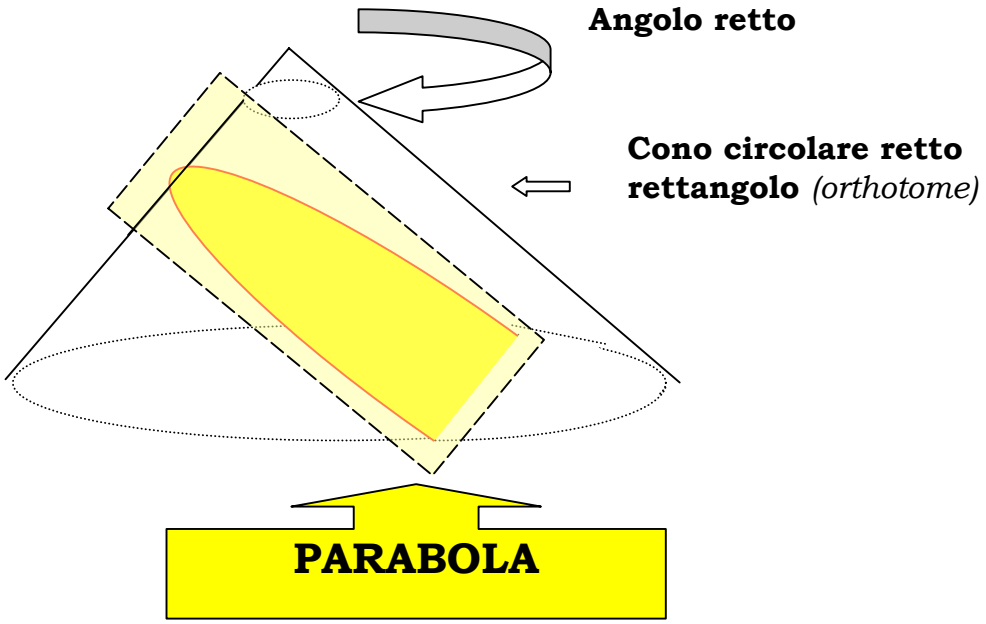
E ancora, nel *Sung Yuan Hsüeh An* (1750) leggiamo:

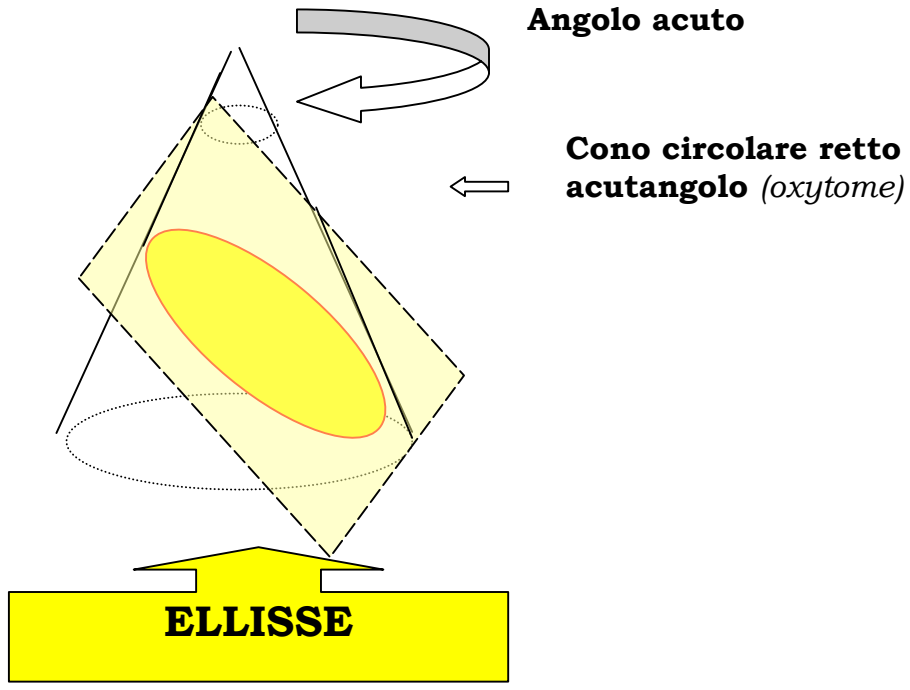
"Se si seguono i numeri (shu) di tutte le cose, se ne può conoscere il principio, se li si percorre a ritroso, si può sapere come giungono a una fine. I numeri e le cose non sono due entità separate fra loro. Se si conoscono i numeri, si conoscono le cose, e se si conosce il principio, allora si conosce la fine. I numeri e le cose proseguono senza fine: come si può dire qual è il principio e qual è la fine?".

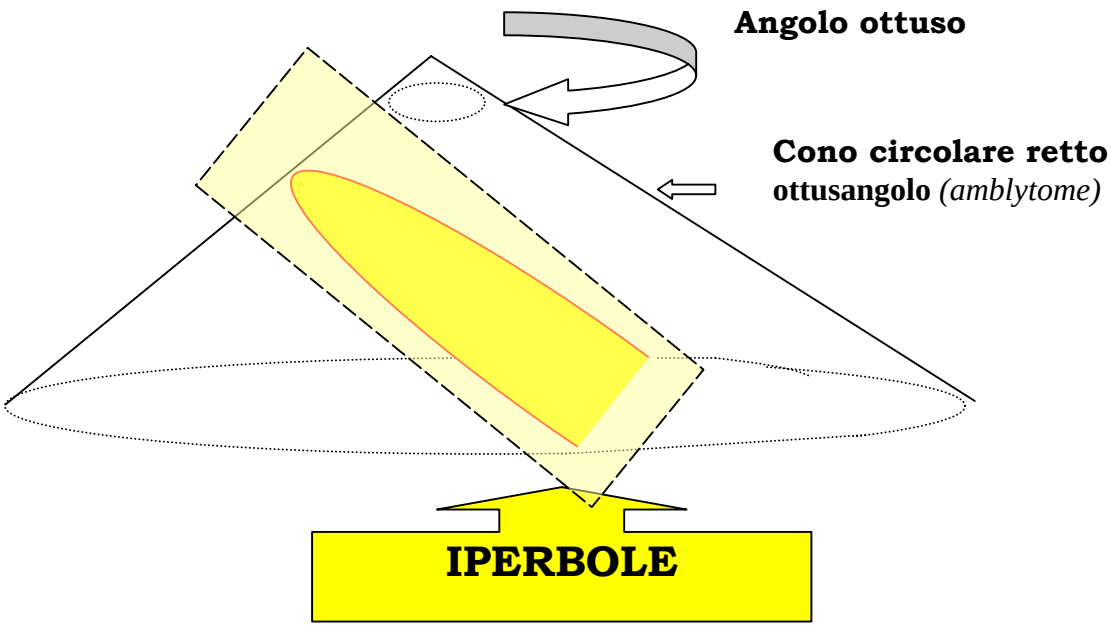
La matematica cinese

Le sezioni coniche

Queste curve furono introdotte dal matematico greco **Menecmo** (sec. IV a.C.), appartenente alla scuola platonica. Egli le ottenne intersecando un cono con un piano ortogonale alla sua superficie. A seconda che l'apertura del cono fosse un angolo retto, acuto oppure ottuso, la conica era una **parabola**, un'**ellisse**, oppure un'**iperbole**.

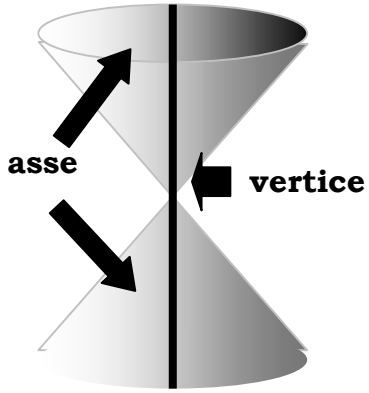




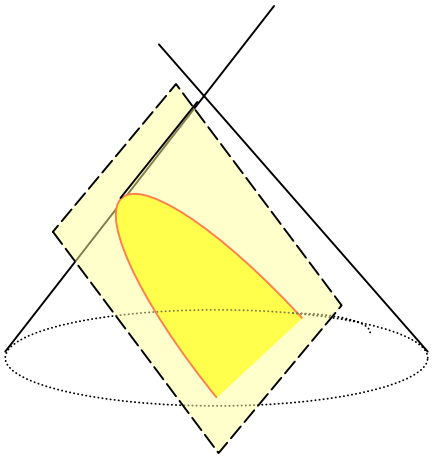


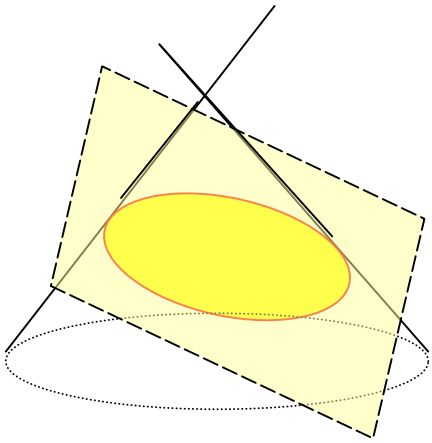
Menecmo dimostrò che era possibile risolvere il problema della **duplicazione del cubo** utilizzando due parabole, oppure una parabola ed un'iperbole.

Lo studio delle sezioni coniche fu ripreso ed approfondito da **Apollonio di Perga**, che ad esse dedicò il trattato ***Le coniche***. Fu lui a coniare i termini parabola, ellisse e iperbole: essi significano, rispettivamente "uguaglianza", "mancanza" ed "eccesso", e si riferiscono alla relazione esistente fra due particolari misure geometriche nei diversi tipi di conica. Apollonio propose un nuovo modo di realizzare le coniche: egli sostituì, innanzitutto, il "cono gelato" di Menecmo (*cono ad una falda*) con il *cono a due falde,*

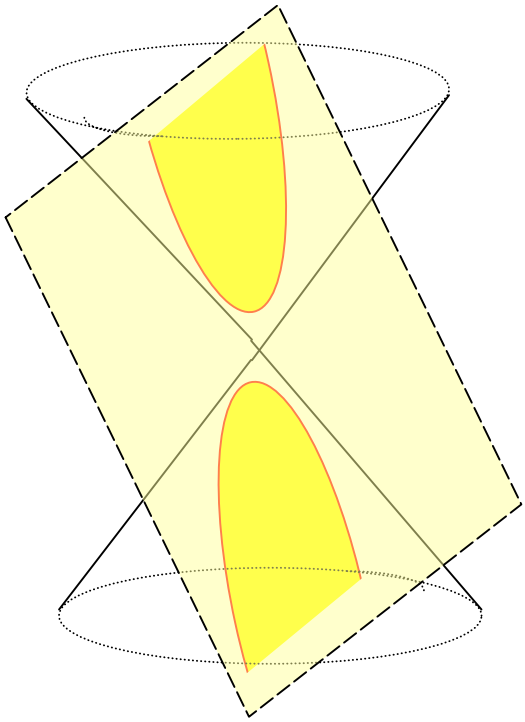


e dimostrò che tutte le coniche possono essere ottenute intersecando lo stesso cono (rettangolo, acutangolo od ottusangolo) con un piano: per cambiare la forma della conica è sufficiente variare l'inclinazione del piano rispetto al cono. La parabola e l'ellisse intersecano una sola falda del cono:



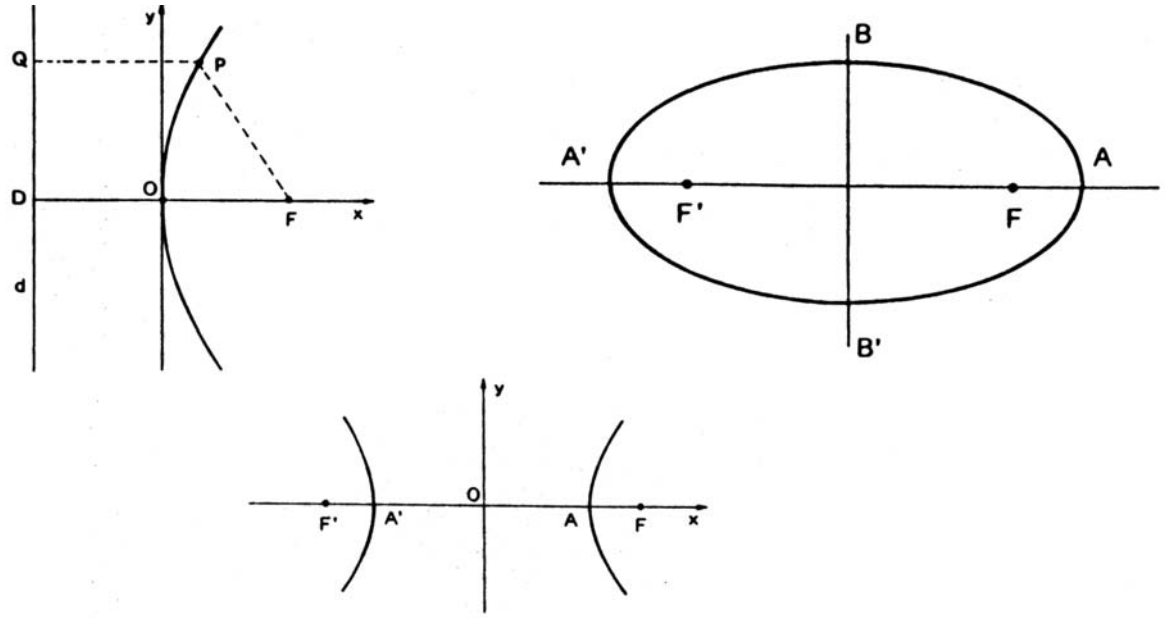


Invece l'iperbole di Apollonio taglia entrambe le falde del cono ed è una curva con due rami disgiunti e simmetrici:



Il cerchio è un tipo particolare di ellisse; sono cerchi le sezioni, ortogonali all'asse, di ogni falda del cono.

Ecco come appaiono i tre tipi di coniche, ciascuno in un opportuno **sistema di coordinate cartesiane**:

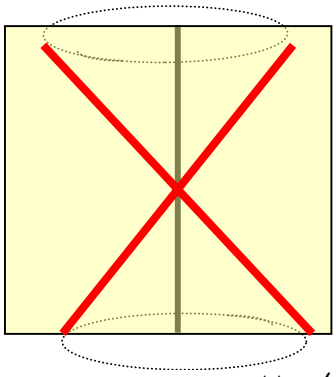


Le equazioni cartesiane delle coniche si ottengono ponendo uguale a zero un polinomio di grado due, e furono scritte per la prima volta dal matematico inglese **John Wallis** nel trattato ***De sectionibus conicis*** (1655): egli le derivò dalle proprietà geometriche dimostrate da Apollonio. Le coniche della figura hanno equazioni delle forme seguenti, dette *canoniche:*

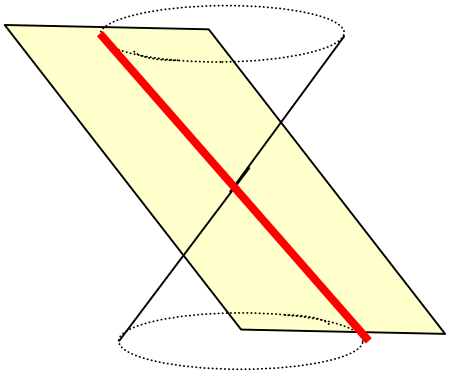
Parabola: $y^2 - px = 0$
Ellisse: $x^2/a + y^2/b = 1$
Iperbole: $x^2/a - y^2/b = 1$,

ove p, a, b sono opportune costanti positive.

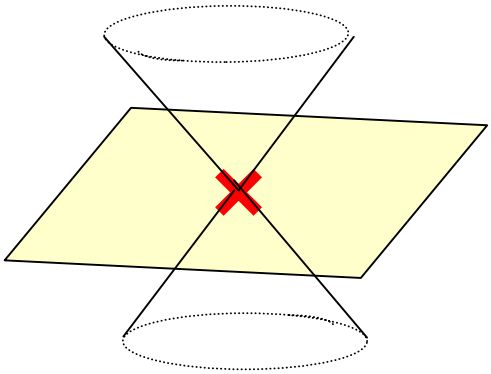
Si noti che l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono state ottenute intersecando il cono con piani *non passanti* per il suo vertice. Vediamo ora cosa accade quando intersechiamo il cono con un piano passante per il suo vertice. L'intersezione può essere costituita da due rette, per esempio se il piano contiene l'asse del cono:



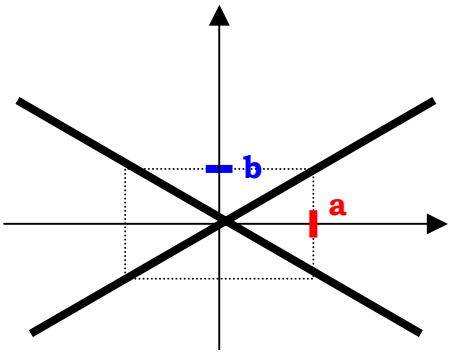
Oppure l'intersezione può essere una retta (doppia):

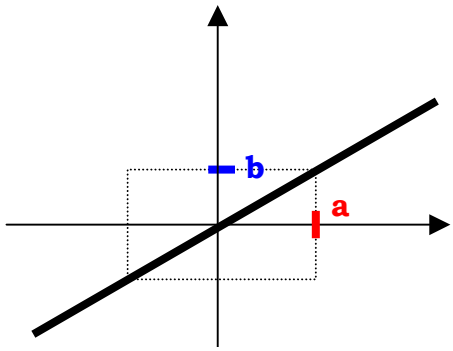


oppure un punto (doppio):



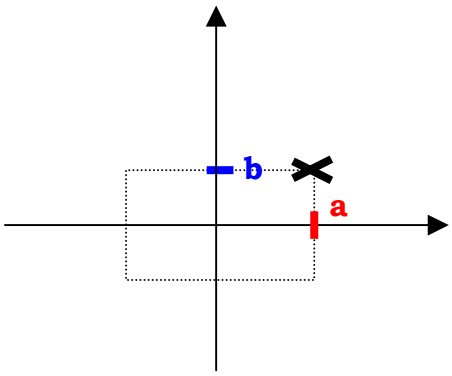
Le coppie di rette, le rette doppie ed i punti doppi sono dunque particolari tipi di coniche, che corrispondono a casi limite e sono dette *degeneri*. Anch'esse sono rappresentate nel piano da equazioni di grado due:





$C: (bx-ay)(bx+ay) = 0$

$C: (bx-ay)^2 = 0$



$C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$

In un certo senso, anche il punto doppio può nascondere una coppia di rette. Questo è possibile solo a patto di estendere il piano cartesiano in modo da dare significato di coordinata a tutti i **numeri complessi**. I punti delle rette in questione hanno quasi tutti almeno una coordinata complessa non reale: l'unico punto reale è il loro punto d'intersezione ( ). Le equazioni cartesiane complesse di queste due rette sono:

$r_1 : (x-a) + i(y-b) = 0$ $\qquad$ $r_2 : (x-a) - i(y-b) = 0$

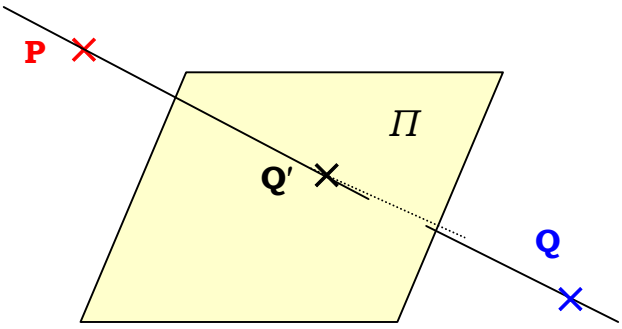
L'ellisse, la parabola e l'iperbole sono dette coniche *non degeneri*.

Secondo una suggestiva descrizione data da **Keplero** nel suo trattato ***Ad Vitellionem paralipomena*** *("Introduzione all'ottica di Witelo")*, esiste un rapporto di continuità fra i diversi tipi di coniche: da una retta doppia se ne ottengono facilmente due, dopo aver sdoppiato il loro punto d'intersezione, e queste, a loro volta, possono venire deformate nei due rami di un'iperbole; allontanando all'infinito uno dei due rami, si perviene al caso limite della parabola; immaginando di far passare il secondo ramo al di là dell'infinito, e di farlo tornare

verso la conica dalla parte opposta, fino al ricongiungimento, si ottiene infine un'ellisse.

Tra i numerosissimi problemi affrontati da Apollonio nel suo trattato v'è quello di determinare la **tangente ad una conica** in un punto dato.

Altre opere dell'antichità dedicate alle coniche sono un trattato di **Euclide** ed uno di **Archimede**.
Nel 1600 l'argomento venne ripreso con nuovo vigore: **Descartes** ne ***La Géométrie*** lo affrontò con i mezzi della ***geometria analitica*** da lui inventati. **Desargues**, **Pascal** e **de la Hire** dimostrarono nuovi teoremi utilizzando la ***geometria proiettiva*** *(o* ***geometria descrittiva****)*. Vediamo innanzitutto cosa si intende, nello spazio a tre dimensioni, per ***proiezione da un punto su di un piano***.
Siano dati un punto P ed un piano Π non passante per P. Consideriamo un punto Q, diverso da P. Tracciamo la retta $[P, Q]$. In generale questa retta intersecherà Π in un punto Q', che viene detto la *proiezione da P di Q su Π.*

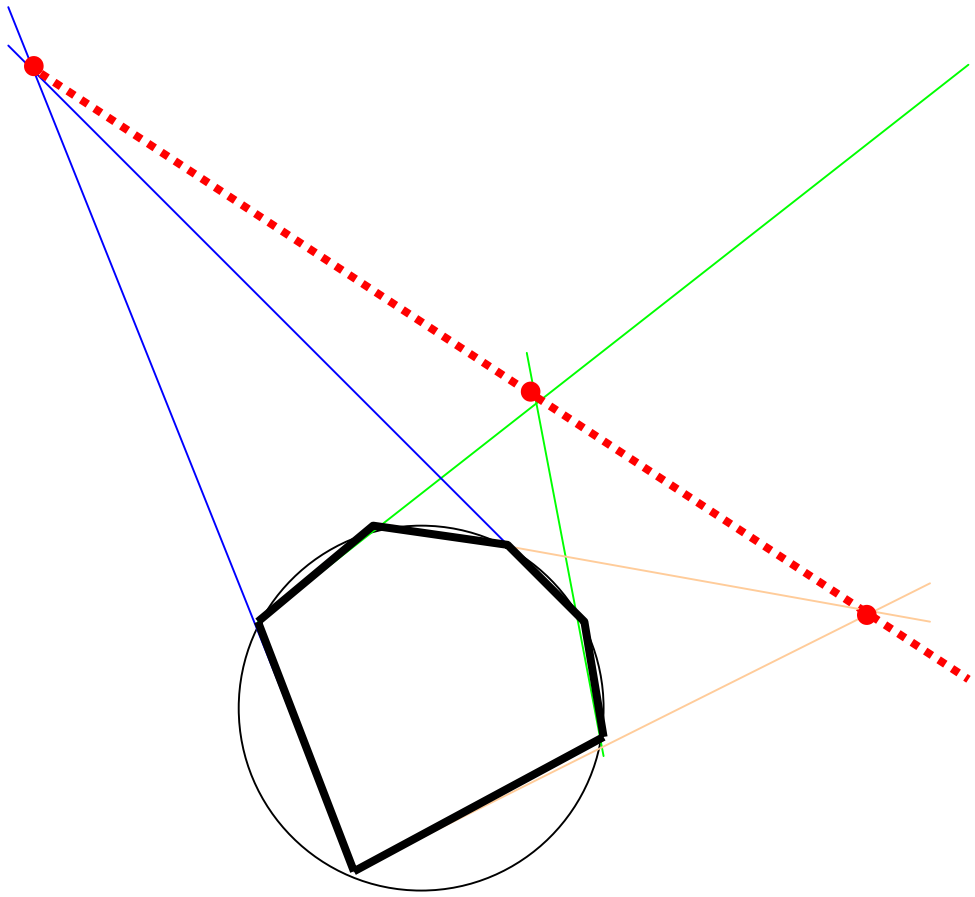


Dato un insieme di punti, ad esempio una curva, si definisce la proiezione della curva dal punto P sul piano Π come l'insieme delle proiezioni dei punti della curva stessa. Fissiamo una particolare conica C non degenere (ellisse, parabola o iperbole), ottenuta come sezione di un certo cono. Prendiamo come punto P il vertice del cono. È chiaro che le rette congiungenti P ed i punti di C formano il cono stesso. La proiezione C' di C sul piano Π sarà dunque l'intersezione del cono con Π. Poiché per ipotesi il piano Π non passa per P, la conica C' è non degenere. Scegliendo opportunamente il piano Π, si può fare in modo che C' sia un'ellisse, una parabola oppure un'iperbole, e ciò indipendentemente dalla natura della conica C. ***Ogni conica non degenere può essere proiettata in una qualunque altra conica non degenere***. A questo proposito **Newton**

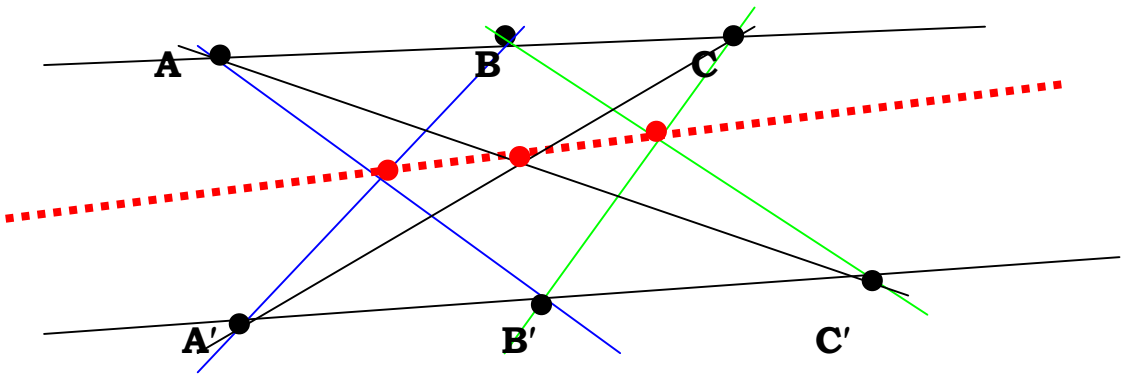
disse: *"Se le ombre delle figure sono proiettate su un piano infinito illuminato da un punto luminoso, le ombre delle sezioni coniche saranno sempre sezioni coniche."* Ecco alcune **immagini**.

Ciò permette di estendere molti teoremi validi per un certo tipo di conica non degenere ad ogni altro tipo di conica non degenere. Consideriamo, a titolo di esempio, un noto **teorema di Pascal**, tratto da un suo trattatello di otto pagine, intitolato ***Essai sur les coniques***, che egli scrisse all'età di soli diciassette anni. Egli dimostra il teorema per il cerchio, ed osserva che per proiezione esso si trasferisce ad ogni conica non degenere. Ecco l'enunciato:

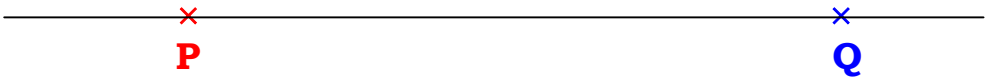
Dato un esagono inscritto in un cerchio, i tre punti d'intersezione dei prolungamenti delle coppie di lati opposti sono allineati.

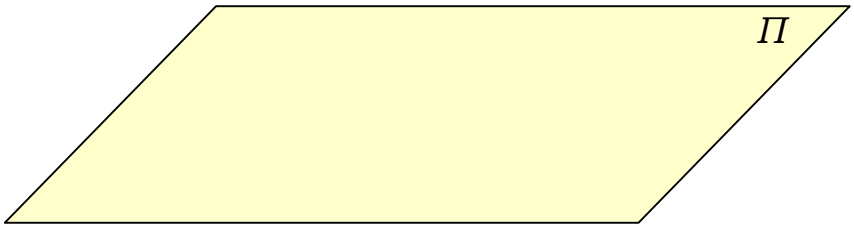


In realtà questo teorema si estende anche al caso in cui la conica è una coppia di rette: si ottiene allora il famoso **Teorema di Pappo**. L'enunciato è il seguente: *se A,B,C sono tre punti su di una retta, e A',B',C' sono tre punti sull'altra retta, allora i punti d'intersezione delle rette [*A, B*'] e [A', B], [*B, C*'] e [B', C], [C, A'] e [C', A] sono allineati.*



La proiezione, così come l'abbiamo definita, nasconde, in realtà, un problema, che finora abbiamo sottaciuto. Questo problema si pone, ad esempio, in un caso come quello raffigurato:





Vogliamo proiettare il punto Q da P sul piano Π, ma la retta $[P, Q]$ è parallela al piano Π, quindi è impossibile determinare l'intersezione Q'. Il problema si risolve con un'idea di **Desargues**: completiamo lo spazio aggiungendo un ***piano all'infinito*** Π_0, non visibile. In questo modo lo ***spazio affine*** diventa lo ***spazio proiettivo***. Il piano Π_0 interseca la retta $[P, Q]$ in un punto, detto ***punto all'infinito*** della retta, ed interseca il piano Π in una retta, chiamata ***retta all'infinito*** del piano. La retta ed il piano estesi prendono i nomi di ***retta proiettiva*** e ***piano proiettivo*** rispettivamente. La retta $[P, Q]$ ed il piano Π si intersecano all'infinito, nel punto all'infinito della retta: è questo il punto Q' cercato.
Parabole ed iperboli possiedono punti all'infinito, detti anche *impropri.* Ad esempio, proiettando un'ellisse su di una parabola, uno dei punti dell'ellisse viene proiettato all'infinito, in un punto (improprio) della parabola, nel quale quest'ultima "si richiude".

L'ellisse, la parabola e l'iperbole sono coniche diverse solo secondo la ***classificazione affine***. Secondo la ***classificazione proiettiva***

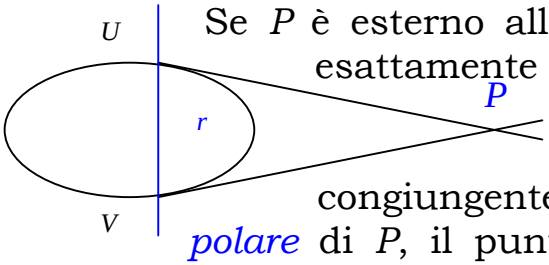
queste coniche sono tutte equivalenti: dal punto di vista proiettivo, infatti, le coniche si distinguono solo in semplicemente degeneri, doppiamente degeneri e non degeneri.

Il cono appartiene ad una classe particolare di superficie, dette ***quadriche***, caratterizzate dal fatto che tutte le loro sezioni piane sono coniche. Ad esempio, il ***paraboloide rotondo*** è la quadrica ottenuta facendo ruotare un parabola intorno al suo asse di simmetria. Altri esempi di quadriche sono **l'iperboloide iperbolico** e **l'iperboloide ellittico**.

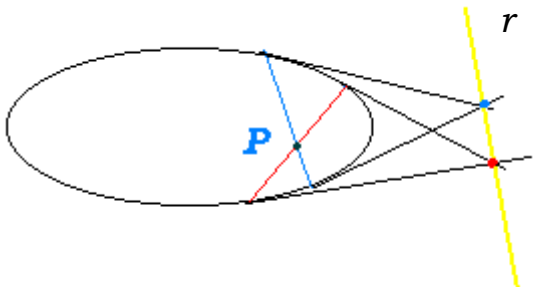
Le coniche come luoghi geometrici
La costruzione delle coniche
Le leggi di Keplero
Specchi parabolici, ellittici e iperbolici
La parabola e la caduta dei gravi
Le coniche nell'arte
La parabola secondo Apollonio
La costruzione delle coniche secondo Newton
La curvatura della parabola

Curiosità sulle coniche

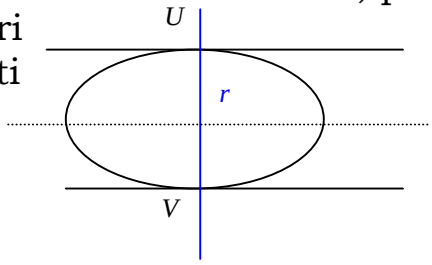
Il matematico francese **Girard Desargues** (Lione, 1591-1661) dedicò alle **coniche** il trattato ***"Brouillon projecte d'une atteinte aux evennements des rencontres d'un cone avec un plan"*** (1639), il cui titolo curioso può essere tradotto pressappoco così: *Bozza di un progetto per un approccio agli effetti dell'incontro di un cono con un piano.* In quest'opera, i termini coniati dall'autore per designare gli oggetti geometrici erano talmente inusuali che solo una successiva trascrizione ne rese accessibile il contenuto.
Tanto per citare un esempio, il nome scelto per le coniche era "*coupe de rouleau*", ossia, letteralmente, "taglio di rotolo".
Desargues applica alle coniche il concetto proiettivo di *punto all'infinito,* e sviluppa l'idea di *polarità:* ogni conica non degenere determina una corrispondenza biunivoca tra i punti e le rette del piano proiettivo, precisamente quella definita nel modo seguente.
Sia *P* un qualunque punto del piano.



Se *P* è esterno alla conica, da esso è possibile condurre esattamente due tangenti alla conica. Detti *U* e *V* i rispettivi punti di tangenza, la polarità associa al punto *P* la retta *r* congiungente i punti *U* e *V*. La retta *r* è detta la *polare* di *P*, il punto *P* è detto il *polo* di *r* (rispetto alla conica data).
Se *P* appartiene alla conica ad esso si associa come *polare* la tangente in *P* alla conica.
Infine, se *P* è interno alla conica, gli si associa, come *polare* la retta *r* costruita come in figura.

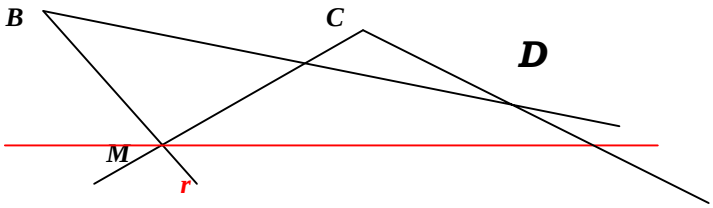


Il punto *P* è all'infinito se e solo se le due tangenti sono parallele. In tal caso la retta *r* è detta un *diametro.* È facile convincersi che, per la circonferenza, l'ellisse e l'iperbole, i diametri così definiti sono proprio le rette passanti per il centro di simmetria della conica.



Questo permette di caratterizzare quest'ultimo come il punto di intersezione di due diametri.
Nel caso della parabola i diametri sono le rette parallele all'asse. La parabola non è dotata di centro di simmetria, ma, volendo estendere ad essa la nozione di centro che abbiamo appena dato, risulta che il centro della parabola è il punto all'infinito di tutti i diametri, in particolare è il punto all'infinito dell'asse.

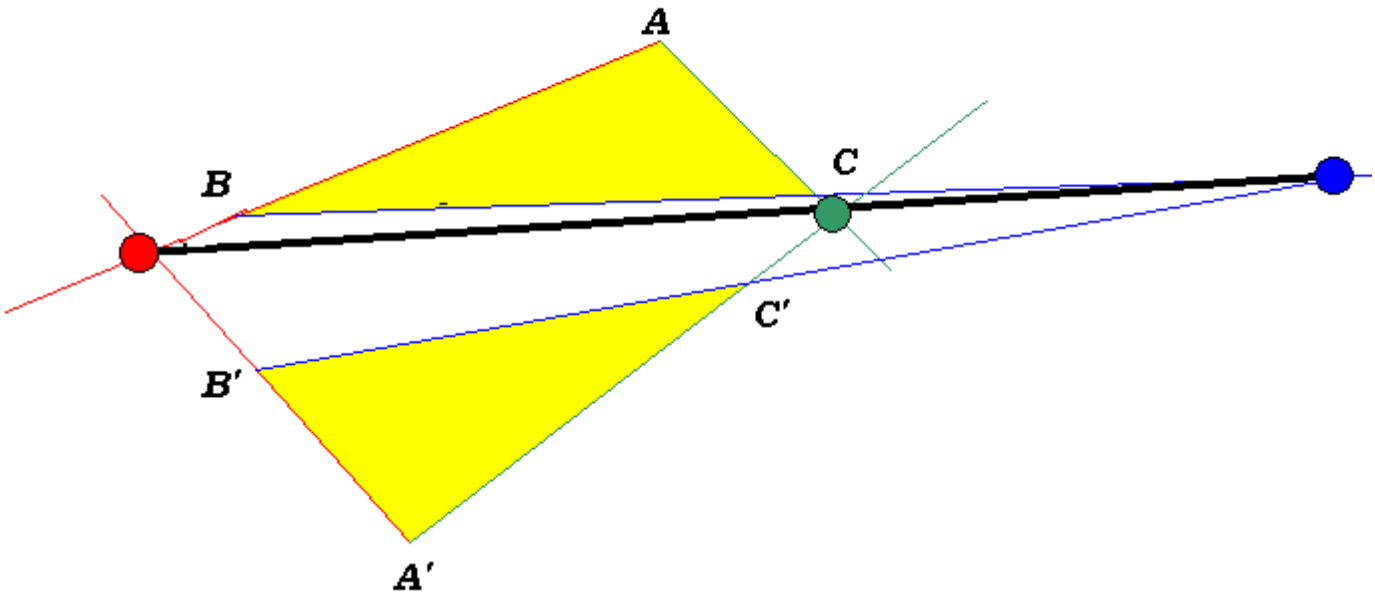
Newton propone, per la generica conica, la seguente curiosa costruzione, che egli chiama *"generazione organica"*. Essa è in perfetto accordo con la sua concezione dinamica della geometria del piano, in cui le curve sono traiettorie di punti in movimento. Supponiamo che il



punto *M* della figura trasli lungo la retta *r*, trascinando con sé le rette *BM* e *CM*, in modo, però, da lasciare fissi i punti *B* e *C*, e gli angoli *MBD* e *MCD*. Allora il punto *D* descrive una conica.

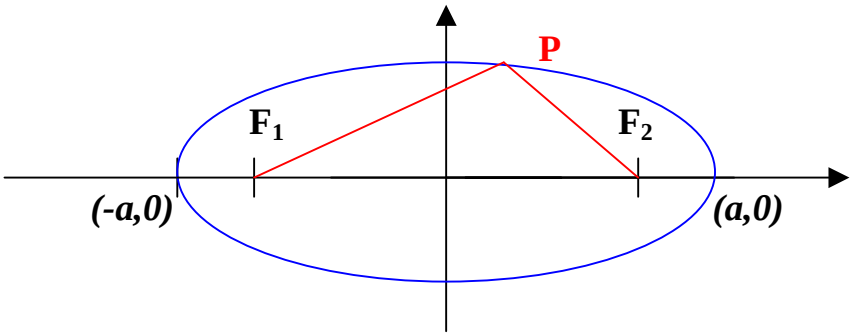
Desargues è anche autore di un teorema di geometria che sta alla base della **prospettiva** del triangolo. Eccone l'enunciato, valido nel **piano proiettivo**:

Dati due triangoli ABC e A'B'C', non aventi lati allineati, i punti di intersezione delle rette AB e A'B', AC e A'C', BC e B'C' sono allineati.



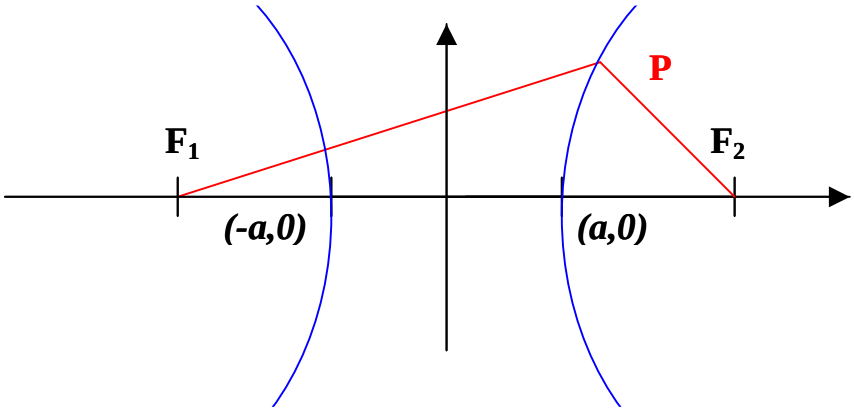
Le coniche come luoghi geometrici

L'**ellisse** è il luogo dei punti P del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi F_1, F_2 è costante.



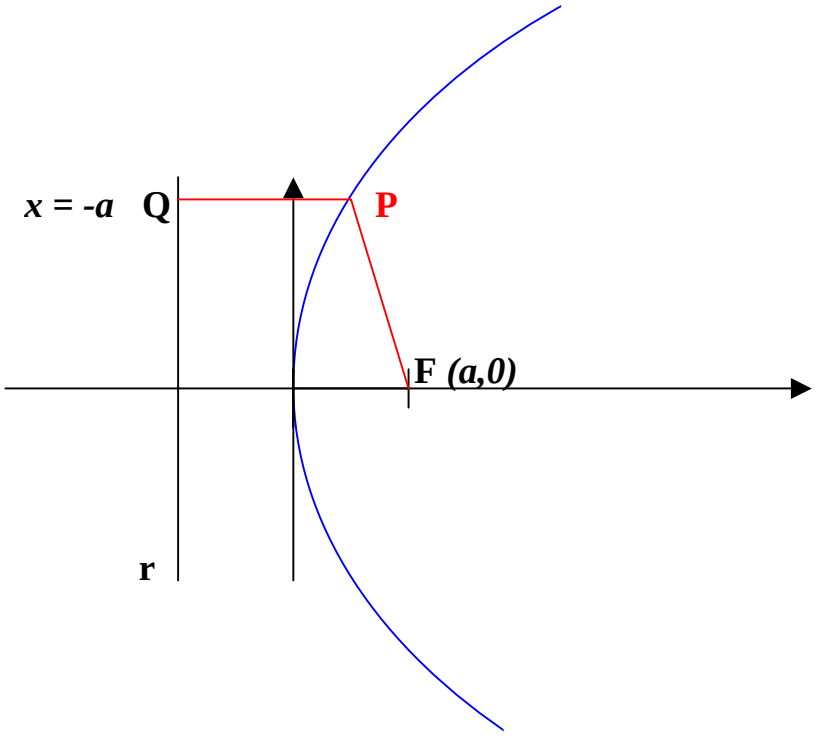
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

L'**iperbole** è il luogo dei punti P del piano tali che il valore assoluto della differenza delle loro distanze da due punti fissi F_1, F_2 è costante.



$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

La **parabola** è il luogo dei punti *P*
equidistanti da un punto *F* e da una retta *r*.



$$\overline{PQ} = \overline{PF}$$

I punti F_1, F_2 e F sono chiamati *fuochi:* così li battezzò **Keplero**.

Le coniche

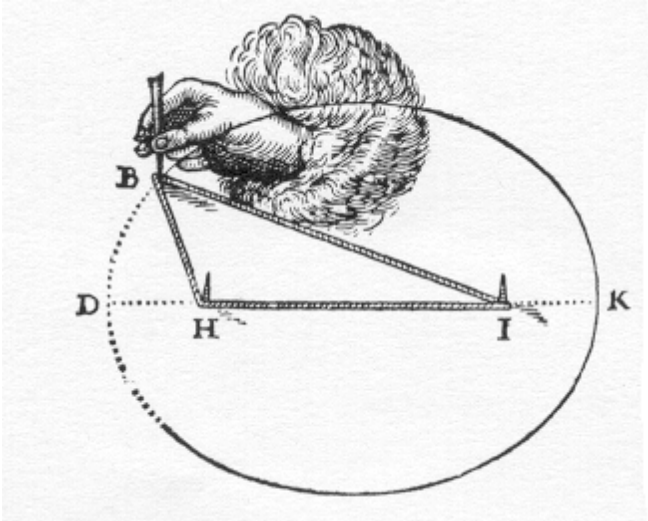
La costruzione delle coniche

È noto a tutti che il **cerchio** si disegna con il compasso.



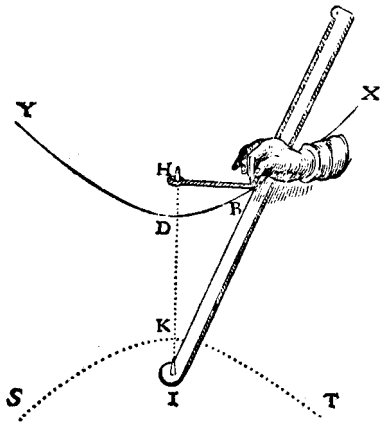


L'**ellisse** si costruisce per mezzo di un anello di corda e due chiodi, con il cosiddetto ***metodo del giardiniere***.



da: R. Descartes, *La Dioptrique*, *Leida 1637.*

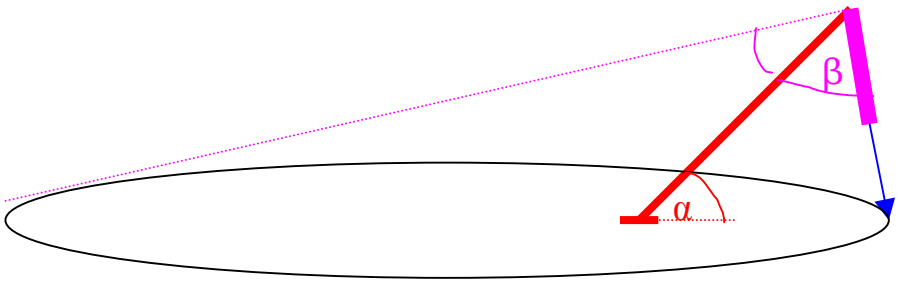
Utilizzando una corda, un chiodo ed un righello si può costruire un'**iperbole**.



da: R. Descartes, *La Dioptrique, Leida 1637.*

Il righello è imperniato in *I,* all'altra estremità è fissata la corda. Il disegnatore traccia la curva facendo ruotare il righello intorno ad *I*, e facendo in modo che la corda, mantenuta tesa, resti aderente al lato del righello.

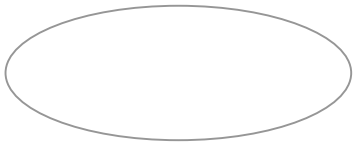
Le costruzioni che abbiamo appena visto sfruttano tutte essenzialmente le caratterizzazioni delle coniche come **luoghi geometrici**.
Intorno all'anno 1000, il matematico arabo **Abu Sahil Wijan al-Kuli** introdusse un semplice strumento meccanico – detto ***compasso perfetto*** - per disegnare qualunque conica. Il suo funzionamento è basato sulla definizione di conica come intersezione di un cono ed un piano. Si tratta, in realtà, di una variante del compasso, in cui un **braccio** può essere fissato al piano del disegno secondo una qualunque inclinazione α, mentre l'altro **braccio** è cavo, e in esso è libero di scorrere su e giù un **pennino**.



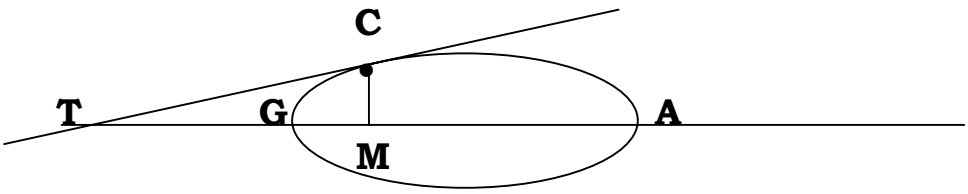
Ruotando intorno al **braccio fisso**, il **braccio mobile**, che forma col primo un angolo costante β, genera un cono, il cui asse è proprio il **braccio fisso**. Il **pennino** traccia sul foglio la conica che è intersezione di questo cono con il piano del disegno. I vari tipi di conica si ottengono scegliendo opportunamente gli angoli α e β.

Le tangenti ad una conica

Il problema di trovare la tangente ad una **conica** (non degenere) in un punto dato è stato risolto, nel corso dei secoli, in modi differenti. Mettiamo a confronto i metodi di **Apollonio**, **Descartes** e **Fermat**, nel caso particolare di un'ellisse.



Nel Libro II del trattato ***Le Coniche*** di Apollonio, viene proposta la seguente costruzione:



La retta [*G*, *A*] è l'asse maggiore dell'ellisse. La tangente all'ellisse nel punto *C* è la retta [*T*, *C*], ove *T* è il punto tale che si abbia la proporzione

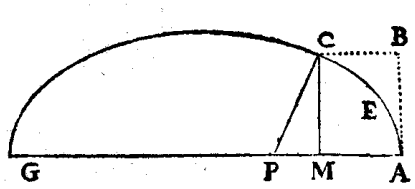
$$|GT| : |AT| = |GM| : |MA|.$$

In altri termini, *T* è il punto che divide esternamente il segmento *GA* nello stesso rapporto in cui *M* lo divide internamente: si dice che *T* è il *coniugato armonico* di *M* rispetto a *G* e ad *A*. Si dimostra che il punto *T* è costruibile con riga e compasso, quindi lo sono anche le tangenti all'ellisse. Ciò si estende alla parabola ed all'iperbole, ma non esistono altre curve aventi questa proprietà.

Il metodo sviluppato da Descartes ne ***La Géométrie*** è, invece, applicabile ad ogni tipo di curva algebrica, della quale sia nota l'equazione: il suo approccio è basato sulla ***geometria analitica***.

Tra gli esempi studiati da Descartes v'è una particolare ellisse

Comme ſi C E eſt vne Ellipſe, & que M A ſoit le ſegment de ſon diametre, auquel C M ſoit appliquée par ordre, & qui ait r pour ſon coſté droit, & q pour le trauerſant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. $xx \propto ry - \frac{r}{q} yy$, d'ou oſtant xx, il reſte $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q} yy$. oubien,

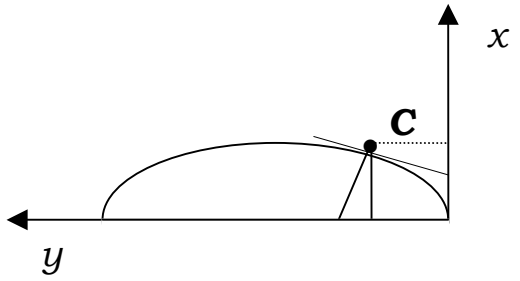


$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ eſgal a rien. car il eſt mieux en cet endroit de conſiderer ainſi enſemble toute la ſomme, que d'en faire vne partie eſgale a l'autre.

la cui equazione, in base ad un teorema di Apollonio, è

$$x^2 + r/q\, y^2 - ry = 0.$$

Naturalmente questa equazione ha senso solo dopo aver opportunamente fissato, nel piano, un sistema di coordinate: Descartes non lo indica, ma esso può essere facilmente ricavato a posteriori:



I parametri r e q dell'equazione sono particolari invarianti geometrici dell'ellisse (che qui non precisiamo). Le coordinate del punto C sono dunque $x = |CM|$ ed $y = |MA|$. Poiché Descartes non dava significato alle coordinate negative, nel disegno compare solo la metà superiore dell'ellisse, ossia l'insieme dei punti che hanno entrambe le coordinate non negative.

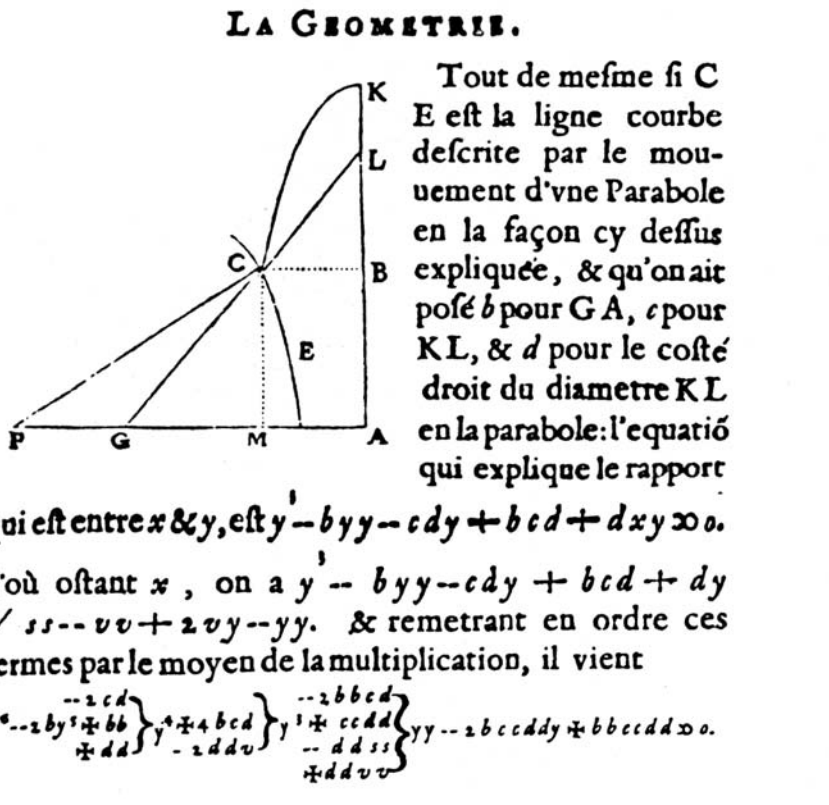
La tangente all'ellisse nel punto C è determinata una volta che è stata trovata la perpendicolare a questa nel punto C, quella che viene detta *normale* all'ellisse nel punto C. Descartes vuole costruire

quest'ultima, e ne cerca il punto *P* di intersezione con l'asse maggiore dell'ellisse.
Chiama *s* e *v* le lunghezze dei segmenti *PC* e *PA* rispettivamente, e poi applica il **Teorema di Pitagora** al triangolo rettangolo *PMC,* ottenendo l'equazione:

$$x^2 + (v - y)^2 = s^2$$

Essa mette in relazione *s* e *v* con le coordinate *(x,y)* del punto *C.* Descartes ne ricava l'espressione di x^2 in termini di *y*, *s* e *v*. Poi sostituisce questa espressione al posto di x^2 nell'equazione dell'ellisse. La nuova equazione ottenuta contiene solo *y,s,v:* essa permette quindi di determinare, a partire dall'ordinata *y* del punto *C*, la relazione esistente fra i valori di *s* e *v*. Per determinare questi valori è necessaria un'altra condizione. Questa si ricava nel modo seguente: si impone che il cerchio di centro il punto *P* e raggio *s* intersechi l'ellisse nel solo punto *C*. Dal punto di vista algebrico, ciò equivale a richiedere che il discriminante di una certa equazione di grado due sia nullo. Descartes non fornisce i dettagli di questo procedimento, e noi preferiamo risparmiarli al lettore, precisando, però, che si tratta di calcoli elementari.

Descartes applica il suo metodo anche ad altre curve algebriche, che non sono coniche, tra cui la parabola di terzo grado:



LA GEOMETRIE.

Tout de meſme ſi C E eſt la ligne courbe deſcrite par le mouuement d'vne Parabole en la façon cy deſſus expliquée, & qu'on ait poſé *b* pour G A, *c* pour K L, & *d* pour le coſté droit du diametre K L en la parabole: l'equatiõ qui explique le rapport qui eſt entre *x* & *y*, eſt $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \propto 0$.

d'où oſtant *x*, on a $y^3 - byy - cdy + bcd + dy \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. & remetrant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 \left\{ \begin{matrix} -2cd \\ -2by \\ +bb \\ +dd \end{matrix} \right\} y^4 \left\{ \begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix} \right\} y^2 \left\{ \begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix} \right\} yy - 2bccddy + bbccdd \propto 0.$$

Come si vede, i calcoli sono molto laboriosi.

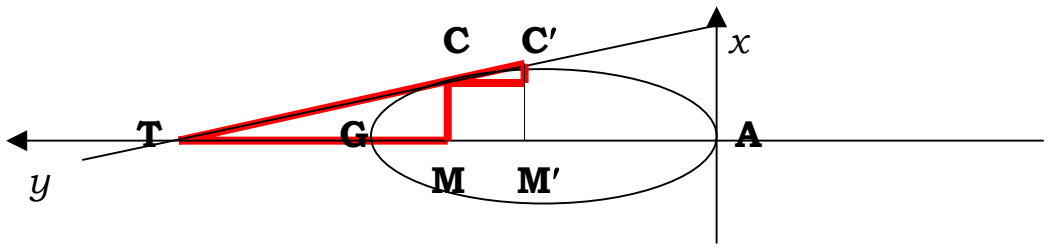
Il metodo di Fermat, fondato sui principi di ***calcolo differenziale***, da lui esposti nel suo ***Metodo per trovare i massimi e i minimi***, ha un duplice vantaggio: innanzitutto è valido anche per curve non algebriche, e, in secondo luogo, è di più semplice applicazione. Alla curva si richiede soltanto di essere sufficientemente regolare e di avere, rispetto ad un sistema di coordinate opportunamente fissato, un'equazione del tipo

$$y = f(x),$$

ove f è una funzione. Ciò significa che il generico punto della curva avrà coordinate $(x, f(x))$.
In effetti l'ellisse non verifica quest'ultima condizione se vista nel suo insieme. Ai fini del calcolo della tangente, ci si può però limitare a considerare un arco di ellisse contenente il punto C, ad esempio, nel nostro caso, quello che si trova al di sopra dell'asse maggiore. Quest'arco ha un'equazione del tipo desiderato:

$$x = (ry - r/q\, y^2)^{1/2}$$

Il ragionamento di Fermat parte da questa osservazione: in prossimità di C, la curva e la tangente quasi coincidono. Quindi, con una buona approssimazione, si può dire che un punto C' della curva sufficientemente vicino a C si trova sulla tangente:



Quindi i punti T, C e C' si possono assumere come allineati, di modo che i triangoli colorati sono simili.

Fissiamo il sistema di coordinate come in figura: allora il punto C' ha coordinate $(x+\varepsilon, f(x+\varepsilon))$, ove ε è la distanza verticale (nel disegno) fra C

e *C'*, che supponiamo piccolissima. Si ha dunque la seguente proporzione:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \left|\frac{MT}{x}\right|$$

La frazione a secondo membro è il coefficiente angolare della tangente cercata. Ricordiamo che l'uguaglianza è vera solo con approssimazione, che è tanto più accurata, quanto più ε è piccolo: sarà perfetta al limite. Questo fatto si esprime scrivendo:

$$\text{coefficiente angolare di } [TC] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

Ma una retta è completamente determinata, una volta che ne siano noti il coefficiente angolare ed un punto (nel nostro caso, il punto *C*).

L'operazione di *passaggio al* ***limite*** compiuta a secondo membro è detta *derivazione della funzione f nel punto x.* Il risultato è detto *derivata prima di f in x,* e viene solitamente indicato con *f '(x).* Esistono formule notevoli per calcolare le derivate prime delle funzioni elementari, così che il metodo differenziale sviluppato da Fermat è oggi quello maggiormente impiegato.

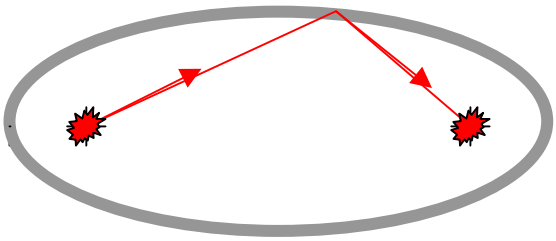
Esiste una **lettera**, scritta da Descartes a **Mersenne**, in cui il metodo di Fermat viene commentato.

Il metodo proposto da **Torricelli** per la determinazione della tangente ad una parabola in un punto dato è invece basato su considerazioni meccaniche: si suppone che la parabola sia la traiettoria di un punto materiale che si muove nel piano cartesiano e si determinano le componenti, parallele agli assi, della sua velocità nel punto considerato: queste individueranno la pendenza della tangente cercata. Un metodo analogo fu proposto da **Newton** e dal matematico francese Gilles Personne de Roberval.

Proprietà ottiche delle coniche

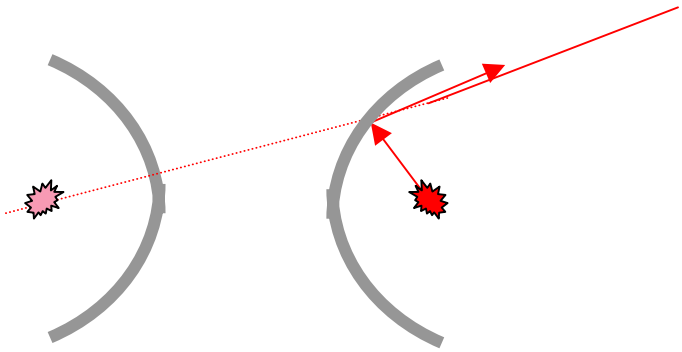
1. Specchi ellittici

Un raggio uscente da uno dei fuochi di uno specchio ellittico viene riflesso in modo che il raggio riflesso passa per l'altro fuoco.



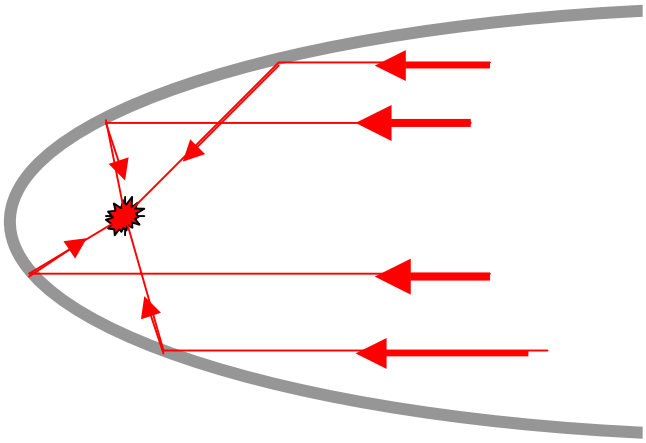
2. Specchi iperbolici

Un raggio uscente da uno dei fuochi di uno specchio iperbolico viene riflesso in modo che il raggio riflesso sembra provenire dall'altro fuoco.



3. Specchi parabolici

Un raggio parallelo all'asse di uno specchio parabolico viene riflesso in modo che il raggio riflesso passa per il fuoco



Viceversa, ogni raggio uscente dal fuoco di uno specchio parabolico viene riflesso in modo che il raggio riflesso è parallelo all'asse.

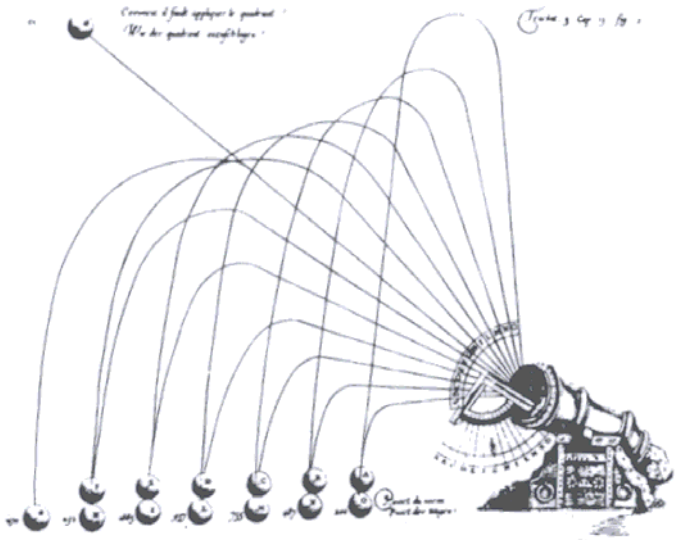


Antenna parabolica

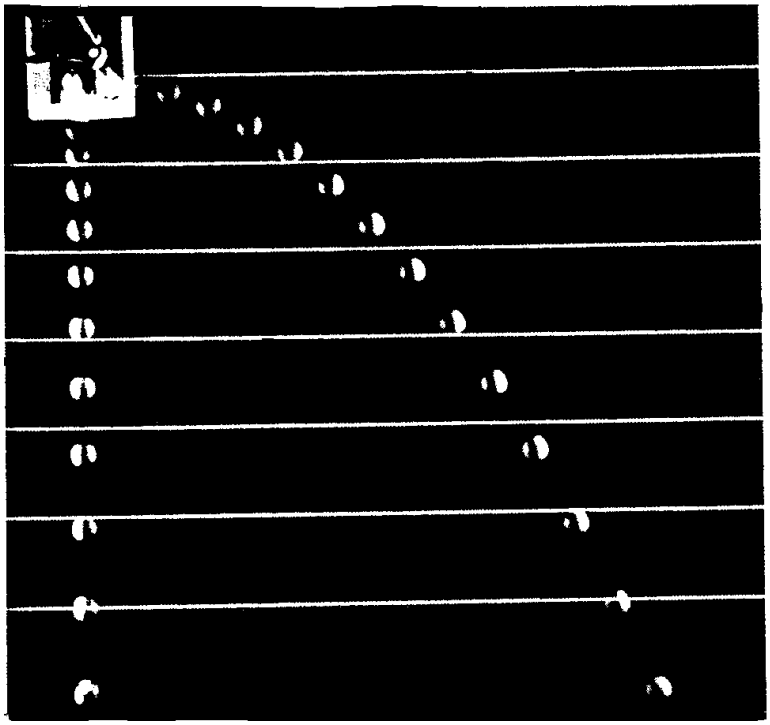
Le coniche

La parabola e la caduta dei gravi

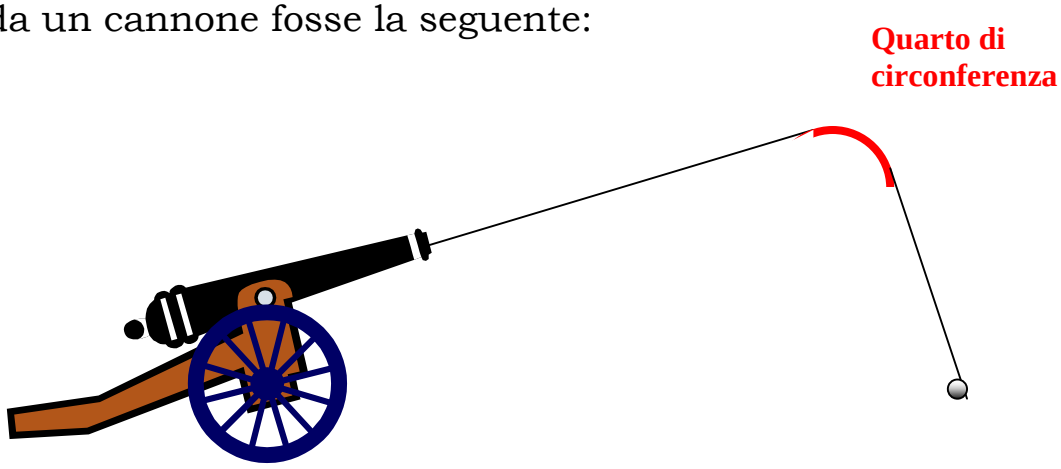
Secondo la legge scoperta da **Galileo Galilei**, e descritta nei suoi ***Discorsi***, la traiettoria di un corpo lanciato verso l'alto e soggetto solo alla forza di gravità è un arco di **parabola**.



Lo stesso vale per un corpo che cada dall'alto con velocità iniziale parallela al suolo, come mostra la fotografia:



Prima di Galileo, si credeva che la traiettoria di un proiettile sparato da un cannone fosse la seguente:



Già nel Cinquecento, il matematico bresciano **Tartaglia**, nella sua opera ***Quesiti et Inventioni Diverse***, aveva messo in dubbio questa convinzione, che sarebbe vera solo con approssimazione. Egli è l'autore di un importante trattato di balistica, ***La Nova Scientia***.

È possibile dimostrare che il luogo dei vertici delle parabole di tiro di uno stesso cannone è un arco di ellisse (**immagine**).

Le coniche nell'arte

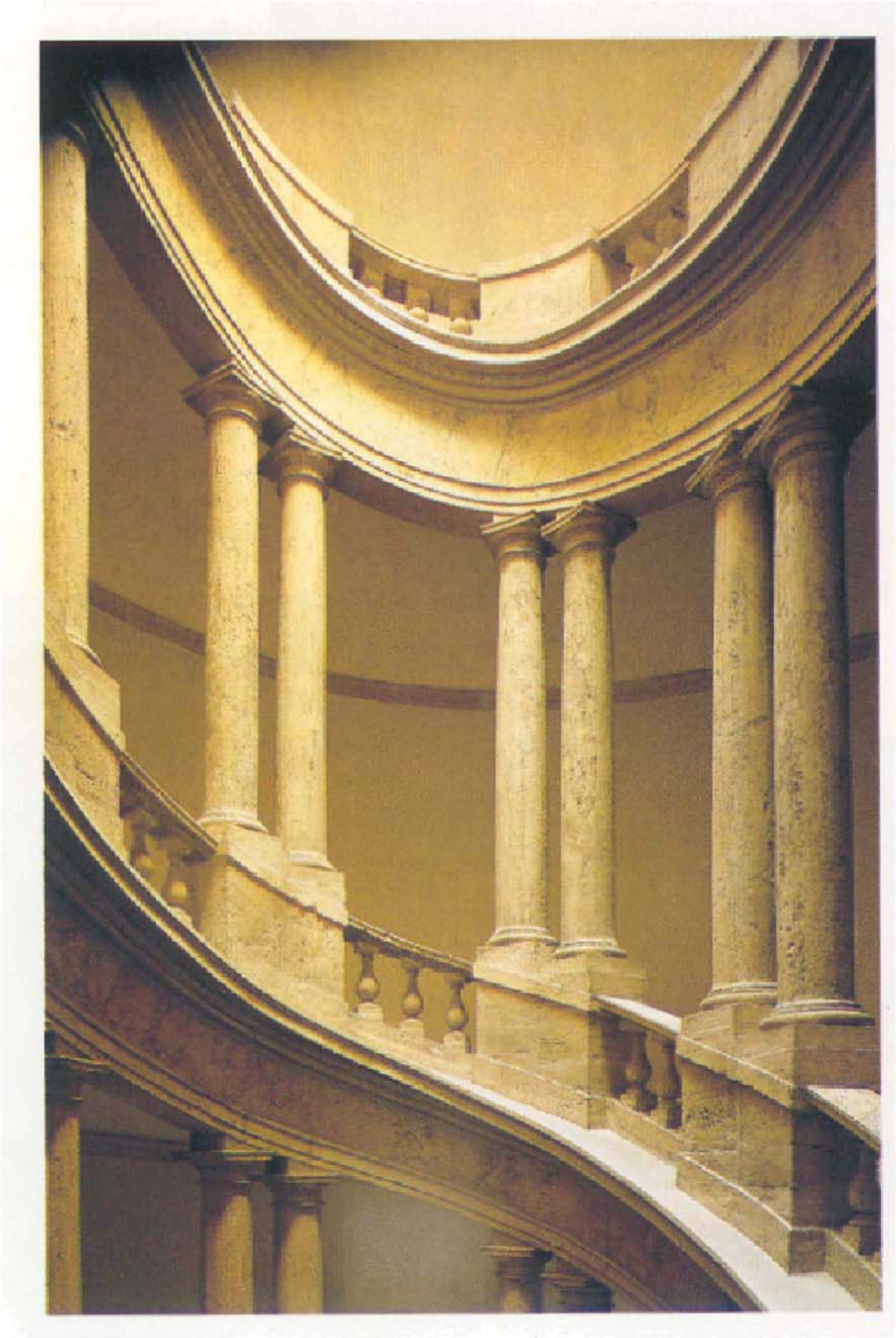
Le sezioni coniche compaiono in molte opere artistiche ed architettoniche di ogni epoca. Ne abbiamo scelte alcune tra le più belle.

Ellissi:
La scala del Quirinale
L'arena di Arles
Il Royal Crescent Bath
Piante di chiese tedesche

Parabole:
Vaso veneziano

Le coniche disegnate da Dürer

(da: AA.VV., Il Patrimonio dell'Umanità, tesori salvati e da salvare, Touring Club Italiano, Milano 1988)



Pianta ellittica per la scala elicoidale del palazzo del Quirinale, realizzata da Ottaviano Mascherino nel 1578-85.

(da: AA.VV., Il Patrimonio dell'Umanità, tesori salvati e da salvare, Touring Club Italiano, Milano 1988)

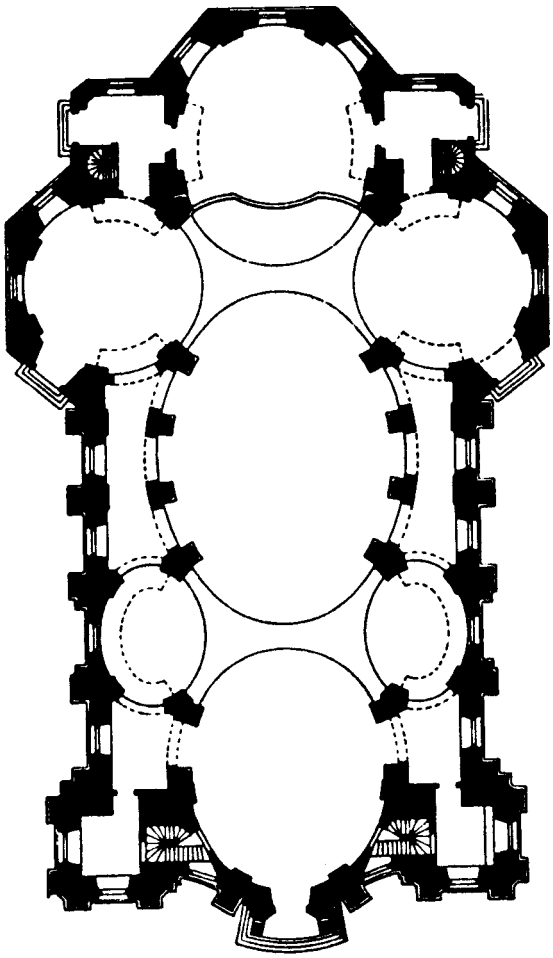


La struttura ellittica dell'arena di Arles.

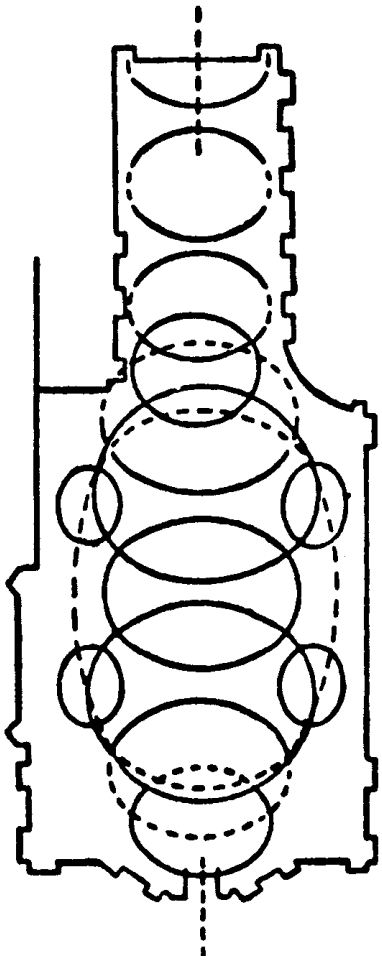
(da: AA.VV., Il Patrimonio dell'Umanità, tesori salvati e da salvare, Touring Club Italiano, Milano 1988)



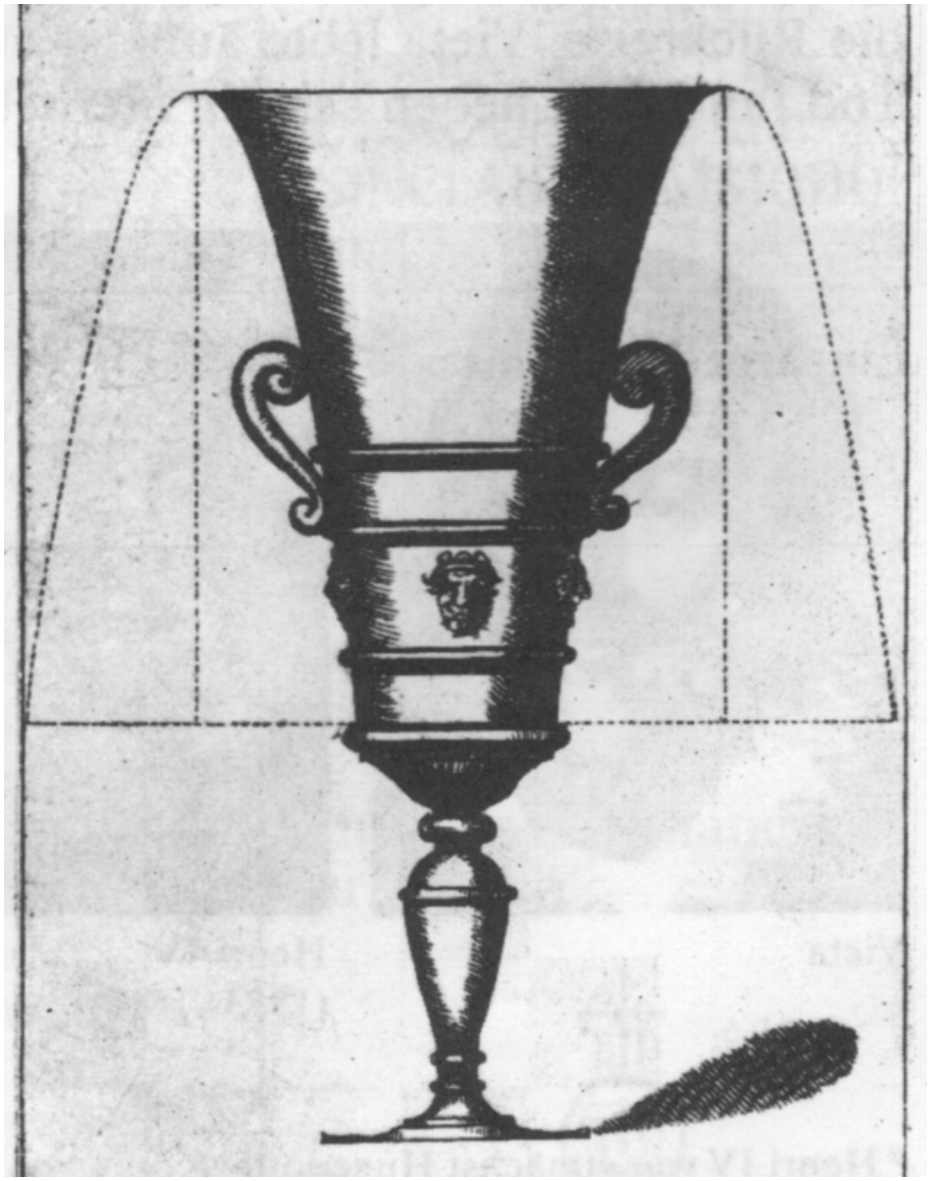
Un segmento di ellisse, lungo 200 metri, del Royal Crescent Bath - U.K.



Chiesa del Santuario “Vierzehnheiligen”



Chiesa del convento di Banz



Apollonio di Perga (ca. 262-190 a.C.)

La vita di questo matematico greco detto "il grande geometra" si svolse tra Alessandria – dove studiò con **Euclide** ed **Archimede** - Efeso e Perga. È passato alla storia soprattutto grazie al suo trattato sulle **coniche**, un'opera monumentale in otto libri, per un totale di 487 proposizioni. Ci sono pervenuti solo i primi sette, di cui quattro in greco e tre in arabo. Alcuni di essi sono dedicati ad Attalo, re di Perga. Apollonio, come dichiara nella prefazione, era particolarmente orgoglioso del Libro III, che contiene, tra l'altro, la soluzione al **problema di Pappo**.

Altre opere minori sono andate perdute, e se ne trova traccia solo nei commentari di **Pappo**. Esse riguardano, per lo più, problemi di costruzione nel piano: nel trattato ***Dei contatti*** (di cui **Vieta** tentò una ricostruzione) Apollonio affronta il problema di determinare circonferenze passanti per punti dati e tangenti a rette e circonferenze date. Esso contiene una **soluzione** parziale al famoso ***Problema di Apollonio***: assegnati tre oggetti, che possono essere punti, rette o cerchi, trovare un cerchio che abbia in comune con ciascuno di essi solo un punto. Questo problema rimase a lungo irrisolto nella sua generalità. **Newton** fu tra coloro che completarono la trattazione dei casi possibili.
I due libri dedicati ai ***Luoghi piani*** contenevano osservazioni sulle trasformazioni del piano. Inoltre vi venivano studiati particolari luoghi geometrici del piano, ad esempio il luogo dei punti tali che il valore assoluto della differenza dei quadrati delle loro distanze da due punti dati è costante: questo luogo è una retta perpendicolare alla retta congiungente i due punti. Il luogo dei punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissi è costante e diverso da uno è un cerchio. Quest'opera, andata perduta, sarà ricostruita da **Fermat** nel sec. XVII.

Ricordiamo che anche le **coniche sono particolari luoghi geometrici**, definiti in maniera simile.

Nel trattato ***Confronto del dodecaedro e dell'icosaedro*** Apollonio dimostrava che le facce di un **dodecaedro** regolare inscritto in una sfera e le facce di un **icosaedro** regolare inscritto nella stessa sfera hanno la stessa distanza dal centro della sfera.

Il libro ***Okytokion*** (*Il Parto sollecito*) conteneva tecniche di calcolo rapido, e vi compariva anche il problema della **quadratura del**

cerchio: qui Apollonio migliorava l'approssimazione trovata da **Archimede** per il numero π, portandola a

$$\pi \approx 3,1416.$$

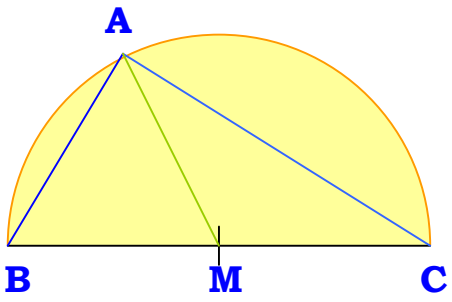
Apollonio è anche ricordato per aver inventato gli **epicicli**, che stanno alla base della teoria astronomica di **Tolomeo**.

Inoltre il suo nome è rimasto legato ad un teorema sul triangolo:

Dato il triangolo ABC, se M è il punto medio del lato BC, allora

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

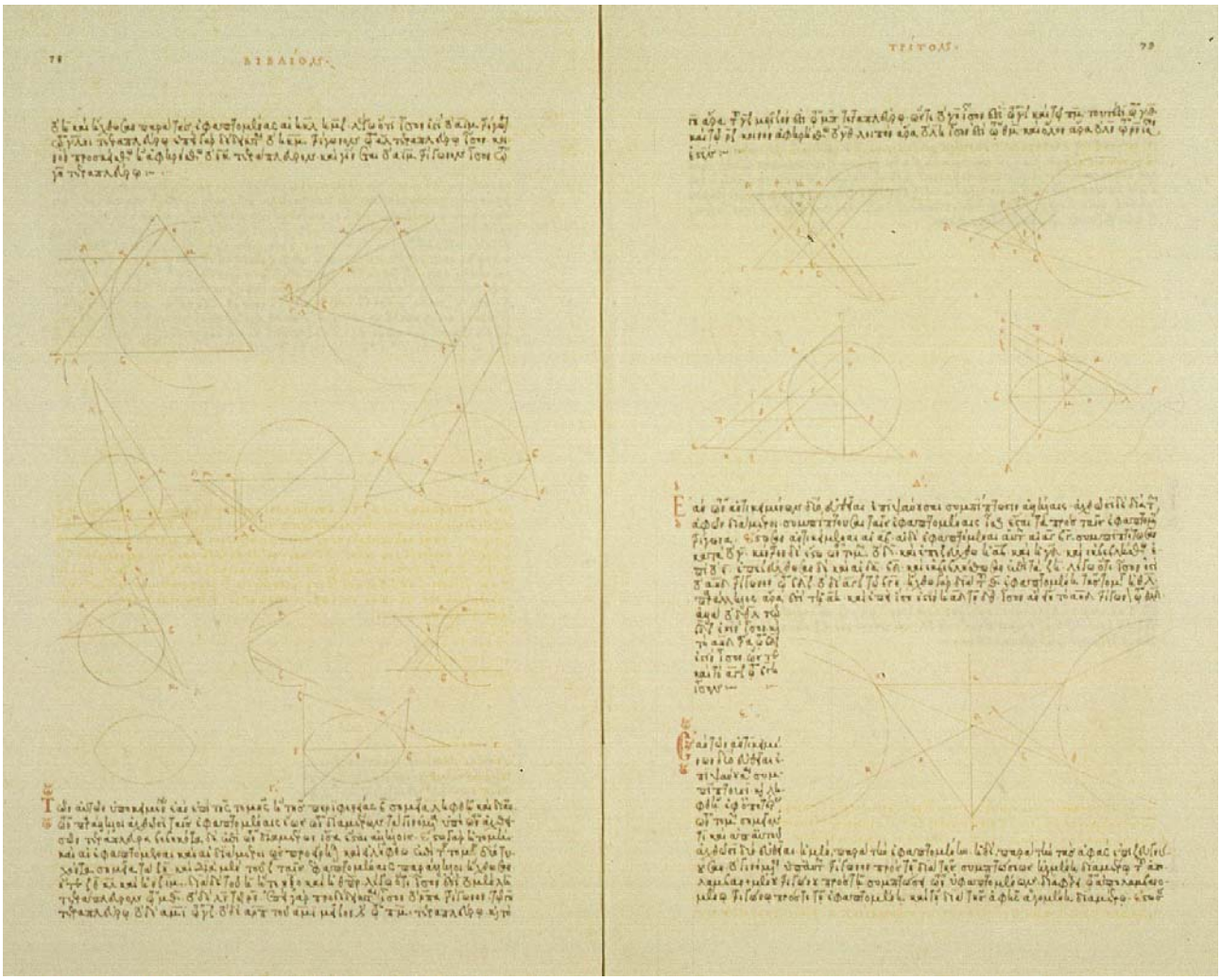
Questa è una delle tante generalizzazioni del **teorema di Pitagora**: infatti, se ABC ha un angolo retto in A, esso, è inscritto nel semicerchio di diametro BC passante per A: si tratta di una facile inversione del **teorema di Talete**. Essendo M il centro del semicerchio, si ha $AM^2 = BM^2 = 1/4\ BC^2$. Sostituendo nella formula precedente si ottiene proprio l'enunciato del Teorema di Pitagora.

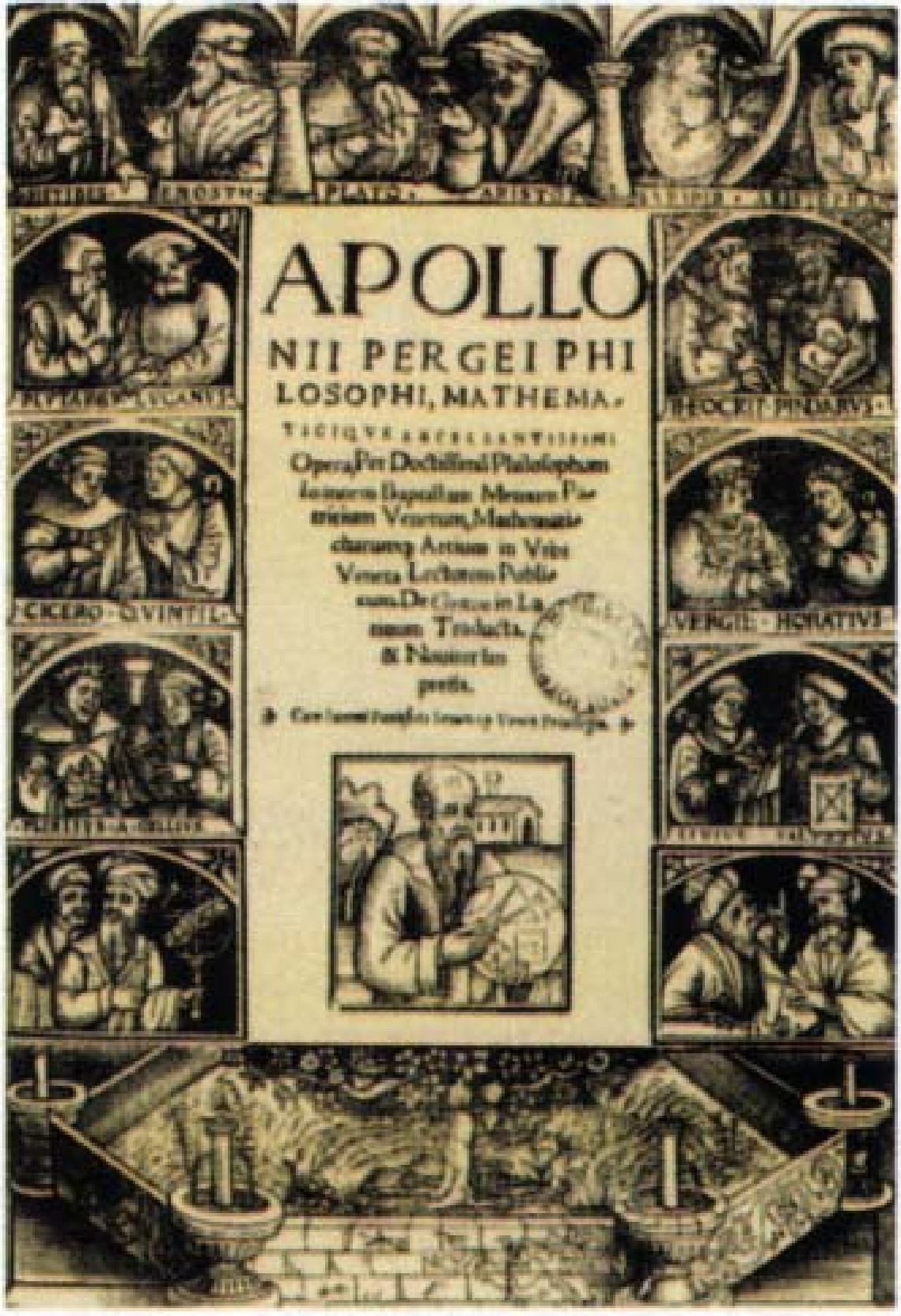


Molti critici considerano l'opera di Apollonio un'anticipazione della **geometria analitica,** che verrà creata, ben 1800 anni più tardi, da **Descartes**.

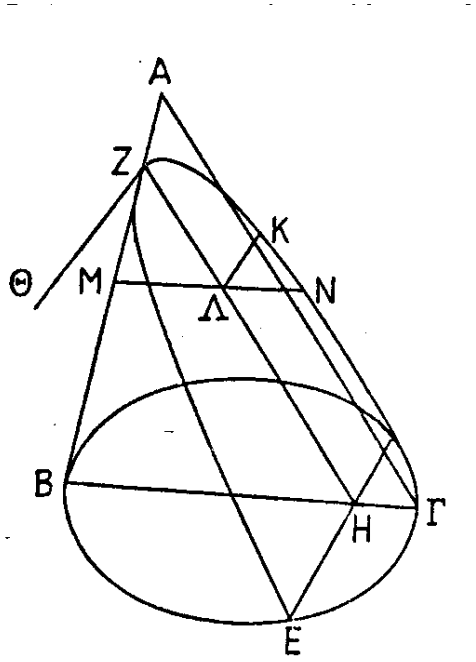
Una pagina de *Le Coniche*
Un'edizione cinquecentesca delle opere di Apollonio
La parabola secondo Apollonio

Una pagina originale del trattato *Le Coniche* di Apollonio(da un manoscritto della Biblioteca Vaticana)




APOLLO
NII PERGEI PHI
LOSOPHI, MATHEMA-
CICERO · QVINTIL
VERGIL · HORATIVS

La parabola secondo Apollonio



Una **parabola** è la curva ottenuta intersecando una superficie conica con un piano parallelo ad una qualunque delle rette generatrici (ossia delle rette appartenenti alla superficie stessa). Nella figura - che è quella originale di **Apollonio** – la parabola è la curva *EZKN*. L'intersezione con la superficie conica di un qualunque piano perpendicolare all'asse è una circonferenza: lo sono le curve *MNK* e *BEΓ;* i segmenti *MN* e *BΓ* sono diametri di queste circonferenze. In virtù della **Proposizione 35 del Libro III** degli ***Elementi*** di **Euclide**, si ha che

$$K\Lambda^2 = M\Lambda \cdot \Lambda N \qquad \text{e} \qquad HE^2 = BH \cdot H\Gamma,$$

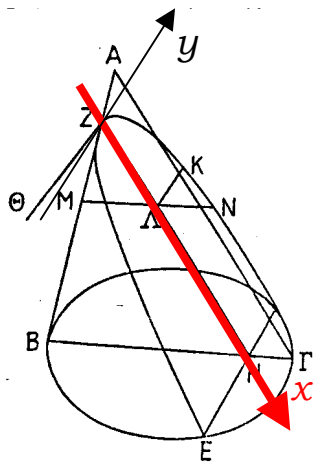
e, d'altra parte, poiché i triangoli *ZMΛ* e *ZBH* sono simili, si ha anche che

$$M\Lambda : BH = Z\Lambda : ZH ,$$

inoltre $\Lambda N = H\Gamma$. Pertanto:

$$K\Lambda^2 = (Z\Lambda \cdot BH \cdot H\Gamma) / ZH = HE^2/ZH \cdot Z\Lambda \qquad (1)$$

Immaginiamo ora di fissare i punti *B, E, Γ*: allora il numero HE^2/ZH diventa una costante. Consideriamo invece *K* come il generico punto della parabola. Nel piano individuato da *Z, Λ, H,* che poi è quello su cui giace la parabola, fissiamo il sistema di **coordinate cartesiane** illustrato qui sotto. In esso il punto *K* ha coordinate



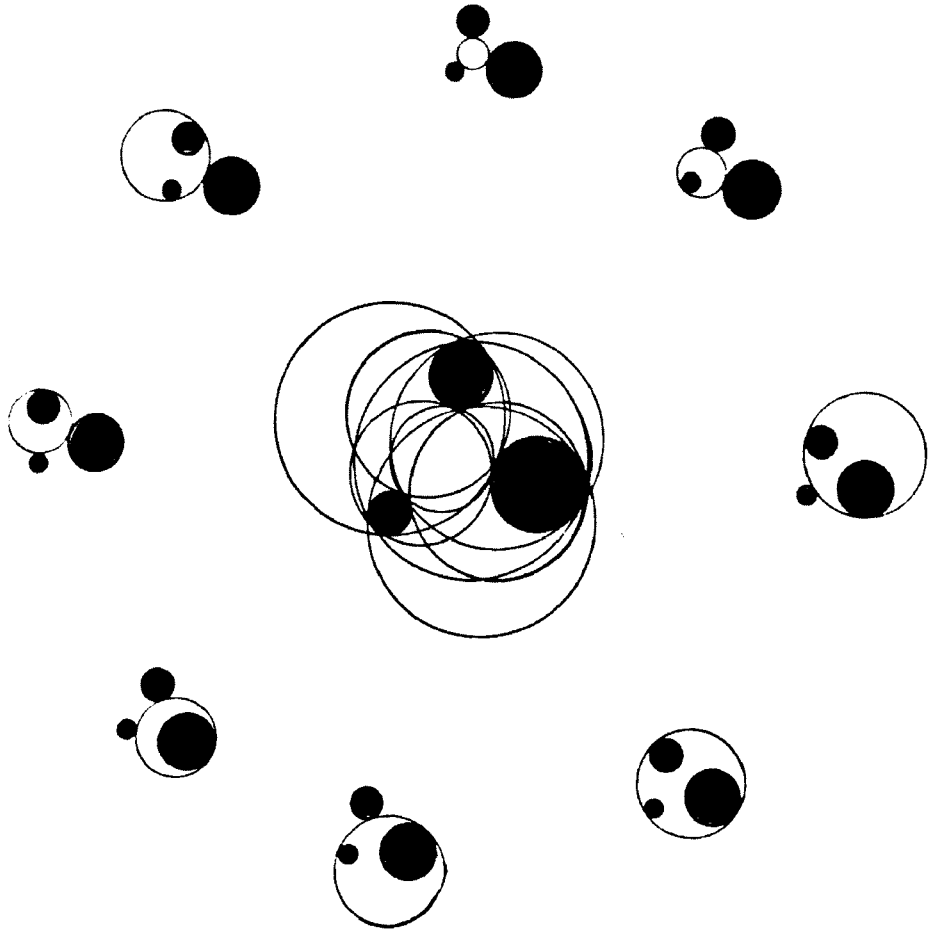
$$x = Z\Lambda, \quad y = K\Lambda.$$

Dalla (1) si ottiene dunque l'equazione cartesiana della parabola nella forma:

$$y^2 = px,$$

ove *p* è una costante positiva.

La soluzione al problema di Apollonio: trovare tutti i cerchi tangenti tre cerchi dati



(da: Theoni Pappas, *Le Gioie della Matematica*, trad. di G. Mancuso, Muzzio, Padova, 1995, pag. 150)

Tavole di geometria descrittiva

Proiezioni di una circonferenza in

- **un'ellisse**
- **una parabola**
- **un'iperbole**

Seconda proiezione di un'ellisse in una circonferenza

Menecmo (ca. 350 a.C.)

Questo geometra ed astronomo greco, allievo di **Eudosso di Cnido**, fu membro dell'Accademia di **Platone** e precettore di Alessandro Magno. È noto per aver trovato diverse soluzioni del problema della **duplicazione del cubo**. **Eratostene** gli attribuisce l'invenzione delle **sezioni coniche**.

John Wallis (1616-1703)



Matematico inglese, fu professore di geometria ad Oxford dal 1649 alla morte: in effetti subentrò al monarchico Peter Turner dopo la decapitazione di re Carlo I e la conseguente istituzione della repubblica. Pare che la sua sopravvivenza accademica durante le alterne vicende politiche dell'Inghilterra sia anche dovuta alla sua abilità come **crittografo**, che egli seppe sfruttare, secondo le occasioni, per codificare e decodificare messaggi segreti dell'una e dell'altra parte.

Wallis è ricordato soprattutto per i suoi contributi al **calcolo integrale**, i suoi studi sul moto e sulle **curve**, tra cui la **cicloide** e le **sezioni coniche**, cui dedicò lo scritto ***De sectionibus conicis*** (1655).
Contribuì all'**evoluzione del linguaggio matematico** introducendo i simboli ∞ e $\leq$. Scrisse il primo trattato inglese di **storia della matematica**, intitolato ***De algebra tractatus; historicus & practicus*** (1685); qui egli rivendicò il primato britannico nell'algebra, arrivando persino ad accusare il francese **Descartes** di aver plagiato le opere di **Thomas Harriot**.
Fu uno dei primi ad accettare i **numeri irrazionali** e le radici quadrate dei numeri negativi. Nei suoi scritti è già presente l'idea di rappresentare geometricamente i **numeri complessi** (v. **piano di Gauss**).
I suoi studi sulle **serie**, contenuti nell'***Arithmetica Infinitorum* (1656)** ispirarono **Newton** e **Leibniz**.

Le sue idee politiche lo opposero al filosofo **Thomas Hobbes**, che dileggiò pubblicamente per il suo goffo tentativo di **quadratura di cerchio**.

Newton riporta un brano di John Wallis

CONTANDO……CONTANDO
Dall'Aritmetica alla Teoria dei Numeri

Il termine ***Aritmetica*** deriva dai due termini greci "***ἀριθμός*** (numero) e ***τέχνη*** (arte) e significa precisamente *Arte di comporre e scomporre i numeri*. Quest'arte deve essere stata antica quanto la civiltà umana, perché, se pure ha assunto dignità di dottrina solo con il nascere delle diverse scuole scientifiche, è indiscutibile che la necessità di manipolare i numeri sia stata sempre presente in una infinità di operazioni comuni della vita.
Relativamente scarse sono le fonti certe di riferimento, anche perché l'incendio della **Biblioteca di Alessandria d'Egitto** e la dispersione del suo patrimonio (circa 500.000 volumi) hanno contribuito non poco alla perdita di molti testi e documenti preziosi.
Questa celebre biblioteca dell'antichità, intorno alla quale fiorì la **Scuola Alessandrina**, fu parzialmente o interamente distrutta più volte dall'incendio: nel 47 a.C. durante la guerra civile tra Cesare e Pompeo, e secondo la leggenda fu devastata definitivamente da incendi nel 272 d.C. per ordine dell'imperatore Aureliano, nel 391 dall'imperatore Teodosio e nel 640 dai musulmani guidati dal califfo Omar I. I manoscritti sopravvissuti finirono a Costantinopoli e quando, nel 1453, i Turchi invasero Costantinopoli saccheggiandola, gli uomini di cultura fuggirono in Occidente portando con sé tutti i testi che riuscirono a salvare. Fu così, per esempio, che parte della ***Arithmetica*** di **Diofanto** finì sulla scrivania di Pierre de **Fermat**.
Quando, come e per merito di chi, l'aritmetica sia divenuta oggetto di studi specifici e profondi è difficile, se non impossibile, dirlo.
Senza dubbio ebbe un grande sviluppo presso i **Greci**; si pensi a **Talete di Mileto**, a **Pitagora**, a **Platone**, ad **Euclide**, a **Diofanto**, a **Teone**, a **Nicomaco**.
Tuttavia, nella prima fase della aritmetica greca, in particolare nella **scuola pitagorica**, pratica e teoria si svilupparono separatamente. La "**logistica**" era la pratica del calcolo che probabilmente comprendeva, senza teoria alcuna, l'insegnamento della numerazione, delle quattro operazioni, dell'estrazione di radice, il calcolo delle frazioni. L'attuale procedimento di **estrazione della radice quadrata** è attribuito da alcuni a **Teone da Smirne,** matematico vissuto nel I secolo d.C.
Alla scienza dei numeri, cioè all'aspetto teorico, fu più propriamente dato il nome di **Aritmetica**. Sembra che **Diofanto** abbia per primo tentato di riunire in un'opera nozioni fondamentali di teoria dei numeri e questioni di analisi indeterminata, esplicate in problemi fino allora di competenza della logistica.

È curioso costatare come, a differenza di quanto avvenne per la poesia, per la filosofia, per l'arte e per l'eloquenza, le scienze esatte come la geometria, l'astronomia e l'aritmetica si svilupparono per opera di Greci vissuti fuori del loro paese natio, degli Ioni e degli Alessandrini.

Le origini dei numeri
I sistemi di numerazione
La numerazione egiziana
La numerazione fenicia
La numerazione ebraica
La numerazione greca
La numerazione romana
La numerazione indo-arabica
L'evoluzione delle cifre indo-arabiche
L'uso dell'abaco
Le quattro operazioni
L'Aritmetica mercantile
L'Algebra

I sistemi di numerazione

I sistemi pentenario e decimale non furono i soli usati nell'antichità.
Gli Aztechi del Messico avevano geroglifici semplici per tutte le potenze del numero venti ed usavano un sistema vigesimale. Furono usati anche i sistemi quaternario, ternario e dodicesimale. Quest'ultimo deve aver avuto particolare diffusione. Infatti, in quasi tutte le lingue europee c'è una certa irregolarità per i numeri compresi tra dieci e venti:
In Tedesco, *undici* e *dodici* si dicono *elf* e *zwölf*, parole che non sembrano provenire da *ein* (uno), *zwei* (due) e *zehn* (dieci), come accade invece per tredici e quattordici, che si dicono *dreizehn* (drei indica tre) e *vierzehn* (vier significa quattro).
In Francese, *onze* (undici), *douze* (dodici) e così via fino a *seize* (sedici) non presentano traccia di *dix* (dieci), come avviene invece per *dix-sept* (diciassette) e *dix-huit* (diciotto).
In Inglese, *eleven* (undici) e *twelve* (dodici) non sono composte con *ten* (dieci), mentre lo sono i numeri successivi.

La numerazione babilonese
La numerazione egiziana
La numerazione ebraica
La numerazione fenicia
La numerazione greca
La numerazione romana
La numerazione Maya
La numerazione indo-arabica

La numerazione indo-arabica

La cultura greco-latina raggiunse il suo culmine con la **scuola di Alessandria**. Ad essa subentrò quella araba.
Anche gli Arabi, al pari dei **Pitagorici**, attribuirono ai numeri un'esistenza propria. Battuti i Greci, sottomessi la Persia, l'Egitto, l'India e la Spagna, arrivarono nell'Italia meridionale, in tutte le isole del Mediterraneo ed avanzarono verso il Bosforo. Per questo motivo e per la naturale propensione agli studi, assorbirono le cognizioni dell'antico Oriente e le diffusero in Occidente.
Solo nel secolo IX, gli Arabi presero dall'India i caratteri che oggi sono chiamati numeri arabici e che essi denominavano *cifre indiane*.
Il loro sistema di numerazione è il nostro attuale sistema, diverso da tutti i precedenti per tre caratteristiche:
1) cifre speciali per indicare i primi nove numeri,
2) valore di posizione per le cifre,
3) introduzione dello Zero che veniva indicato con un punto ".".
Come si sia formato questo sistema presso gli Indiani, è difficile se non impossibile stabilirlo, sembra certo però che per indicare i numeri non fu mai adoperato l'alfabeto in luogo delle cifre.
Gli stessi Arabi chiamarono il loro sistema decimale di numerazione con il nome *"Hendes-sén"* o *"Hindosi"* che significa appunto scienza indiana.

Nel 1816, **John Taylor** tradusse dal sanscrito in inglese la "*Aritmetica indiana o Lilawati*" del matematico indiano **Bhaskara Acharya** (nato nel 1114).
Questa opera, che risale agli anni 1150-1160, dà una idea precisa delle conoscenze matematiche degli Indiani fino al XII secolo. Fu tradotta in *persiano*, in lingua *murwar* ed in quasi tutte le *lingue dell'Indostan*. Tenuto conto del tempo in cui fu composta, questa opera esibisce un sistema di aritmetica profondo, regolare e ben coordinato. Essa contiene anche risultati di Geometria e Geodesia.
Le regole sono scritte in versi. Il trattato comincia con tavole di monete, pesi, misure di terra, di grano, del tempo e con le divisioni dello **zodiaco**.
Viene quindi enunciato questo principio fondamentale:

"I numeri hanno valore crescente in proporzione decupla secondo il posto che occupano."

Seguono i nomi delle prime diciassette potenze del numero 10.

Viene insegnata l'addizione procedendo da destra, come si fa attualmente, vengono riportati altri processi semplicissimi, se si vuole procedere da sinistra.
La sottrazione è come la nostra.
Nessuna riga separa la somma dagli addendi o il resto dal sottraendo e nessun segno è adoperato per indicare le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione.
Uno zero posto al di sopra di un numero indica che deve essere sottratto dal precedente, uno zero posto accanto ad una somma indica che fu pagata.
La moltiplicazione viene insegnata in cinque modi differenti, ma nel capitolo dedicato a questa operazione non si trova la tavola che, si dice, **Pitagora** abbia portato dall'India.
Nelle frazioni, il numeratore sta sopra il denominatore senza alcuna linea di separazione.
Per la divisione si riduce il dividendo e il divisore, dividendo entrambi per un fattore comune, quando ve ne sia uno.
L'estrazione della radice quadrata è insegnata con il metodo attribuito a Teone da Smirne.
Infine, in questa opera si trovano anche l'estrazione della radice cubica, le regole del tre, la prova del nove. Questa prova del nove era però insegnata già da molto tempo prima dal matematico persiano **Abou-Al-Al-lisse** (980-1037) nella "***Esposizione delle radici del calcolo e dell'aritmetica***".
Il merito principale degli Arabi fu quello di sviluppare, con il materiale indiano, i principi delle dimostrazioni teoriche dell'Aritmetica greca.
Pochi i lavori veramente originali prodotti dagli Arabi, ai quali si devono però le *"**regole di falsa posizione**", semplice e doppia, dette anche "regole d'Elcatayn".*
Uno dei più antichi libri di aritmetica con notazioni algebriche è l'***Algoritmo*** di **Al-Khuwarizmi**, scritto nell'830. Celebri aritmetici furono anche **Aboutwefe**, continuatore della scuola **Diofantea**, **Tâbit ibn Qorra, Aboh Mansour e About Waffa**, tutti del IX secolo.
Ma il più celebre di tutti fu **Avicenna o Avisena**, medico (980-1037) che lasciò un centinaio di opere tra cui la ***Lettera che apre le porte dell'Accademia per mezzo delle radici del calcolo e dell'Aritmetica***, in cui sono raccolte le varie operazioni aritmetiche e sono spiegati i caratteri di divisibilità dei numeri per nove. Sulle proprietà del numero nove egli sviluppa le prove di tutte le operazioni aritmetiche fondamentali.

L'evoluzione delle cifre indo-arabiche

La matematica indiana e araba

L'evoluzione delle cifre indo-arabiche
(da Bariola, Storia della Ragioneria.)

Ecco come s'incominciarono a scrivere, o come furono scritte, da primi aritmetici, le cifre arabiche:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Arabe (dopo Cristo)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Persiani (» »)	1	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰
Fibonacci (1202)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Sacrobosco (1250)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Planudio (1327)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	0

In Gerberto, le nove cifre sono così scritte:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

e dicevansi per ordine

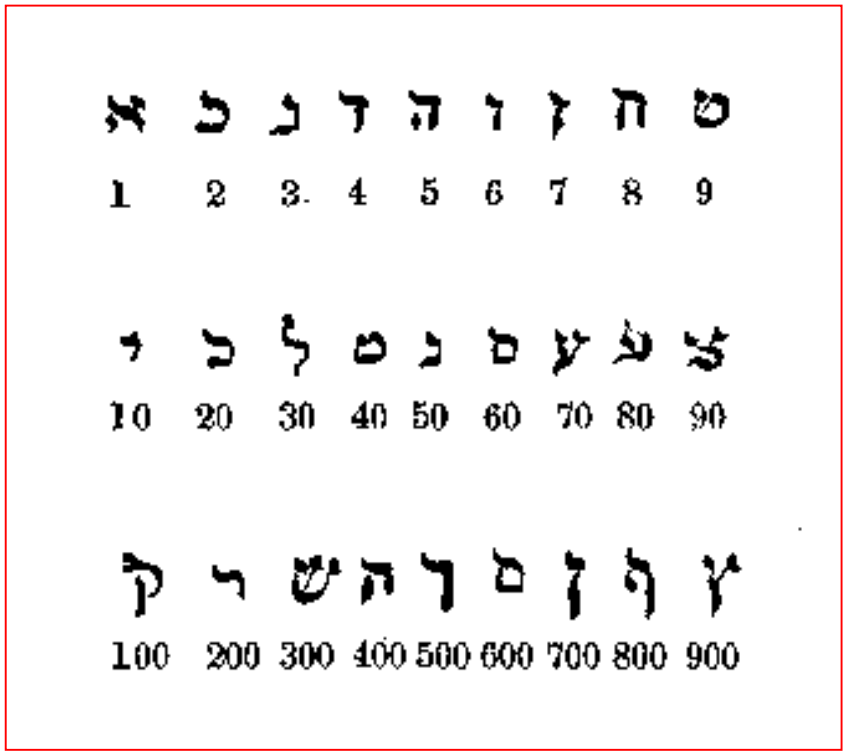
igin, andras, ormis, arbas, quinas, calcus, zenis, themenias, celentis, rota.

Questa tavola l' abbiamo tolta dal *Compendio d' Aritmetica* di Giovanni Luvini, il quale a sua volta la tolse dal *Sunto Storico dell'Aritmetica* del Cav. Martines (Messina 1855).

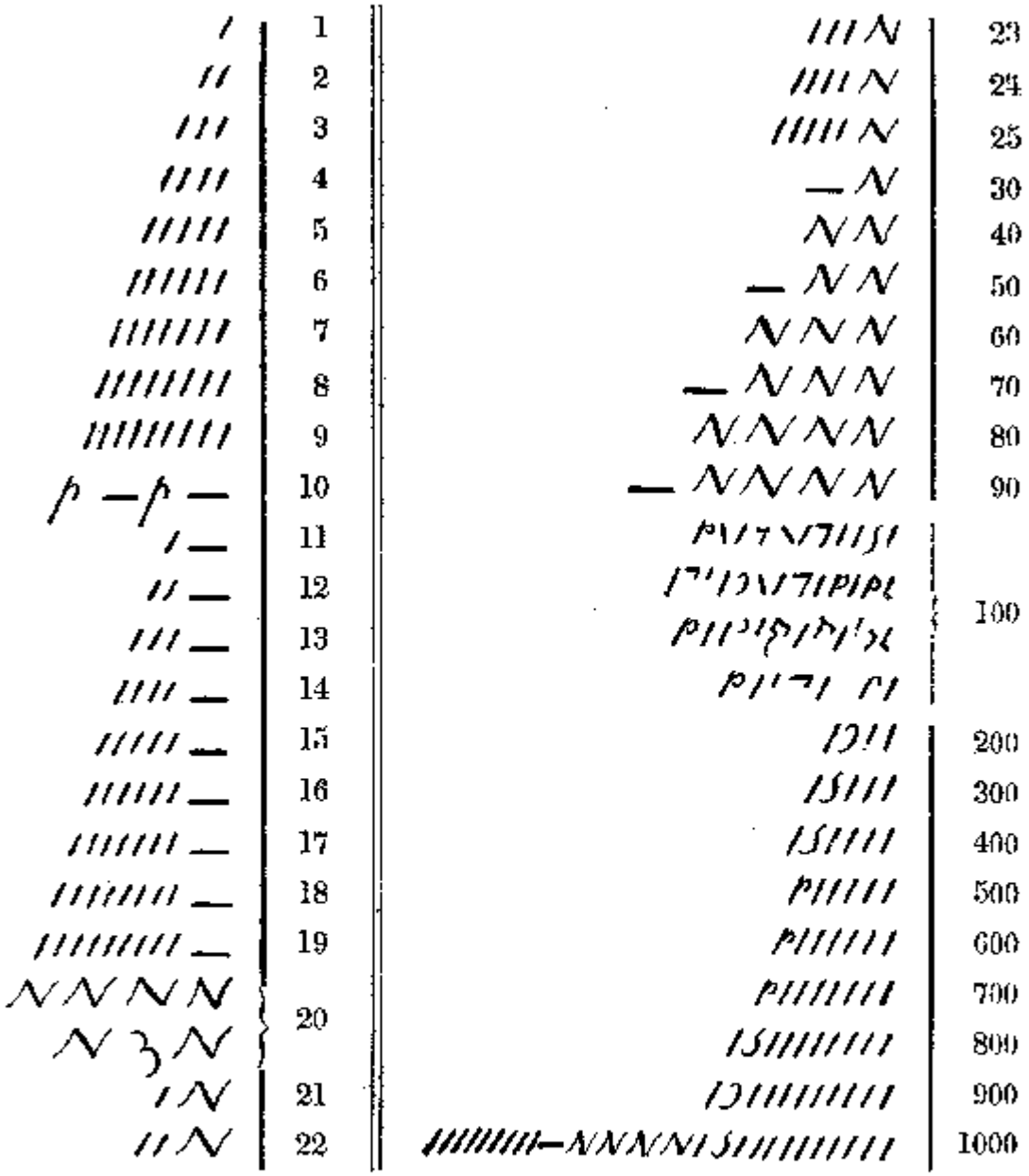
La numerazione indo-arabica
La matematica indiana e araba

La numerazione ebraica

L'alfabeto ebraico conta 22 lettere, cinque delle quali si scrivono in modo diverso se si trovano alla fine della parola. Utilizzando tali cinque segni, gli ebrei disponevano di 27 lettere che utilizzarono per scrivere, nell'ordine, le nove unità, le nove decine e le nove centinaia:



La numerazione fenicia
(da Bariola, Storia della Ragioneria)



Questa tavola l'abbiamo tolta dall'Enciclopedia Motropolitano (inglese) alla voce « Aritmetica ».

La numerazione greca

Il metodo più antico adoperato dai greci fu il sistema pentenario basato sul seguente schema fondamentale:

I	Π	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1000	10000
is	pente	deca	ecaton	chilia	miria

Questi numeri, ad eccezione del pente, si rendevano più grandi o con l'aggiunta degli altri o con la "moltiplicazione per pente" che si indicava racchiudendo il numero entro il segno pente, Π.
Si otteneva così:

⟦Δ⟧	⟦H⟧	⟦X⟧	⟦M⟧
50	500	5000	50000

In seguito, i greci seguirono lo stesso sistema degli ebrei. Disponendo di 24 lettere dell'alfabeto, ne aggiunsero tre: la "episum", la "koppa" e la "sanpi" arrivando alle 27 necessarie.
Per le migliaia adoperavano le prime nove lettere accentandole o munendole di un " ′" come pedice a sinistra.
Le decine di migliaia si indicavano sottoponendo la lettera M, iniziale della parola "Μῦριάς" (diecimila), ai numeri scritti secondo il sistema, oppure scrivendo le due iniziali "Μυ" alla sinistra di tali numeri.
Il massimo numero che riuscivano a scrivere era il nostro "cento milioni".
Essi usarono scrivere i numeri procedendo da destra a sinistra.

La matematica greca:
Pitagora
Euclide e la Scuola Alessandrina
Archimede

La numerazione romana

Questa è una delle numerazioni più caratteristiche, ancora oggi usata in diversi casi.
Pare che sia pervenuta ai Romani dagli Etruschi, che però la scrivevano capovolta. Certamente deriva dal primitivo sistema pentenario basato sul numero cinque V. I segni fondamentali sono:

I V X

Il segno X (dieci) è ottenuto con due V uniti nel "vertice", XV (quindici) è composto da tre V, il XX (venti) da quattro V, ed anche L (cinquanta) in origine doveva essere stato un V inclinato.
Dall'alfabeto i latini presero il segno C per indicare le centinaia, per cinque centinaia adoperarono il segno



che poi si trasformò in un D.
Le migliaia erano indicate con



che poi divenne



e quindi M.
Un segmento posto sopra un numero lo moltiplicava per mille, così

$$\bar{X} = 10.000$$

Le centinaia di migliaia si indicavano racchiudendo il numero in un quadrato aperto inferiormente, per esempio

$$\boxed{X} = 1.000.000 = \bar{M}$$

che si leggeva *decies centena milia.*
La formazione degli altri numeri avveniva per somma (giustapposizione a destra), o per sottrazione (giustapposizione a sinistra).
Esempio: 18 si scriveva XVIII e si leggeva *duo de viginti,*
19 si scriveva XIX e si leggeva *un de viginti.*
Si usava quindi per i simboli un *valore di posizione relativo.*
Nella ***tabula alimentaria di Veleja*** si trovano queste cifre:

$\boxed{XVI}$ per 1.600.000

$\boxed{X}\ \overline{CLXXX}\ DC$ per 1.180.600

Le origini dei numeri

Una delle numerose leggende sull'origine dei numeri attribuisce a *Crisna, una delle incarnazioni della Trimurti o Trinità indiana* (3000 a. C.), l'invenzione delle cifre fondamentali della numerazione.
Platone ne attribuì l'invenzione a Palamede, i Romani alla dea Minerva, ed i Maomettani la attribuiscono tuttora a Edris.
La parola **numero** deriva dal latino **numeros**, che alcuni fanno derivare da **numus** (moneta), altri dal greco **νἐμω**, che significa distribuire.
Il modo più comodo ed ovvio per contare fu quello di utilizzare le dita della mano e, forse per questa ragione, il sistema di numerazione fu dapprima *pentenario* (Greci e Romani) e poi *decimale*. Sembra che nelle antiche civiltà americane il numero cinque si esprimesse con la stessa parola che significava mano ed un analogo riscontro sembra si trovi nella lingua persiana.
La *numerazione scritta*, che certamente seguì quella parlata, fu, agli inizi, letterale, avvalendosi dell'uso delle lettere dell'alfabeto proprio di ciascun popolo.
La prima Aritmetica fu dunque letterale; si adoperavano le prime nove lettere per le prime nove cifre, mentre le decine e le centinaia si esprimevano con le lettere successive ed i numeri intermedi si ottenevano per somma o sottrazione.
È chiaro che, in questo tipo di numerazione, ogni lettera ha un suo intrinseco valore indipendente dalla posizione e quindi un numero può essere indifferentemente scritto da destra a sinistra o da sinistra a destra.
Se, per esempio, stabiliamo che la lettera "e" ha valore 30 e la lettera "o" ha valore 6, il numero 36 si scrive indifferentemente "eo" oppure "oe".
La superiorità dell'Aritmetica attuale sta nel *valore di posizione* che hanno le cifre nella composizione dei numeri, il che permette di scrivere qualsiasi numero con solo dieci segni.

La numerazione greca
La numerazione romana

Le quattro operazioni

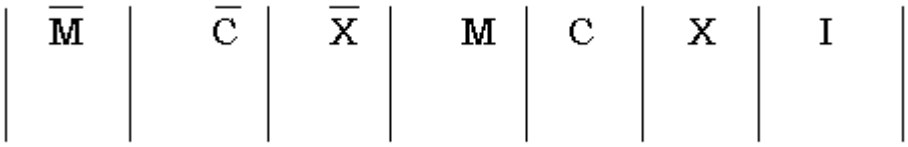
Poco si sa di sicuro su come gli antichi effettuassero tecnicamente le operazioni fondamentali del calcolo e dunque ci si muove nell'ambito di supposizioni od interpretazioni di quel poco che gli antichi autori hanno detto al riguardo. Essi, in generale, accennano ai risultati finali delle operazioni ma non al modo di eseguirle. **Euclide** e **Diofanto**, per esempio, negli ***Elementi*** e nella ***Arithmetica***, non danno regole di calcolo probabilmente perché le ritengono note al lettore. Quello che sappiamo è ciò che hanno potuto stabilire le ricerche del **Wallis** (1684) e del **Delembre** (1817). Il **Wallis** nel *"Algebrae tractatus historicus et praticus"* riporta un frammento del secondo libro delle collezioni matematiche di **Pappo** in cui si parla delle operazioni aritmetiche, ma lo fa in modo poco chiaro. Il **Delembre** in *"Histoire de l'astronomie ancienne"* ricostruisce il calcolo letterale dei Greci e giunge a concludere che non possedessero regole fisse per esprimere le quantità, poiché diversi autori, come Eutocio da una parte e **Diofanto** e Pappo dall'altra, usavano modi differenti. Ad esempio, non riuscì a stabilire come eseguissero la sottrazione.
Per quel che riguarda i Romani, come risulta da alcune ricerche, sembra fossero capaci di eseguire prontamente le operazioni fondamentali e che in Roma esistessero scuole speciali di **Aritmetica** sotto la protezione della dea **Numeria**. Ma, di nuovo, a nulla di concreto si giunge sul loro modo di eseguire le operazioni. Varie supposizioni sono state fatte, alcune anche fantasiose. Nel 1836 il Professor **Filippo Schiassi** nella dissertazione *"Come gli antichi romani usando delle loro lettere facessero i loro computi"*, letta il 17 novembre 1836 all'Accademia di Scienze di Bologna, suppose che si adoperassero solo i segni I e V per comporre le nove cifre delle unità di qualsiasi classe, distinguendo le classi dalle diverse colonne in cui venivano collocati i segni.
Così il numero 1732 si scriverebbe

I	VII	III	II

e 2050 si scriverebbe

II		V	

e le caselle vuote indicherebbero lo zero.
La supposizione dello Schiassi fu suffragata dalla successiva scoperta di Filotete **Chasles**, che in un manoscritto di **Boezio** trovò un abaco disegnato a colonne ciascuna delle quali è destinata ad una classe di unità:



Molte informazioni si hanno invece su come si eseguivano le operazioni dal XIII al XVII secolo. In questo arco di tempo è diffusissimo il *calcolo mentale* e *l'aritmetica pratica* viene distinta in *aritmetica scritta* ed *aritmetica digitale,* che poi sparisce nel secolo successivo grazie al diffondersi della scrittura.
Nella prima parte del ***General trattato***, **Tartaglia** descrive minuziosamente il modo di esprimere i numeri con speciali **posizioni delle dita** della mano sinistra e della mano destra, rispettivamente per i numeri da 1 a 90 e da 100 a 9.000,

"Li digiti" o dita erano:
1° pollice
2° salutare o indice o dimostrativo
3° infame o impudico o medio
4° anulare o medicinale
5° auricolare o minimo
La pratica aritmetica, secondo il **Sacrobosco** ed altri autori, comprendeva nove operazioni dette *atti o passioni del numero*:
1) numerazione o rappresentazione. Vi erano tre specie di numeri: i *digiti* da 1 a 9, gli *articolari* costituiti da un digito seguito da zeri; i *composti* formati da digiti ed articolari.
2) addizione o seminare o raccogliere
3) sottrazione o abbattere, cavare, restare
4) dupplazione o doppiare
5) moltiplicazione
6) mediazione o dimezzare
7) divisione o dividere o partire
8) progressione
9) estrazione di radice
Altri autori inglobavano la dupplazione e la mediazione rispettivamente nella moltiplicazione e nella divisione.
Mentre *addizione* e *sottrazione* venivano eseguite sostanzialmente come si fa oggi, *moltiplicazione* e *divisione* furono oggetto di

elaborazioni veramente fantasiose in cui predominava l'arte grafica e il disegno.
La ***moltiplicazione*** si eseguiva:
per discorso, o testa, o colonna, o tavoletta
per ripiego
per crocetta
per scapezzo o spezzato
per scacchiero od organetto o baricocolo
per ***quadrilatero***
per gelosia o graticola.
Esistevano anche esecuzioni *per piramide, per triangolo,* **a calice**, che il **Tartaglia** giudica invenzioni bizzarre di nessuna comodità.
I primi quattro procedimenti si basavano sul calcolo mentale, i rimanenti erano sviluppi grafici. I più usati, che compaiono negli scritti del **Fibonacci** e degli autori successivi fino al 1700 **(M.F. Pagani**, **G.A. Alberti**), sono *ripiego, scapezzo, scacchiero, quadrilatero e gelosia.*
Per la ***divisione*** troviamo quattro procedimenti.
per regolo, o testa o discorso o alla dritta
per ripiego
per danda
per battello o per galea (particolarmente diffuso in Venezia)
Il quoziente si chiamava *avvenimento.*
Le esecuzioni *a danda* e *a battello* sono state le più usate fino al 1600, quella *a danda* è quella che si adopera ancora oggi, salvo un diverso ordine nella scrittura.
Ad esempio la divisione di 3.820 per 12 si scriveva:

```
12 //  3820 | 318
       36
        22
        12
        100
         96
          4
```

l'avvenimento è 318 con resto 4.
Esempi per gli altri metodi possono essere trovati in **Pagani** e Bariola.
Abbastanza curiosa appare oggi anche la *terminologia* usata, ampiamente documentata nel **Dizionario aritmetico** di **G.A. Alberti** del 1752. Il termine *frazione* era sconosciuto ed i numeri erano distinti in *sani* o *integri* e in *rotti.*

Quattro le operazioni fondamentali sulle frazioni:
- *schisare*: per semplificare le frazioni determinando i divisori comuni;
- *accattare*: sempre per semplificare le frazioni attraverso il massimo comune divisore, metodo ricavato da alcune proposizioni del libro VII degli ***Elementi*** di **Euclide**;
- *traslatare*: trasformare una frazione in un'altra, operazione necessaria nel confrontare i diversi sistemi di pesi e misure allora in uso;
- *infilzare*: trovare una quantità di cui fossero note frazioni.

L'uso dell'abaco

Gli oggetti piccoli e più comuni, come i sassi, furono i primi sussidiari delle dita nel contare. **Plinio** riferisce che presso i Traci si usava contare i giorni felici ed infelici della vita con sassi di diverso colore. Il "*clarus annalis*" dei romani era il chiodo di bronzo che veniva piantato nel tempio di Giove per contare gli anni decorsi dalla fondazione della città.
Antichissimo tra i popoli orientali fu l'uso di *corde a nodi* per facilitare i conti.
Anche **Pizarro** (**1475-1541**), nella sua conquista del Perù, trovò in uso presso gli indigeni degli arnesi detti ***quippos***, che erano delle corde a nodi.
Dai sassi si passò alle *pallottole* adoperate dai greci. Queste pallottole scorrevano su fili fissati verticalmente all'interno di una cornice.
Quelle del primo filo rappresentavano le unità, quelle del secondo le decine, quelle del terzo le centinaia e così di seguito.
Tale strumento fu detto ***abaco calcolatorio***.
Gli Etruschi lo chiamarono *abcar*, i greci *abax*, i romani *abacus*. Con lo stesso nome si designava anche la tavoletta di legno su cui si spargeva una sabbia finissima che veniva solcata con il radius o stiletto per tracciare lettere e numeri.
Bhaskara Acharya (1114) nell'***Aritmetica indiana o Lilawati***, racconta che gli Indiani operavano su tavolette sulle quali una polvere cretosa formava un fondo bianco. Ad essa si sovrapponeva sabbia rossa, che smossa con uno stilo per tracciare i segni, lasciava vedere il fondo bianco. Passando la mano sulla sabbia rossa si cancellava lo scritto.
Alcuni fanno derivare la parola abaco dall'uso della polvere, che con antico nome era detta *abak*; altri, rifacendosi alla numerazione letterale, ne fanno risalire l'origine alle prime tre lettere dell'alfabeto greco: *alpha, beta, gamma.*
Presso i romani si usò un *abaco a lapilli* e successivamente *l'abaco a bottoni* simile a quello greco, salvo il fatto che invece di una cornice a fili si usava una tavoletta con scanalature in cui si facevano scorrere lapilli o bottoni.
L'uso dell'abaco ebbe grande diffusione; ancora nel secolo XIV troviamo come maestro d'abaco **Tartaglia**. Fino alla fine dell'Ottocento, in Cina e nel Tibet, si adoperava un abaco a pallottole detto *Swanpan* ed in Russia un abaco detto *Schole* (numeratore) molto simile a quello cinese.

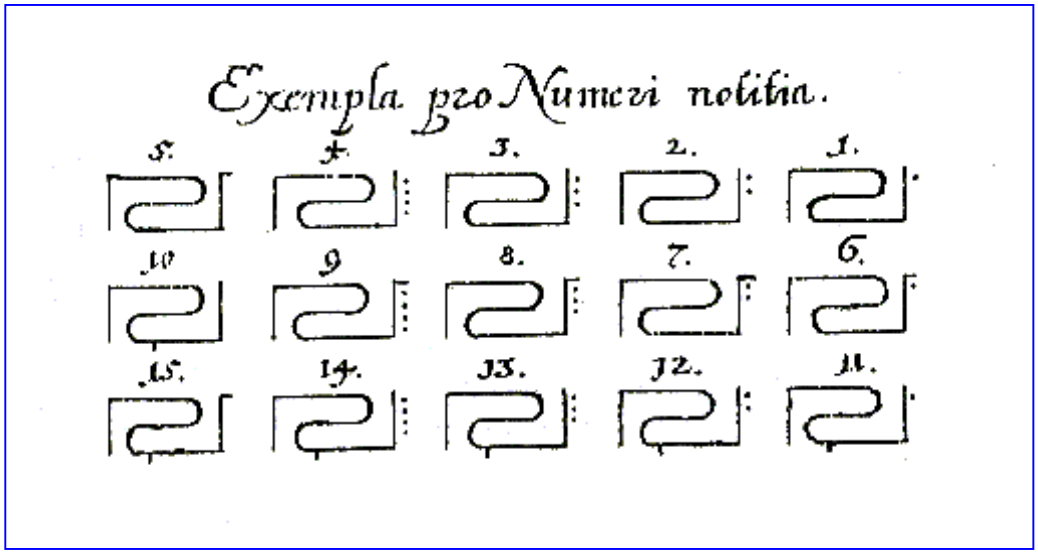
I primi calcolatori o maestri d'abaco erano chiamati ***Abacisti***; ma dopo la diffusione del **sistema indo-arabico**, essi pian piano cedettero il passo agli **Algoritmisti o cultori dell'Algoritmia**, parola che deriva dall'arabo. Molto più tardi un matematico tedesco, **Wronsky** (1778-1853), ed i suoi discepoli adoperarono il termine Algoritmia per indicare ogni forma particolare di generazione dei numeri.
Un celebre abacista fu il francese **Gerberto**, vissuto alla fine del X secolo e divenuto nel 999 *Papa Silvestro II*. Egli lasciò un trattato dal titolo "***De Abaco***" *o* "***De arithmetica***".


CŌTADOR·MAIOR·I TEZORERO
TAVANTIN·SVIO·QVIPOC
CVRACA·CON DOR·CHAVA

L'Algebra

Nel corso del 1500, *l'Aritmetica Generale* aveva registrato grandi successi grazie ai contributi di **Dal Ferro**, **Cardano**, **Tartaglia**, **Ferrari** e **Bombelli**, ma fu verso la fine del secolo XVI che si delineò una distinzione nel campo di questa scienza.
Il francese **François Viète** ebbe la felice idea di sostituire i numeri con le lettere, creando il *"Calcolo letterale"* e raggiungendo così un notevole triplice vantaggio: risparmiare fatica, poter leggere nel risultato finale in che modo i dati concorrano a determinarlo, estendere la soluzione a tutti i casi simili.
È sostanzialmente la distinzione tra *Algebra* ed *Aritmetica*; la prima fu allora chiamata **Aritmetica Speciosa**, la seconda **Aritmetica Ordinaria** (a quest'ultima il Viète tentò inutilmente di applicare l'antica denominazione di Logistica).
Ovviamente, come sempre accade, la separazione rimase per qualche tempo incerta, come testimoniano i titoli di alcuni testi quali la *"Aritmetica degl'infiniti"* del **Wallis** e la *"Aritmetica Universale"* di **Newton**.
Dal principio del secolo XVII l'inglese **Harriot** introduce i simboli "<" ed ">" ed **Oughtred** introduce l'uso della *virgola per i decimali* e del segno "×" per la moltiplicazione. **Cartesio** perfeziona l'uso degli *esponenti* e nel 1610, l'astronomo **Byrgius** predispone delle *"Tavole progressive aritmetiche e geometriche per fare ogni sorta di calcoli"*, che rappresentano un primo sistema di *logaritmi*.
Napier di Marchiston li perfeziona e l'inglese **Enrico Briggs** di Oxford pubblica nel 1618 i logaritmi dei numeri da 1 a 1.000, e nel 1624 quelli da 1 fino a 100.000, tutti calcolati con 14 cifre decimali, con notevoli vantaggi per l'arte del calcolo.
In questo stesso secolo XVII, si profila una nuova forma nell'arte del calcolo, la *"Aritmetica meccanica"* ad opera di **Blaise Pascal**, geometra e filosofo francese.
La **pascaline**, macchina calcolatrice ideata da **Pascal,** può essere considerata come l'antesignana delle attuali macchine da calcolo.
L'idea della costruzione di macchine meccaniche fu ripresa da altri personaggi e si perfezionò sempre più, fino a giungere agli attuali più sofisticati Computer.
In tanto progredire, tuttavia, non sono mancati i tentativi di usare altri simboli per rappresentare i numeri, nonostante la semplicità pratica e visiva delle cifre arabe.
Ancora nel 1661, **Joachim Becher** nel suo "*Character pro notitia linguarum universalis* ", sospettando che non tutti i popoli potessero

essere in grado di leggere i numeri arabi, escogitava un sistema visivo di rappresentazione dei numeri incredibilmente complesso e praticamente illeggibile, erroneamente giudicato da alcuni autori simile agli ideogrammi cinesi. Si tratta sostanzialmente di un sistema che utilizza puntini e lineette, come in figura (da U. Eco, *La ricerca della lingua perfetta*):

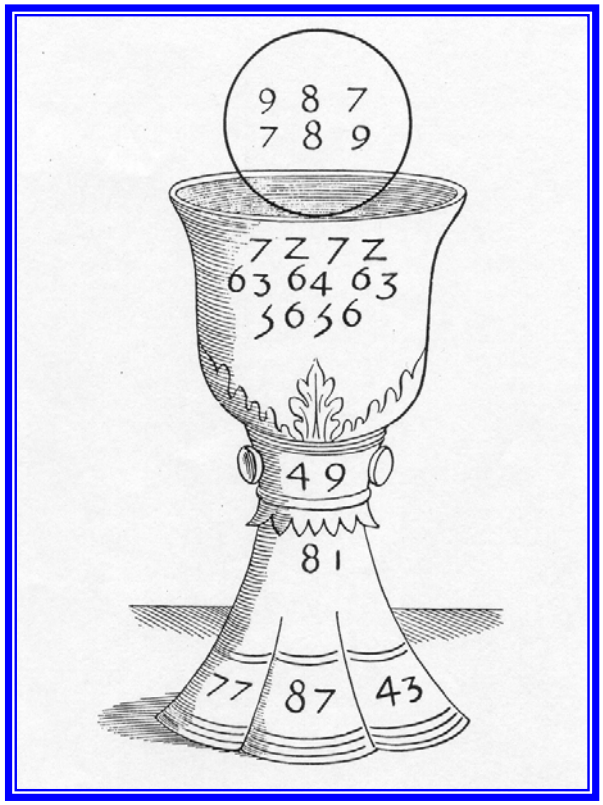


Un altro fenomeno, non del tutto secondario, destinato a perdurare, consistette nel fatto che, in contrapposizione al diffondersi di tanti scritti in volgare italiano, ricomparvero testi scritti in latino, **Riccati** 1751, **Vega** 1794.

Nel corso del secolo successivo, cioè del XVIII secolo, la separazione tra aspetti contabili pratici e teorici si accentua, l'aritmetica mercantile evolve verso la *Computisteria* e la *Ragioneria*, l'aritmetica superiore verso l'*Algebra* e la *Teoria dei Numeri*, ricca di problemi teorici come le **equazioni diofantee**, e **l'Ultimo Teorema di Fermat**. Questa separazione non è, però, né totale né eterna: ai nostri giorni il rapporto tra **Matematica ed Economia** torna a rinsaldarsi con gli studi sull'ottimizzazione e sulla ricerca di modelli matematici per il mondo economico-finanziario.

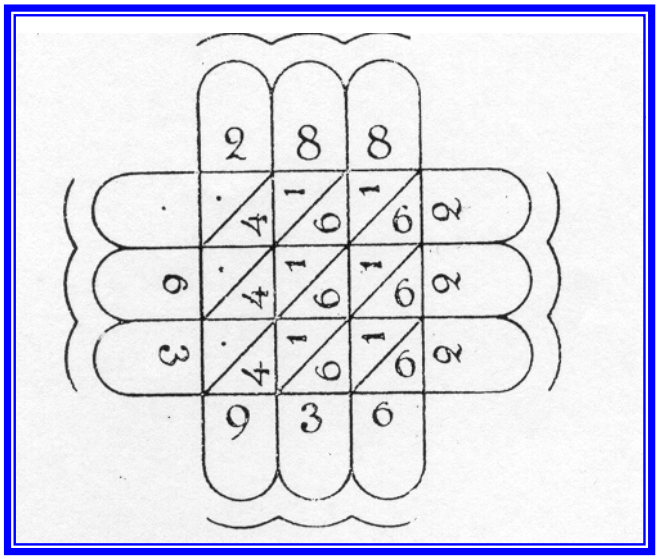
La classificazione dell'Algebra secondo Nesselmann

Moltiplicazione a calice



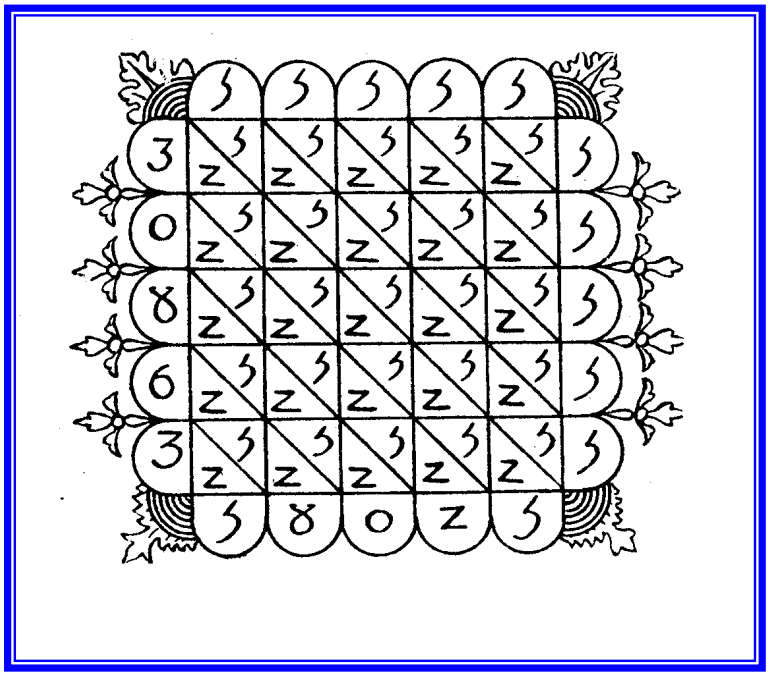
987 · 789 = 778743

Moltiplicazione a graticola



288 · 222 = 63936

a quadrilatero



55555 · 55555 = 3086358025

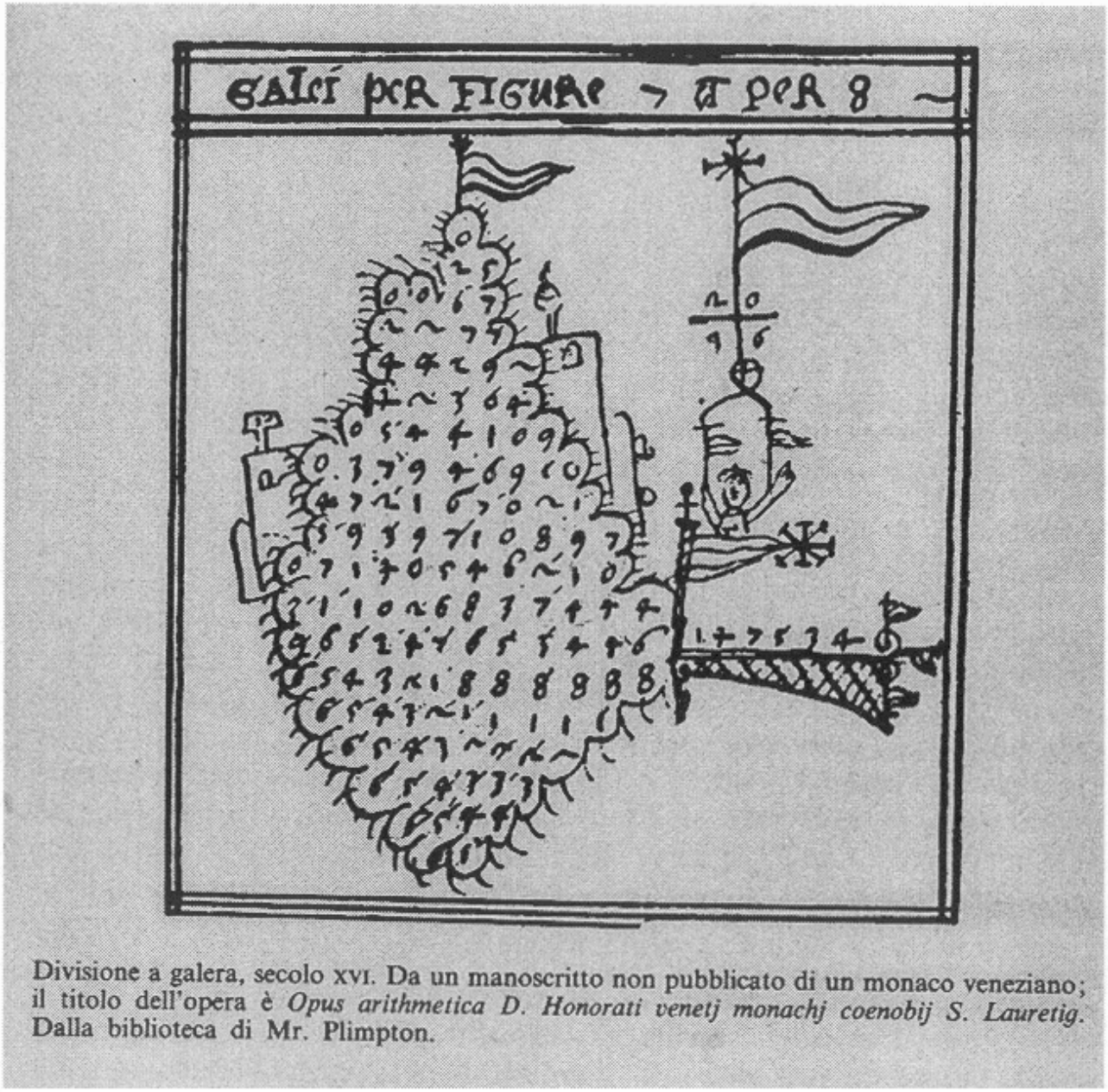
La moltiplicazione a crocetta di Fibonacci

La divisione a galea

Dall'*Aritmetica Pratica* del Pagani:

- **Moltiplicazione a gelosia**
- **Moltiplicazione a quadretto**
- **Divisione a danda (spiegazione)**
- **Divisione a galera**

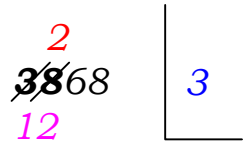
Divisione a galea (o galera)



Divisione a galera, secolo XVI. Da un manoscritto non pubblicato di un monaco veneziano; il titolo dell'opera è *Opus arithmetica D. Honorati venetj monachj coenobij S. Lauretig.* Dalla biblioteca di Mr. Plimpton.

Il nome "a galea" deriva dal fatto che la forma del diagramma numerico che descrive i singoli passi del procedimento ricorda da vicino una nave con una vela spiegata.

Illustriamo questo algoritmo di divisione con un esempio, particolarmente semplice, tratto dal *Libro di Arimeticha* di Dionigi Gori, del secolo XVI.
Si vuole dividere *3868* per *12*. Si scrive:



La divisione a galea

Dall'*Aritmetica Pratica* del Pagani:

- **Moltiplicazione a gelosia**
- **Moltiplicazione a quadretto**
- **Divisione a danda (spiegazione)**
- **Divisione a galera**

Dai numeri naturali agli ottoniani

Quando, nella costruzione dei numeri, si passa dall'insieme **N** dei numeri naturali agli insiemi: **Z** dei numeri interi, **Q** dei numeri razionali, **R** dei numeri reali, si guadagna in proprietà operative su tali numeri, ottenendo, di volta in volta, strutture algebriche sempre più ricche. Le operazioni fondamentali sono l'**addizione** denotata con "+" e la **moltiplicazione** denotata con " · ".
(N,+) ed **(N,·)** costituiscono entrambi un **monoide unitario commutativo**, cioè le due operazioni sono *associative, commutative e hanno elemento neutro rispettivamente nello 0 e nel numero 1.*
Risulta infatti: $\forall\, n \in \mathbf{N} : n + 0 = n, \quad n \cdot 1 = n.$

(Z,+) diventa un **gruppo abeliano** o commutativo poiché, oltre alle proprietà descritte per **(N,+)**, ogni elemento di **Z** possiede **simmetrico** rispetto alla + , cioè:
$\forall\, p \in \mathbf{Z} \quad \exists\, q \in \mathbf{Z}$ tale che $p + q = 0$, e tale elemento viene chiamato *opposto* di p e denotato con $-p$.
(Z,·) è un **monoide commutativo unitario** con *1* come elemento neutro. Esso però non è un gruppo, poiché *1* e *-1* sono i suoi unici elementi dotati di simmetrico rispetto a "·" .
Ricordiamo che: p ha simmetrico se $\exists\, q \in \mathbf{Z}$ tale che $p \cdot q = 1$.
Con la costruzione dei razionali si ottiene una struttura **(Q,+,·)** più ricca, detta **corpo commutativo** o **campo**, in quanto **(Q,+)** è un gruppo abeliano, e posto **Q* = Q-{0}**, **(Q*,·)** è anche esso un gruppo commutativo, cioè ogni numero razionale non nullo ammette *inverso* (simmetrico) per la moltiplicazione, e la moltiplicazione è *distributiva a destra e a sinistra rispetto alla addizione.*
La stessa situazione si presenta per **(R,+,·)**, che risulta essere un campo **totalmente ordinato** e **archimedeo**, cioè **R** possiede una relazione di ordine totale, denotata "≤ ", definita da:
$\forall\, x, y \in \mathbf{R} \qquad x \le y \Leftrightarrow \exists\, z \in \mathbf{R},\ z \ge 0$ *tale che* $x + z = y,$
che è compatibile con le due operazioni +, · e verifica l'assioma archimedeo.
Relazione di *ordine* significa che ≤ gode delle tre proprietà:

1) *riflessività*:	$\forall\, x \in \mathbf{R}$	$x \le x$
2) *antisimmetria*:	$\forall\, x, y \in \mathbf{R}$	$x \le y\,,\ y \le x \Rightarrow x = y$
3) *transitività*:	$\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$	$x \le y\,,\ y \le z \Rightarrow x \le z$
Ordine totale:	$\forall\, x, y \in \mathbf{R}$	$x \le y \vee y \le x$
compatibilità:	$\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$	$x \le y \Rightarrow x + z \le y + z$
	$\forall\, x, y \in \mathbf{R}$	$0 \le x,\ 0 \le y \Rightarrow 0 \le xy$

archimedeo: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \geq 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, ***tale che*** $y < nx$

Nel passaggio dal campo **R** dei numeri reali al campo **C** dei **numeri complessi**, se da un lato si arricchisce la struttura, consentendo tutte le operazioni algebriche, inclusa l'estrazione di radici, che in **R** non è sempre possibile, d'altro canto si perde l'ordinamento del campo. In accordo con **l'assioma della scelta**, **C**, come qualsiasi altro insieme, ammette una relazione di *buon ordine*, che però non può, in nessun caso, essere compatibile con le operazioni + e · in **C**.
Una relazione di ordine totale su un insieme X si dice di buon ordine se ogni parte non vuota di X possiede il più piccolo elemento.

A questo punto si può pensare di procedere in modo formalmente analogo per costruire nuovi insiemi numerici e studiarne le proprietà.
Se come insieme si ha $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R^2}$, cosa si può ottenere con $\mathbf{C} \times \mathbf{C} = \mathbf{R^4}$?
L'insieme che si ottiene può essere dotato di una struttura di corpo detto **corpo dei Quaternioni** e denotato con **H**. ***Si perde***, dunque, nel passaggio da **C** a **H**, ***la commutatività della moltiplicazione***.
L'ulteriore passaggio, cioè la costruzione di una struttura su $\mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathbf{R^8}$, denotato con **Ca**, che dà vita ai cosiddetti **Ottoniani** o **numeri di Cayley**, paga come prezzo la ***rinuncia alla associatività della moltiplicazione***.

Così, mentre $\mathbf{S^1}$ (circonferenza di raggio *1* e centro *0* in $\mathbf{R^2}$) ha una struttura di gruppo abeliano, perché identificabile con il sottogruppo di $(\mathbf{C}^*,\cdot)$ costituito dai numeri complessi di norma *1*, e $\mathbf{S^3}$ ha una struttura di gruppo **non commutativo,** perché identificabile con il sottogruppo di $(\mathbf{H}^*,\cdot)$ costituito dai quaternioni di norma *1*, $\mathbf{S^7}$ non ha più struttura di gruppo, essendo venuta meno l'associatività in $\mathbf{R^8}$.
Si può infatti provare che nessuna sfera $\mathbf{S^n} \subset \mathbf{R^{n+1}}$, $n \neq 1,3$ ammette una struttura di gruppo.

L'Aritmetica mercantile

Il secolo XIV vede un gran fiorire di manoscritti di *Aritmetica pratica* e di *Aritmetica mercantile*, generalmente caratterizzati dall'assenza di organizzazione teorica e di regole formali, ma ricchi di problemi specifici ed esempi pratici sulle operazioni, su conteggi applicati alle società, ai cambi, ai baratti, ai pesi e alle misure.
Un manoscritto del 1398, conservato nella Biblioteca Comunale di Palermo, di autore anonimo, dal titolo *Raxoni merchatantesche*, presenta le operazioni fondamentali dell'aritmetica e riproduce una serie di tavole prontuarie, a quel tempo importanti a causa della grande diffusione del calcolo mentale. Riporta, in prospetti, i risultati della moltiplicazione dei numeri da 2 a 10 per altri numeri, ad esempio:

2	31	62
3	31	93
4	31	124
5	31	155
6	31	186

Così, per il calcolo dei quadrati:

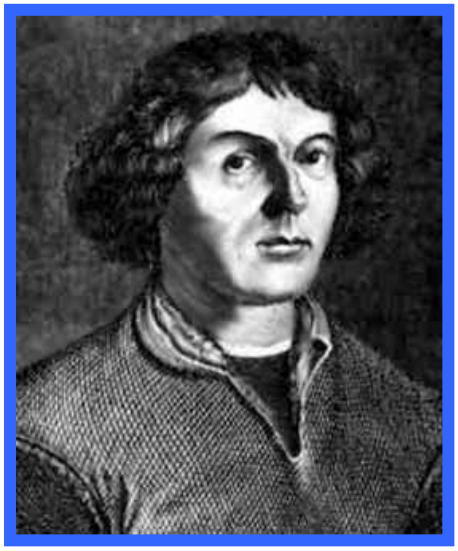
121	144	169	196	225	256
11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16

Questo fu un periodo di grande sviluppo economico; fiorirono arti e mestieri, cominciarono a nascere le prime scuole pubbliche, ovviamente non gratuite. Firenze ne contava ben sei, nelle quali si insegnavano gli elementi di tutto quanto potesse avere riscontro ed applicazione nelle attività lavorative. *La grande svolta avvenne, però, nel XV secolo con la invenzione, in Germania nel 1440, della stampa*, che rese possibile una maggior diffusione dei libri in relazione alla diminuzione del loro costo.
Riapparve il *De Arithmetica* di **Boezio**, con edizioni a Venezia nel 1488, nel ' 91 o ' 92 ed a Basilea nel 1570.
Molti furono i progressi della aritmetica mercantile nel '400, un po' meno nella aritmetica superiore. **Giovanni Müller**, detto **Regiomontanus** (Königsberg, 1436) introduce le frazioni decimali; sembra anche che abbia inventato un'aquila automatica lunga 500 passi capace di tornare, dopo un volo, al punto di partenza. Figura di rilievo di fine secolo fu il **Pacioli**.

La trattazione della *aritmetica mercantile* prosegue nel secolo successivo; compare il *Thesauro Universale* del **Tagliente** (1515), un libretto di 100 pagine che presenta le varie **posizioni delle dita** per numerare, con la destra da 100 a 9.000 e con la sinistra da 1 a 90. Vi è trattata la prova del sette, la moltiplicazione per colonna o per scacchiero, la **divisione per galea**, abbellite o appesantite (secondo i gusti) da fantasiosi **disegni**. Tutte le operazioni sono eseguite con numeri interi, infine viene presentata *la regola del tre*, vero *deus ex machina* della aritmetica di quei secoli.

Modello del libro delle spese del XIII secolo

Niccolò Copernico (1473-1543)



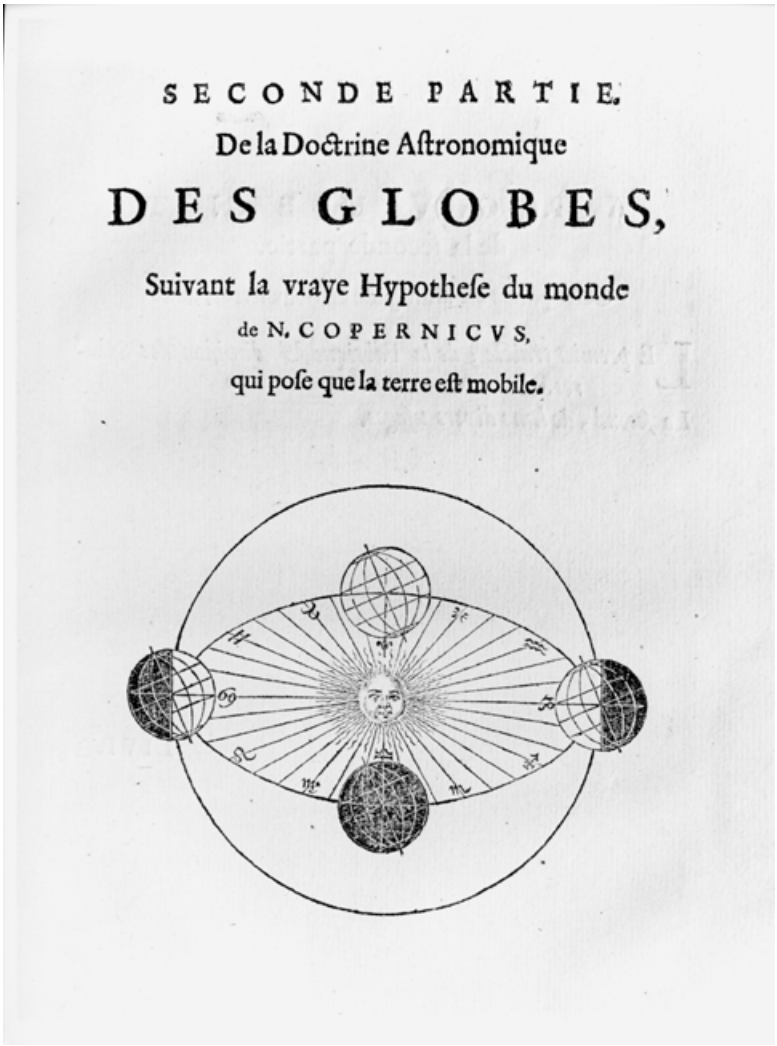
Il vero nome di questo astronomo polacco era Niklas Koppernigk. Studiò alle università di Cracovia, Bologna, Padova e Ferrara, alternando il suo interesse per la matematica e l'astronomia con lo studio del diritto canonico, della medicina e della letteratura classica. Un suo zio vescovo gli affidò il canonicato di Warmia, una regione polacca. Dalla sua attività amministrativa egli trasse spunto per il trattato ***De monetae cuidendae rationae*** (1519), una dissertazione sul conio della moneta, e per una seconda opera di contenuto analogo, intitolata ***Tractatus de monetis***.

La prima osservazione astronomica copernicana di cui si abbia notizia reca la data del 9 marzo del 1497. L'opera principale di Copernico è il trattato ***De revolutionibus orbium coelestium***, completato intorno al 1530, ma pubblicato postumo. Qui egli presenta una nuova teoria astronomica, fondata su **calcoli trigonometrici**, che prevede il moto della Terra intorno al Sole, e che segna il primo passo verso l'abbandono del sistema geocentrico risalente a **Tolomeo**. L'opera è strutturata come l'***Almagesto***, di cui vuole costituire un perfezionamento. In essa Copernico riprende dall'antico scienziato egiziano la **teoria degli epicicli**, ma corregge le sue misurazioni astronomiche. Le idee copernicane saranno rielaborate da **Tycho Brahe**, **Keplero** e **Galileo**.



Una raffigurazione del sistema eliocentrico copernicano

Quest'ultimo, in particolare, le discuterà nel suo famoso ***Dialogo de' due Massimi Sistemi Tolemaico e Copernicano***.


SECONDE PARTIE.
De la Doctrine Aſtronomique
DES GLOBES,
Suivant la vraye Hypotheſe du monde
de N. COPERNICVS,
qui poſe que la terre eſt mobile.

Il Leopardi dedicò una delle sue Operette Morali alla figura di Copernico. Essa contiene, fra l'altro, un immaginario **dialogo** tra l'astronomo ed il Sole, in cui l'uomo presagisce i colossali stravolgimenti che la sua rivoluzionaria teoria provocherà nel mondo.

Contrariamente a quanto molti credono, le idee di Copernico sul moto dei pianeti non sono completamente nuove: se ne trovano, anzi, evidenti tracce fin nell'antichità. Il Pitagorico Filolao di Crotone (sec. V a.C.) già aveva ipotizzato che la Terra ruotasse, ed il greco Aristarco di Samo (sec. IV a.C.) aveva esplicitamente collocato il Sole al centro del cosmo: lo ricorda anche **Archimede** nell'***Arenario***. Copernico conosceva le opere di questi autori, sia pur da fonti secondarie. In realtà molti elementi della scienza copernicana risalgono all'antichità, primo fra tutti il moto circolare dei pianeti in un cosmo di forma sferica, che appartiene alla fisica di **Aristotele**.

Secondo lo studioso Paolo Rossi, inoltre, parlare di ***rivoluzione copernicana*** sarebbe inadeguato anche per un altro motivo di natura storica. In effetti, l'accoglienza della teoria eliocentrica da parte del mondo scientifico sarebbe stata alquanto prudente: la sua introduzione negli insegnamenti ufficiali avvenne, di conseguenza, in maniera molto graduale. Ancora nel 1561 gli studenti del corso di matematica dell'Università di Salamanca potevano scegliere tra

Tolomeo e Copernico: e a quest'ultimo andavano ben poche preferenze. I due sistemi astronomici continuarono ad essere insegnati parallelamente – a volte insieme a quello di Tycho Brahe - fino a tutto il Seicento.

La precisione vorrebbe, inoltre, che il sistema copernicano venisse chiamato ***eliostatico*** piuttosto che ***eliocentrico***: esso prevede, infatti, che il Sole stia sì fermo, ma che non coincida con il centro di rivoluzione della Terra.

I più famosi sostenitori del sistema copernicano furono forse **Galilei** e **Giordano Bruno**: entrambi dovettero pagare di persona la loro aperta professione di una cosmologia che l'Inquisizione considerava blasfema, in contrasto con la verità enunciata nella Bibbia. Il primo subì una condanna a vita nel 1633, il secondo morì sul rogo nel 1600.

L'immaginario dialogo di Copernico col Sole

Giacomo Leopardi dedicò una delle sue ***Operette Morali*** alla figura dell'astronomo polacco **Niccolò Copernico**. In quattro brevi scene egli immagina un dialogo tra lo scienziato, l'alba (*l'ora prima*), il tramonto (*l'ora ultima*) ed il Sole. Si tratta di una bellissima trascrizione poetica dello spirito del rivoluzionario sistema del mondo introdotto da Copernico, che sta per soppiantare quello antico, creato dal matematico alessandrino **Tolomeo**. L'atmosfera crepuscolare di cui l'opera è pervasa fa da sfondo ideale a quell'importante momento della storia della scienza, riproduce il sentimento che accompagna l'avvento di una nuova era per l'uomo: un'esaltazione mista ad inquietudine per il superamento dei miti ancestrali e per la conquista del potere della ragione da un lato, e per il riconoscimento della propria limitata posizione nell'universo dall'altro.

Scena 2
*COPERNICO: Gran cosa è questa. O che tutti gli oriuoli fallano, o il sole dovrebbe esser levato già e più di un'ora: e qui non si vede né pure un barlume in oriente; con tutto che il cielo sia chiaro e terso come uno specchio. Tutte le stelle risplendono come fosse la mezza notte. Vattene ora all'**Almagesto** o al **Sacrobosco**, e dì che ti assegnino la cagione di questo caso. Io ho udito dire più volte della notte che Giove passò colla moglie d'Anfitrione: e così mi ricordo aver letto poco fa in un libro moderno di uno Spagnuolo, che i Peruviani raccontano che una volta, in antico, fu nel paese loro una notte lunghissima, anzi sterminata; e che alla fine il sole uscì fuori da un certo lago, che chiamano di Titicaca. Ma insino a qui ho pensato che queste tali, non fossero se non ciance; e io l'ho tenuto per fermo; come fanno tutti gli uomini ragionevoli. Ora che io m'avveggo che la ragione e la scienza non rilevano, a dir proprio, un'acca; mi risolvo a credere che queste e simili cose possano esser vere verissime: anzi io sono per andare a tutti i laghi e a tutti i pantani che io potrò, e vedere se io m'abbattessi a pescare il sole. Ma che è questo rombo che io sento, che par come delle ali di un uccello grande?*

In questa scena emerge chiaramente la nostalgia per il paradiso perduto dei miti, per il senso del meraviglioso che riempiva le menti dei nostri antenati.

Nella quarta ed ultima scena, Copernico è l'individuo sgomento per essere stato improvvisamente cacciato dal centro del cosmo, il trono universale in cui l'uomo antico si cullava. Il Sole, d'altro canto, cerca di porgli davanti agli occhi la grandezza della sua scienza, rievocando,

tra l'altro, la figura di **Archimede**, il matematico che, per mezzo della leva, ipotizzava di poter sollevare il mondo.

Scena 4
COPERNICO: Illustrissimo Signore.
SOLE: Perdona, Copernico, se io non ti fo sedere; perché qua non si usano sedie. Ma noi ci spacceremo tosto. Tu hai già inteso il negozio dalla mia fante. Io dalla parte mia, per quel che la fanciulla mi riferisce della tua qualità, trovo che tu sei molto a proposito per l'effetto che si ricerca.
COPERNICO: Signore, io veggo in questo negozio molte difficoltà.
SOLE: Le difficoltà non debbono spaventare un uomo della tua sorte. Anzi si dice che elle accrescono animo all'animoso. Ma quali sono, poi, alla fine, coteste difficoltà?
COPERNICO: Primieramente, per grande che sia la potenza della filosofia, non mi assicuro che ella sia grande tanto, da persuadere alla Terra di darsi a correre, in cambio di stare a sedere agiatamente; e darsi ad affaticare, in vece di stare in ozio: massime a questi tempi; che non sono già i tempi eroici.
SOLE: E se tu non la potrai persuadere, tu la sforzerai.
COPERNICO: Volentieri, illustrissimo, se io fossi un Ercole o pure almanco un Orlando; e non un canonico di Varmia.
SOLE: Che fa cotesto al caso? Non si racconta egli di un matematico antico, il quale diceva che se gli fosse dato un luogo fuori del mondo, che stando egli in quello, si fidava di smuovere il cielo e la terra? Or tu non hai a smuovere il cielo; ed ecco che ti ritrovi in un luogo che è fuor della Terra. Dunque, se tu non sei da meno di quell'antico, non dee mancare che tu non la possa muovere, voglia essa o non voglia.
COPERNICO: Signor mio, cotesto si potrebbe fare: ma ci si richiederebbe una leva; la quale vorrebbe essere tanto lunga, che non solo io, ma vostra signoria illustrissima, quantunque ella sia ricca, non ha però tanto che bastasse a mezza la spesa della materia per farla, e della fattura. Un'altra difficoltà più grave è questa che io vi dirò adesso; anzi egli è come un groppo di difficoltà. La Terra insino a oggi ha tenuto la prima sede del mondo, che è a dire il mezzo; e (come voi sapete) stando ella immobile, e senza altro affare che guardarsi all'intorno, tutti gli altri globi dell'universo, non meno i più grandi che i più piccoli, e così gli splendenti come gli oscuri, le sono iti rotolandosi di sopra e di sotto e ai lati continuamente; con una fretta, una faccenda, una furia da sbalordirsi a pensarla. E così, dimostrando tutte le cose di essere occupate in servizio suo, pareva che l'universo fosse a somiglianza di una corte; nella quale la Terra sedesse come in un trono; e gli altri globi dintorno, in modo di cortigiani, di guardie, di servitori, attendessero chi

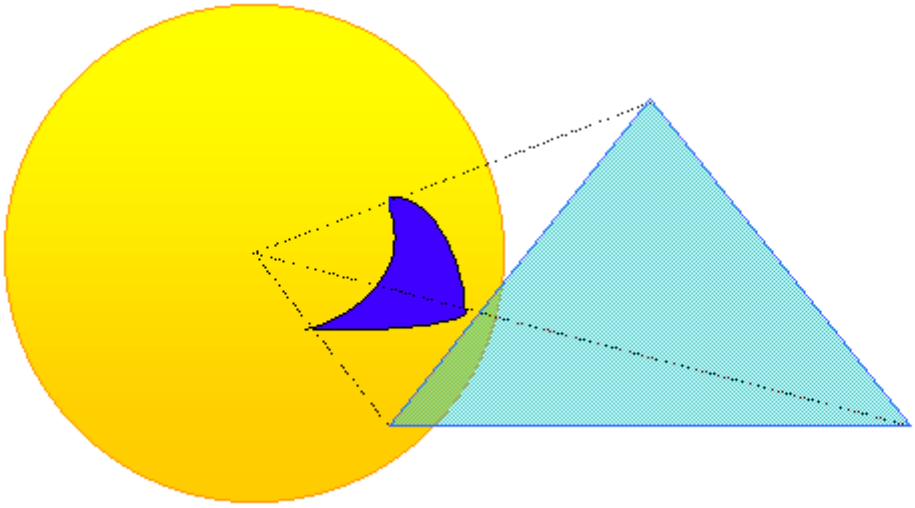
ad un ministero chi a un altro. Sicché, in effetto, la Terra si è creduta sempre di essere imperatrice del mondo: e per verità, stando così le cose come sono state per l'addietro, non si può mica dire che ella discorresse male; anzi, io non negherei che quel suo concetto non fosse molto fondato. Che vi dirò poi degli uomini? Che riputandoci (come ci riputeremo sempre) più che primi e più che principalissimi tra le creature terrestri; ciascheduno di noi, se ben fosse un vestito di cenci e che non avesse un cantuccio di pan duro da rodere, si è tenuto per certo di essere uno imperatore; non mica di Costantinopoli o di Germania, ovvero della metà della Terra, come erano gl'imperatori romani, ma un imperatore dell'universo; un imperatore del sole, dei pianeti, di tutte le stelle visibili e non visibili; e causa finale delle stelle, dei pianeti, di vostra signoria illustrissima, e di tutte le cose. Ma se ora noi vogliamo che la Terra si parta da quel luogo di mezzo; se facciamo che ella corra, che ella si voltoli, che ella si affanni di continuo, che eseguisca quel tanto, né più né meno, che si è fatto di qui addietro dagli altri globi; in fine, che ella divenga del numero dei pianeti; questo porterà seco che sua maestà terrestre, e le loro maestà umane, dovranno sgomberare il trono, e lasciar l'impero; restandosene però tuttavia co' loro cenci, e colle loro miserie, che non sono poche.

SOLE: Che vuol conchiudere in somma con cotesto discorso il mio don Niccola? Forse ha scrupolo di coscienza, che il fatto non sia un criminlese?

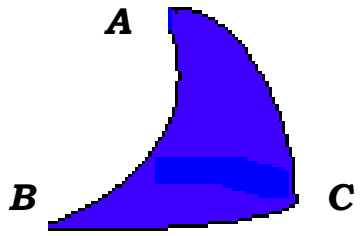
COPERNICO: No, illustrissimo; perché né i codici, né il digesto, né i libri che trattano del diritto pubblico, né del diritto dell'Imperio, né di quel delle genti, o di quello della natura, non fanno menzione di questo criminlese, che io mi ricordi. Ma voglio dire in sostanza, che il fatto nostro non sarà così semplicemente materiale, come pare a prima vista che debba essere; e che gli effetti suoi non apparteranno alla fisica solamente; perché esso sconvolgerà i gradi della dignità delle cose, e l'ordine degli enti; scambierà i fini delle creature; e per tanto farà un grandissimo rivolgimento anche nella metafisica, anzi in tutto quello che tocca alla parte speculativa del sapere. E ne risulterà che gli uomini, se pur sapranno o vorranno discorrere sanamente, si troveranno essere tutt'altra roba da quello che sono stati fin qui, o che si hanno immaginato di essere."

La trigonometria sferica nell'opera di Copernico

La trigonometria, secondo l'origine greca della parola, indica letteralmente la scienza delle *misure dei triangoli*. Un triangolo è la figura ottenuta tracciando i segmenti che congiungono tre punti del piano non allineati. Un triangolo sferico è la figura che appare proiettando un triangolo, dal centro di una sfera, sulla superficie della sfera stessa. I suoi lati sono archi di cerchi massimi.



Ogni triangolo tracciato sulla superficie terrestre, ad esempio per compiere **misurazioni cartografiche** o calcoli sulle distanze di stelle e pianeti, è, in realtà, un triangolo sferico. Da qui l'importanza della *trigonometria sferica* in astronomia. Il fisico polacco **Copernico** vi dedica parte della sua opera principale, il trattato ***De revolutionibus orbium coelestium***.



Nel triangolo sferico la misura dell'angolo in *A* è per definizione la misura dell'angolo formato dalle tangenti in *A* agli archi *AB* e *AC*.
Molte delle proprietà dei triangoli piani – presentate da **Euclide** negli ***Elementi*** - valgono anche per i triangoli sferici: ad esempio, sono uguali i criteri di similitudine e di congruenza (**Libro I, 8**) è analoga la nozione di triangolo isoscele (**Libro I, 9**). Esiste però una sostanziale

differenza rispetto al caso piano: **la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di 180°**, e minore o uguale a 270°. Ad esempio, il triangolo avente per vertici uno dei Poli e due punti antipodali dell'Equatore possiede tre angoli retti. Ricordiamo che assumere **l'assioma delle parallele**, uno dei **cinque postulati** della **geometria euclidea**, equivale a richiedere che la somma degli angoli interni di un triangolo sia sempre uguale a 180°. La **geometria sferica** è dunque una particolare **geometria non euclidea**. In essa le rette sono i cerchi massimi della sfera, i loro archi sono i segmenti (come, ad esempio, i lati dei triangoli). È chiaro che due qualunque rette della geometria sferica si intersecano in due punti: non esistono, pertanto, rette parallele. L'assioma delle parallele viene dunque sostituito dall'enunciato: *Per un punto esterno ad una retta data non passa alcuna parallela.* Inoltre non vale più il primo postulato di Euclide.

Gli studi sulla trigonometria sferica saranno ripresi, due secoli dopo, da **Eulero**. Il primo trattato di trigonometria sferica della storia risale al secolo I a.C., ed è dovuto a **Menelao**.

Le curve del piano

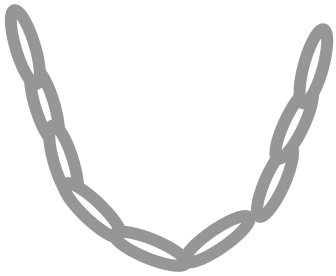
Catenaria
Cicloide
Cissoide
Conchiglia di Dürer
Concoide di Nicomede
Folium di Cartesio
Lemniscata di Bernoulli
Lumaca di Pascal
Ovali di Cartesio
Spirali
Trattrice
Tridente
Trisettrice di Ippia (quadratrice di Dinostrato)
Versiera dell'Agnesi

Le sezioni coniche
Le cubiche di Newton
La formula della curvatura

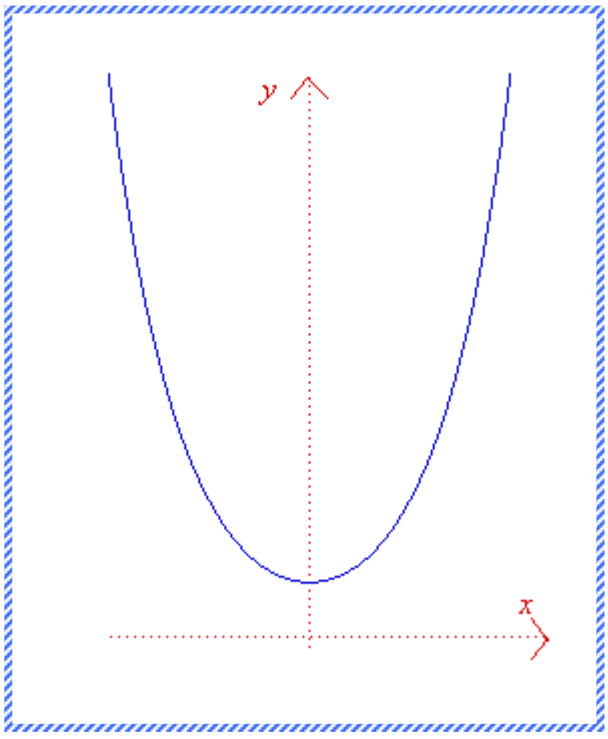
Cos'è una curva ellittica?

La catenaria

Già **Leonardo da Vinci**, nel 1400, si era chiesto quale curva corrispondesse alla forma assunta da una catena appesa per gli estremi.



Galileo pensò si trattasse di una parabola. Il problema fu ripreso da **Leibniz**, che coniò, per questa curva misteriosa, il nome *catenaria.* Si interessarono al problema anche **Huyghens** ed i fratelli **Johann e Jakob Bernoulli**. Fu quest'ultimo a risolvere definitivamente il problema, nel 1691, utilizzando i metodi del **calcolo infinitesimale**.



L'equazione della catenaria nel **piano cartesiano** avente gli assi come in figura è della forma:

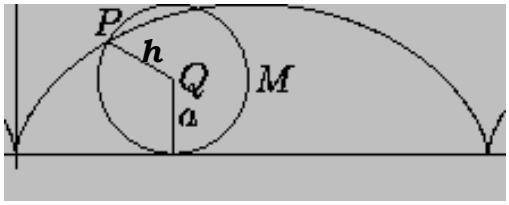
$$y = a/2\ (e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Un'altra curva, la **trattrice**, ha un'analoga caratterizzazione fisica: essa descrive la forma assunta da uno spago con il quale si trascini, per terra, un piccolo oggetto leggero. La introdusse Huyghens, rispondendo ad un quesito propostogli da un matematico dilettante.

La catenaria e la trattrice danno origine, per rotazione, nello spazio, a due superficie notevoli che sono, nell'ordine, **la superficie catenoide** e **la superficie di Beltrami**.

La cicloide

Immaginiamo di far ruotare una circonferenza lungo una retta finché la circonferenza non ha compiuto un giro completo. Detto *P* il punto su cui la circonferenza poggia all'inizio del moto, la traiettoria descritta da *P* è detta *cicloide.*

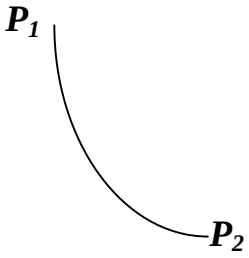


Il primo occuparsi della cicloide fu **Galileo**, che cercò di calcolare l'area sottostante. Non fu in grado di trovarne la formula. Per poterne dare una stima ricorse ad un metodo empirico: tagliò un pezzo di carta di quella forma e lo pesò. Concluse che l'area cercata era approssimativamente pari ad un terzo dell'area del cerchio che ruota. Furono altri matematici a scoprire che questo era, in realtà, il valore esatto.

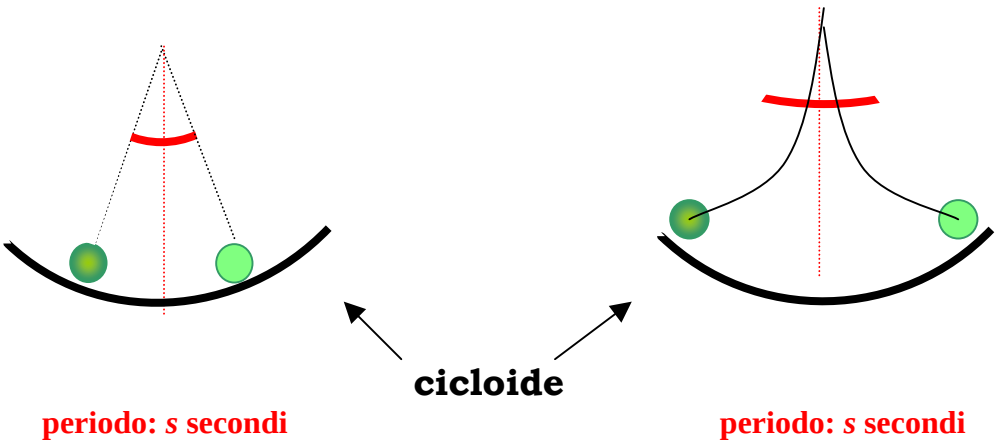
Un invito ad approfondire lo studio di questa curva venne da **Mersenne**, che nel 1615 lanciò l'idea tra i membri della sua Accademia parigina. Furono in molti a raccogliere la sfida, e ciò fu causa di aspre rivalità lungo tutto il secolo XVII, tanto che la cicloide meritò l'appellativo di *Elena dei matematici.* I primi risultati sono, probabilmente, quelli ottenuti da **Roberval**, che risolse il problema dell'**area**, e calcolò anche la lunghezza dell'arco, utilizzando ***il metodo degli indivisibili*** di **Cavalieri**. Queste formule rimasero inedite, e quando, alcuni anni più tardi, **Torricelli** le trovò a sua volta e le pubblicò, fu immediatamente accusato di plagio. D'altra parte **Pascal** si tirò addosso le ire dei colleghi italiani quando, nella sua ***Storia della cicloide***, attribuì a **Roberval** la priorità della scoperta. È difficile stabilire la paternità dei teoremi dimostrati in quegli anni, in cui gli studi sulla cicloide ed altre curve fervevano in più parti d'Europa. Così va forse equamente diviso fra **Roberval**, **Torricelli**, **Descartes** e **Fermat** il merito di aver sviluppato metodi per costruire la tangente alla cicloide in un qualunque suo punto. Altri risultati sono dovuti a **Pascal** e **John Wallis**.

La cicloide ha due significati fisici sorprendenti.

Nel 1696 **Johann Bernoulli** pose il seguente problema: trovare il percorso che consenta ad una particella, soggetta alla sola forza di gravità, di spostarsi, nel più breve tempo possibile, da un punto P_1 ad un altro punto P_2, collocato più in basso, ma non allineato verticalmente con P_1.



La curva cercata venne detta *brachistocrona*, nome derivato dal greco, che significa "tempo brevissimo". Fu lo stesso Johann, insieme al fratello maggiore **Jakob Bernoulli**, a scoprire che la brachistocrona altro non era che la cicloide. Pochi anni più tardi Jakob provò che la cicloide risolve anche il problema della *tautocrona* ("curva di tempo uguale"): è, cioè, la curva lungo la quale deve muoversi un pendolo in modo che esso impieghi sempre lo stesso tempo (*periodo*) a compiere un'oscillazione completa, qualunque sia l'ampiezza dell'angolo descritto: una traiettoria circolare soddisfa questa proprietà solo per le piccole oscillazioni.

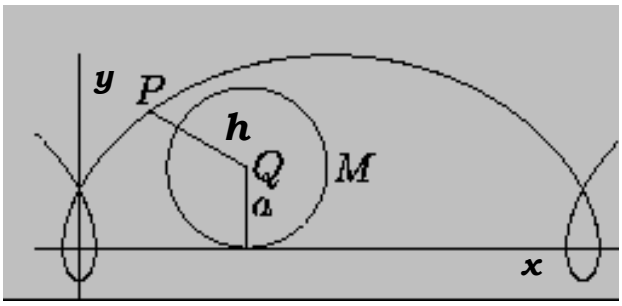


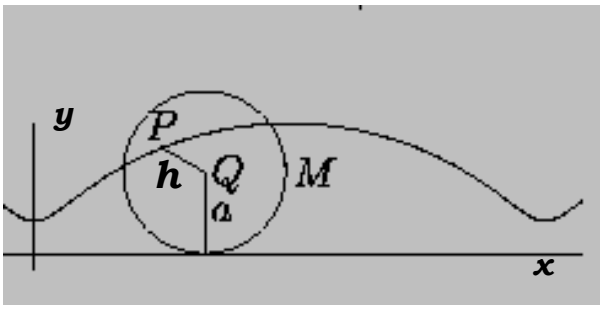
Il fisico olandese **Huyghens** sfruttò questa scoperta per perfezionare l'orologio a pendolo.



L'immagine mostra uno strumento esposto al Museo delle Scienze di Firenze: si tratta di una guida a forma di cicloide, e permette di verificare sperimentalmente che la cicloide è tautocrona. Basta far oscillare una sferetta lungo la guida. La si posi sulla guida e la si rilasci senza spingerla: facendola partire da diverse altezze, si realizzeranno oscillazioni con ampiezze diverse. Cronometrando la durata di ogni oscillazione, si troverà che questa è sempre la stessa.

Varianti della cicloide si ottengono scegliendo il punto *P* all'interno o all'esterno della circonferenza:





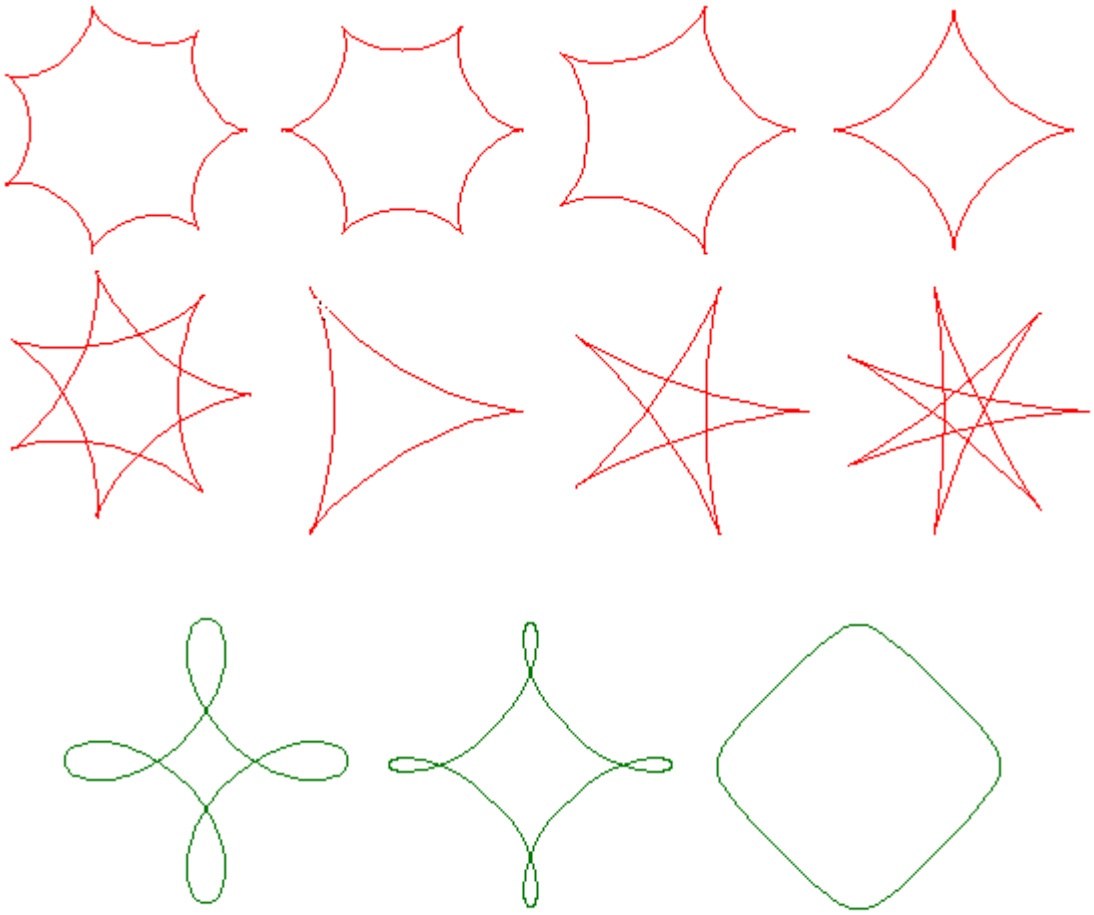
La figura rappresenta due diverse cicloidi in un **piano cartesiano**. La circonferenza ruota lungo l'asse delle ascisse, nella direzione positiva, e, nell'istante iniziale, il punto *P* ed il centro *Q* della circonferenza sono allineati sull'asse delle ordinate, il punto *P* sotto al punto *Q*. Sia *a* il raggio della circonferenza, sia *h* la distanza di *P* da *Q*. Supponiamo che la circonferenza si muova con velocità costante. Allora le coordinate del punto *P* nell'istante *t* sono date dalle formule:

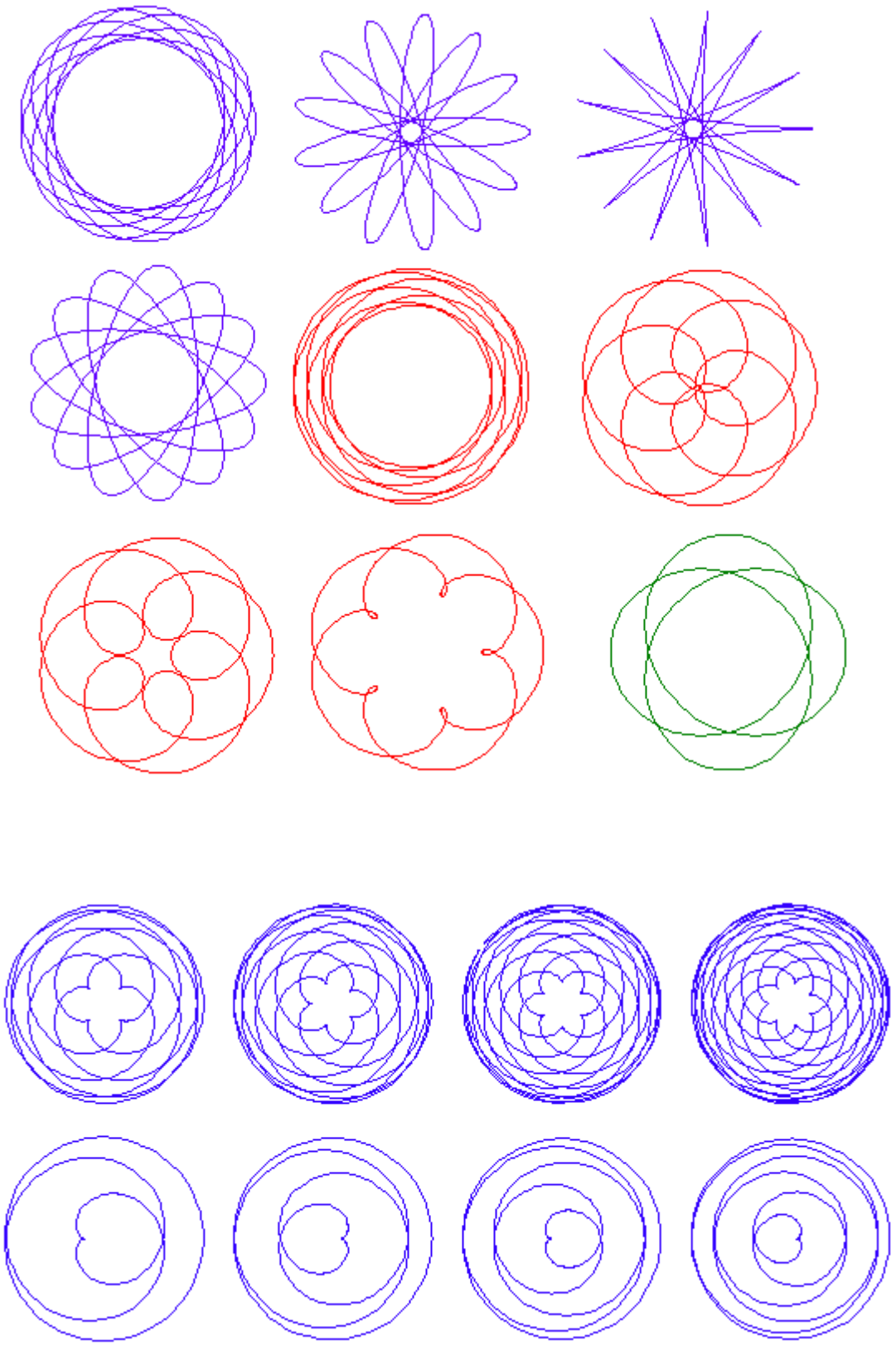
$$\begin{cases} x = at - h\ sen(t) \\ y = a - h\ cos(t). \end{cases}$$

Nella cicloide ordinaria vale $h = a$.

Facendo assumere a t tutti i possibili valori, ossia facendo variare t nell'insieme dei numeri che corrispondono ad istanti del moto, si ottengono dunque tutti i punti della cicloide. Il simbolo t rappresenta dunque una quantità variabile, cambiando il suo valore cambiano i valori di x e y: t si dice ***parametro***, e le due formule date sono dette ***equazioni parametriche*** della curva.

Se si fa ruotare la circonferenza lungo un'altra circonferenza, si ottiene una curva detta *epicicloide,* se la prima circonferenza è esterna alla seconda, *ipocicloide* se essa è invece interna. Queste curve possono assumere forme molto varie. Eccone alcune:





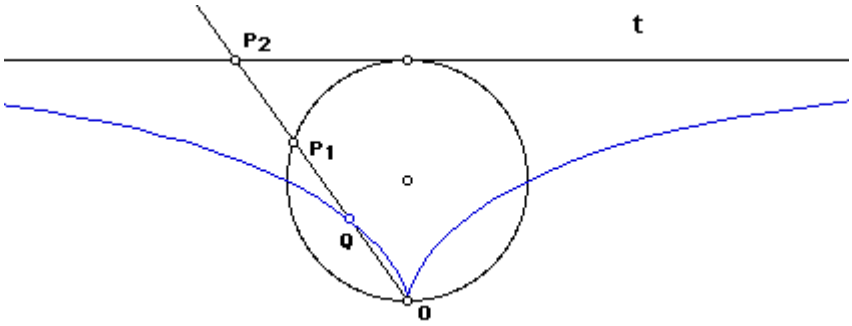
L'astronomo alessandrino **Tolomeo** credeva che le orbite dei pianeti fossero **epicicloidali**. Questa teoria rimase in vigore finché **Keplero** non stabilì che si trattava, invece, di **ellissi**.

In effetti, l'ellisse è un tipo molto particolare di ipocicloide: un teorema, dimostrato nel Seicento da **Philippe de La Hire**, afferma infatti che, *quando un cerchio ruota, internamente, lungo una circonferenza di raggio doppio, ogni suo punto interno descrive un'ellisse (mentre ogni punto sul suo bordo descrive un diametro*).

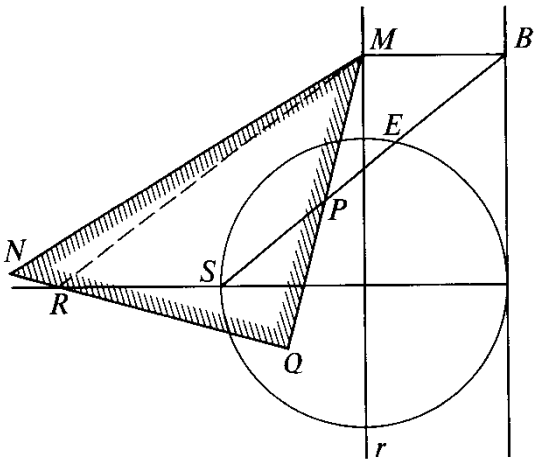
Un'epicicloide costruita da Albrecht Dürer

La cissoide di Diocle

Questa curva fu ideata dal matematico greco **Diocle**, vissuto intorno al 180 a.C., per risolvere il problema della **duplicazione del cubo**. La curva è descritta nell'opera ***Sugli specchi ustori***, ed il suo nome significa letteralmente "a forma di edera".

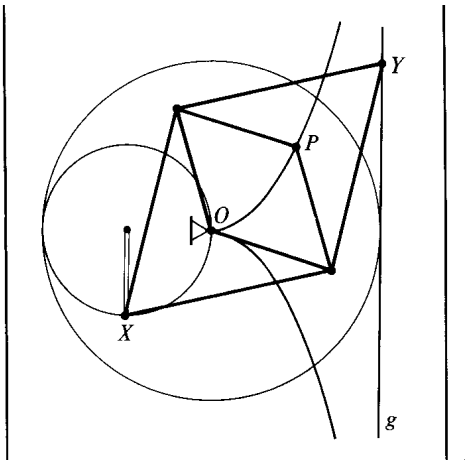


La costruzione per punti si effettua nel modo seguente. Si traccino una circonferenza ed una sua tangente *t*. Sia *O* il punto della circonferenza diametralmente opposto al punto di tangenza. Sia P_1 un altro punto della circonferenza. Si tracci la retta congiungente *O* e P_1. Sia P_2 il suo punto d'intersezione con *t*. Si segni il punto *Q* del segmento OP_1 tale che $OQ = P_1P_2$. Al variare del punto P_1 sulla circonferenza il punto *Q* descrive la cissoide.
Il punto *O* è detto *polo* della cissoide.

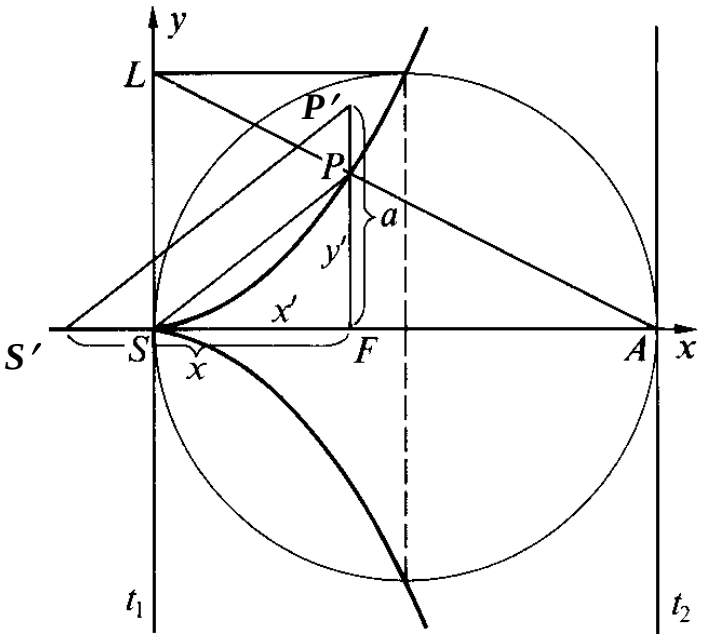


Una costruzione meccanica della cissoide è dovuta a **Newton**. Essa si avvale di una squadra da falegname *MQN*, avente l'angolo retto in *Q*. Sia *P* il punto medio del cateto *MQ*, nel punto *P* si fissi un pennino. Si traccino sul foglio una retta *r* ed un punto *R* avente da *r* distanza pari alla lunghezza di *MQ*. Si sposti quindi la squadra in modo che il punto *M* trasli lungo la retta *r* ed il punto *R* cada sempre sul cateto *QN*. Durante questo movimento, il pennino traccerà una cissoide.
Un'altra costruzione meccanica si avvale di un apposito congegno, illustrato in figura. Mentre il punto *X* si muove lungo la circonferenza

il punto *Y* trasla lungo la retta *g*. Il punto *O* è fisso. Un pennino fissato in *P* traccia la cissoide.

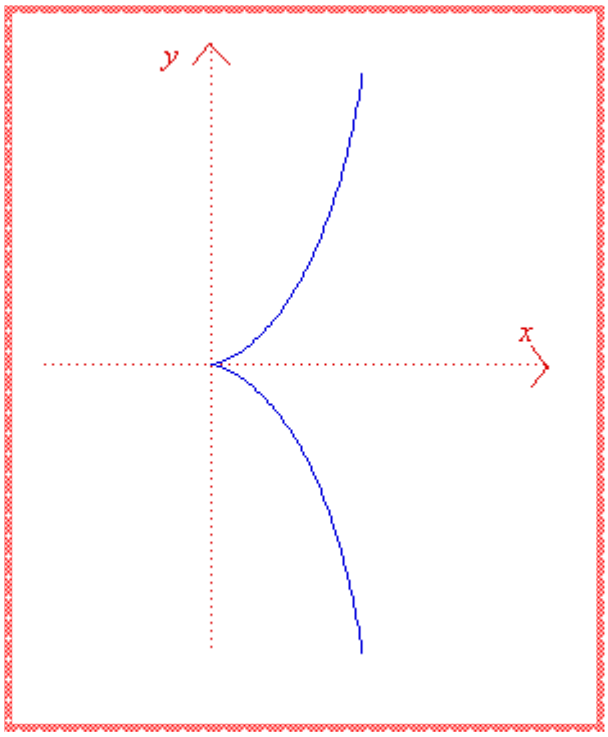


Ecco come si può utilizzare la cissoide per duplicare il cubo. Sia *a* il lato del cubo da duplicare. Sia data una cissoide costruita a partire dalla circonferenza di diametro *SA*. Si tracci la tangente t_1 alla circonferenza in *S*. Su t_1 si segni un punto *L* tale che *SL* sia pari al raggio della circonferenza. Si tracci la congiungente *L* ed *A*. Sia *P* il suo punto d'intersezione con la cissoide. Si cali da *P* la perpendicolare al segmento *SA*. Sia *F* il piede della perpendicolare. Si tracci la retta *PS*. Si segni sulla semiretta *FP* un punto *P′* tale che *FP′* abbia lunghezza *a*. Si tracci la parallela a *PS* per *P′*. Sia *S′* il suo punto d'intersezione con la retta *SF*. Allora *S′F* ha la lunghezza cercata $\sqrt[3]{2}a$, il lato del cubo di volume doppio.

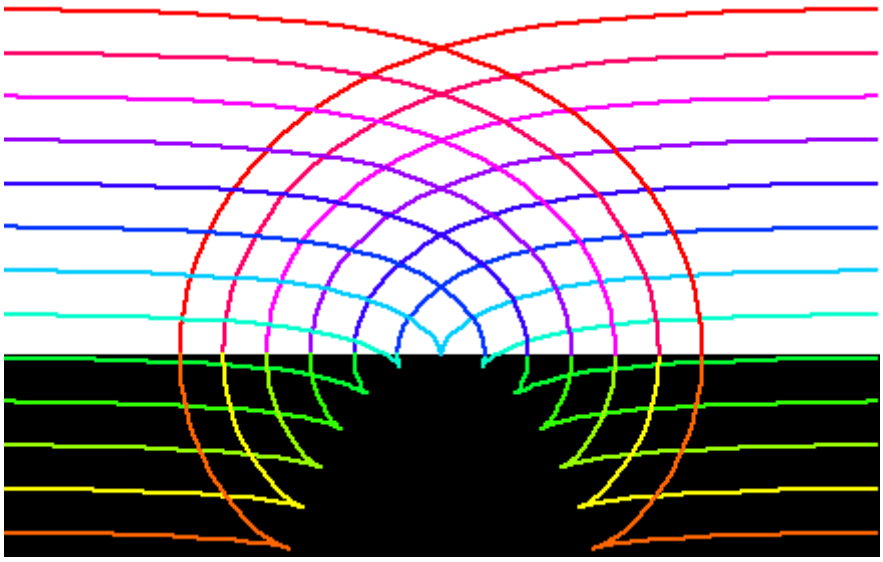


Si supponga di tracciare, nel **piano cartesiano**, una cissoide avente polo l'origine, e tale che il punto *A* diametralmente opposto si trovi sull'asse delle ascisse, a destra dell'origine. Detto *a* il raggio della circonferenza di diametro *OA*, l'equazione cartesiana della cissoide è:

$$y^2 = x^3/(2a-x).$$



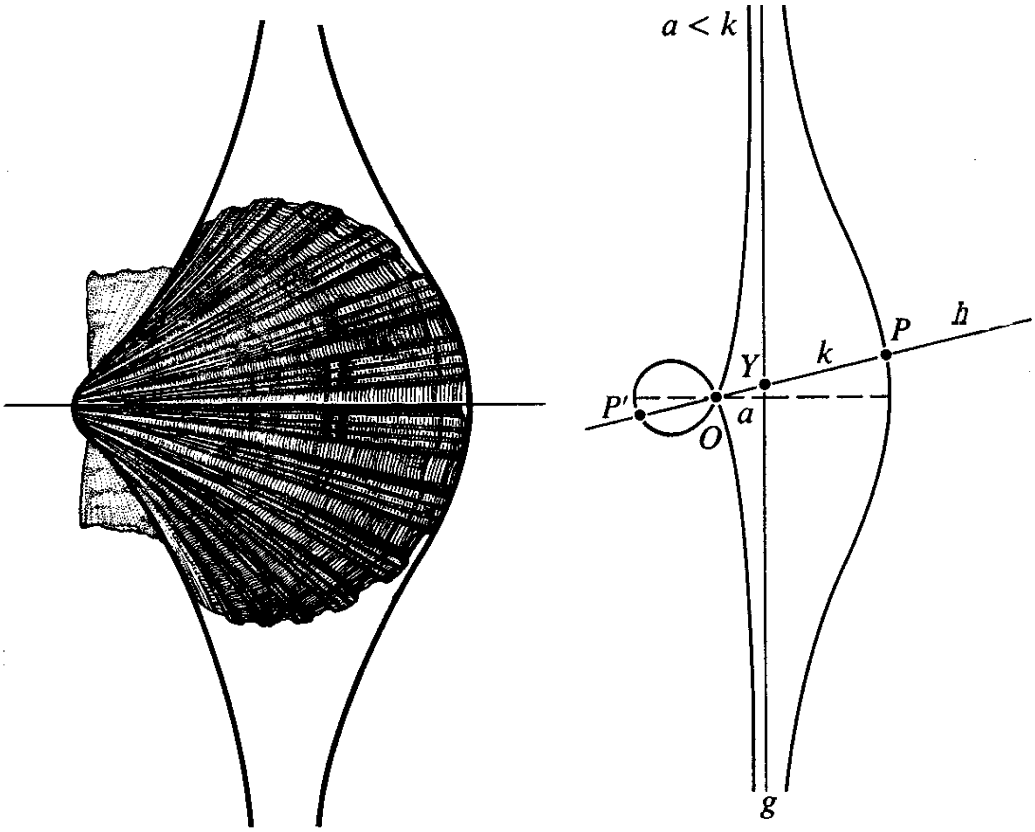
Per finire, ecco un'interpretazione artistica della cissoide, ad opera di Xah Lee.



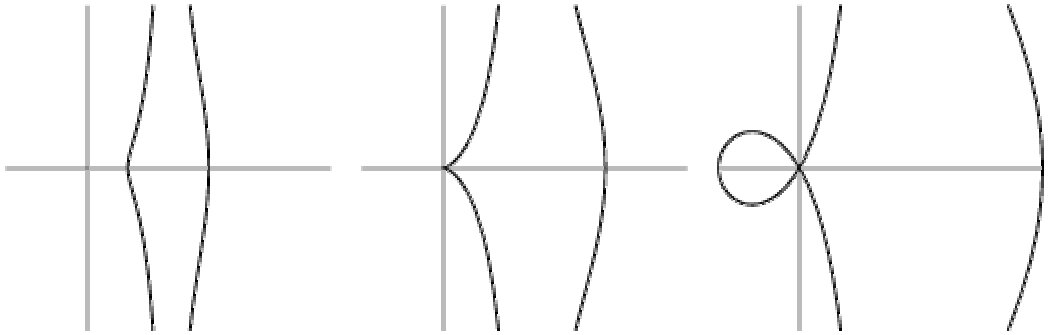
La concoide di Nicomede

Questa curva fu ideata dal matematico alessandrino **Nicomede** per risolvere il problema della **trisezione dell'angolo**.

Il nome significa letteralmente "a forma di conchiglia".

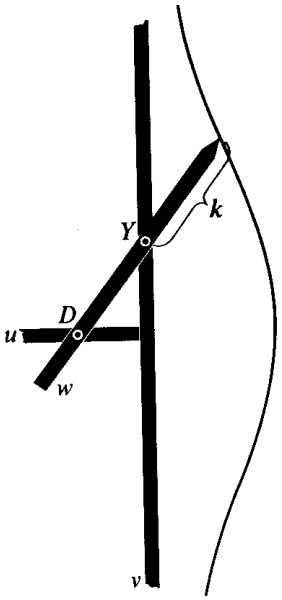


La costruzione per punti si effettua nel modo seguente. Si tracciano una retta *g* ed un punto *O* esterno a *g*, a distanza *a* da *g*. Si fissa una lunghezza *k*. Si traccia una retta *h* passante per *O* ed incidente *g*. Sia *Y* il punto d'incidenza. Si costruiscono quindi su *h* i punti *P* e *P′* tali che *OP* = *OP′* = *k*. Si ottiene una curva con due rami. A seconda del valore di *k* la concoide cambia forma: nel punto *O* la curva può avere un *punto isolato*, come nella figura di sinistra, oppure una *cuspide*, come nella figura centrale, o ancora un *nodo*, come nella figura a destra.



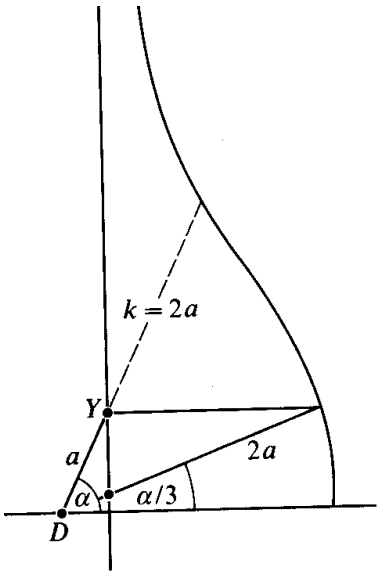
k<*a* *k*=*a* *k*>*a*

Non è difficile realizzare uno strumento per costruire la concoide con un solo tratto. I listelli *v* e *w* sono dotati di scanalature, nelle quali scorrono, rispettivamente, i perni *Y* e *D*. Sulla punta del listello *w* è fissato un pennino: se si fa scorrere *w*, questo pennino traccia il ramo destro della concoide.

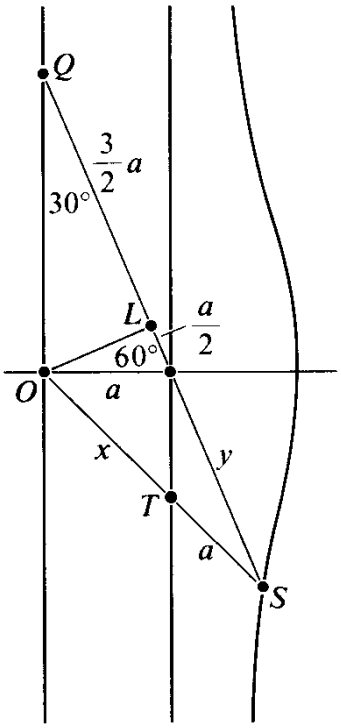


Scegliendo opportunamente il valore di *k* si costruisce una concoide che permette di effettuare la trisezione dell'angolo.

La costruzione è quella data nella figura a sinistra.



La concoide può anche essere impiegata per la **duplicazione del cubo**. La figura qui sotto mostra come, dato un segmento di lunghezza *a* (il lato del cubo di partenza), sia possibile costruirne uno di lunghezza $x = a\sqrt[3]{2}$ (il lato del cubo di volume doppio).

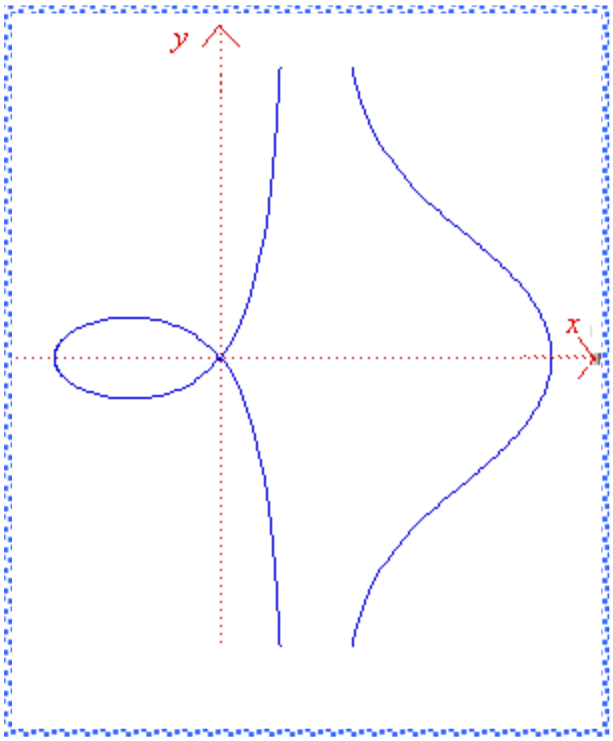


La costruzione della concoide può essere generalizzata, sostituendo alla retta *g* un'altra curva qualunque. Ad esempio, se si prende una circonferenza, e si sceglie il punto *O* sulla circonferenza stessa, si ottiene una **lumaca di Pascal**: anche questa può essere utilizzata per trisecare gli angoli.

Se si traccia, nel **piano cartesiano**, una concoide di Nicomede avente il punto *O* nell'origine, e l'asse delle ordinate parallelo alla retta *g* data, allora l'equazione cartesiana della curva è:

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = k^2x^2$$

E questo è il grafico per $k>a$:


y
x

La duplicazione del cubo

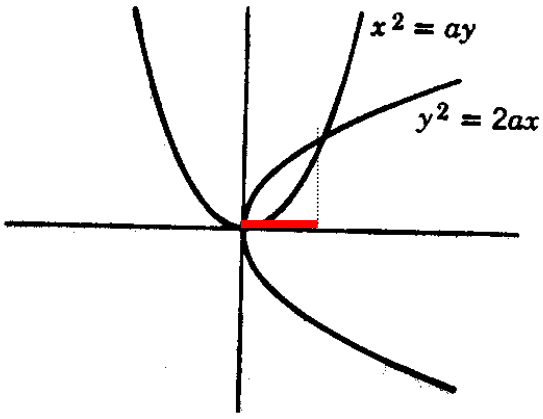
È uno dei problemi matematici più antichi: si tratta di costruire, dato un cubo, un cubo avente volume doppio. In altri termini, dato un segmento di lunghezza a, corrispondente al lato del cubo originale, si chiede di costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}a$, corrispondente al lato del cubo cercato.

Il quesito avrebbe tratto origine da una leggenda. Secondo alcuni un poeta greco avrebbe raccontato una storia in cui il mitico re di Creta Minosse, insoddisfatto delle dimensioni della tomba eretta per suo figlio Glauco, ordinava che ne fosse raddoppiata la grandezza. Il poeta, poco istruito in matematica, avrebbe fatto dire a Minosse che ciò poteva essere realizzato raddoppiando contemporaneamente altezza, larghezza e profondità. Altre fonti citano un episodio relativo alla città di Delo, il cui oracolo avrebbe suggerito agli abitanti di duplicare l'altare di Apollo, di forma cubica, onde scongiurare una pestilenza. Per questo motivo il problema in questione spesso è chiamato anche *problema di Delo.*

Furono molti i matematici greci che si occuparono della duplicazione del cubo. Il primo in ordine cronologico fu **Archita di Taranto**, che propose una complicata costruzione nello spazio, con un **toro**, un cilindro ed un cono. Ricordiamo poi **Menecmo**, l'inventore delle **sezioni coniche**: pare che egli abbia introdotto tali curve proprio per risolvere questo problema. In termini moderni, la sua idea può essere esposta nel modo seguente. Si traccino, in un sistema di coordinate cartesiane, due parabole, aventi equazioni

$$C_1: x^2 = ay \qquad \text{e} \qquad C_2: y^2 = 2ax$$

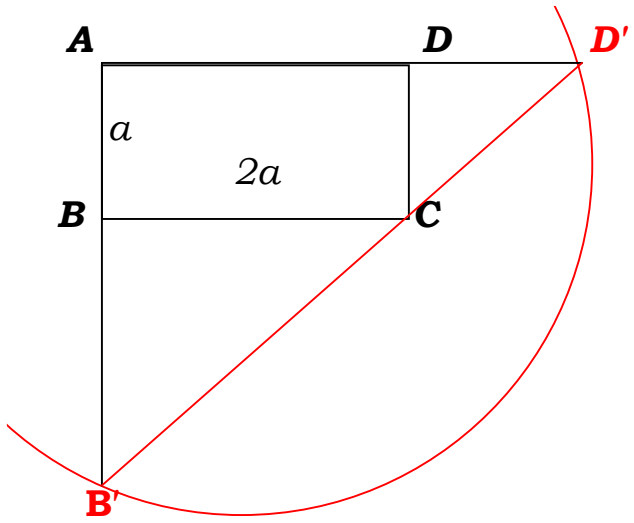
rispettivamente.



Il loro punto d'intersezione è $P(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a)$. Il segmento rosso tracciato in figura ha dunque la lunghezza voluta. Un'altra, analoga costruzione, si può realizzare intersecando una parabola ed un'iperbole.

Apollonio propose la seguente costruzione:

1. Si tracci un rettangolo di lati a e $2a$, come il rettangolo $ABCD$ della figura.
2. Si tracci un cerchio avente lo stesso centro del rettangolo, e tale che due dei suoi punti d'intersezione con le rette AB e AD, diciamo, nell'ordine, B' e D', siano allineati con C.



Allora il segmento BB' ha lunghezza $\sqrt[3]{2}a$.

C'è da osservare che il cerchio previsto dalla costruzione non può essere costruito utilizzando soltanto riga e compasso. In effetti, come dimostrato da **Vieta**, questo è un problema di terzo grado: in quanto tale, secondo la **teoria di Galois**, non ammette una soluzione con riga e compasso. Occorre dunque ricorrere ad altri mezzi, ad esempio a curve precedentemente tracciate sul foglio: esiste una soluzione che si avvale della **cissoide di Diocle**, e ve n'è un'altra che utilizza la **concoide di Nicomede**.

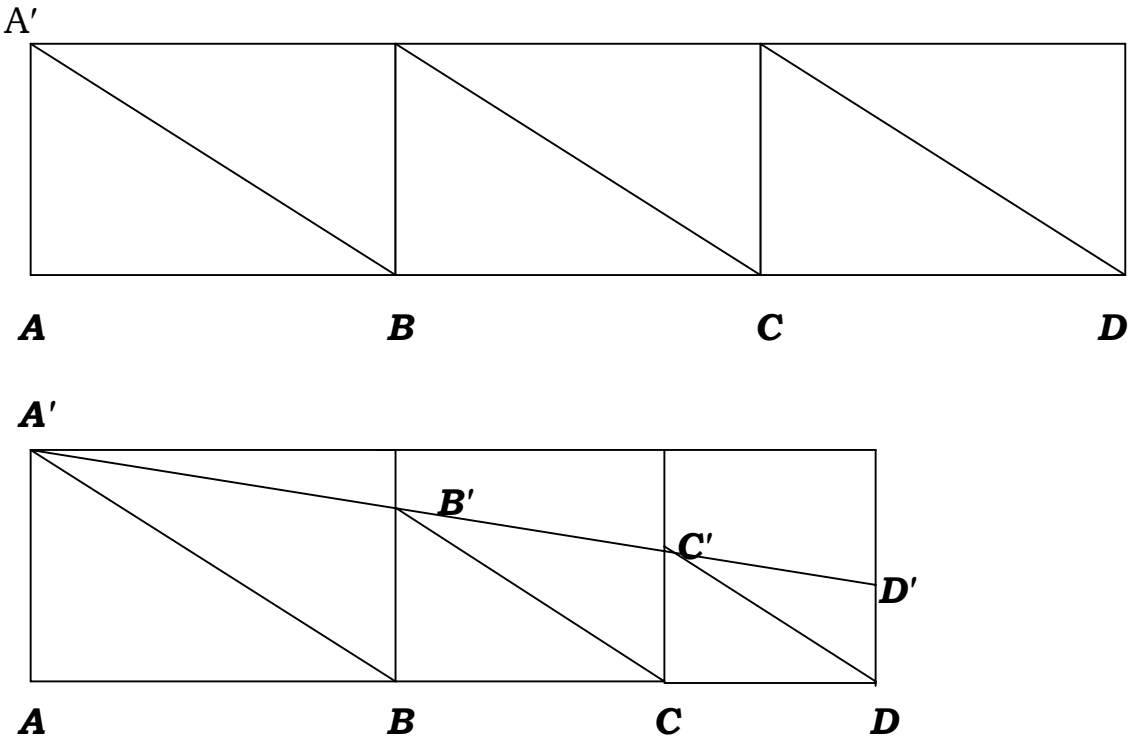
Secondo quanto osservato da **Ippocrate di Chio** (sec. V a.C.), il lato del cubo duplicato è la soluzione z della seguente doppia proporzione:

$$a : z = z : w = w : 2a \qquad (1)$$

Infatti, da questa, per sostituzione, si ottiene facilmente $z^3 = 2a^3$. Ora, in generale, dati due numeri reali positivi a,q, le soluzioni z,w della doppia proporzione

$$a : z = z : w = w : q \qquad (2)$$

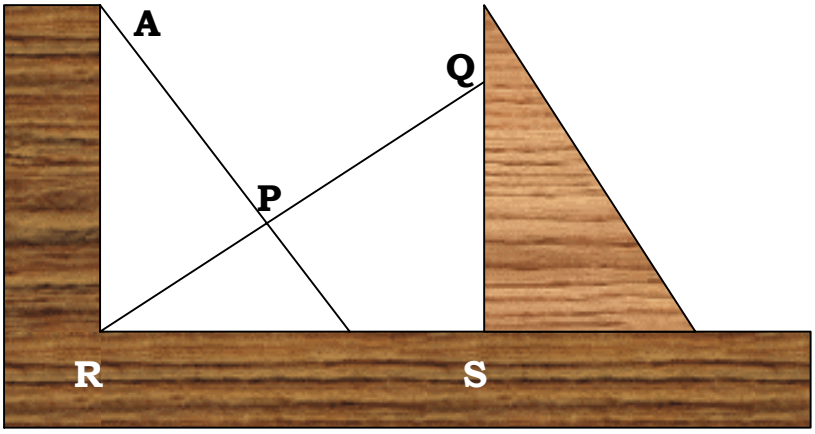
si dicono le *due medie proporzionali fra a e q*. **Descartes** ne ***La Géométrie*** propone per la (2) una risoluzione grafica, in cui si avvale di un cerchio e di una parabola: una nuova applicazione delle sezioni coniche al problema della duplicazione del cubo.
Nell'antichità questo problema veniva risolto usando particolari strumenti da disegno.
Eratostene inventò uno speciale congegno, detto *mesolabio,* costituito da rettangoli con i lati scorrevoli, per calcolare le medie proporzionali fra due segmenti dati.



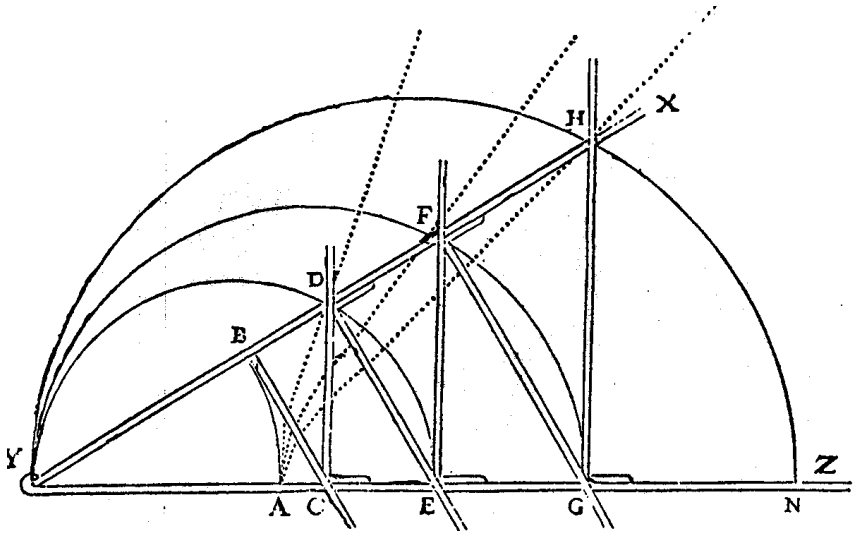
Nel disegno, le lunghezze BB' e CC' sono le due medie proporzionali fra AA' e DD'.

Un'altra possibilità è quella di usare due squadre da falegname, procedendo nel modo seguente. Supponiamo di voler trovare le due medie proporzionali fra a e q.

1. Si traccino due rette perpendicolari. Detto *P* il punto d'intersezione, siano *A* e *Q* due punti, situati sulle due rette, tali che *PA* = *a* e *PQ* = *q*.
2. Si posizioni una squadra da falegname sul disegno in modo che uno dei bracci passi per *A* ed il vertice *R* si trovi sulla retta *PQ*.



3. Si faccia scivolare lungo uno dei bracci della squadra un'altra squadra, nel modo indicato in figura, fino a toccare il punto *Q*.
4. Manipolando opportunamente l'apparato, e senza distruggere le condizioni precedenti, si faccia in modo che il punto *S* vada a cadere sulla retta *PA*. *PS* e *PR* sono allora le due medie proporzionali fra *PA* e *PQ*.



Il mesolabio di Descartes

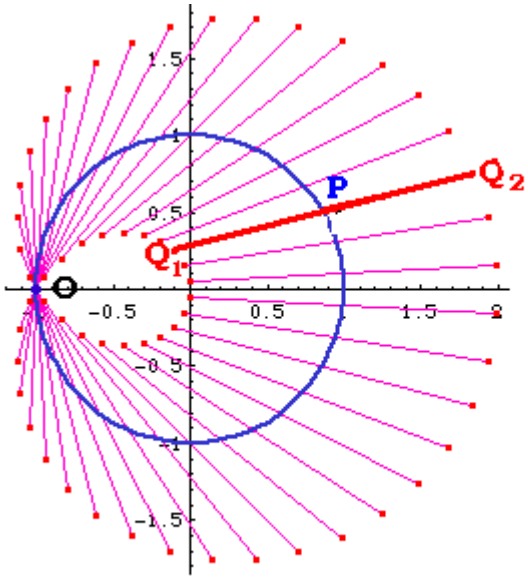
L'architetto romano **Vitruvio** annoverò la duplicazione del cubo tra le più significative conquiste della matematica greca, insieme alla legge idrostatica di **Archimede** e al **Teorema di Pitagora**.

Contrariamente alla duplicazione del cubo, la duplicazione del quadrato è un'operazione perfettamente realizzabile con riga e compasso. Un brano tratto dal ***Menone*** di **Platone** ci spiega come fare (e anche come **non** fare).

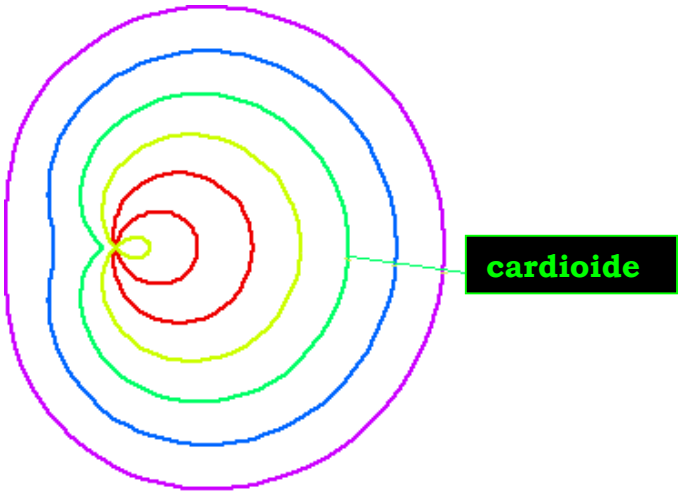
La lumaca di Pascal

Questa curva è un'invenzione di Etienne Pascal, padre di **Blaise Pascal**.

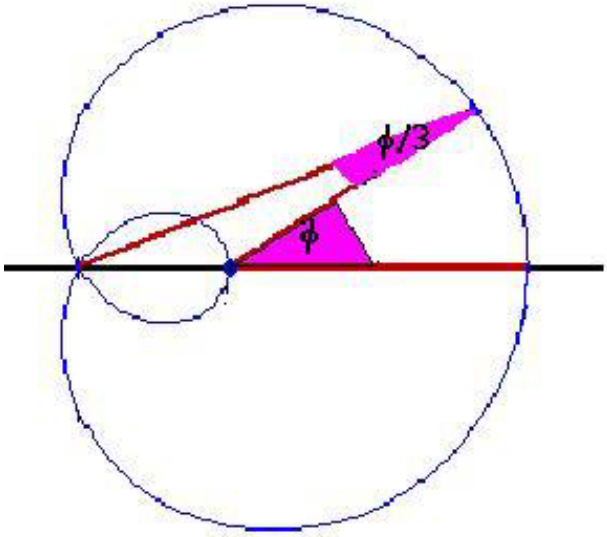
Si tratta di una **concoide** generalizzata. La costruzione per punti è la seguente. Si tracci una circonferenza di raggio r, e si fissi un punto O su quest'ultima. Si fissi inoltre una lunghezza k. Scelto un punto qualunque della circonferenza, si tracci la congiungente O e P. Quindi si costruiscano i punti Q_1 e Q_2 su questa retta, aventi da P distanza k. Al variare di P sulla circonferenza, i punti Q_1 e Q_2 descrivono la lumaca di Pascal.



A seconda della relazione fra r e k, la curva assume diverse forme. Essa può essere liscia, ($k<2r$) oppure avere un nodo ($k>2r$), oppure avere una cuspide ($k=2r$). In quest'ultimo caso essa prende il nome di ***cardioide***. Ecco una famiglia di lumache di Pascal:



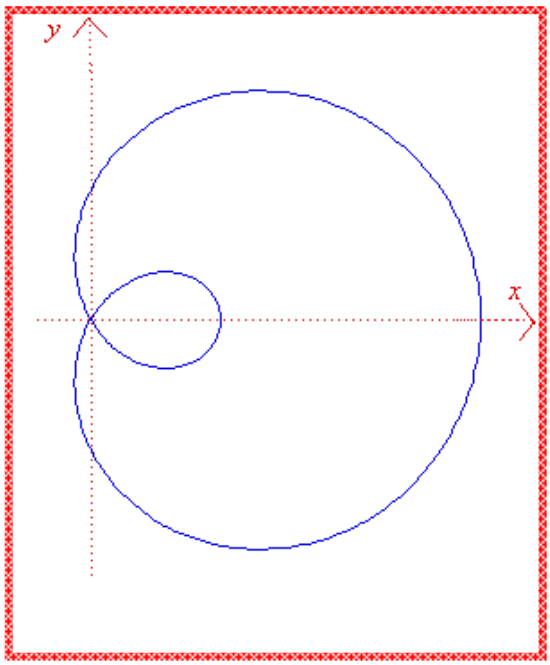
Se $r=k$, la curva prende il nome di ***trisettrice***. Essa può infatti essere utilizzata per la **trisezione dell'angolo**, nella maniera indicata in figura:



Se la circonferenza ha centro nell'origine del **piano cartesiano**, ed il punto O fissato si trova sull'asse delle ascisse, a sinistra dell'origine, allora la lumaca di Pascal ha la seguente equazione cartesiana:

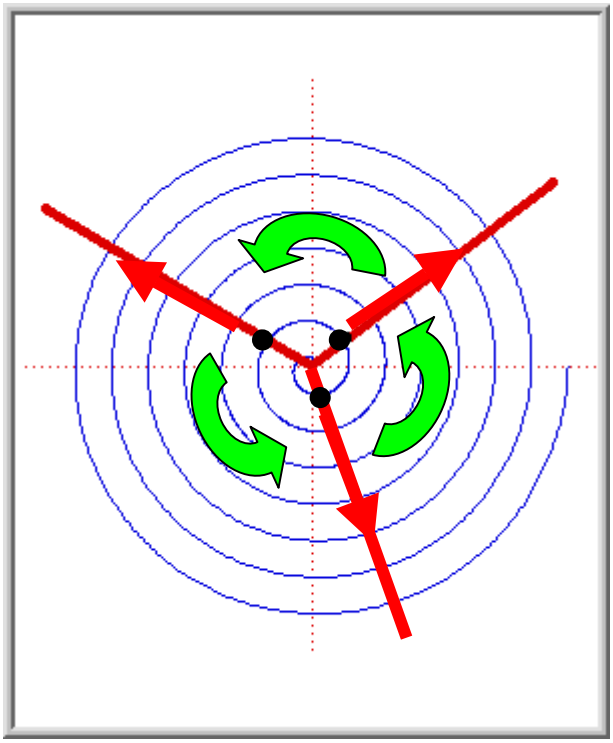
$$(x^2+y^2-2rx)^2 = k^2(x^2+y^2)$$

Ecco il grafico per il caso $k=r$.



Le spirali

Una spirale è la traiettoria di un punto che si muove nel piano ruotando intorno ad un punto fisso *O*, mentre il raggio della rotazione aumenta ad ogni istante.
A questo tipo di curve **Archimede** dedicò un **trattato**, in cui introdusse la spirale che di lui porta il nome. Una ***spirale archimedea*** è la curva descritta da un punto che trasla con velocità costante lungo un bastone infinito (una semiretta) mentre questo ruota uniformemente intorno ad uno dei suoi estremi, che denoteremo con *O*.

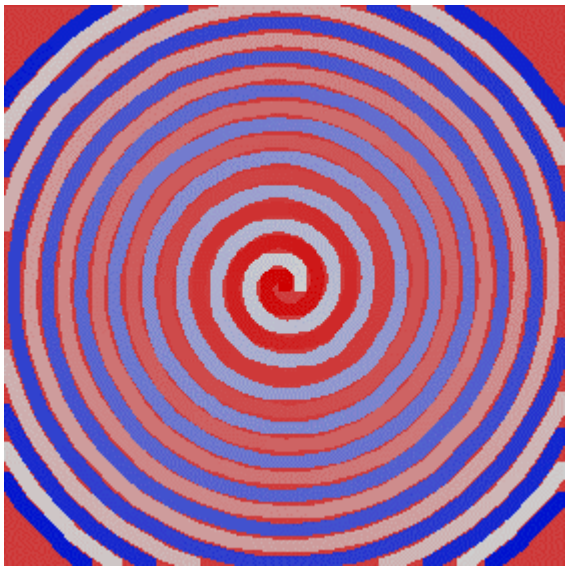


Il modo più naturale di descrivere una spirale è quello di precisare, ad ogni istante del moto, la distanza del punto materiale da *O* (detta ***raggio vettore***, ed indicata con r), e l'ampiezza dell'angolo percorso (detta ***argomento***, ed indicata con θ). Normalmente il moto che dà origine alla spirale è soggetto ad una legge matematica traducibile in un'equazione. In altri termini, ad ogni istante, il raggio vettore e l'argomento sono legati da una relazione esprimibile con una formula, detta ***equazione polare***. Nel caso della spirale archimedea, questa formula è la seguente:

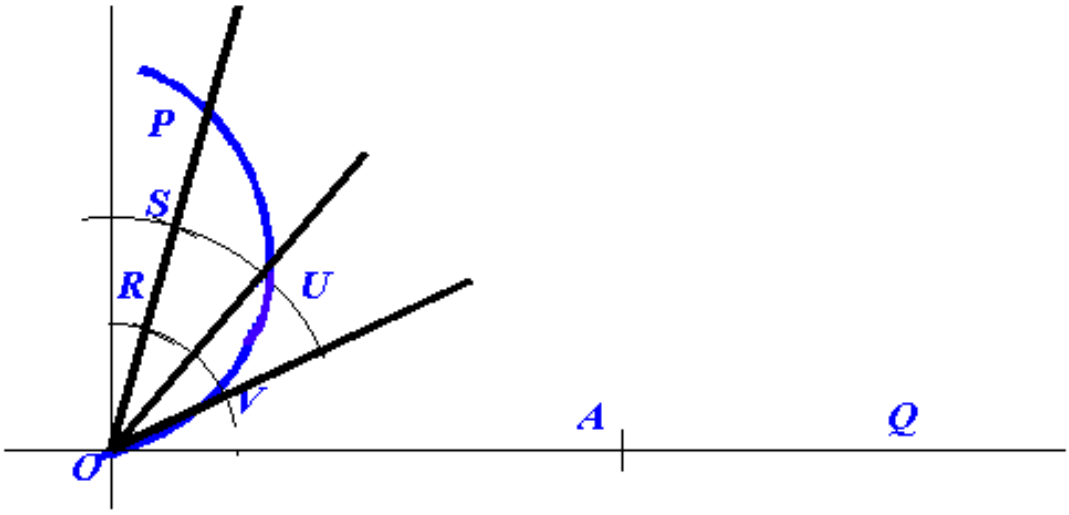
$$r = a\theta,$$

dove a è una costante positiva.

Ecco un'interpretazione artistica della spirale archimedea, dovuta a Xah Lee:

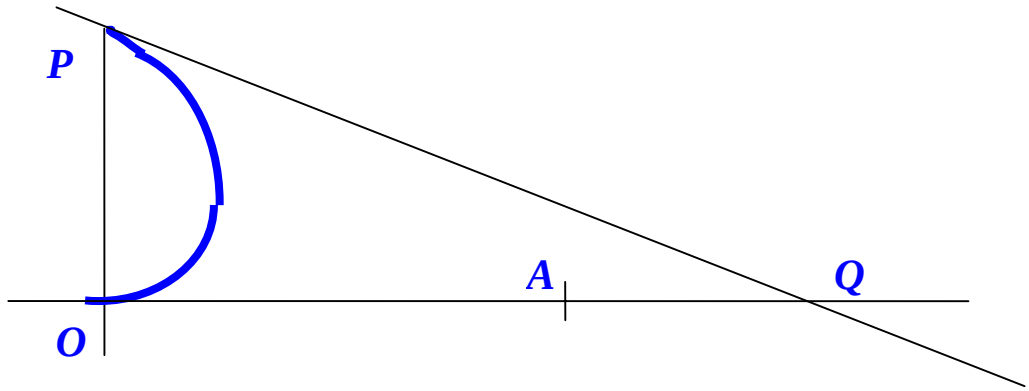


La spirale archimedea può essere utilizzata per la **trisezione dell'angolo**, nel modo che vediamo adesso.



L'angolo da trisecare è *AOP*, ove *OA* è la semiretta che ruota vista nell'istante iniziale, e *P* giace sulla spirale. Si costruiscano i punti *R* e *S* che dividono il segmento *OP* in tre parti uguali, e si traccino le circonferenze di centro *O* e raggi *OR* e *OS* rispettivamente. Si segnino quindi i punti *U* e *V* di intersezione di queste con la spirale. Le semirette *OU* e *OV* dividono l'angolo *AOP* in tre parti uguali.

La spirale archimedea permette anche di eseguire la **quadratura del cerchio**.



Sia *P* la posizione del punto materiale dopo una rotazione di 90°. Si tracci la tangente alla spirale nel punto *P,* e si segni il punto d'intersezione *Q* di questa con la semiretta *OA.* Allora il segmento *OQ* ha lunghezza pari ad un quarto del perimetro del cerchio di raggio *OP.* Quindi il rettangolo di lati *2OP* ed *OQ* ha la stessa area di questo cerchio. Un'ulteriore costruzione geometrica permette di **trasformare questo rettangolo in un quadrato**, come insegna **Euclide**.

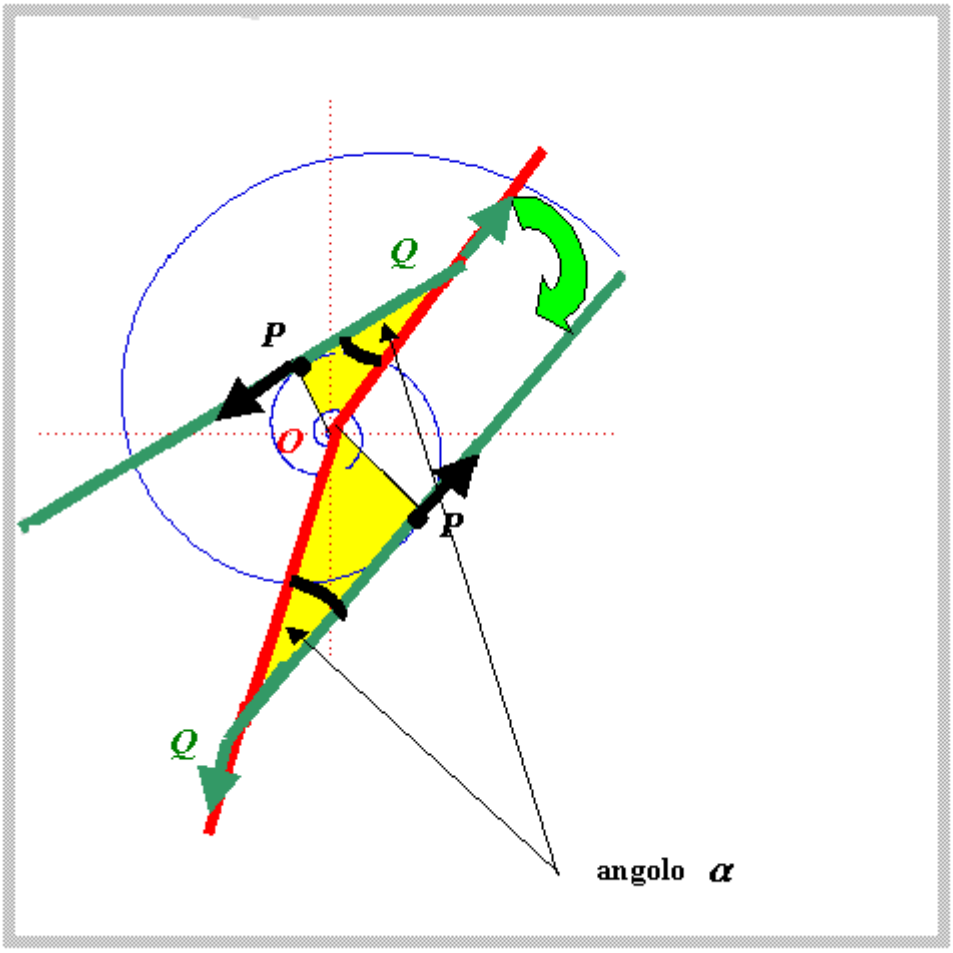
La spirale archimedea è inoltre legata da una **stretta relazione** alla **parabola**, come mise in evidenza **Pascal**.

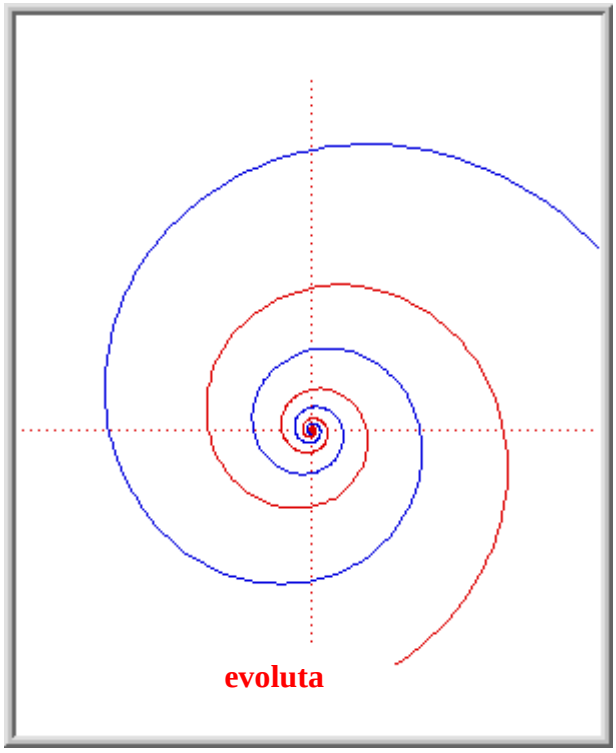
Immaginiamo ora che il bastone infinito sia dotato di una guida, nella quale scorre l'estremo *Q* di un altro bastone infinito, che formerà con il primo bastone sempre lo stesso angolo α. Immaginiamo, inoltre, che il punto materiale si sposti lungo il secondo bastone con la stessa velocità con cui il secondo bastone scorre lungo la guida, mentre il primo bastone ruota, come prima, intorno al suo estremo fisso *O.* La traiettoria descritta è una ***spirale equiangolare***, così detta perché in ogni suo punto *P* la retta tangente forma con la retta *OP* lo stesso angolo: in effetti il triangolo *OPQ* rimane sempre simile a se stesso.

L'equazione polare della curva è

$$r = ae^{\theta \operatorname{cotg} \alpha},$$

dove a è la distanza iniziale di *Q* da *O.*

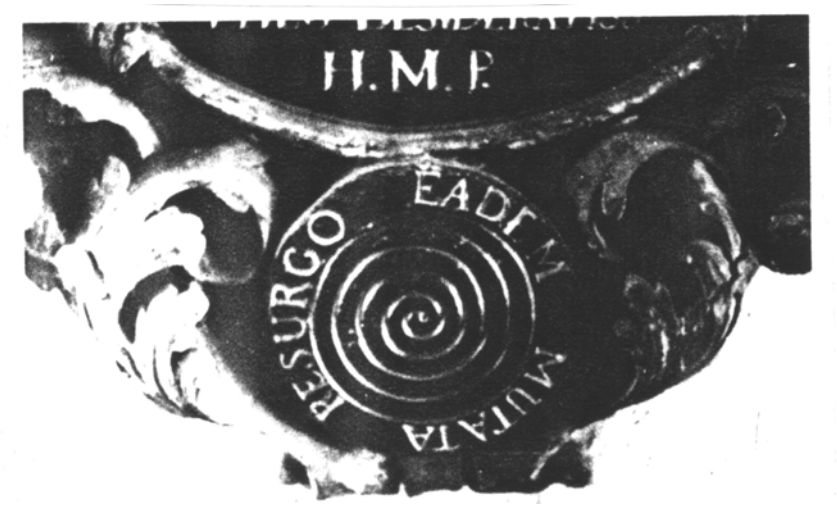




La spirale equiangolare è anche detta ***spirale logaritmica***, ed è spesso chiamata ***spirale di Bernoulli***, dal nome dal matematico svizzero **Jakob Bernoulli** che ne rimase affascinato e la studiò a fondo nel sec. XVII. Egli scoprì molte sorprendenti proprietà di questa curva: una di queste riguarda la sua ***evoluta***. Se una curva è "regolare", ossia ammette in ogni punto una retta tangente, nelle immediate vicinanze di ogni punto il suo andamento può

essere approssimato con un arco di circonferenza, detta ***cerchio osculatore***. Il centro di questa circonferenza è detto ***centro di curvatura*** della curva nel punto considerato. Il luogo dei centri di curvatura della curva è detto *evoluta* della curva. Bernoulli si accorse che, nel caso della spirale logaritmica, l'evoluta è ancora una spirale logaritmica.

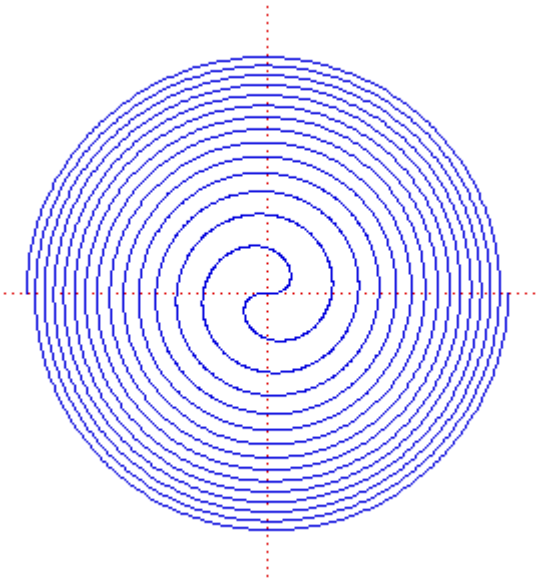
E si ottiene ancora la stessa spirale applicando altre trasformazioni geometriche. Per questo Bernoulli parlò di *spira mirabilis*, e chiese che questa curva venisse incisa sulla sua tomba, accompagnata dal motto *Eadem mutata resurgo* (per quanto io venga trasformata, rinasco sempre uguale). Lo scultore, purtroppo, non fu all'altezza del compito e realizzò una spirale che assomiglia più a quella archimedea che a quella equiangolare.



Una costruzione approssimata della spirale equiangolare fu impiegata da molti architetti, tra cui **Leon Battista Alberti**, per la voluta del **capitello ionico**.

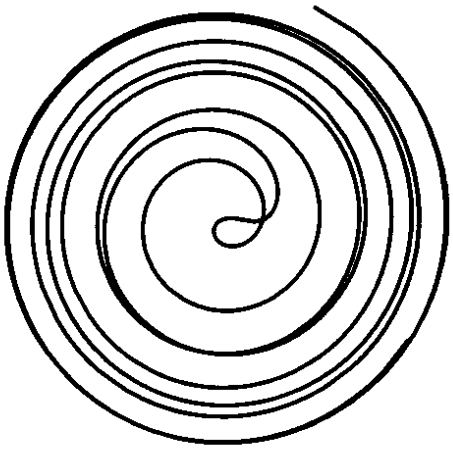
La cosiddetta ***spirale aurea***, di grande valore mistico ed estetico, è una particolare spirale equiangolare.

Ricorriamo ancora una volta all'immagine del bastone infinito per visualizzare un altro tipo di spirale. Questa volta supponiamo che il bastone sia illimitato da entrambe le parti, e che ruoti intorno ad un suo punto *O.* Immaginiamo inoltre due punti materiali, che si trovino inizialmente in *O,* e che traslino con velocità uguali ed opposte lungo il bastone. Le traiettorie dei due punti formano quella che potremmo chiamare una spirale doppia. Ne è un esempio la ***spirale di Fermat***, la cui equazione polare è del tipo:



$$r^n = a\theta,$$

ove n è un intero positivo, e a è una costante positiva.



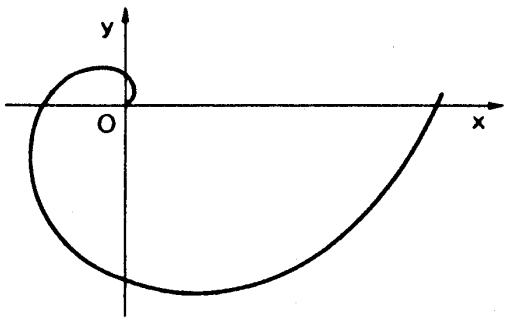
Nella spirale di Fermat i due rami si sviluppano senza incontrarsi mai. Esistono, però, altre spirali doppie in cui i due rami si intersecano, anche infinite volte.
Il disegno qui a lato raffigura una ***spirale parabolica***, la cui equazione polare è

$$(r-r_0)^2 = a\theta,$$

essendo $\boldsymbol{r_0}$ ed a costanti positive.

Ed ecco la ***spirale di Galileo***, di equazione polare

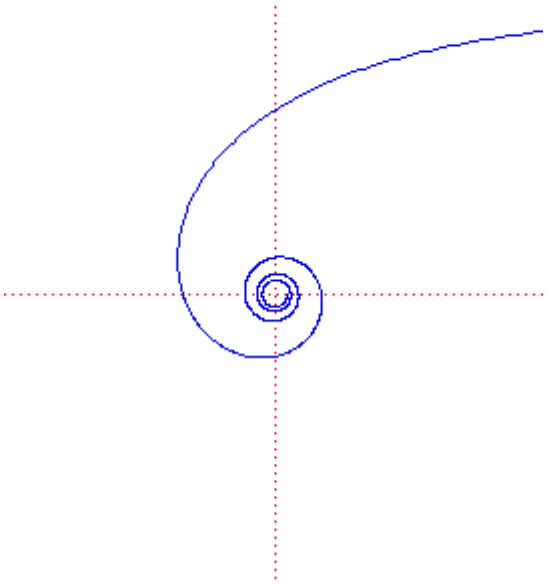
$$r = \theta^2$$



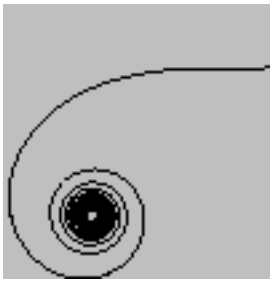
Le spirali che abbiamo visto sinora sono formate da traiettorie di punti materiali che si allontanano indefinitamente dal punto *O:* esistono però anche spirali basate sul movimento contrario, le cosiddette ***spirali inverse****:* esse descrivono il moto di un punto materiale che si avvicina indefinitamente al punto *O*, senza mai raggiungerlo. Questo effetto è ottenuto, ad esempio, con le curve di equazione polare del tipo:

$$r^n\theta = a.$$

Per *n=1* si ha la ***spirale iperbolica****:*



Per *n=2* si ha invece il ***lituo****:*

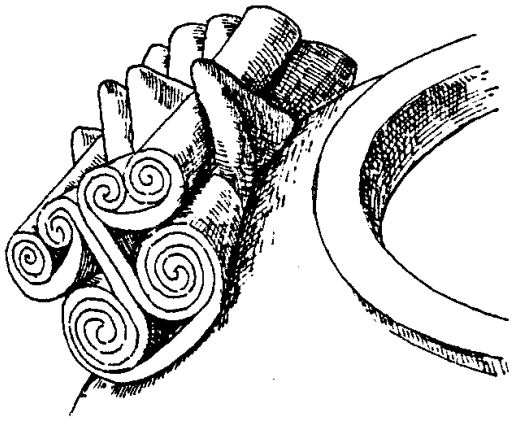


Questa è la forma del pastorale dei vescovi, ma anche di un'antica tromba ricurva verso il fondo di cui parlano Orazio e Virgilio.

Da sempre la spirale ha affascinato l'uomo, che fin dagli albori della civiltà l'ha riprodotta in oggetti di valore artistico o magico.



Il *Piombo scritto* di Magliano, forse contenente formule rituali (III sec. a.C.)



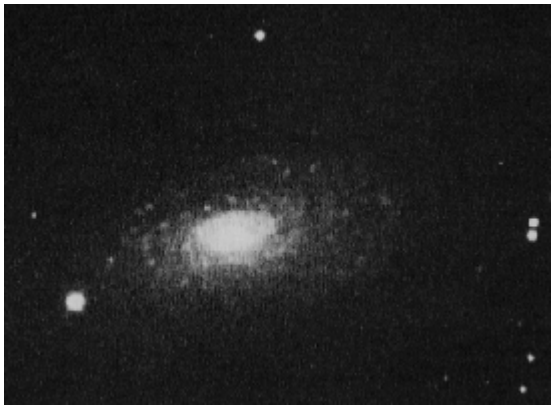
Ansa a rocchetto di vaso neolitico, rinvenuto a Paternò (Catania)

Le spirali hanno un ruolo importante anche in astronomia: è una spirale inversa (*spirale di Cotes*) la traiettoria di un corpo che entri nel campo gravitazionale di un pianeta con velocità diretta obliquamente alle linee del campo stesso. Ad esempio, se un satellite artificiale orbitante intorno alla Terra dovesse perdere quota, cadrebbe al suolo dopo aver percorso una spirale di Cotes. La stessa traiettoria verrebbe percorsa, in senso inverso, da un razzo che partisse dalla Terra obliquamente e mantenesse una velocità costante superiore a quella di fuga.

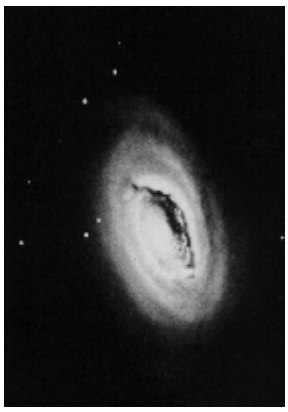
Molte galassie sono a forma di spirale. Ecco le foto di alcune di esse:



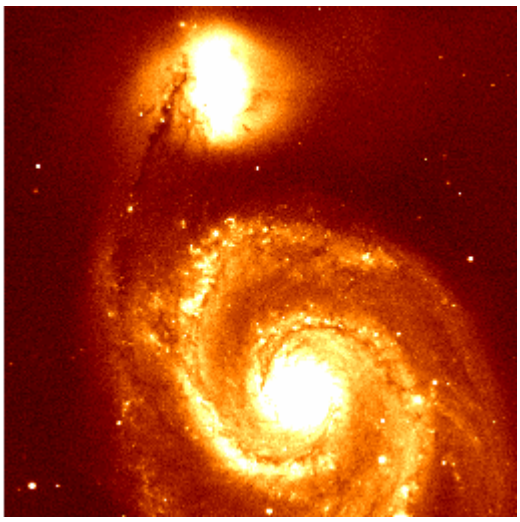
Andromeda



Girasole

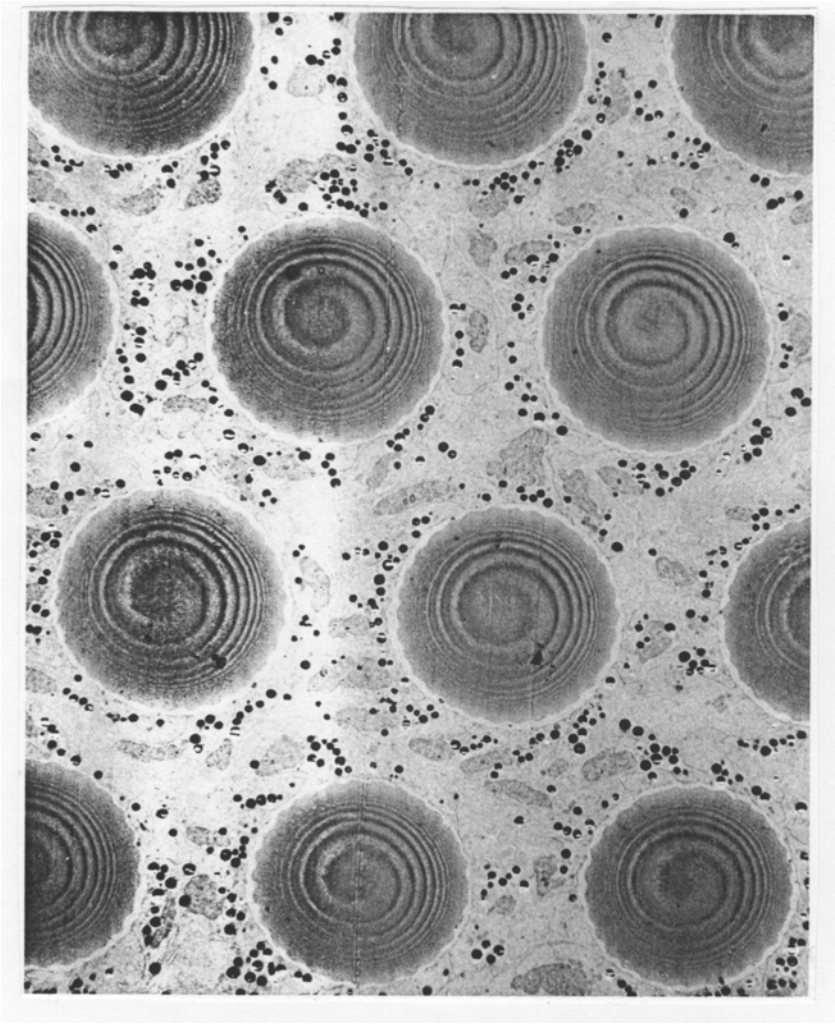


Occhio Nero

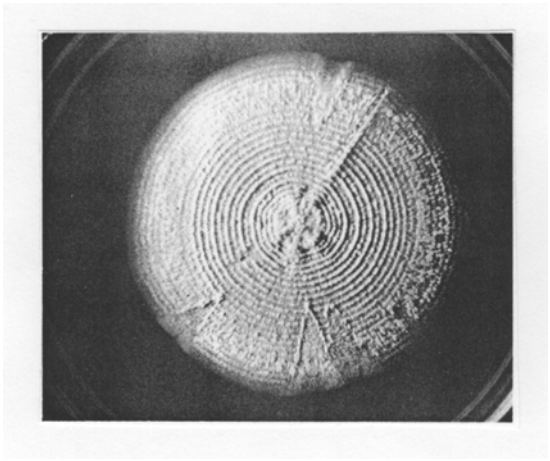


Vortice

Le spirali sono presenti anche nel mondo animale e vegetale:



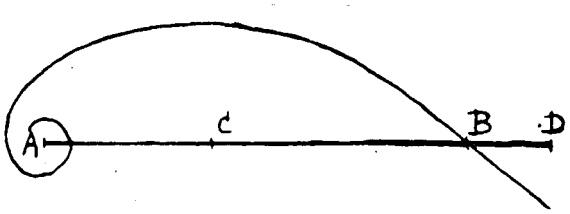
Sezione di un occhio di lucciola



Doppia spirale del fungo *Nectria*

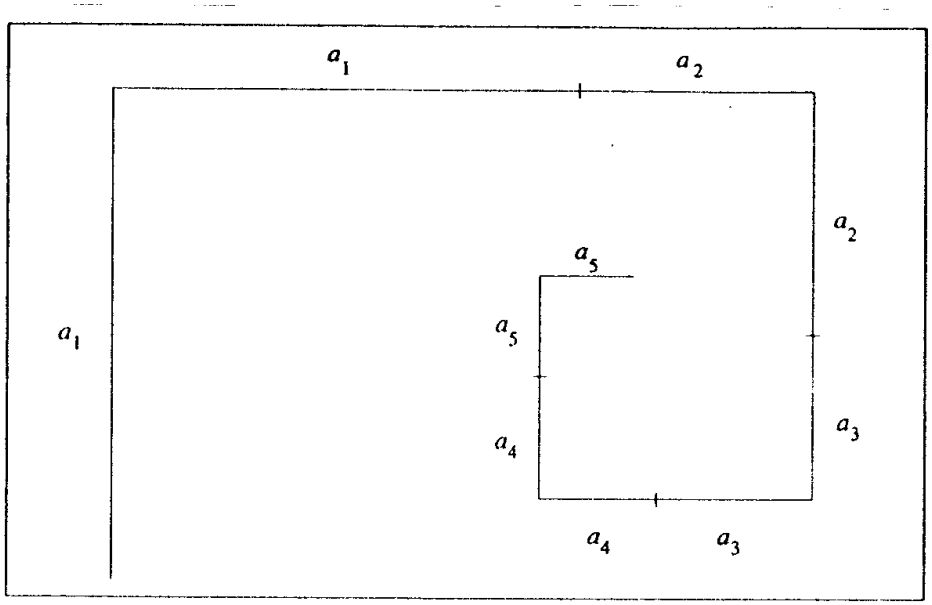
Curiosità matematiche

La spirale è, per sua definizione, una curva che non può essere tracciata in un tempo finito: essa descrive, infatti, la traiettoria di un punto che si muove indefinitamente. Ciononostante, e per quanto sorprendente ciò possa sembrare, la sua lunghezza può essere finita. È questo il caso di alcune spirali inverse, come quella descritta da **Torricelli** in una sua lettera del 1645.



Il punto materiale *B* che descrive questa traiettoria si sposta su di una semiretta *AD* verso il suo estremo *A*, e la sua velocità varia proporzionalmente alla distanza *AB*. Nel frattempo la semiretta ruota con velocità angolare costante intorno ad *A*. La curva ottenuta ha lunghezza finita.

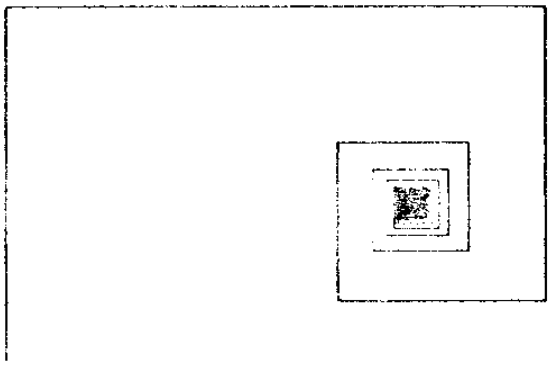
Le spirali possono essere disegnate efficacemente solo con l'ausilio del computer: come disegnare, infatti, per punti, una curva che nasce da un moto così complicato, composto di una rotazione e di una traslazione? Per di più, trattandosi di linee curve, è difficile misurarne la lunghezza. Il modo migliore per aggirare l'ostacolo è quello di passare a considerare *spirali poligonali*, composte di segmenti rettilinei. La figura illustra un procedimento iterativo per costruire una spirale poligonale inversa:



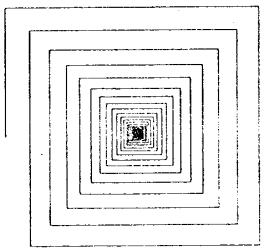
La successione delle lunghezze a_1, a_2, a_3,... può essere scelta liberamente, purché essa sia decrescente e tendente a zero. La lunghezza della spirale è allora data dalla somma della **serie**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

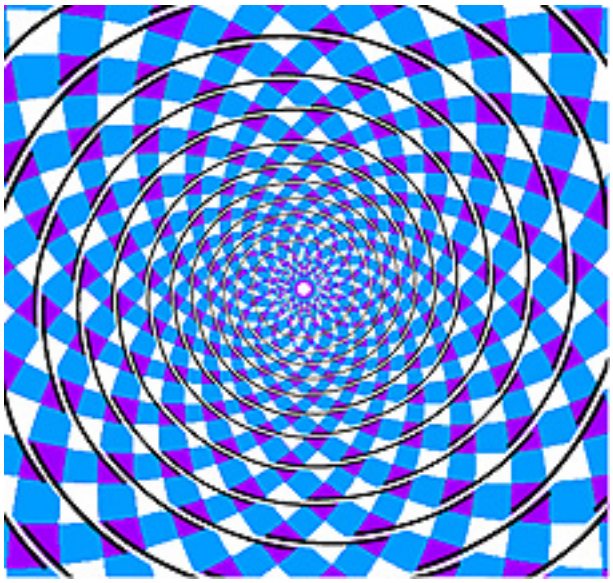
Scegliendo $a_n = 1/n$ per ogni n, si ottiene una spirale di lunghezza infinita:



Invece, scegliendo $a_n = q^{n-1}$, ove q è una costante positiva minore di 1, si ottiene una spirale di lunghezza finita:



La proprietà che abbiamo appena visto è del tutto contraria all'intuizione: l'impressione è, in effetti, che la seconda spirale sia più lunga della prima. Si tratta, evidentemente, di un'illusione ottica. Ed è sempre un'illusione ottica a farci credere che la figura riprodotta qui sotto sia una spirale: seguendone il tracciato col dito ci si accorge, con sorpresa, che essa è, in realtà, formata da cerchi concentrici. Questo effetto fu scoperto all'inizio del Novecento dallo psicologo inglese James Fraser.

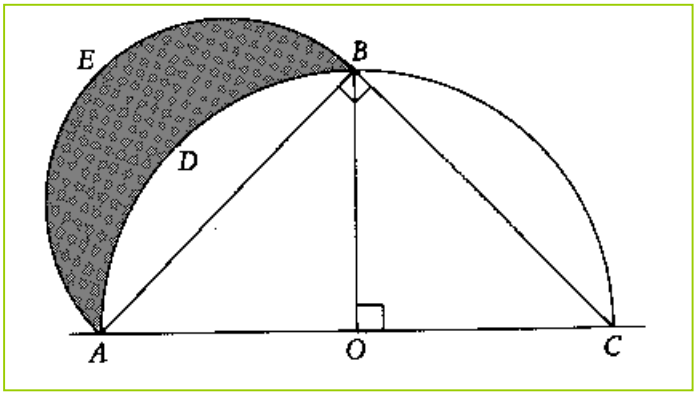


La quadratura del cerchio

Uno dei problemi più famosi della matematica è quello di costruire un quadrato avente la stessa area di un cerchio dato. Si sa che non esiste soluzione che preveda soltanto l'uso di riga e compasso: ogni tentativo di trovare una costruzione di questo tipo è destinato a fallire. Ciò discende dal fatto che il numero π è trascendente, ossia non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi.

Il problema è stato risolto, fin dall'antica Grecia, utilizzando altri strumenti, come la **trisettrice di Ippia** e la **spirale archimedea**.

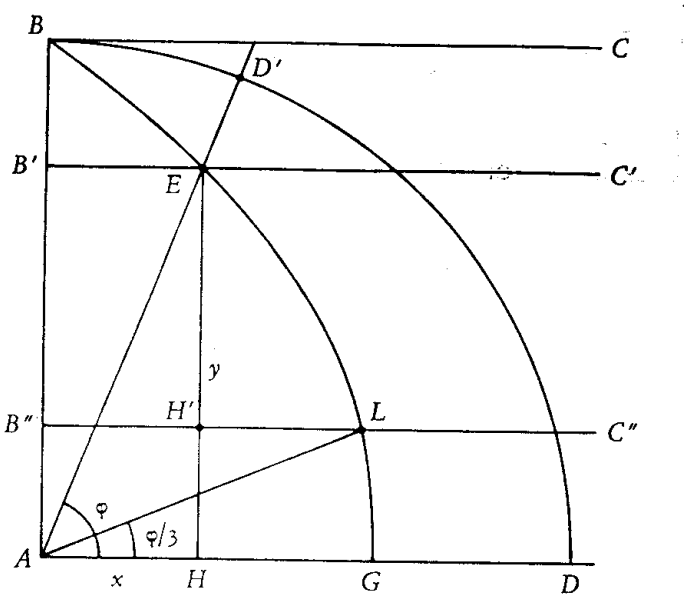
Il matematico greco **Ippocrate di Chio**, vissuto nel secolo V a.C., e presunto inventore della tecnica dimostrativa della ***reductio ad absurdum***, scoprì un metodo per quadrare con riga e compasso particolari regioni di cerchio: erano figure curvilinee, delimitate da due archi di cerchio, e dette ***lunule***. Nella figura l'area grigia è compresa tra il semicerchio di diametro *AC* ed il semicerchio di diametro *AB*; è facile provare che essa è pari all'area del triangolo *AOB*.



Quadrature del cerchio approssimative erano note fin dalla più remota antichità. Gli **Egizi**, nel famoso **papiro di Rhind**, risolvono il problema costruendo un quadrato avente il lato pari a *8/9* del diametro: ciò corrisponde a prendere *3,16* come stima razionale di π. Una stima migliore sarà determinata da **Archimede** nel trattato intitolato ***Misura del cerchio***.

La trisettrice di Ippia

Nel suo tentativo di risolvere il problema della **trisezione dell'angolo**, il filosofo sofista **Ippia**, nato intorno al 460 a.C., inventò una nuova curva, che prese il nome di **trisettrice**. La sua costruzione per punti si effettua nel modo seguente.



Si supponga che il segmento *AB* ruoti intorno ad *A* in senso orario, con velocità costante, fino a sovrapporsi al segmento *AD*. Si supponga inoltre che, nello stesso intervallo di tempo, il segmento *BC* trasli parallelamente a se stesso, con velocità costante, fino a sovrapporsi anch'esso al segmento *AD*. Durante questo movimento, il punto d'intersezione dei due segmenti in moto descrive la trisettrice.

Per trisecare il generico angolo $\varphi = D'AD$ si procede così. Sia *E* il punto d'intersezione della trisettrice con *D'A*. Si cali da *E* la perpendicolare ad *AD*, sia *H* il piede della perpendicolare. Sia *H'* il punto del segmento *HE* tale che $HH' = 1/3\ HE$. Si conduca la parallela a *BC* per *H'*. Sia *L* il suo punto d'intersezione con la trisettrice. Allora $LAD = 1/3\ \varphi$.

La trisettrice di Ippia può anche essere utilizzata per la **quadratura del cerchio**. Ciò fu provato da **Dinostrato**, fratello di **Menecmo**: perciò la trisettrice di Ippia è anche nota come ***quadratrice di Dinostrato***.

Con riferimento alla figura precedente, supponiamo che sia $a=AB$ il raggio del cerchio da quadrare. Si può dimostrare che vale la seguente proporzione:

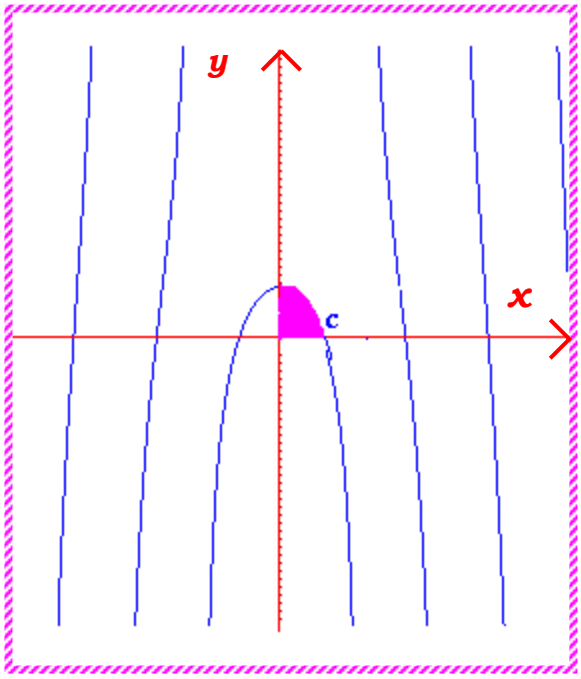
$$\overset{\frown}{BD}: AD = AD : AG$$

Avendo messo la lunghezza dell'arco BD in relazione con lunghezze di segmenti, è facile costruire un segmento avente la lunghezza dell'arco BD. Detta b questa lunghezza, si costruisca la media geometrica fra a e $2b$. La grandezza ottenuta è il lato del quadrato cercato.

Se si colloca una trisettrice nel **piano cartesiano** in modo che l'origine coincida con A, il lato AB giaccia sull'asse delle ascisse, il lato AD sull'asse delle ordinate, l'equazione cartesiana della trisettrice è:

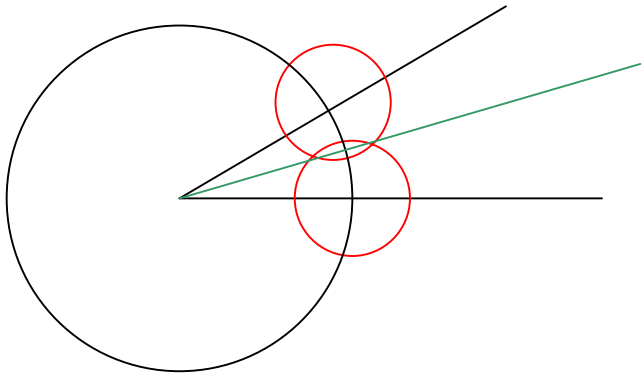
$$y = x\,\mathrm{cotg}(\pi\, x/2a),$$

ove $0 \le x \le c$, essendo $c=AG$. Facendo variare il valore di x in tutto il campo di esistenza della funzione, si ottiene il seguente grafico:



La trisezione dell'angolo

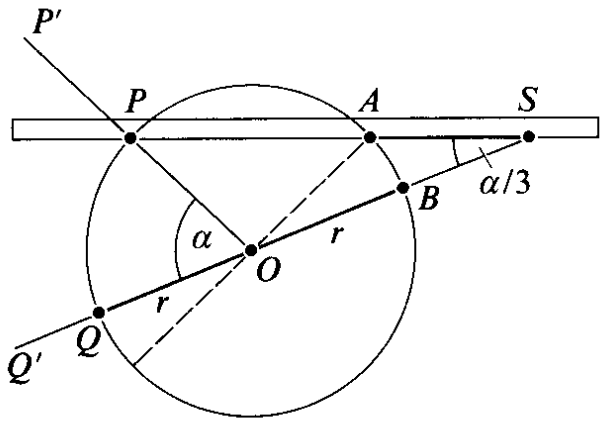
Tutti gli alunni della scuola media sanno come bisecare un angolo con riga e compasso. La costruzione è semplice:



E forse gli stessi alunni sanno che non è possibile *trisecare* (dividere in tre parti uguali) qualunque angolo usando solo riga e compasso. Per dimostrare questo fatto bisogna ricorrere alla ***teoria di Galois***.

È bene sottolineare che, dicendo *riga*, si intende un semplice listello rettilineo, privo di qualsiasi segno.

La ricerca di una costruzione è uno dei problemi più antichi della matematica greca. Con esso si cimentò anche **Archimede**, che propose un metodo molto semplice. Gli strumenti utilizzati sono un compasso ed una riga sulla quale sono segnati due punti, che chiameremo *A* e *S*. Sia *P'OQ* l'angolo da trisecare, come in figura.

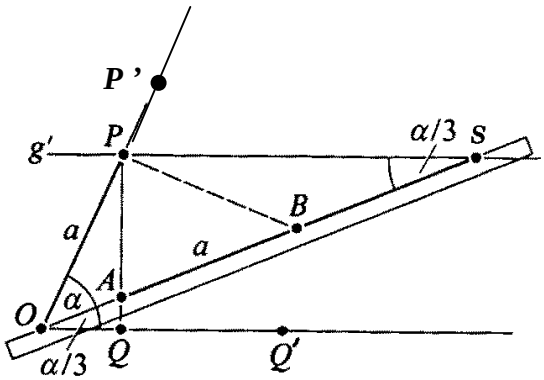


Si tracci la circonferenza di centro *O* e raggio pari ad *AS*. Si collochi poi la riga in modo che il punto *A* cada sulla circonferenza ed il punto *S* sulla retta *OQ*. Allora l'ampiezza dell'angolo *ASQ* è un terzo rispetto a quella dell'angolo *P'OQ*.

Una variante di questa costruzione fu ideata da **Nicomede di Alessandria**, che visse intorno al 240 a.C..

Sulla semiretta *OP'* si costruisce il punto *P* in modo che si abbia *OP* = ½ *AS*. Quindi si conduce la parallela ad *OQ'* per *P*. Poi si cala da *P* la perpendicolare ad *OQ'*. Si posiziona la riga in modo che il punto *A*

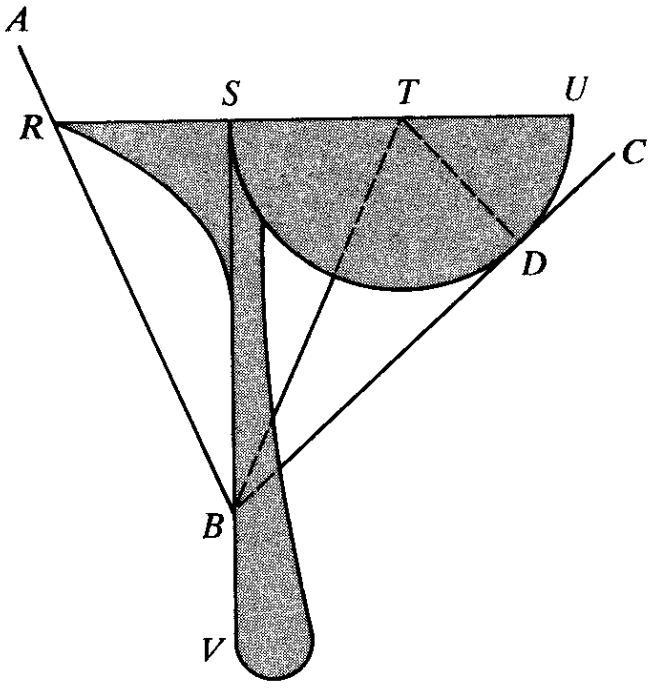
cada sulla perpendicolare ed il punto *S* sulla parallela. L'angolo *OSP* è l'angolo cercato.



Ma Nicomede andrò oltre. Egli inventò una curva, la **concoide**, che, una volta tracciata sul foglio, permette di trisecare ogni angolo senza ricorrere ad altri strumenti.

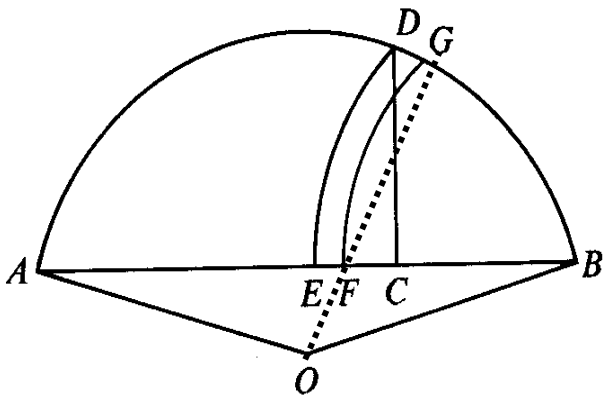
Per la trisezione possono essere utilizzate anche altre curve, come la **spirale archimedea**, la **lumaca di Pascal**, la **trisettrice di Ippia**, e le **sezioni coniche**.

Uno strumento di trisezione assai fantasioso, il cui inventore è sconosciuto, è descritto in un libro del 1835.



Questo strumento si chiama *tomahawk*, nome suggerito dall'evidente somiglianza con l'ascia degli Indiani d'America. Le sue componenti fondamentali sono il semicerchio di centro *T* e diametro *SU*, la retta *SV* perpendicolare al diametro, ed il segmento *RS* che prolunga il diametro e che ha lunghezza pari al raggio.
Dato l'angolo *ABC*, si colloca il tomahawk in modo che il punto *R* cada sul lato *AB*, il punto *B* sulla retta *SV*, ed il lato *BC* sia tangente al semicerchio. Allora *TBD* è pari ad un terzo dell'angolo *ABC*.

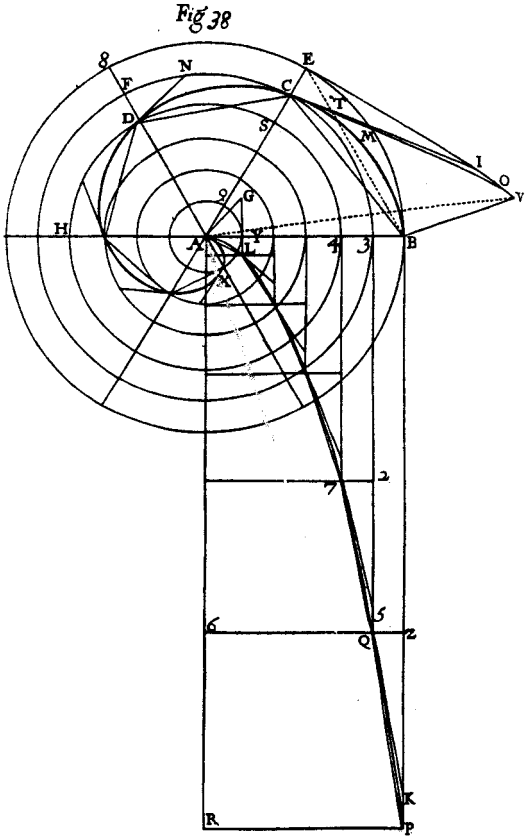
Nel corso dei secoli sono state sviluppate diverse tecniche per ottenere una trisezione approssimata con riga e compasso. Una di queste è dovuta al grande pittore tedesco **Albrecht Dürer**.



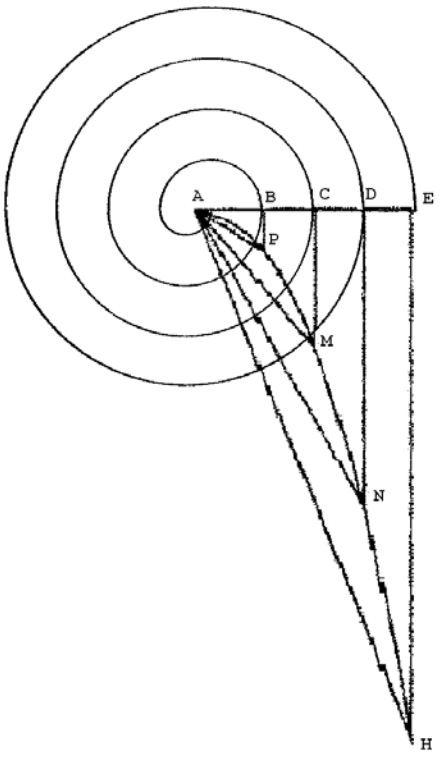
Sia *AOB* l'angolo da trisecare. Si tracci l'arco di circonferenza di centro *O* di estremi *A* e *B*, e si tracci anche il segmento *AB*. Sia *C* il punto di *AB* tale che *BC = 1/3 AB*. Da *C* si conduca la perpendicolare ad *AB*, e sia *D* il suo punto d'intersezione con l'arco di circonferenza. Si tracci quindi la circonferenza di centro *B* e raggio *BD*, che interseca il segmento *AB* nel punto *E*. Sia inoltre *F* il punto di *EC* tale che si abbia *EF = 1/3 EC*. Si tracci poi la circonferenza di centro *B* e raggio *BF*, sia *G* il suo punto d'intersezione con l'arco di circonferenza. Allora l'angolo *GOB* è circa un terzo dell'angolo *AOB*.

La spirale e la parabola

La **spirale di Archimede** e la **parabola** presentano delle sorprendenti affinità che furono studiate da **Archimede**, e poi riprese, nel Seicento, da **Cavalieri**, **Torricelli** e **Pascal**.



Questo disegno, tratto da una monografia di Pascal, mostra l'arco iniziale di una spirale, avente origine nel punto *A*, ed il secondo estremo in *B*. Esso corrisponde alla prima rotazione completa. Il punto *A* è anche il vertice di una parabola, avente *AB* come tangente. Di questa parabola è tracciato soltanto l'arco compreso tra il punto *A* ed il punto *P* di intersezione della parabola con la perpendicolare ad *AB* in *B*. La Parabola è tale che la lunghezza del segmento *AP* sia pari alla lunghezza della circonferenza di raggio *AB*. Allora *la lunghezza dell'arco di spirale AB è uguale alla lunghezza dell'arco di parabola AP.* Inoltre *l'area compresa tra il raggio AB e l'arco di spirale è uguale a quella compresa tra il segmento AP e l'arco di parabola.* Indicheremo quest'area con a_0.



Quest'ultimo risultato si può estendere per gli archi di spirale corrispondenti ad un qualunque numero di rotazioni complete. Nel disegno (in cui la parabola, per motivi di spazio, non è rappresentata nelle sue dimensioni reali) gli archi corrispondenti, rispettivamente, ad una, due, tre e quattro rotazioni complete hanno origine in *A* e, nell'ordine, secondo estremo nei punti *B, C, D* ed *E*. Da questi si conducono le perpendicolari ad *AB*, che intersecano la parabola nei punti *P, M, N,* ed *H* rispettivamente. Allora *le aree delle figure curvilinee AMP,*

ANM e AHN sono uguali, nell'ordine, alle aree comprese fra l'arco di spirale ed i segmenti BC, CD e DE. Indicheremo queste aree con a_1, a_2, e a_3.

Allora si hanno le seguenti proporzioni:

$$a_1 : a_0 = 1 : 7, \quad a_2 : a_1 = 7 : 19, \quad a_3 : a_2 = 19 : 37.$$

Se si prosegue il procedimento, costruendo le successive aree a_4, a_5, … a_n, si trova che la successione *1, 7, 19, 37, …* che individua i rapporti tra due termini consecutivi è la progressione aritmetica il cui termine *n*-esimo è

$$1 + 3n(n+1)$$

per $n = 0,1,2,3,\ldots$.

Una lettera di Torricelli su spirale e parabola

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Ulisse Dini
Lezioni di Calcolo Differenziale ed Integrale
Bologna, 1884

È un **manoscritto** contenente lezioni di **calcolo infinitesimale** suddivise in due parti: **calcolo differenziale** e **calcolo integrale**.

Scaffale 2
Palchetto 2
N. D'ordine 19

Lezioni

di

CALCOLO

Differenziale ed Integrale

dettate dal Prof.re

Dini

Nella R. Università di Pisa

1883-84.

UNIVERSITA' DI BARI
BIBLIOTECA della FACOLTA' di SCIENZE
N.° d'Inventario 2352

Bologna 1.° Gennajo 1884

BIBLIOTECA FACOLTÀ DI SCIENZE BARI UNIVERSITÀ
UNIVERSITÀ DI PISA FACOLTÀ DI SCIENZE ISTITUTO di MATEMATICA

del diametro verticale, $\underline{\text{arc tg } x}$ può riguardarsi come la funzione inversa della funzione sempre finita e continua $\underline{\text{tg } y}$ ecc. ....; e perciò si ha:

$$D \operatorname{arc tg} x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

per tutti i valori finiti di $\underline{x}$.

4.° — Similmente prendendo:

$$y = \operatorname{arc cot} x$$

si trova

$$D \operatorname{arc cot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

per tutti i valori finiti di $\underline{x}$.

5.° — Se $y = a^x$, $\underline{a^x}$ sarà la funzione inversa di $x = \log_a y$, e quindi sarà, come già trovammo:

$$D a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{y \log_e a}\right)} = y \log_e a = a^x \log_e a$$

per tutti i valori finiti di $\underline{x}$.

6.° — Trovato ora $\underline{D \operatorname{arc sen} x}$, $\underline{D \operatorname{arc tg} x}$, ..., per quanto si vide trattando delle funzioni di funzioni, si può dir subito che quando $\underline{z}$ è una funzione di $\underline{x}$ che ammette una derivata determinata e finita, si hanno le formole

$$D \operatorname{arc sen} z = \pm \frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$D \operatorname{arc tg} z = \frac{z'}{1+z^2}$$

la prima delle quali vale per tutti i valori di $\underline{x}$ pei quali $\underline{x}$ è compreso fra 1 e −1 (1 e −1 per ora esclusi) e la seconda per tutti i valori di $\underline{x}$ pei quali $\underline{z}$ è finito; e nella prima dovendo prendersi il segno + quando $\underline{\text{arc sen } z}$ termina a destra del diametro verticale, e il segno − quando termina a sinistra.

E in particolare, supponendo:

$$k = \frac{x}{a}$$

con k costante e reale, si ha di qui:

$$D \arcsen \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$D \arctg \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

III. Proprietà generali delle derivate.

41.— Prima di procedere oltre in queste lezioni, è utile premettere alcune proprietà generali della funzione $f(x)$ che in tutto un intervallo sono finite e continue, e ammettono sempre una derivata (ordinaria) determinata (finita, cioè, o infinita) e determinata di segno.

Incominciamo perciò dal dimostrare il seguente:

Teorema. — *Se $f(x)$ è una funzione che in tutto un intervallo (α, β) (α e β incluse) è finita e continua, e per tutti i punti x fra α e β (α e β al più esclusi) ammette una derivata determinata, questa derivata in una porzione qualunque dello stesso intervallo:*

1°. *Non potrà avere sempre un valore infinito;*

2°. *Non potrà avere sempre il valore zero, a meno che non sia costante in tutta la porzione che si considera dello stesso intervallo;*

3°. *Non potrà avere soltanto valori zero e valori infiniti.*

La dimostrazione di questo teorema, come quella di molti

Diofanto di Alessandria (secoli III-IV d.C. ?)

Della sua vita si hanno pochissime notizie: non si conoscono con certezza le sue origini, l'unica informazione attendibile riguarda la durata della sua vita, e ci è pervenuta sotto forma di **indovinello aritmetico**.

Il suo nome è passato alla storia grazie soprattutto all'opera intitolata ***Arithmetica***, in cui egli tratta la risoluzione di semplici equazioni algebriche a coefficienti interi. Le altre sue opere sono un trattato sui **numeri poligonali**, di cui ci è pervenuto solo un frammento, ed uno scritto intitolato ***Porismi***, che è invece andato interamente perduto.

L'indovinello su Diofanto

Si tratta di un problema aritmetico proposto sotto forma di epigramma, e fa parte di una raccolta di 46 indovinelli, che il grammatico latino **Metrodoro** (sec. VI d.C.) incluse nell'***Antologia Greca***. Tutti i quesiti corrispondono ad equazioni di primo grado ad un'incognita.

Ecco il testo dell'indovinello:

La sua giovinezza durò 1/6 della sua vita; poi la sua barba iniziò a crescere dopo 1/12; si sposò dopo 1/7 e gli nacque un figlio dopo 5 anni. Il figlio visse la metà degli anni del padre e il padre morì 4 anni dopo il figlio. Quanti anni visse Diofanto?

Detta x l'età di **Diofanto**, il problema si traduce nell'equazione:

$$1/6\,x + 1/12\,x + 1/7\,x + 5 + 1/2\,x + 4 = x,$$

che ha soluzione $x = 84$.

Diofanto
Arithmetica

Quest'opera di **Diofanto** era originariamente composta di tredici libri, di cui solo sei – che indicheremo con le cifre romane I-VI - ci sono pervenuti nella versione greca. Recentemente sono state ritrovate le versioni arabe di altri quattro libri, che indicheremo con A, B, C, D. Probabilmente, l'ordine originario dei libri era il seguente:

I, II, III, A, B, C, D, IV, V, VI

L'opera contiene le soluzioni di 150 problemi, la maggior parte dei quali si traduce in un'*equazione indeterminata,* ossia a più incognite, che, in generale, prevede più di una soluzione. I coefficienti delle equazioni sono sempre numeri interi, le soluzioni sono sempre cercate nel campo dei numeri razionali. Il **Libro I** contiene i fondamenti del calcolo algebrico: all'inizio vengono fissate le **notazioni** usate per indicare le potenze delle variabili, e vengono elencate le regole per la loro moltiplicazione. I problemi studiati qui sono tutti riconducibili ad equazioni di primo grado ad una sola incognita (*equazioni determinate).*

Nel **Libro II** vengono proposti e risolti problemi riconducibili ad equazioni indeterminate di secondo grado. Si tratta soprattutto di trovare coppie di numeri razionali che, combinati in un certo modo mediante le quattro operazioni, diano un quadrato perfetto. Vediamo il **Problema VIII** (la traduzione è nostra, come anche le aggiunte fra parentesi; la fonte è una trascrizione latina del secolo scorso, il cui linguaggio è ancora arcaico, e può per questo apparire curioso):

Suddividere un quadrato assegnato in due quadrati.
Si assegni di suddividere 16 in due quadrati.
Si ponga il primo uguale a x^2*, il secondo dunque sarà* $16-x^2$*, e dovrà essere*

$$16 - x^2 = \square$$

Formo il quadrato di quanti si voglia x meno tante unità quant'è la radice di 16. Questo (faccio) con 2x-4, il cui quadrato sarà

$$4x^2 + 16 - 16x.$$

Si eguaglino questi a

$$16 - x^2.$$

Si sommino i (termini) negativi di entrambi e (si sottraggano) i (termini) simili dai simili.
Allora $5x^2 = 16x$ *(*)* *ed è* $x = 16/5$.
L'uno (dei quadrati) sarà 256/25, l'altro 144/25, la cui somma fa 400/25 = 16, ed entrambi sono un quadrato.

La maestria di Diofanto nella risoluzione di questo problema sta nell'aver scelto opportunamente la forma del secondo numero cercato: egli impone che sia della forma $2x - 4$, in modo che, elevandolo al quadrato, si ottenga 16 come termine noto. La scelta di 2 come coefficiente della x è giustificata dal fatto che scegliendo 1 si otterrebbe la scomposizione banale $16 = 4^2 + 0^2$.
Così facendo, nell'equazione che abbiamo indicato con (*) il termine noto scompare, ed egli può agevolmente risolverla: una radice è 0, l'altra è il valore di x cercato. Le equazioni di secondo grado risolte nell'***Arithmetica*** sono quasi tutte prive del termine noto. Ma il più delle volte Diofanto riesce a ridurre il problema ad un'equazione di primo grado: al momento di eguagliare i quadrati, è il termine in x^2 a scomparire. In questo modo il Nostro non si trova mai nella condizione di dover estrarre una radice quadrata, come prescriverebbero le **formule di Newton** per la risoluzione della più generale equazione di secondo grado.

L'idea su cui si basa la risoluzione è quella di scrivere lo stesso numero (il secondo dei numeri quadrati cercati) in due modi diversi, il che dà origine all'equazione: questa tecnica è detta anche *metodo della doppia uguaglianza.*

A proposito del **Problema VIII**, che abbiamo appena trattato, è doveroso ricordare che fu proprio quello il punto dell'***Arithmetica*** in cui **Fermat** scrisse l'ormai famosissima nota a margine, contenente la formulazione del suo **Ultimo Teorema**.

I **Libri A, B, C, D, III, IV e V** contengono problemi dello stesso tipo di quelli del Libro I, con qualche grado di difficoltà in più: i numeri cercati passano da due a tre o quattro, il numero da scomporre può essere un quadrato oppure un cubo, il grado delle equazioni può salire fino a sei. Nel **Libro VI**, infine, si cercano triangoli rettangoli tali che l'area e lunghezze delle altezze sull'ipotenusa verifichino certe proprietà aritmetiche. Le lunghezze dei lati di questi triangoli sono rigorosamente numeri razionali, a volte interi, formano, cioè, una **terna pitagorica**. Il più delle volte Diofanto, che sempre mira alla

massima semplificazione possibile, cerca una terna del tipo *3x, 4x, 5x*, o del tipo *8x, 15x, 17x*.

Nel 1500 l'***Arithmetica*** venne riscoperta da **Bombelli** e **Vieta**, che ad essa si ispirarono, interrompendo così la tradizione araba che aveva dominato tutto il Medioevo.
La disciplina studiata da Diofanto, ossia l'algebra dei numeri interi, ha continuato ad appassionare i matematici fino in epoca moderna. Negli ultimi decenni ha conosciuto uno sviluppo notevolissimo: abbandonata l'antica denominazione *aritmetica,* si chiama oggi ***teoria dei numeri***. Una branca di questa disciplina si occupa della ricerca di soluzioni intere di equazioni algebriche a più incognite e coefficienti interi, come, ad esempio:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Le equazioni di questo tipo sono dette, non a caso, ***equazioni diofantee***. L'esempio più famoso è quello dell'Ultimo Teorema di Fermat. In generale, è molto difficile trovare le soluzioni di un'equazione siffatta (vedi **Problema 10** di **Hilbert**).

L'aritmetica secondo Baltzer

Dal Libro I dell'*Arithmetica* di Diofanto: le notazioni

Ecco come **Diofanto**, all'inizio dell'opera, introduce alcune denominazioni ed abbreviazioni delle potenze dell'incognita:

Un *quadrato* (= x^2) è *δύναμις* ("potenza"), ed il suo segno è Δ con una *Y* sovrapposta, quindi Δ^Y.

Un *cubo* (= x^3) è *κύβος* ("cubo"), ed il suo segno K^Y.

Un *quadrato-quadrato* (= x^4) è *δυναμοδύναμις* ("potenza-potenza"), ed il suo segno è $\Delta^Y \Delta$.

Un *quadrato-cubo* (= x^5) è *δυναμόκυβος*, ("potenza-cubo") ed il suo segno è ΔK^Y.

Un *cubo-cubo* (= x^6) è *κυβόκυβος*, ed il suo segno $K^Y K$.

La notazione per il *quadrato-quadrato* era già stata adottata da **Erone** per indicare la quarta potenza del lato di un triangolo. Interessante è l'analogia con la nomenclatura adottata dagli algebristi italiani dei secoli XV e XVI: esiste una **tabella** del **Cossali** che permette un confronto.

Usando le definizioni date qui sopra, Diofanto enuncia, di seguito, le regole per la moltiplicazione di queste potenze e delle potenze reciproche.

Altri simboli usati nell'***Arithmetica*** sono:

- $\overset{\circ}{\text{M}}$, che, seguito da un numero, indica il termine noto di un'equazione; questa notazione è formata dalle prime due lettere della parola *"monade"*, che significa *unità*.
- ⋔, il segno della sottrazione;
- ἰσ, il segno uguale.

Nessun segno viene usato per l'addizione: la somma di due o più termini viene indicata scrivendo di seguito gli addendi.
La divisione è spesso denotata con *ἐν*.

Ecco un esempio di quoziente di polinomi, tratto dal **Problema XIV** del **Libro VI**:

$$\Delta^{Y}\,\bar{\xi}\,\overset{o}{M}\,{}_{,}\overline{\beta\phi\kappa}\ \text{ἐν μορίῳ}\ \Delta^{Y}\Delta\,\bar{a}\,\overset{o}{M}\,\daleth\,\pitchfork\,\Delta^{Y}\bar{\xi}$$

Ed ecco la traduzione nel nostro simbolismo:

$$(60\,x^2 + 2520)\ /\ (x^2 + 900 - 60\,x^2)$$

La scrittura di Diofanto, secondo la **classificazione di Nesselmann**, è un tipico esempio di ***algebra sincopata***. Pur essendo prevalentemente basata sull'uso di parole intere, spesso vengono usate alcune abbreviazioni, e singole lettere per denotare le incognite: non siamo ancora al simbolismo moderno, ma è stato compiuto un decisivo passo avanti rispetto alla **matematica babilonese** ed **egizia**, interamente verbale (***algebra retorica***). Occorrerà comunque aspettare la fine del Medioevo per veder lentamente diffondersi l'uso degli esponenti e di segni specifici per le quattro operazioni.

Un esempio di algebra sincopata: il **Problema XXVIII** del **Libro I**.

	$\bar{\kappa}$		$\overline{\sigma\eta}$	[Given numbers] 20, 208
ἔκθ.	$s\bar{a}\ \mu^{o}\,\bar{\iota}$		$\mu^{o}\bar{\iota}\pitchfork s\bar{a}$	Put for the numbers $x+10$, $10-x$.
τετρ.	$\Delta^{Y}\bar{a}\,ss\bar{\kappa}\,\mu^{o}\bar{\rho}$		$\Delta^{Y}\mu^{o}\bar{\rho}\pitchfork ss\bar{\kappa}$	Squaring, we have $x^2+20x+100$, $x^2+100-20x$.
σύνθ.	$\Delta^{Y}\bar{\beta}\mu^{o}\,\bar{\sigma}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\overline{\sigma\eta}$	Adding, $2x^2+200=208$.
ἀφ.	$\Delta^{Y}\bar{\beta}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\bar{\eta}$	Subtracting, $2x^2=8$.
μερ.	$\Delta^{Y}\bar{a}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\bar{\delta}$	Dividing, $x^2=4$.
	$s\bar{a}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\bar{\beta}$	$x=2$.
ὕπ.	$\mu^{o}\overline{\iota\beta}$		$\mu^{o}\bar{\eta}$	Result: [the numbers are] 12, 8.

Curiosità La nostra abitudine di indicare i gradi con un circoletto ha un'origine analoga a quella del simbolo diofanteo della monade: gli astronomi del tempo di **Archimede** usavano, infatti, abbreviare, in modo analogo, la parola greca *"μοῖρα"* (che significa appunto *grado*) con la lettera μ sormontata da un circoletto.

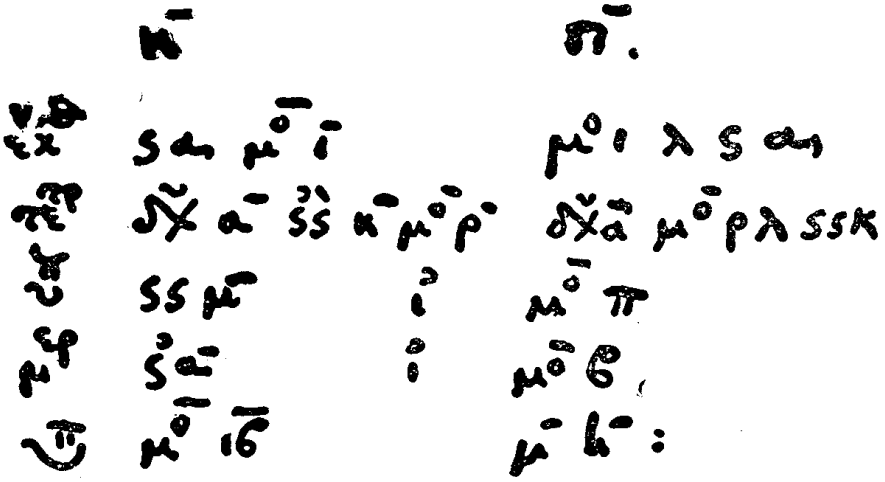
La scrittura di Diofanto

Sul modo di chiamare le potenze

Nella scrittura dell'**algebra retorica** il nome di ogni oggetto matematico viene scritto per esteso. La seguente tabella mette a confronto la nomenclatura usata dal matematico greco **Diofanto** con quella usata dagli algebristi italiani come **Pacioli**, **Cardano** e **Tartaglia**. Questi ultimi si rifacevano, in gran parte, alla tradizione della **matematica araba**. In particolare notiamo che, al contrario di Diofanto, essi davano significato di potenza anche al termine noto di un'equazione algebrica, che chiamavano anche *numero*. Curiosamente lo stesso nome veniva usato da Diofanto per indicare l'incognita, che per lui era il "numero del problema". Anche il "cubo-cubo" egiziano e diofanteo ($x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$) ha un significato diverso rispetto al "cubo di cubo" arabo ($(x^3)^3 = x^{3\cdot 3} = x^9$): il fatto è che le prime due scale sono basate sulla somma degli esponenti, la terza scala, invece, sul loro prodotto.

Scala Egizia	***Scala Diofantea***	***Scala Araba***
x^0	0.	0. Numero, il noto
x 1. *Aha*, *hau*, mucchio	1. Numero, l'ignoto	1. Cosa, radice, lato
x^2 2. Quadrato	2. Potenza	2. Censo
x^3 3. Cubo	3. Cubo	3. Cubo
x^4 4. Quadruplo	4. Potenza-potenza	4. Censo di censo
x^5 5. Prima indefinita, Quinto numero	5. Potenza-cubo	5. Relato 1°
x^6 6. Cubo-cubo	6. Cubo-cubo	6. Censo di cubo, Cubo di censo
x^7 7. Seconda indefinita		7. Relato 2°
x^8 8. Quadruplo-quadrato		8. Censo di censo di censo
x^9 9. Cubo esteso		9. Cubo di cubo
		10. Censo di relato 1°
		11. Relato 3°

La scrittura di Diofanto



Un problema algebrico di Diofanto: Da un manoscritto del sec. XIV. Si tratta di trovare due numeri tali che la loro somma sia = 20, e la differenza dei loro quadrati = 80. I passaggi sono i seguenti:

Siano	$x + 10$	$10 - x$
Quadrati	$x^2 + 20\,x + 100$	$x^2 - 20\,x + 100$
Diff. dei quadrati	$40\,x$	$= 80$
Divisione	x	$= 2$
da cui	$x + 10 = 12$	$10 - x = 8$

Donne in matematica

Nei testi di storia della matematica i nomi femminili sono una rarità, e ad essi sono dedicate quasi sempre solo poche righe. Molte delle donne citate fanno solo da sfondo alle vicende degli uomini: il matematico Hindu **Bhaskara** dedica alla sua infelice figlia il trattato aritmetico intitolato *Līlāvatī* ("Il bello"), la nipote del re di Prussia è la destinataria delle ***Lettere ad una principessa tedesca*** di **Eulero**, una signorina francese è la causa del duello che sarà fatale a **Galois**. Molti grandi matematici hanno avuto come assistenti le mogli, le sorelle o le figlie, il cui lavoro è rimasto nell'ombra. Solo di rado qualche donna è riuscita a giocare un ruolo da protagonista, partecipando attivamente alla ricerca scientifica. D'altronde per secoli l'istruzione superiore è stata riservata ai soli uomini, solo in tempi recenti le donne hanno visto aprirsi le porte dell'università ed hanno potuto raggiungere, in certi casi, posizioni accademiche di alto livello.

Nel contesto proibitivo del passato, l'emergere di singole donne, che si sono fatte strada da autodidatte, o comunque con l'aiuto di pochi, in un ambiente spesso ostile ai loro progetti, ha del miracoloso. E poiché ciò che è raro è di per sé importante, abbiamo voluto dedicare un capitolo particolare a queste persone speciali che, in epoche diverse, hanno costituito delle ammirevoli eccezioni.

Ipazia
Maria Gaetana Agnesi
Marie-Sophie Germain
Sofia Kowalewsky
Emmy Noether

Maria Gaetana Agnesi (Milano 1718 – 1799)



Nacque in una ricca famiglia borghese, come primogenita del figlio di un mercante di seta. Suo padre si sposò tre volte ed ebbe altri venti figli. Nella casa paterna ricevette un'ottima istruzione letteraria ed umanistica. Fu il monaco Lodovico Ramiro Rampinelli ad iniziarla alla matematica.
La sua opera principale è un'esposizione didattica in due volumi, intitolata ***Istituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana*** (1748), che, pur non contenendo risultati originali, è un bel compendio dei nuovi metodi geometrici. Il primo volume tratta di **algebra** e **geometria analitica**, il secondo di **calcolo infinitesimale**. Maria Gaetana dedicò il frutto della sua fatica all'imperatrice Maria Teresa d'Asburgo, che era la sua sovrana (Milano faceva allora parte dell'Impero Austro-Ungarico), ed era anche un'accesa sostenitrice dei diritti della donna. La regina la ricompensò donandole un anello ed una preziosa scatola di cristallo di rocca tempestata di diamanti.
L'opera fu tradotta in francese sotto la direzione dell'abate Bossut nel 1775 ed in inglese da John Colson nel 1801. Un altro scritto, un commento al ***Traité Analytique des Sections Coniques*** del matematico francese **L'Hospital**, è rimasto inedito.

Nel 1750 papa Benedetto XIV, che era di origine bolognese e Patron dell'Accademia di Bologna, le offrì la Cattedra di Geometria Analitica. Maria Gaetana la tenne fino al 1756.

L'Agnesi si occupò anche di linguistica, di filosofia e di studi sacri, coltivati fin dall'adolescenza. Incline all'austerità e all'obbedienza, da ragazzina aveva manifestato il desiderio di entrare in convento. Dopo la morte del padre, avvenuta nel 1752, decise di dedicarsi interamente

alla cura dei bisognosi. Entrò al Pio Albergo Trivulzio di Milano, dove diresse il reparto femminile e finì per andare ad abitare, in un modesto appartamentino. Per aiutare il prossimo si spogliò di tutti gli averi, e morì in povertà.

Molti la considerano il maggiore talento matematico italiano dell'epoca. I suoi meriti vennero riconosciuti anche allora, come testimonia il successo internazionale della sua opera principale. **Vincenzo Riccati** ebbe per lei parole di grande stima. Tuttavia ciò non la protesse dalla discriminazione sessuale. Molti dei principali istituti d'istruzione superiore in Europa le negarono un posto da ricercatrice. Anche l'Académie Française la respinse. Lo stesso ingiusto destino sarebbe toccato, alcuni decenni dopo, alla francese **Marie-Sophie Germain**.

Il nome di Maria Gaetana è legato ad una particolare **curva**, che ella trattò nelle ***Istituzioni***.

Curiosità

Il libro di Maria Gaetana Agnesi è citato, con parole di lode, in una commedia goldoniana, intitolata *Il medico olandese*. Altri scrittori contemporanei hanno dedicato a lei ed alla sorella Maria Teresa, musicista, versi d'elogio.

Una lettera di Maria Gaetana Agnesi

Donne in matematica

Una lettera di Maria Gaetana Agnesi

Maria Gaetana Agnesi scrisse al dott. G. Bianchi, più noto come Jano Planco, con cui intrattenne un carteggio scientifico:

Ill.mo Sig.re e Padrone Colendissimo

Ho intesa con gran piacere la notizia, che VS. Ill.ma mi à recata nell'ultima sua; dell'elezione fatta nella di lei Persona di Pubblico Professore di Notomia in Siena, essendo questa corrispondente al moltissimo di lei merito, e insieme di gran vantaggio agli Abitanti della sovraccennata Città, sì per lo stabilimento d'una facoltà tanto necessaria, come per gli altri buoni studii che VS. Ill.ma col suo finissimo gusto non mancherà d'introdurvi.
Trasmetto a Vinegia due copie delle mie preposizioni per mezzo del P. Mari Teatino, il quale le terrà presso di se fino a tanto ch'ella avrà il modo di ricuperarle. La prego intanto a volerle leggere coll'animo ben disposto a compatirmi, avvertendo, però, che dopo, che sono state stampate ò mutato parere intorno alla figura della nostra Terra, per aver viste alla luce le ultime osservazioni fatte dagli Accademici di Parigi sotto il Circolo polare e del tutto contrarie a quelle ch'erano state fatte dal Cassini e da altri, alle quali era appoggiata la mia primiera opinione; siccome pure nella preposizione intorno alla cagione dell'Aurora boreale, la quale com'ella osserverà contiene una dottrina del tutto nuova (abbenché dopo sia stata da altri seguita) è da osservarsi che bastano due sole riflessioni de' raggi solari per rendere ragione di tutte le proprietà di quest'insigne meteora tuttoché nelle mentovate proposizioni si dica esser necessarie trè riflessioni per lo stess'effetto.
Perdoni VS. Ill.ma se troppo l'ò trattenuta con questa mia, mentre coll'offerirmi a suoi cenni mi raffermo
di VS. Ill.ma

Milano li 10. del 1742 *Divot.ma ed Obblig.ma Serva*
Maria Agnesi Mariani

(cit. da G. Arrighi, Incontri di Maria G. Agnesi con Jano Planco. Quattro lettere inedite della scienziata milanese, Istituto Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 1971, pag. 685)

Marie-Sophie Germain (Parigi 1776-1831)



Si narra che ella scoprì all'età di tredici anni, leggendo il racconto della morte di **Archimede**, il proprio amore per la matematica. Studiò per anni le opere di **Newton** e **Eulero**, di nascosto da suo padre, un ricco mercante: solo dopo molto tempo, l'uomo, di fronte all'incrollabile tenacia della figlia, decise di assecondare le sue aspirazioni e la mantenne economicamente per tutta la vita.

Venuta in possesso, con un astuto stratagemma, degli appunti delle lezioni tenute all'Ecole Polytechnique, fece il suo esordio nel mondo scientifico con un articolo di analisi, che inviò a **Lagrange** con lo pseudonimo di **Antoine-Auguste LeBlanc**, il nome di uno studente che si era iscritto ai corsi, e li aveva poi abbandonati. Colpito dall'originalità del lavoro, Lagrange si mise alla ricerca del suo autore. Quando, infine, ne scoprì la vera identità, offrì alla donna tutto il suo sostegno.
Marie-Sophie non poté mai entrare all'università, che allora era preclusa alle donne; per tutti gli anni successivi la sua attività di ricerca si svolse prevalentemente sotto forma di carteggio.

Fu in corrispondenza con **Legendre** e con **Gauss** su argomenti di **teoria dei numeri**. Anche nelle lettere al matematico tedesco Marie-Sophie finse di essere un uomo. Quando, nel 1806, le truppe napoleoniche occuparono la città di Braunschweig, ove Gauss risiedeva, la Germain si premurò di raccomandare la vita di lui ad un generale francese, amico di famiglia. Fu tramite questo ufficiale che Gauss venne a sapere chi era, in realtà, il suo corrispondente.
Marie-Sophie Germain è ricordata soprattutto per una parziale dimostrazione dell' **Ultimo Teorema di Fermat**, che rappresenta uno dei maggiori progressi anteriori alla definitiva soluzione del problema da parte di **Andrew Wiles**, nel 1995.

Gli studi della Germain spaziarono anche in altri campi. I rapporti con Gauss si interruppero nel 1808, a seguito del trasferimento di quest'ultimo a Göttingen. Venendole a mancare l'unico valido punto di riferimento, ella decise di abbandonare la teoria dei numeri, per rivolgere la sua attenzione alla fisica.
Nel 1816 vinse un premio bandito dall'Académie Française per un lavoro intitolato ***Memoria sulle vibrazioni delle piastre elastiche***: ciononostante la prestigiosa istituzione non volle fare per lei alcuna eccezione alla regola che vietava di assumere ricercatori di sesso femminile. Le fu comunque concesso di assistere alle lezioni, privilegio che era solitamente riservato alle mogli dei professori.

Per intercessione di Gauss, con il quale nel frattempo la scienziata era rientrata in contatto, l'Università di Göttingen le destinò una laurea *honoris causa*. Purtroppo Marie-Sophie, stroncata da un male incurabile, non la poté mai ritirare.

Le discriminazioni che aveva subito in vita proseguirono anche dopo la sua morte. Malgrado i suoi importanti contributi alla teoria dell'elasticità dei metalli, quando fu completata la Tour Eiffel, ella non fu inclusa nell'elenco degli scienziati meritevoli i cui nomi dovevano essere incisi sull'imponente costruzione.

Curiosità Marie-Sophie Germain fu la prima ad accorgersi che per ogni numero intero $a>1$, il numero $a^4 + 4$ non è un numero primo. In effetti questo numero è prodotto di due fattori interi positivi diversi da 1:

$$a^4 + 4 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$$

Donne in matematica

Sofia Kowalewsky (1850-1891)



Figlia di un generale dell'artiglieria russa, pervenne alla matematica tramite suo zio Pietro che gliene parlò quando era ancora una bambina. Continuò, in segreto, a coltivare l'interesse per la materia anche da adolescente. Diventata maggiorenne, Sofia, che veniva chiamata col vezzeggiativo Sonja, si sposò. Il cognome con cui è nota è quello del marito. La giovane donna si unì, si dice per convenienza, ad un altro ricercatore, un paleontologo: il matrimonio le permise di sottrarsi all'influenza della famiglia d'origine, e di viaggiare da sola per l'Europa salvaguardando la propria reputazione. Tentò invano di iscriversi alle università di Heidelberg e di Berlino: l'ingresso era allora vietato alle donne. Ciò non le impedì di usufruire comunque con profitto degli insegnamenti di valenti professori, tra cui **Karl Weierstrass**. Nel 1874 conseguì il dottorato all'Università di Göttingen, con la votazione *summa cum laude*. Tuttavia le fu negato un posto da ricercatrice.

La sua attività scientifica subì un rallentamento per alcuni anni, a causa di varie vicende familiari: la morte dei genitori, la nascita di sua figlia e problemi legati alla vita coniugale. Il marito, vittima di ripetuti fallimenti finanziari, si suicidò nel 1883. Nel 1884 Sonja ottenne una docenza all'Università di Stoccolma. Questo fu solo l'inizio di una serie di riconoscimenti e prestigiosi incarichi che le furono assegnati, tra cui figura un premio conferitole in Francia dall'Académie des Sciences.

Sonja Kowalewsky è ricordata per aver migliorato alcuni risultati di **Cauchy** su quelle particolari **equazioni differenziali** che sono *le equazioni alle derivate parziali.* Queste vengono utilizzate in meccanica per descrivere il moto di sistemi di corpi, in cui, ad esempio, la coordinata y di un certo punto del sistema dipende da più variabili, come la coordinata x e l'istante t (un'equazione di questo tipo è ***l'equazione della corda vibrante***). Anche la matematica francese **Marie-Sophie Germain** aveva saputo dare importanti contributi in questo campo.

Sonja morì all'età di soli 41 anni, a causa di un'affezione polmonare, probabilmente contratta nel corso di uno dei suoi numerosi viaggi. Un'amica ricorda che ella ebbe il presentimento della fine imminente visitando il cimitero monumentale di Staglieno, a Genova, il giorno di Capodanno del 1891.

Un noto storico della matematica italiano, in un discorso accademico tenuto nel 1901, diede, della movimentata esistenza di Sonja, una lettura tutta personale che mette in luce quanto forti fossero ancora, un secolo fa, le riserve nei confronti delle donne che intraprendevano una carriera scientifica.

"Il paragone di un'esistenza profondamente agitata e cosparsa di speranze infrante, quale è stata quella di Sofia Kowalewsky, con la vita di tante donne benedette e adorate, le quali nel seno della famiglia, o percorrendo strade meno ardue e pericolose, conseguirono quella pace che a lei venne perennemente negata e che con tanta parsimonia fu concessa alle donne illustri di cui tratteggiai la biografia, induce a domandarsi se la riga, il compasso e le tavole dei logaritmi non siano per avventura troppo gravi per le braccia femminili."

La migliore risposta è una frase di Sonja, che riassume tutto il senso della sua vita breve ed intensa:

"Penso che il mio destino sia di servire la verità nella scienza, ma anche di lavorare per la giustizia, aprendo alle donne nuove strade. Sono molto felice di essere nata donna, perché ciò mi dà la possibilità di lavorare allo stesso tempo per la verità e per la giustizia. Ma non è sempre facile perseverare."

I *Ricordi d'infanzia* di Sonja **Donne in matematica**

I *"Ricordi d'infanzia"* di Sonja Kowalewsky

Nella sua opera autobiografica *"Ricordi d'infanzia"* Sonja racconta dei suoi primi incontri con la matematica, che conobbe tramite Pietro, suo zio paterno. A questo era legata da un profondo affetto, oltre che da una grande ammirazione intellettuale.

"Quando era assillato da un'idea, ci pensava e ne parlava senza sosta. Dimenticando completamente che si stava rivolgendo a una bambina, spesso sviluppava davanti a me le teorie più astratte. È questo che mi affascinava: mi sentivo trattata da persona grande, e mi sforzavo di capire o, per lo meno, di darne l'impressione.
Benché mio zio non avesse mai studiato matematica, questa scienza gli incuteva un profondo rispetto. Ne aveva raccolto alcune nozioni in certi libri, e su di queste amava fare, in mia presenza, delle riflessioni ad alta voce. È stato lui, ad esempio, il primo a parlarmi della ***quadratura del cerchio****, degli* ***asintoti****, e se il senso delle sue parole mi rimaneva incomprensibile, esse colpivano la mia immaginazione, e mi incutevano, per la matematica, una sorta di venerazione, come per una scienza superiore, misteriosa, che apriva ai suoi iniziati un mondo nuovo e meraviglioso, inaccessibile ai comuni mortali. A proposito di queste prime nozioni sulla matematica, devo riportare un dettaglio curioso, che ha contribuito a sviluppare in me un grande interesse per questa scienza.*
Quando, per la prima volta, ci stabilimmo in campagna, bisognò riparare tutta la casa, e mettere delle nuove tappezzerie in tutte le stanze, e queste erano talmente numerose che la carta mancò per una di quelle destinate ai bambini. Bisognava farla arrivare da Pietroburgo: era lontano e non ne valeva la pena per una sola stanza; aspettammo l'occasione e, per un bel po' di anni, la camera restò incompiuta, con il muro semplicemente coperto da uno strato di carta. Per un caso fortunato, questa carta consisteva di fogli litografati delle lezioni d'Ostrogradski sul ***calcolo differenziale*** *ed* ***integrale****, che a suo tempo mio padre, in gioventù, aveva comprato. Questi fogli, fregiati di vecchie ed incomprensibili formule, attirarono ben presto la mia attenzione. Mi ricordo di aver passato intere ore, nella mia infanzia, davanti a quel muro misterioso, cercando di decifrare qualche frase isolata e di ritrovare l'ordine in cui quei fogli dovevano susseguirsi. Questa prolungata contemplazione quotidiana finì per imprimermi nella memoria l'aspetto esteriore di molte di quelle formule, ed il testo, per quanto incomprensibile in quel momento, lasciò nel mio cervello una profonda traccia.*

Diversi anni dopo, quando presi la mia prima lezione di calcolo differenziale, con un celebre professore di matematica di Pietroburgo, Alexandre Nicolaévitch Strannolioubsky, egli fu sorpreso della rapidità con cui coglievo tutte le sue spiegazioni, "come se le avessi sapute in anticipo", questa fu l'espressione di cui si servì. In effetti, nel momento in cui mi dava queste prime nozioni, io mi ricordai improvvisamente di aver visto tutto ciò sul muro della mia camera di bambina; e mi sembrò che il significato dei termini di cui si serviva il professore mi fosse familiare da molto tempo."

Emmy Noether (1882-1935)



Nata in una famiglia ebrea di solide tradizioni culturali, da bambina poteva vantare un'ottima preparazione umanistica ed artistica, ma, contrariamente a molti *enfant prodige* della storia della matematica, non sembrava possedere un ingegno particolarmente brillante.
Fu solo dopo aver conseguito, nel 1900, l'abilitazione all'insegnamento delle lingue straniere, che la giovane Amalie decise di cambiare strada, e seguire le orme del padre Max, un noto matematico tedesco.
Studiò, anche se in maniera non ufficiale, presso varie università della Germania, che all'epoca erano ancora precluse alle donne: fu ad Erlangen, Norimberga, e infine a Göttingen, dove sarebbe entrata in contatto con **Hilbert** e **Klein**. Si laureò nel 1903, conseguì il dottorato nel 1907, ma solo nel 1922 le fu offerta una modesta posizione accademica a Göttingen. Ricevette numerosi riconoscimenti da più parti d'Europa: tra l'altro fu chiamata a far parte del Circolo Matematico di Palermo. Nell'anno accademico 1928-29 fu invitata a Mosca. Nel 1933 la promulgazione delle leggi razziali costrinse Emmy, che, tra l'altro, aveva manifestato simpatie per il socialismo, a fuggire negli Stati Uniti. Qui insegnò in due diverse università, in un college femminile della Pennsylvania e al prestigioso Institut for Advanced Studies di Princeton.

Grazie ad un suo importante contributo alla **teoria della relatività**, Emmy Noether fu definita da **Einstein** "*il più grande genio creativo della matematica prodotto fino ad oggi da quando l'istruzione*

superiore è stata aperta alle donne". Ciononostante, e malgrado il personale appoggio di **Hilbert**, non le fu permesso di avanzare nella carriera accademica: finché restò in Germania, non poté mai diventare professore. Ciò non le impedì però di circondarsi di allievi e fondare una scuola di algebristi, che vanta oggi un grande numero di eredi.

Emmy Noether è passata alla storia come la fondatrice di quella branca della moderna algebra astratta che è detta ***teoria degli anelli e degli ideali,*** ed alla quale ella dedicò la maggior parte delle sue ricerche. Questa teoria ha la sua lontana origine nell'idea, introdotta da **Galois**, di svincolare la risoluzione delle equazioni algebriche dai calcoli aritmetici "caso per caso" per imbrigliarla in strutture algebriche astratte, più facilmente controllabili: essa "*ci insegna a pensare in termini più generali e quindi, più semplici",* come dirà Alexandroff, ricordando Emmy Noether, in un discorso alla Società Matematica di Mosca. La scienziata tedesca si ispirò per tutta la vita a questo motto: *"Tutti i legami tra numeri, funzioni ed operazioni diventano trasparenti, passibili di generalizzazione e veramente fecondi solo nel momento in cui vengono liberati dai loro oggetti particolari e ricondotti a relazioni concettuali generali."*

La geometria e l'algebra

Gli studi di Emmy Noether muovono i primi passi dagli ***anelli di polinomi***: un esempio è l'insieme di tutti i polinomi in una indeterminata a coefficienti reali, tra i quali si considerano le usuali operazioni di somma e prodotto. Gli *ideali* di questo anello sono i suoi sottoinsiemi formati da tutti i polinomi che sono multipli di un certo polinomio fissato. Le proprietà del polinomio possono essere riformulate mediante le proprietà dell'ideale corrispondente.

Il discorso si estende, sia pure con qualche complicazione in più, agli anelli di polinomi in due o più indeterminate. L'insieme dei punti *(x,y)* del **piano cartesiano** reale che sono soluzioni di un'equazione algebrica

$$F(x,y) = 0$$

è, salvo casi particolari, una curva. Questa constatazione sta alla base della **geometria analitica** di **Descartes**. Il matematico francese studiava il polinomio *F(x,y)* per ricavarne conclusioni sull'oggetto geometrico da esso definito.

Più in generale, nello spazio reale a *n* dimensioni si possono studiare i luoghi dei punti $(x_1,\ldots,x_n)$ che sono soluzioni di un sistema di *n-1* equazioni polinomiali della forma

$$F(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

Questi luoghi, di cui le curve del piano sono un caso particolare, sono detti ***varietà algebriche***. D'altra parte i polinomi del sistema di equazioni definiscono, nell'anello dei polinomi in *n* indeterminate e coefficienti reali, un certo ideale. Il punto di partenza della geometria algebrica è l'idea di caratterizzare le proprietà geometriche delle varietà mediante le proprietà algebriche del corrispondente ideale di polinomi.

I teoremi fondamentali della geometria algebrica portano il nome di **Hilbert**. Tuttavia è ad Emmy Noether che si deve l'attuale veste algebrica astratta della teoria. Nel corso del Novecento la teoria degli anelli di polinomi si è rapidamente evoluta come disciplina autonoma, arricchendosi di oggetti più generali, spesso privi di immediate correlazioni con la geometria: è così nata l'***algebra commutativa***, che studia, in generale, gli anelli commutativi, ossia quelli nei quali il prodotto rimane invariato cambiando l'ordine dei fattori. Questa teoria vede, tra i suoi protagonisti, i cosiddetti ***anelli noetheriani***, di cui gli anelli dei polinomi costituiscono solo una classe particolare. Gli studi di Emmy Noether si estesero anche agli anelli non commutativi.

I suoi metodi innovativi permisero anche il superamento e la generalizzazione della teoria dei determinanti nella risoluzione dei sistemi di equazioni.

A proposito del ruolo di Emmy Noether nello sviluppo della matematica moderna, Einstein scrisse, in articolo commemorativo apparso sul New York Times del 3 maggio 1935:

"Nel regno dell'algebra, che ha tenuto impegnati per secoli i matematici più dotati, ella scoprì metodi che sono risultati di enorme importanza nello sviluppo dell'attuale generazione di giovani matematici. La matematica pura è, in questo modo, la poesia delle idee logiche. Si è alla ricerca delle più generali idee di operazione che mettano insieme, in una forma logica ed unitaria, il maggior numero possibile di relazioni formali. In questo impegno verso la bellezza logica abbiamo scoperto

che le formule spirituali sono necessarie per penetrare più a fondo nelle leggi della natura."

È sicuramente merito di Emmy se oggi le nozioni e le tecniche algebriche si sono diffuse in vari campi della matematica.

Ecco alcuni ricordi di matematici che furono suoi allievi e collaboratori, in Europa e negli Stati Uniti.

Alexandroff: *"Così era Emmy Noether, la più grande delle donne matematiche, una grande scienziata, un'incantevole insegnante, e una persona indimenticabile… è vero, **Weyl** ha detto che "le Grazie non vennero alla sua culla", e aveva ragione, se si pensa alla ben nota pesantezza del suo aspetto. Ma qui Weyl parla di lei non solo come una grande accademica, ma anche come una grande donna. E lo era – la sua femminilità traspariva dal lirismo fine e gentile con cui si dedicava, con grande slancio, ma senza mai essere superficiale, alle persone, alla sua professione, e agli interessi dell'umanità intera. Amava la gente, la scienza, la vita, con tutto il calore, tutta l'allegria, tutto l'altruismo e tutta la tenerezza di cui un'anima profondamente sensibile – e femminile – è capace."*

Professor Quinn*: "Adorava camminare. Era capace di andare a fare una scampagnata con i suoi studenti il sabato pomeriggio. Durante queste gite si lasciava prendere a tal punto dalla conversazione matematica da dimenticarsi del traffico, tanto che i suoi studenti dovevano proteggerla."*

B. L. van der Waerden: *"Il suo modo di pensare è in effetti diverso da quello degli altri matematici. Noi tutti ci appoggiamo volentieri a figure e formule. Per lei questi strumenti erano privi di valore, più fastidiosi che altro. A lei premevano esclusivamente i concetti, non la visualizzazione né il calcolo. Le lettere tedesche, che schizzava frettolosamente alla lavagna o sulla carta, erano per lei rappresentanti di concetti, non oggetti di un calcolo più o meno meccanico.*
Questa sua impostazione era una delle principali cause della difficoltà delle sue lezioni. Non aveva doti didattiche, e il suo commovente sforzo di chiarire le sue parole, ancora prima di aver finito di dirle, con aggiunte pronunciate in tutta fretta, produceva l'effetto contrario. E tuttavia: quanto incredibilmente grande era, malgrado tutto, l'impatto della sua esposizione!! La piccola schiera di fedeli uditori, composta per lo più da alcuni studenti degli ultimi anni ed altrettanti docenti ed ospiti esterni, doveva sforzarsi enormemente per stare al passo. Se

però ci riusciva, imparava più che dal collega più impeccabile. Non venivano mai esposte teorie pronte, ma quasi sempre quelle che erano state appena concepite. Ognuna delle sue lezioni era un programma. E lei era la prima ad essere contenta, quando erano i suoi allievi a metterlo in pratica."

Donne in matematica

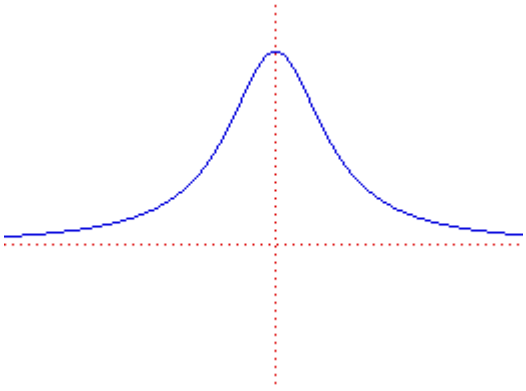
La versiera dell'Agnesi

Questa curva, che porta il nome della matematica italiana **Maria Gaetana Agnesi**, fu studiata, prima che da quest'ultima, da **Fermat** e da **Guido Grandi** (1671-1742), professore all'Università di Pisa. Molto è stato scritto sull'origine del suo singolare nome. Secondo l'interpretazione più attendibile, sarebbe l'abbreviazione di "*curva con seno verso",* ossia definibile tramite la funzione *1- cos θ:* così l'aveva chiamata il Grandi. Pare meno credibile, invece, la versione che la vorrebbe derivata dalla parola latina *versoria* nel significato di "corda che gira la vela", di cui, secondo alcuni, potrebbe ricordare la forma. È completamente destituita di fondamento, infine, la tesi che *"seno verso"* possa riferirsi alla concavità della curva.
Poiché *versiera*, secondo un'accezione medioevale, significa anche "diavolessa, strega", nei paesi anglofoni la curva divenne nota come *"witch of Agnesi".* In un mondo accademico ostile alle donne, l'equivoco linguistico fornì lo spunto per ironie facilmente immaginabili.

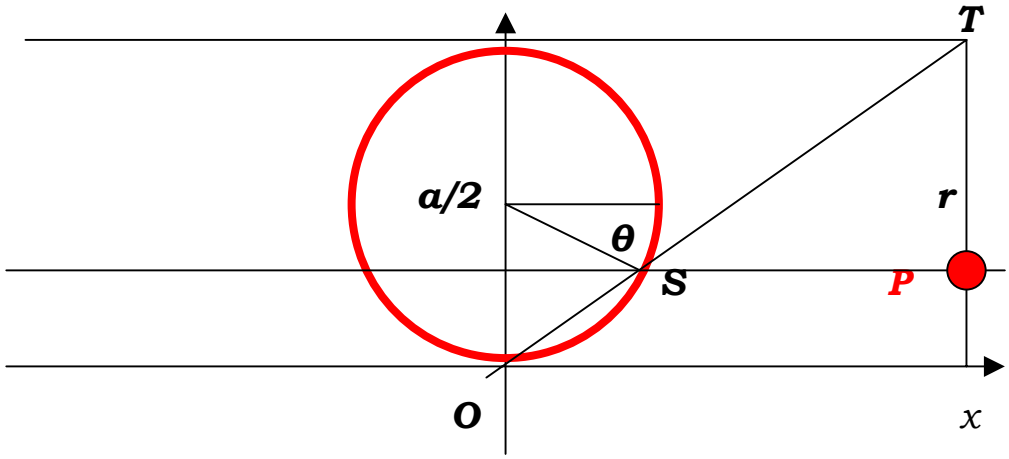
L'equazione cartesiana della versiera è

$$(a^2 + x^2)\, y = a^3,$$

ove a è una costante positiva arbitraria.



Questa curva può essere costruita punto per punto nel modo seguente. Si tracci innanzitutto nel piano cartesiano la circonferenza di centro il punto $(0, a/2)$ e diametro a. Si conduca, dal generico punto x dell'asse delle ascisse la parallela r all'asse delle ordinate. Questa incontrerà nel punto T la retta di equazione $y = a$.



Si tracci quindi la retta congiungente l'origine con il punto *T:* questa intersecherà la circonferenza in un punto che chiameremo *S*. Il punto *P* d'intersezione con *r* della parallela all'asse delle ascisse passante per *S* è un punto della versiera.

Guido Grandi aveva osservato che, detta *y* l'ordinata di *P*, si ha

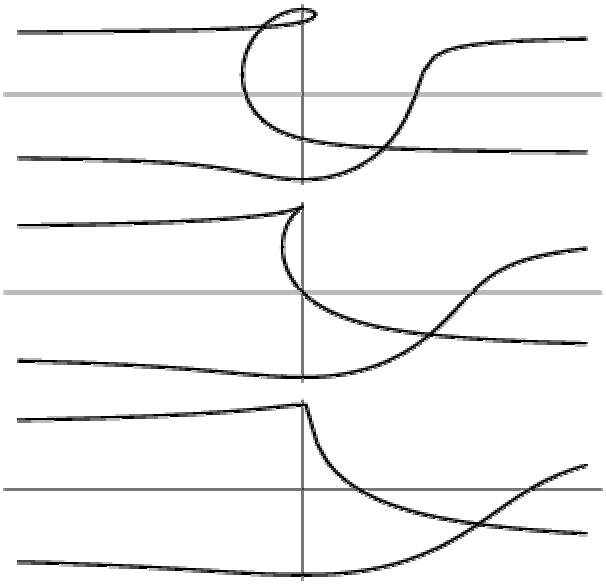
$$y = a/2\ (1 - \cos\theta),$$

da cui il nome dato alla curva.

Albrecht Dürer (Norimberga, Germania 1471-1528)



Questo notissimo pittore tedesco si dedicò da autodidatta allo studio della matematica e dell'architettura. Scrisse un trattato intitolato ***Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*** (1525), dedicato alle costruzioni con riga e compasso, di cui fu maestro **Euclide**. Da molte sue opere artistiche, disegni ed incisioni, emerge l'attenzione per la **prospettiva** e per **le proporzioni del corpo umano**. Il suo interesse per la geometria produsse una nuova curva, da lui detta *muschellini*, ossia "conchiglia", oltre ad un metodo approssimato per la **trisezione dell'angolo** con riga e compasso.



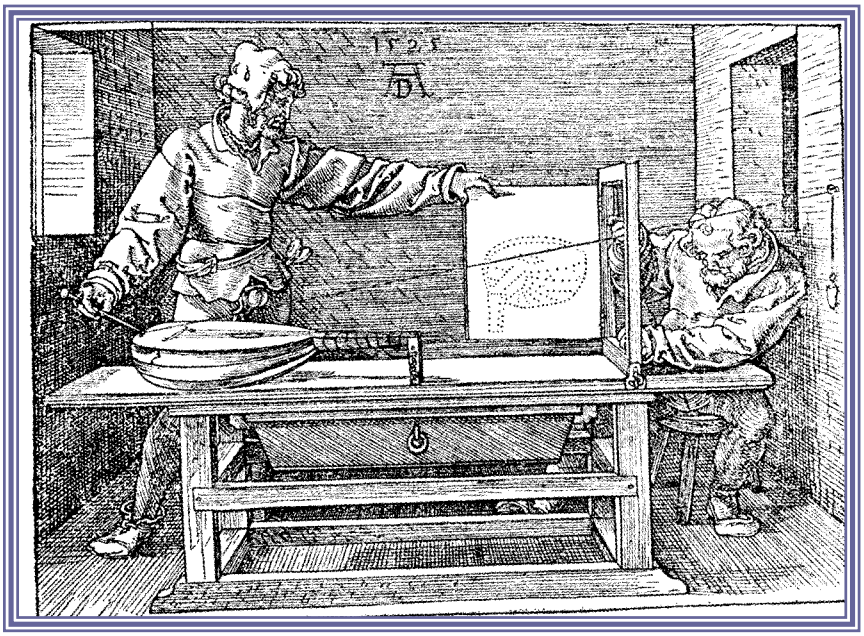
Tre versioni della conchiglia di Dürer

Costruzione della curva "muschellini"
Un'epicicloide
Le coniche disegnate da Dürer

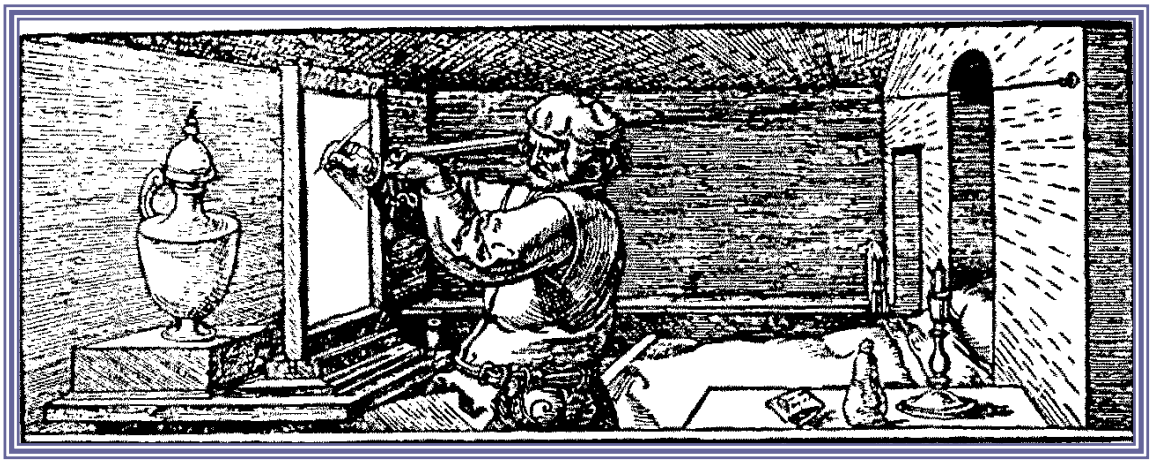
Melanconia

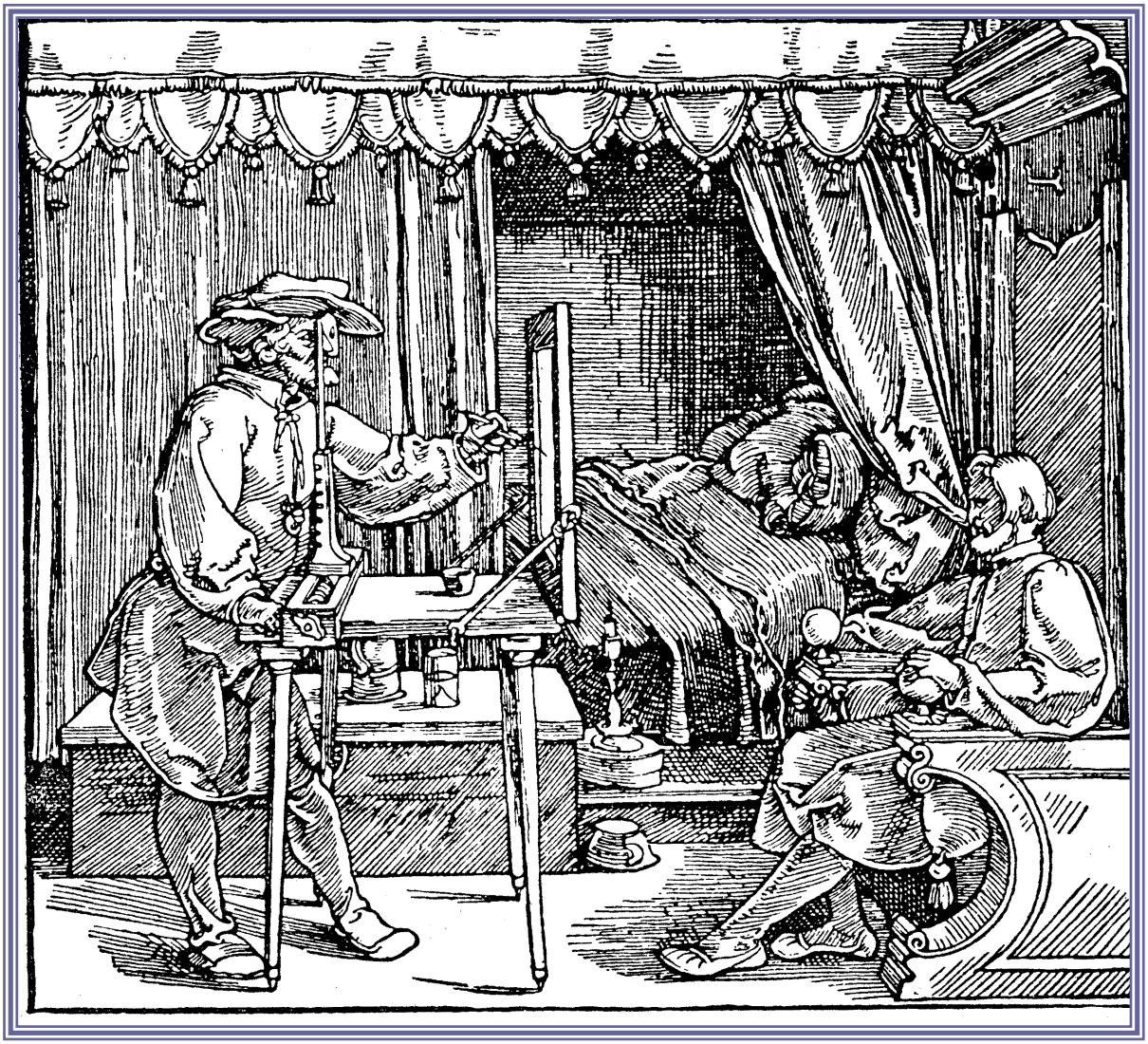
San Gerolamo

Gli studi di Albrecht Dürer – La prospettiva









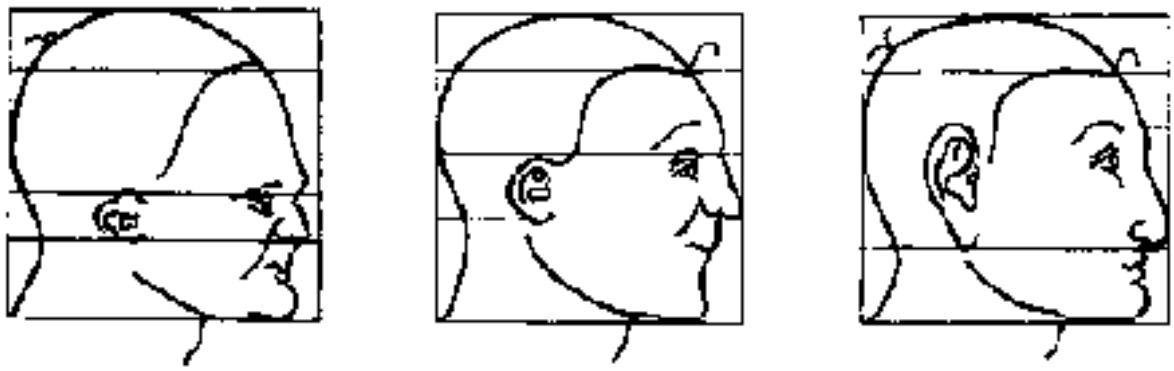
La prospettiva nelle opere di Albrecht Dürer:
Melanconia
San Gerolamo

La prospettiva secondo Leon Battista Alberti
La prospettiva secondo Torricelli

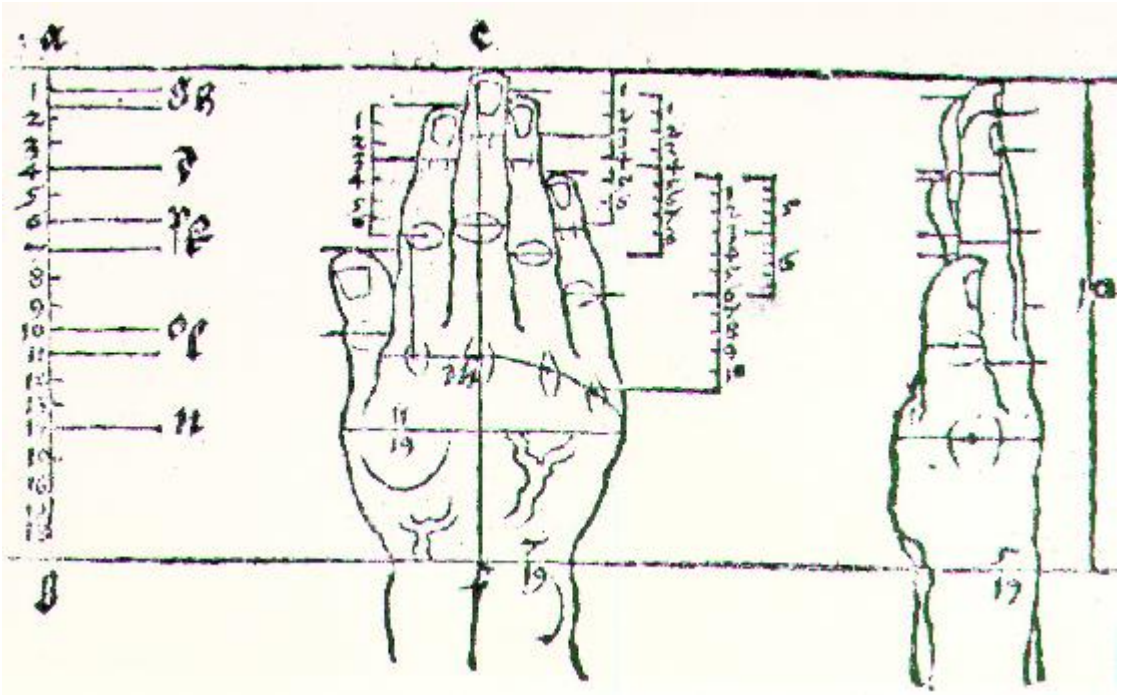
Studio prospettico di un calice (Paolo Uccello)
Studio prospettico di un toro (Piero della Francesca)

Gli studi di Albrecht Dürer – Il corpo umano

Le proporzioni del viso

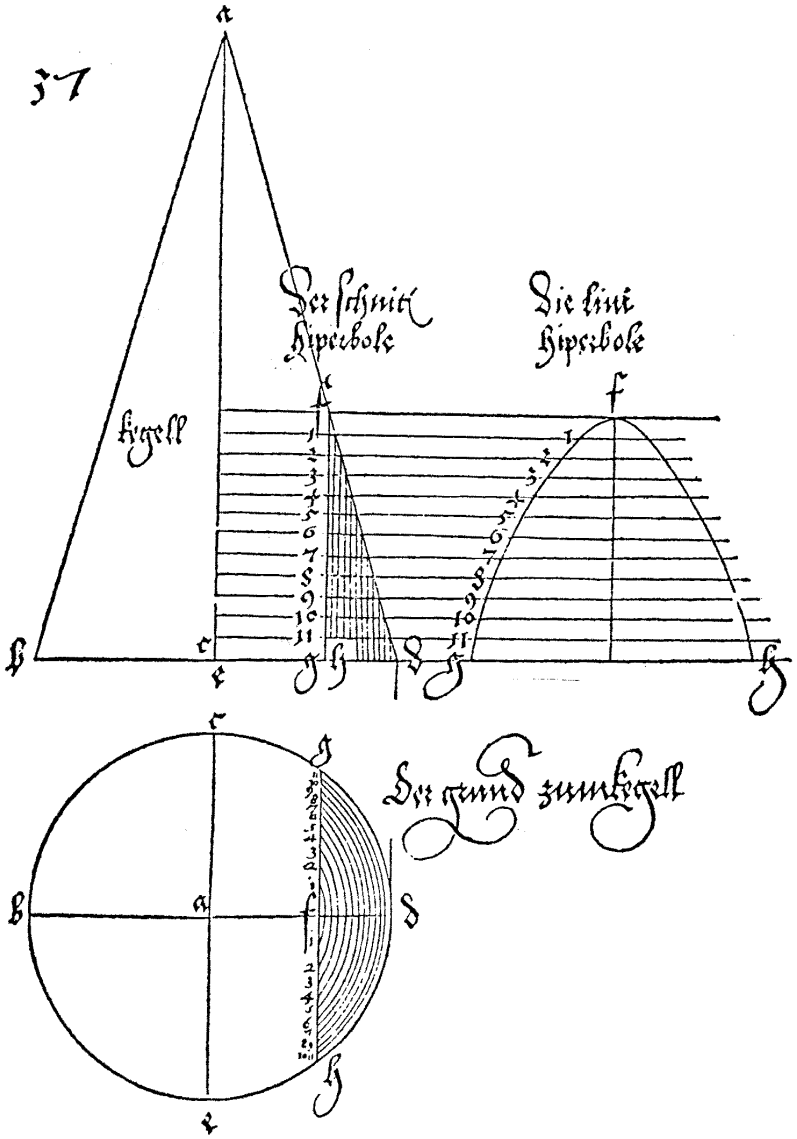


Le proporzioni della mano



Le proporzioni del corpo umano

ſeyten abgeſchnyden ſind worden/vnd drag ſie zů derauf rechten lini/ f/vnd kum mit zal auf zal/ vnd puncktir die breyten zů beyden ſeyten der aufrechten/f/ neben dem kegel von der zal. 1. herab byß auf/g/ h/ Darnach zeuch die gabellini Hiperbole/ vonn punckt zů punckt/ wie ich das hie vnden hab aufgeryſſen/ſo eygentlich/ ob ſchon keyn ſchryft dabey wer/ vermeint ich/ diß ſolt alles durch ſehen käntlich ſeyn.

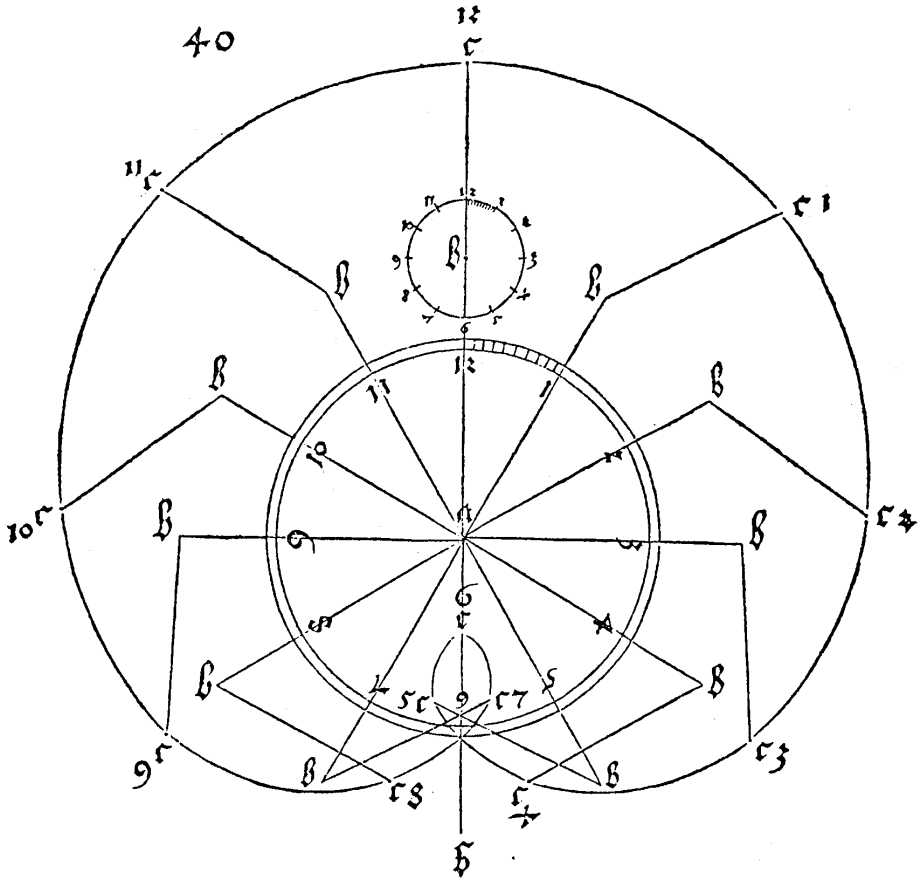


Wer will ich ein lini zyehen/die in mancherley ſachen zů brauchenn iſt/die mach ich alſo/ Ich reiß eyn lini oberzwerch/der anfang ſey.a.vnd end.b.vnd heb nach dem.a. an zů zelen/ vñ ſetz auf diſer lini.16. punckten in gleicher weiten nach eynander/ doch das zwiſchen dem end.b.

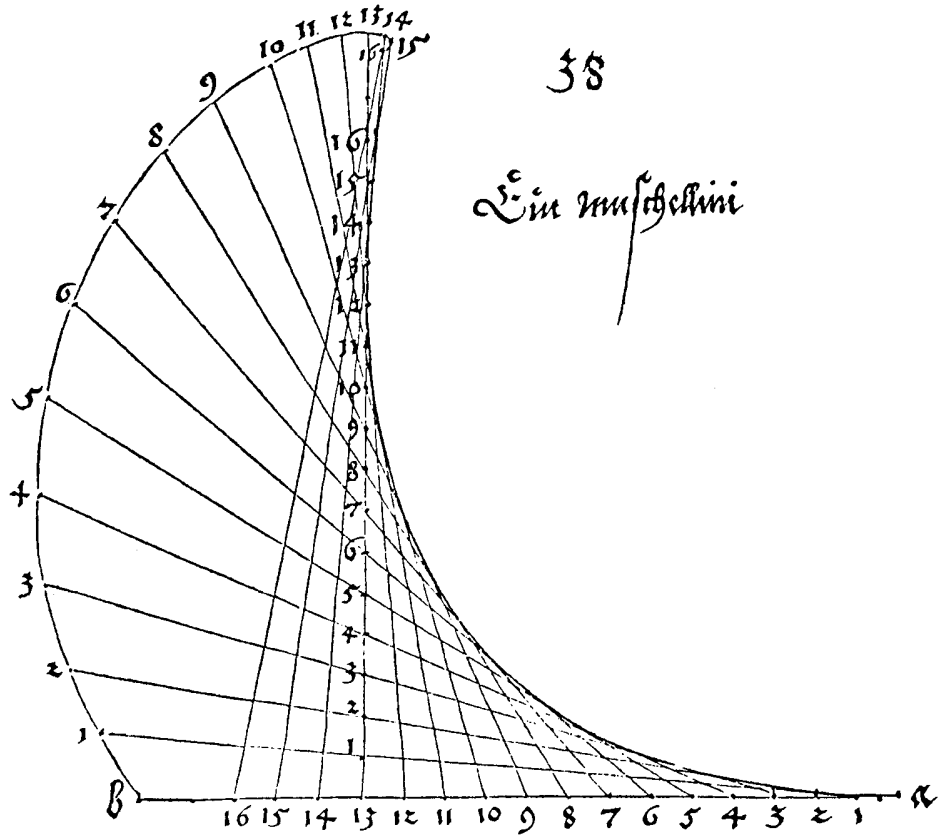
Le sezioni coniche
Albrecht Dürer

Un'epicicloide disegnata da Albrecht Dürer

Ecco il disegno di un'**epicicloide**, tratto da un'opera del pittore tedesco **Albrecht Dürer**. È la traiettoria descritta da un punto di una circonferenza che ruota senza strisciare all'esterno di un'altra circonferenza uguale. La costruzione è effettuata con riga e compasso, e si avvale di segmenti ausiliari: la loro disposizione fa pensare alle zampe di un ragno, ragion per cui Dürer chiamò la curva *"linea del ragno"*.



vnd dē puncktē 16 ein trum vngeferlich vber bleib/Darnach ſetz ich ein aufrechte lini/auf die zwerch lini.a.b.in den punckten.12.ſo lang die zwerch lini.a.16.iſt/ vnd puncktir ſie auch mit diſen zalen/vnd zel von vndē ich vberſich/Darnach nym ein richtſcheydt/vñ ſtich darauf die leng.a/b.vnd ſetz das mit dem ein end/auf die zwerch lini.a.b.in den punckten .1. vnd leg es in der aufrechten in den punckten.1. vnnd wo das ander end des richtſcheitz hyn trift/da ſetz ich auch ein puncktenn.1.Darnach leg ich das richtſcheid mit dem ein end auf der zwerch lini.a.b.in den punckten.2.vnd erhebs an der aufrechten lini in den punckten.2.wo dann das ander end des richtſcheitz hintrift/ dahyn ſetz ich auch ein punckten 2.Alſo thů ich im durch die gantzē zal der zwerch vnd aufrechten lini/ biß das ich im durchſchliefen zů 16 zaln kom/Darnach zeůch ich diſe muſchellini vonn punckt zů punckt/ wie ich dann hie vnden hab aufgeryſſen/diſe lini iſt in mancherley weis zů verkeren.



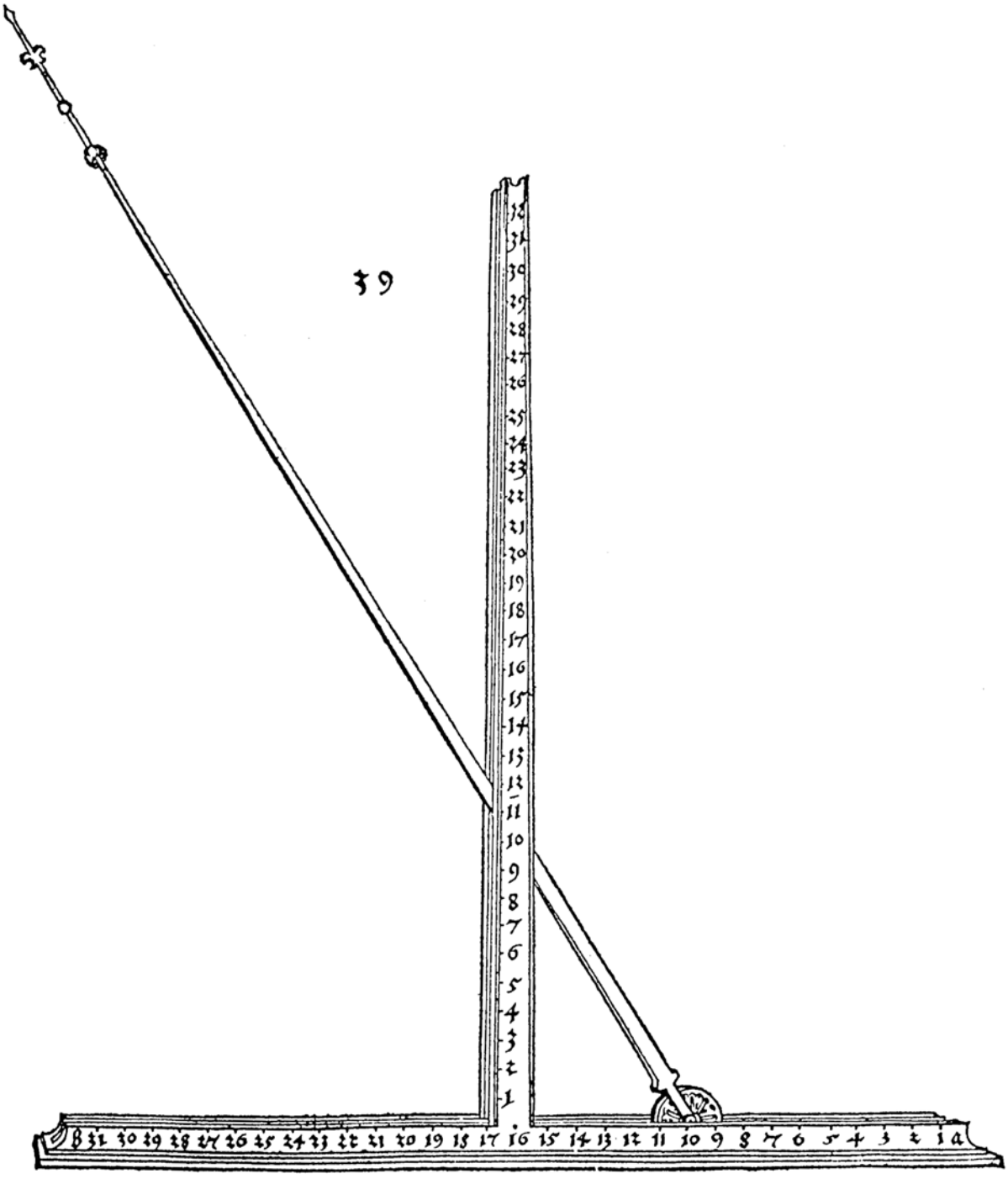
58

Ein muſchellini

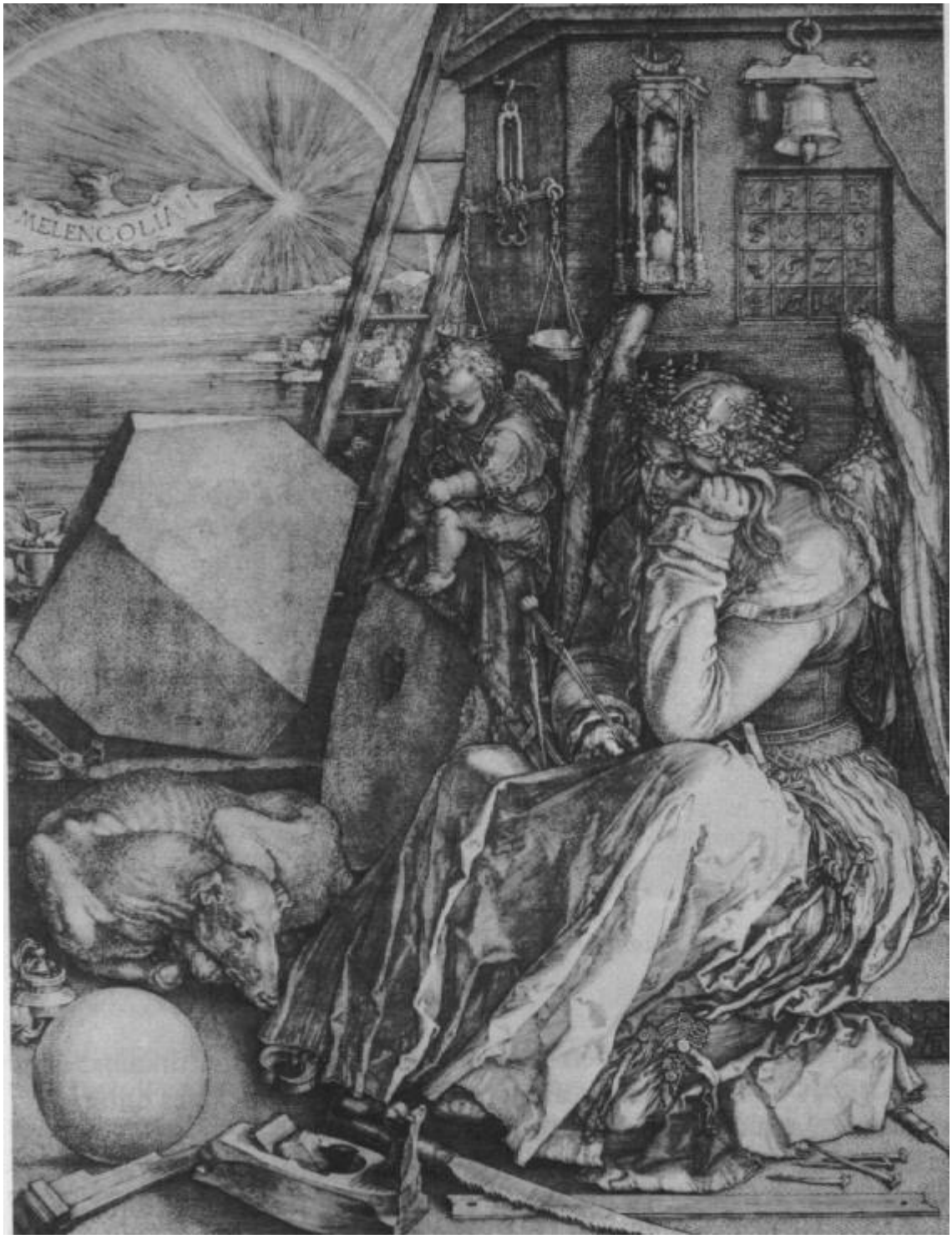
ZV diſer egemachten lini mag man ein werckzeůg zů richten/ damit man ſie machen kan leichtiglich/ nemlich alſo/ Mach ein viereckt holtz ſo lang du ſeyn bedarfſt vberzwerch/ des anfang ſey vom.a.hinden.b.darein ſtoß oben ein tiefe niet/ das etwas darinn hyn vnd her gefürt můg werden/vnd theyl das holtz/mit punckt vnd zalen in ſo vil teyl du wilt/ vnd heb die zal bey dem.a. an/Darnach mach in der mitt an ytlicher ſeyten diſer zwerch laden/zwey aufrechte dünne richtſcheytlein/ſo lang das zwerch holtz oder ladē iſt/vnd das ſie eng bey einander ſten/vnd puncktir ſie gleich mit der zal/als das zwerch holtz oder die ladē puncktirt iſt/vñ heb die zal vnden an/Darnach mach ein feins lentzlein/ſo lang oder kürtz du das habē wilt/vñ mach im zůhynderſt ein vnblaufetz redlein/ das in die mitt/der niet/in der zwerch laden.a.b.gerecht ſey/darines hin vnd her geen můg/Darnach ſcheůb das lentzlein zwiſchen die zwey richtſcheitlein hinauß gegen dem teyl.b.vñ ſetz das hynden oder vnden mit dem redlein in die mitt des zwerch holtz/gegē dem.a.in den erſtē punckten.1.vñ leg das lentzlein zwiſchē den holtzern auch nider in den vnderſtē punckte.1. vnd waň du daň mit dem redlein vnden gegen dem richtſcheyt ferſt/vñ ſo weytdu hinein ferſt/ſo weyt far allweg mit dem lentzlein zwiſchē dein richtſcheitlein vberſich/biß das du vnden mit dem redlein durch die zwey richtſcheytlein vnd gar ans end kumſt/

Lo strumento per costruire la “muschellini”

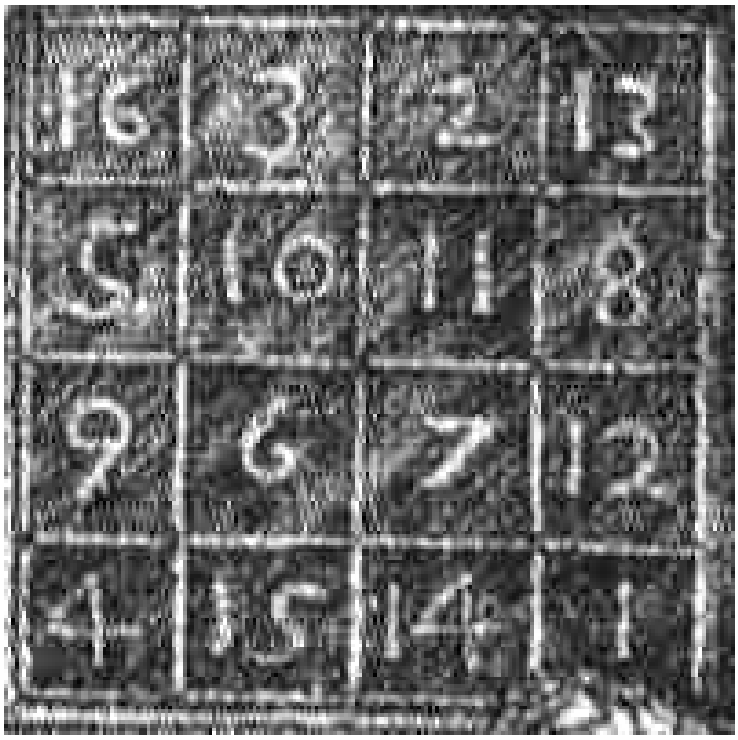
wirdet dir das lentzlein vorn mit der ſpitz diſe lini furen/wie ſie werdenn ſoll / Diſe mein meinung hab ich nachfolget aufgeryſſen.



D



Il quadrato magico nell'opera



I quadrati magici



La matematica nell'Antico Egitto

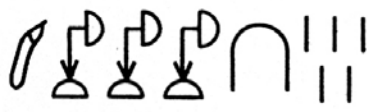
Le informazioni che si possono ricavare dalle pietre tombali e dai calendari sono limitate, e per altro frammentarie e ristrette al solo ambito cerimoniale e astronomico. Per fortuna esistono numerosi papiri egiziani che, miracolosamente, hanno resistito alle ingiurie del tempo per un periodo di tre millenni e mezzo, e sono giunti fino a noi. I più noti sono il **papiro di Rhind** ed il **papiro di Mosca**.

La numerazione egiziana

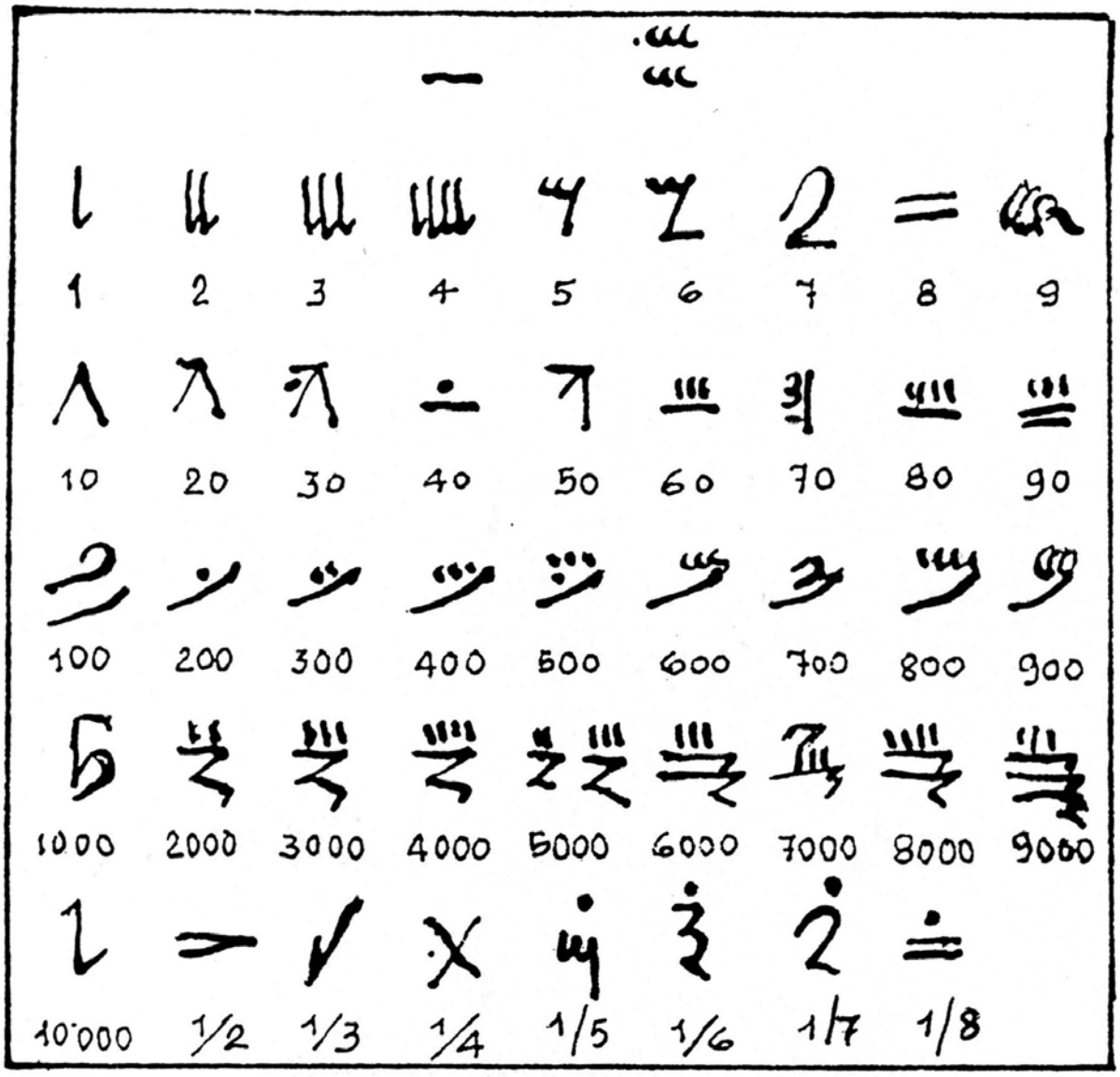
In origine, intorno al 3400 a.C., il sistema di numerazione, ***geroglifico***, era basato sul *raggruppamento additivo*: esistevano particolari simboli per le unità e per le potenze di dieci fino alla sesta, ed ogni numero era scritto accostando tanti segni quante erano le corrispondenti potenze di dieci necessarie a formare il numero stesso. In questo la numerazione egizia è simile alla **numerazione babilonese**, che, però, era basata sulle potenze di *60*.

1		**un bastone verticale, o un'asta**
10		**uno zoccolo di cavallo, o un giogo**
100		**un rotolo, o una corda arrotolata**
1000		**un fiore di loto**
10000		**un dito puntato**
100000		**un pesce o un girino**
1000000		**un uomo sorpreso, o un dio che regge l'universo**

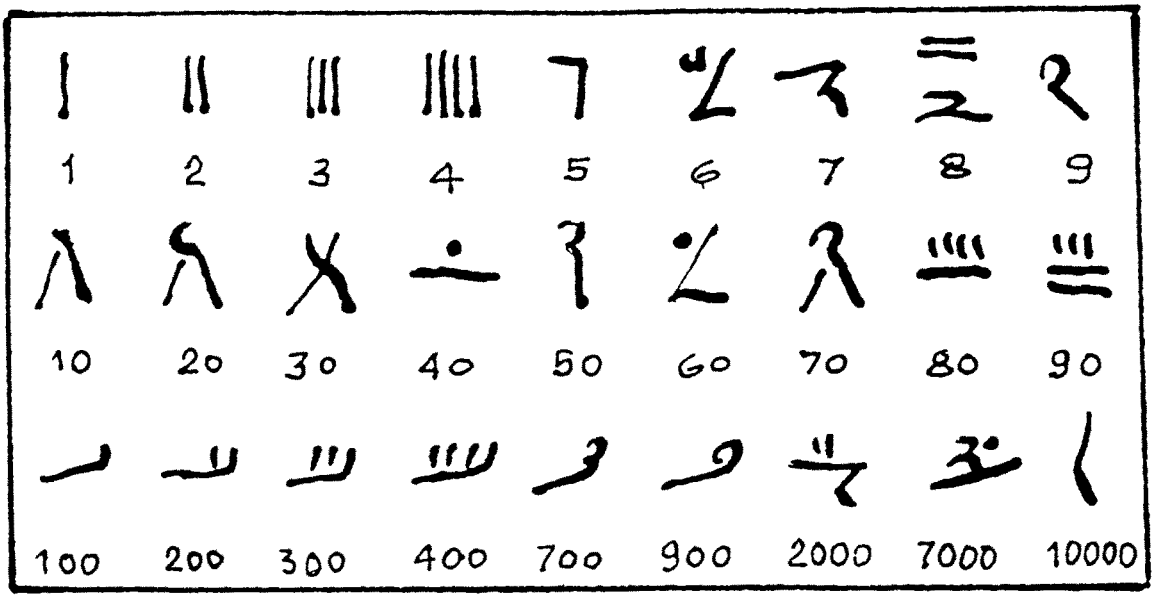
Ecco un esempio di scrittura geroglifica:

13015 = 1×10000 + 3×1000 + 1×10 + 5×1 = 

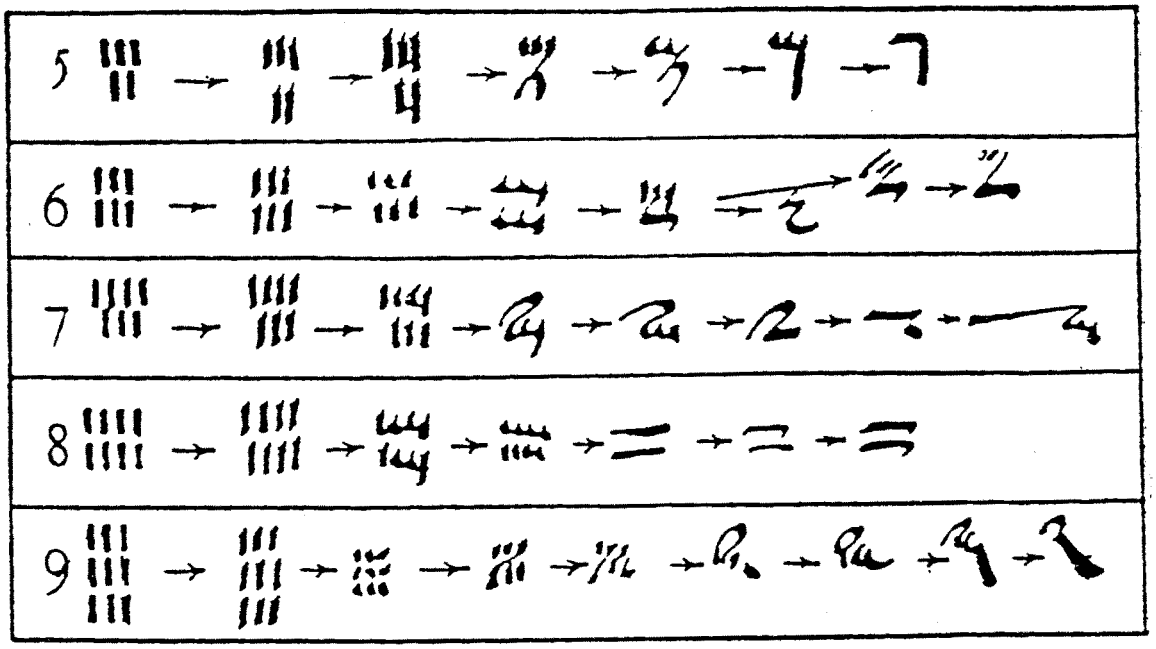
Col tempo la numerazione geroglifica fu soppiantata da sistemi di scrittura più rapidi: il primo fu lo stile ***ieratico*** - così detto perché usato principalmente dai sacerdoti - da cui derivò lo stile ***demotico***. Andò quindi perso il carattere decimale della numerazione.



Numerali ieratici



Numerali demotici



Passaggio dai numerali geroglifici ai numerali demotici

L'aspetto più singolare dell'**aritmetica egizia** era sicuramente il **calcolo con le frazioni**. Tra queste venivano considerate quasi esclusivamente quelle con numeratore unitario, che erano indicate dal simbolo corrispondente al denominatore sormontato dal geroglifico



che significava "parte", oppure da un puntino, nella scrittura ieratica.

A volte per ½ si usava il simbolo  oppure , probabilmente ottenuto dimezzando il simbolo precedente. Alla frazione *2/3* era riservato un ruolo privilegiato. Essa aveva un nome particolare *(due parti)* e veniva indicata con un simbolo speciale:



in geroglifico

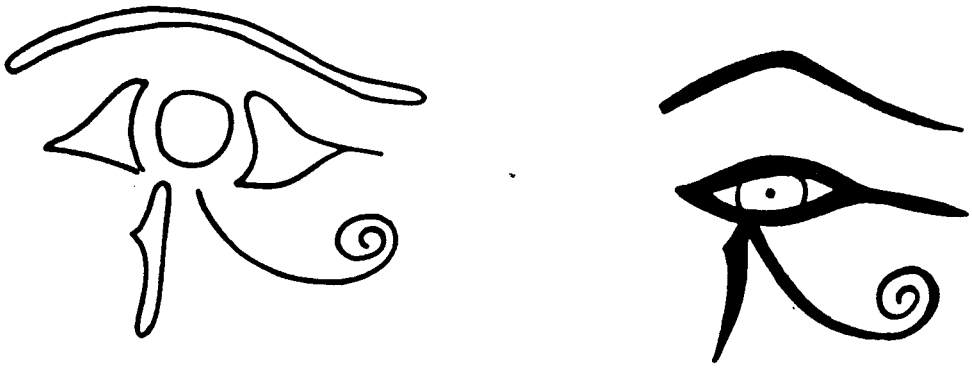


in ieratico

Nello stile ieratico anche la frazione ¼ veniva scritta in modo particolare, con il segno ×, che rende efficacemente l'idea di una partizione in quattro.

Segni particolari venivano impiegati anche per indicare le frazioni ottenute per dimezzamenti successivi dell'***eqat*** (o *hekat*), un'unità di misura del volume, corrispondente a circa 5 litri. Questi segni componevano l'immagine stilizzata dell'occhio del dio Horus.





Il papiro di Rhind

Storia

Questo **papiro** è anche noto come **papiro di Ahmes**, dal nome dello scriba che lo trascrisse verso il 1650 a.C. da un originale risalente al Regno Medio, e composto fra il 2000 ed il 1800 a.C.. Si tratta del documento egizio a carattere matematico più esteso: è largo circa 30 cm e lungo 5,46 m. Il papiro fu acquistato nel 1858 in una città balneare sul Nilo da un antiquario scozzese, tale Henry Rhind, da cui esso prese il nome. Il primo a farlo conoscere, mediante la pubblicazione in facsimile del testo originale ieratico, la trascrizione in geroglifici e la versione letterale tedesca, fu Eisenlohr nel 1877.
Il papiro si trova attualmente al British Museum di Londra, ad eccezione di alcuni frammenti, conservati presso il museo di Brooklyn.

Contenuto

Pare che questo documento fosse un testo di carattere didattico, orientato alle applicazioni pratiche. Secondo alcuni si tratta di un libro scolastico, secondo altri del taccuino di un allievo. Esso contiene le soluzioni di 85 problemi matematici ricorrenti nella vita quotidiana degli uomini d'affari, degli agrimensori, dei costruttori. Probabilmente le regole di calcolo che vi vengono illustrate provenivano dall'esperienza del lavoro. Mancano infatti le dimostrazioni generali, e con tutta probabilità gli Egizi non possedevano una struttura logica deduttiva basata su assiomi. In ogni caso Ahmes attribuisce al documento un'importanza fondamentale, come emerge dalla scelta del **titolo**. Ciò che più di tutto fa pensare che il papiro fosse destinato a giovani studenti è la presenza di indovinelli e giochi matematici, come il **Problema 79**, sulla somma di una progressione geometrica di ragione 7, che cita *"sette case, 49 gatti, 343 topi, 2401 spighe di farro, 16807 misure di grano."* Questo problema venne riportato nel 1202 da **Fibonacci** nel suo ***Liber abaci*** nella forma seguente, che traduciamo dal latino:

"Sette vecchiette vanno a Roma,
delle quali ognuna ha sette bastoni,
ognuno dei quali regge sette sacchetti,
in ognuno dei quali sono sette pagnotte,
in ognuna delle quali sono sette coltelli,
ognuno dei quali ha custodie sette.
Quant'è la somma delle cose dette?"

L'aritmetica

La prima parte del papiro riguarda il calcolo con le **frazioni**. Gli Egizi non ne conoscevano la nozione in generale, ed i loro calcoli coinvolgevano solo pochi tipi di frazioni: inspiegabilmente preferivano maneggiare le frazioni dell'unità, cui cercavano di ricondurre tutte le altre. Fanno eccezione la frazione *2/3*, alla quale avevano riservato un particolare simbolo, e certe altre frazioni della forma *n/(n+1),* ossia i complementi delle frazioni unitarie, che talvolta venivano indicati con segni speciali.

Il papiro si apre con una **tabella** in cui vengono riportate scomposizioni di $2/n$ nella somma di frazioni unitarie per tutti i valori di n dispari compresi fra *5* e *101*. Una siffatta decomposizione è, in effetti, possibile per una qualunque frazione, ed in infiniti modi diversi: lo dimostrò Fibonacci, che, nel suo *Liber Abaci*, propose anche un algoritmo di risoluzione.

Segue una tabella in cui le frazioni *n/10*, per $n = 1,\ldots,9$, vengono scomposte nella somma di frazioni unitarie e *2/3*. Da notare che la scomposizione proposta per *7/10* non è *1/2 + 1/5*, ma *2/3 +1/30*. La predilezione per *2/3* era spinta al punto tale che per calcolare la terza parte di un numero se ne determinavano prima i due terzi, e poi li si sottraeva dal numero stesso.

I **Problemi 1-6** del papiro riguardano l'applicazione della seconda tabella ad un problema di banale quotidianità: la spartizione di una, due, sei, sette, otto e nove pagnotte tra dieci uomini.

L'operazione aritmetica principalmente usata dagli Egizi era l'**addizione**. Le nostre operazioni di moltiplicazione e divisione venivano eseguite mediante successivi raddoppi o ***"duplicazioni"***. Ad esempio, ecco come veniva calcolato il prodotto $19 \cdot 69$:

$69 + 69 = 138$
$138 + 138 = 276$
$276 + 276 = 552$
$552 + 552 = 1104$

$1104 = 16 \cdot 69$, ma $19 = 16 + 2 + 1$, dunque
$19 \cdot 69 = 1104 + 138 + 69 = 1311$.

Il papiro contiene anche regole per la **moltiplicazione di frazioni**

unitarie. Il **Problema 13** riguarda il prodotto di *1/16 + 1/112* e *1 + 1/2 + 1/4*. Il metodo impiegato permette di trovare il risultato esatto, cioè *1/8*.
La **divisione** veniva eseguita mediante duplicazioni successive del divisore. Ecco come viene risolto il **Problema 70**, che chiede di trovare il quoziente di *100* e *7 + 1/2 + 1/4 + 1/8:*

2 · (7 + 1/2 + 1/4 + 1/8) = 15 + 1/2 +1/4
2 · (15 + 1/2 +1/4) = 31 + 1/2
2 · (31 + 1/2) = 63,

dunque

63 = 8 · (7 + 1/2 + 1/4 + 1/8) (*)

Inoltre si sa che
2/3 · (7 + 1/2 + 1/4 + 1/8) = 5 + 1/4.

Pertanto, riassumendo:
(8 + 4 + 2/3) · (7 + 1/2 + 1/4 + 1/8) = 63 + 31 + 1/2 + 5 + 1/4 =
99 + 3/4 = 100 - 1/4.

A questo punto interviene un ingegnoso artificio: dalla (*) si deduce subito che

1/4 = 2/63 · (7 + 1/2 + 1/4 + 1/8).

Dalla prima tabella del papiro si ricava *2/63 = 1/42 + 1/126*.

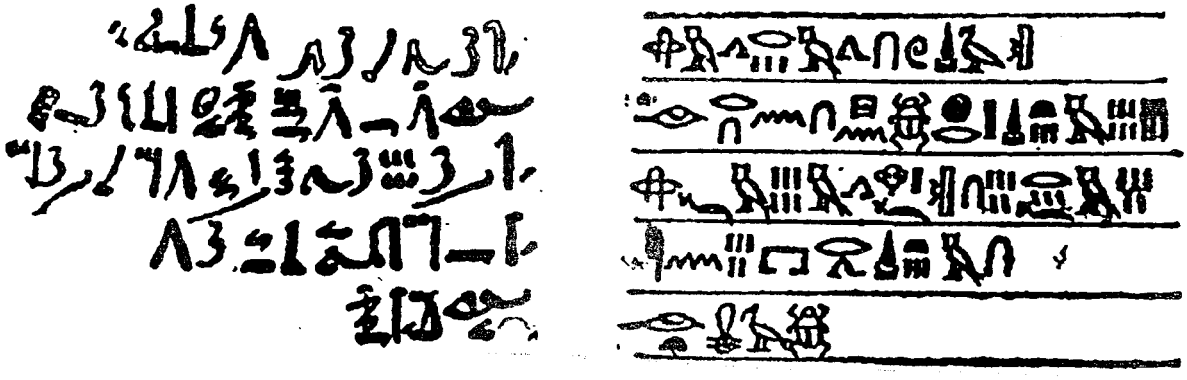
Dunque il quoziente cercato è *12 + 2/3 + 1/42 + 1/126*.

Il **Problema 72** riguarda la soluzione di una **proporzione**: si chiede di trovare il numero di pagnotte di *"forza" 10* che siano equivalenti a *100* pagnotte di *"forza" 45*, e la soluzione viene data come *100/10 · 45*, cioè *450* pagnotte.

Altri problemi equivalgono ad equazioni lineari in una incognita, della forma:

$x + ax = b$ oppure $x + ax + bx = c.$

Eccone un esempio, il **Problema 28**:

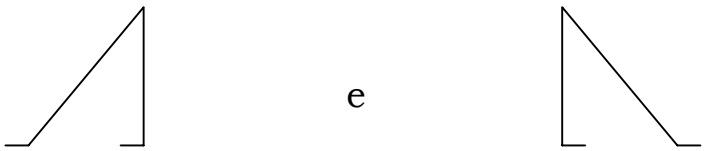


Il testo recita così: "*2/3 venendo, 1/3 allontanandosi, 10 risulta: 1/10 di 10, ciò dà 1, resta 9".* E questa è la traduzione nel linguaggio attuale:

$$(x+2/3\ x) - 1/3(x+2/3x) = 10,$$

un'equazione la cui soluzione è, appunto, *9*.

I simboli ieratici per l'addizione e la sottrazione sono:



che raffigurano, rispettivamente, le gambe di una persona che si avvicina e le gambe di una persona che si allontana.

L'incognita viene detta *"aha"* oppure *"mucchio"*. Il **Problema 24**, per esempio, chiede *"quale sia il valore del mucchio se il mucchio e un settimo danno 19."* Con notazioni moderne scriveremmo l'equazione:

$$x + x/7 = 19.$$

Secondo l'interpretazione di alcuni esperti, il procedimento di risoluzione sarebbe quello noto come "***metodo di falsa posizione***", che tanta

importanza ebbe nel Medio Evo: si attribuisce all'incognita un certo valore, e si eseguono su di esso le operazioni indicate a primo membro. Poi si confronta il risultato ottenuto con il termine noto a secondo membro, e si giunge al risultato risolvendo una proporzione. Ecco l'applicazione al problema in questione. Si sostituisca a x il valore 7. A primo membro si ottiene 8. Allora il vero valore di x si ricava dalla proporzione:

$$x : 19 = 7 : 8,$$

e si ottiene $x = 133/8$, o come scrive Ahmes, $16 + 1/2 + 1/8$.

Gli Egiziani erano anche in grado di risolvere alcuni tipi di equazioni di secondo grado. Uno dei problemi che ci sono pervenuti chiede di suddividere l'area di un quadrato di lato 10 in due quadrati più piccoli tali che il lato dell'uno sia pari a tre quarti del lato dell'altro. In notazione moderna, si tratta di risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x : y = 1 : \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ed ecco il metodo di risoluzione proposto. Si prenda un quadrato di lato 1, e se ne prenda un altro di lato $\frac{3}{4}$. Si calcoli l'area di quest'ultimo, che è $9/16$. L'area totale dei due quadrati è quindi $1 + 9/16$, cioè $25/16$. Si calcoli la radice quadrata di questo numero, che è $5/4$. Si calcoli la radice quadrata di 100, che è 10. Si divida 10 per $5/4$, che dà 8. Questa è la lunghezza del lato del primo quadrato. Il secondo quadrato è $\frac{3}{4}$ di 8, cioè 6.

La geometria

I problemi presentati da Ahmes riguardano principalmente la determinazione di aree e di volumi. Proponiamo le trascrizioni dei problemi più significativi, nella versione di U. Cassina.

Nel **Problema 48** e nel **Problema 50** si chiede di determinare l'area di un campo circolare di cui si conosce il diametro. Dal calcolo emerge che per gli Egizi l'area del cerchio era uguale a quella del quadrato avente per lato $8/9$ del diametro. Se ne ricava un'approssimazione del valore di π pari a $3,16$.

Nel **Problema 51** viene determinata l'area del triangolo, come nel

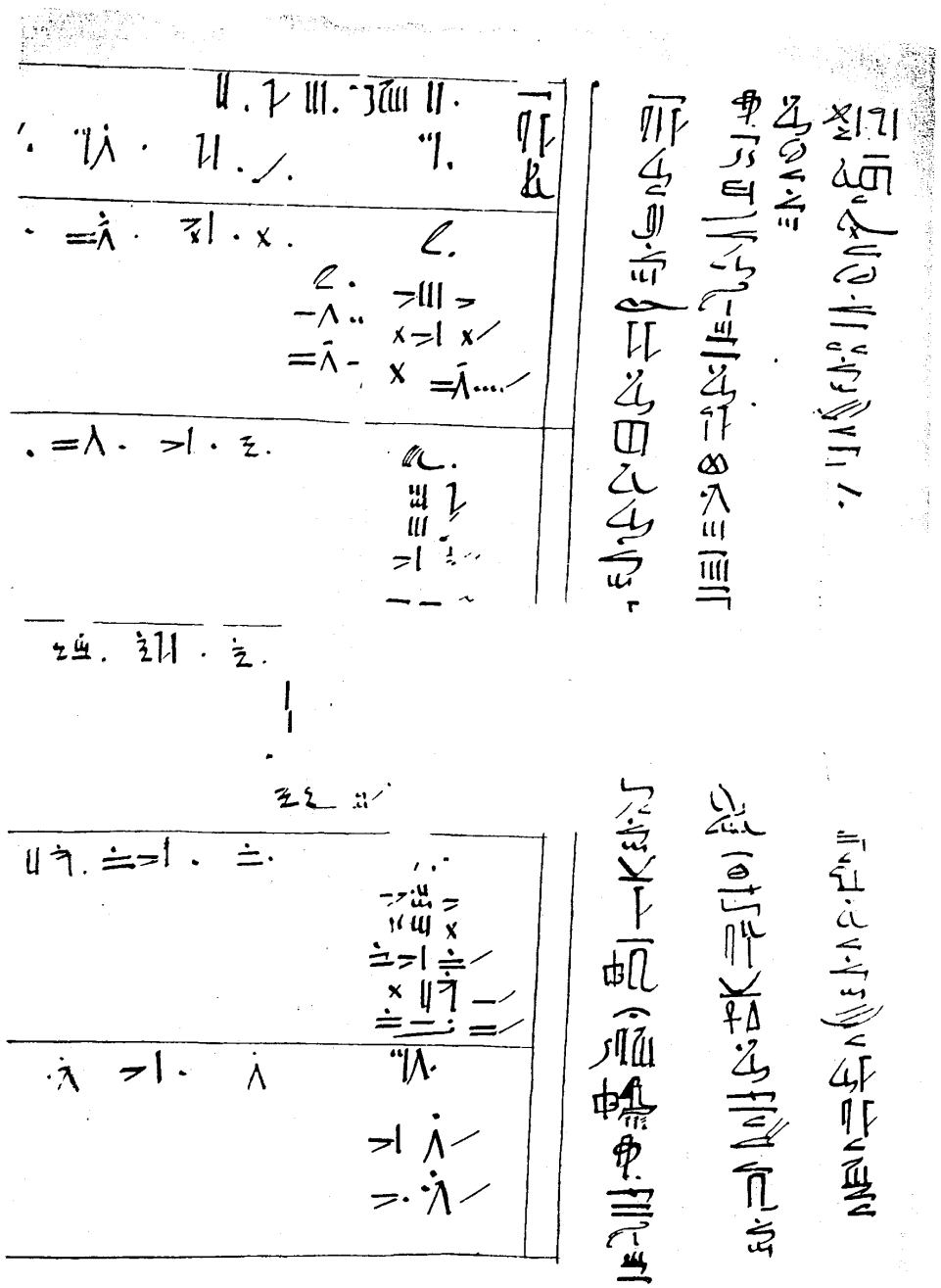
Problema 4 del **papiro di Mosca**. Quest'ultimo affronta anche il problema inverso (**Problema 6**) trovare un rettangolo di cui sono noti l'area ed il rapporto tra le lunghezze dei lati. Infine il **Problema 52** riguarda il calcolo dell'area del trapezio.
Dalle misure terriere si passa alla misura della capacità dei granai: il **Problema 44** propone il calcolo del volume di un parallelepipedo di cui sono note le tre dimensioni, il **Problema 45**, inverso del precedente, chiede la lunghezza del lato di un cubo di cui si conosce il volume (espresso come quantità di grano). Il volume del cilindro è calcolato nel **Problema 41**. Le formule usate sono tutte corrette, a parte l'uso del valore approssimato di π. Non si conoscono problemi egiziani in cui venga calcolato il volume della sfera. Nel papiro di Mosca viene, però, presentata la formula per la superficie della semisfera (**Problema 10**). Per il calcolo del volume del tronco di piramide si veda il **Problema 14** del papiro di Mosca.
Nonostante la mancanza di rigore formale, la geometria egizia si è distinta per la precisione nelle applicazioni all'ingegneria, come testimoniano le piramidi di Giza.

La divisione di 2 per 7

Il titolo del papiro di Rhind

Il testo, redatto in caratteri ieratici, si apre con queste parole:

Regole per scrutare la natura e per conoscere tutto ciò che esiste, ogni mistero,… ogni segreto. Considera che questo rotolo fu scritto nell'anno 33, quarto mese della stagione delle inondazioni, sotto il regno di Sua Maestà Auserrè, re dell'Alto e del Basso Egitto, dotato di vita, ad immagine di uno scritto antico fatto ai tempi di Numarè, re dell'Alto e del Basso Egitto. Fu lo scriba Ahmōse che scrisse questa copia.



Problema 48

Problema 51

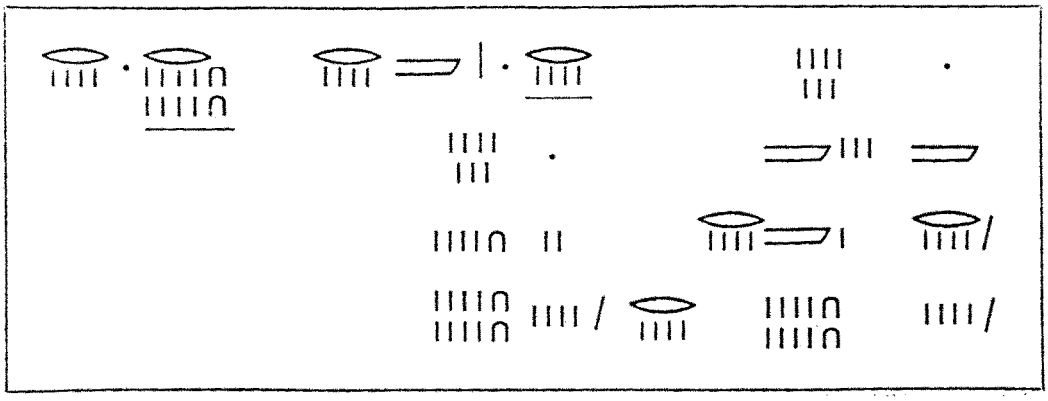
Problema 52

2 DIVISO PER :	SIMBOLI
3	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
7	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
9	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$
11	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$
13	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
15	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
17	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$
19	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
21	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$
23	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$
25	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
27	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$
29	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$
31	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$
33	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$
35	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$
37	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$
39	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$
41	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$
43	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{30}$
45	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$
47	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$
49	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
51	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$
53	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$

55	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
57	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$
59	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$
61	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
63	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$
65	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$
67	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{736}$
69	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$
71	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$
73	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$
75	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$
77	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$
79	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$
81	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$
83	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
85	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
87	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$
89	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$
91	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
93	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$
95	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$
97	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
99	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$
101	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$

La divisione di 2 per 7 nel papiro di Rhind

Trascrizione geroglifica



Traduzione

DIVIDI 2 PER 7.

$\frac{1}{4}$ est $1\frac{3}{4}$, $\frac{1}{28}$ est $\frac{1}{4}$.

	1	7		
	$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	1	7
	$/\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	2	14
/4	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	/4	28.

$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}$.

Problema 44 del papiro di Rhind

“ 1. Modo di calcolare un granaio rettangolare (ifd): lunghezza di esso 10, larghezza di esso 10, altezza di esso 10. Quanto è quello che contiene di grano?
2. Moltiplica 10 per 10, viene 100; moltiplica 100 per 10, viene 1000. Calcola 1/2 di 1000, cioè 500; viene (in totale) 1500. Questo è il contenuto di esso in
3. khar. Calcola 1/20 di 1500, viene 75, ciò che contiene questo è in grandi hekat: grano in hekat; 75 grandi hekat.”

“ Modo di procedere:

1	*10*	*1*	*1000*	*1*	*75*
10	*100*	*1/2*	*500*	*10*	*750*
1	*100*	*1*	*1500*	*\20*	*1500*
10	*1000*	*1/10*	*150*	*1/10*	*150*
		1/20	*75*	*1/10 di 1/10*	*15*

2/3 di 1/10 di 1/10 di esso 10 ”.

Problema 45 del papiro di Rhind

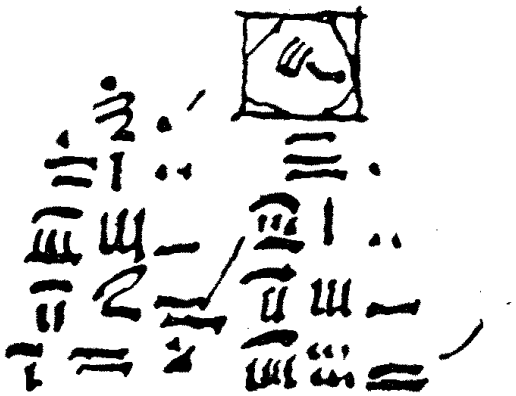
“ 1. In un granaio (in cui) entra dentro grano per grandi hekat 75 di esso quali sono le dimensioni ? Fa tu: moltiplica 75 per 20, viene 1500.
2. Fa tu. Opera su 1500, calcola 1/10 di esso, cioè 150; 1/10 di 1/10 di esso, 15; 2/3 di 1/10 di 1/10 di esso, cioè 10. Perciò questo è: 10 per 10 per 10.”

Problema 48 del papiro di Rhind

Questo problema, molto schematico, riconduce l'area del cerchio a quella del quadrato circoscritto. I calcoli sono i seguenti:

« 1 8 setat \1 9 setat
2 16 » 2 18 »
4 32 » 4 36 »
8 64 » \8 72 »

totale 81 » ».

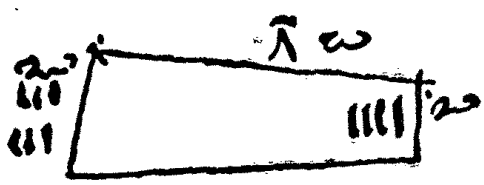


Problema 51 del papiro di Rhind

"1. Modo di operare per un triangolo di terreno
2. Quando si dice a te: un triangolo di khet 10 per
3. altezza (mry · t) di esso, khet 4 per base (tp · ra) di esso
4. qual è l'area di esso?
S. Calcola 1/2 di 4, cioè 2
6. allo scopo di farlo diventare rettangolare.
7. Fa tu: moltiplica 10 per 2, l'area di esso questo è."



Problema 52 del papiro di Rhind

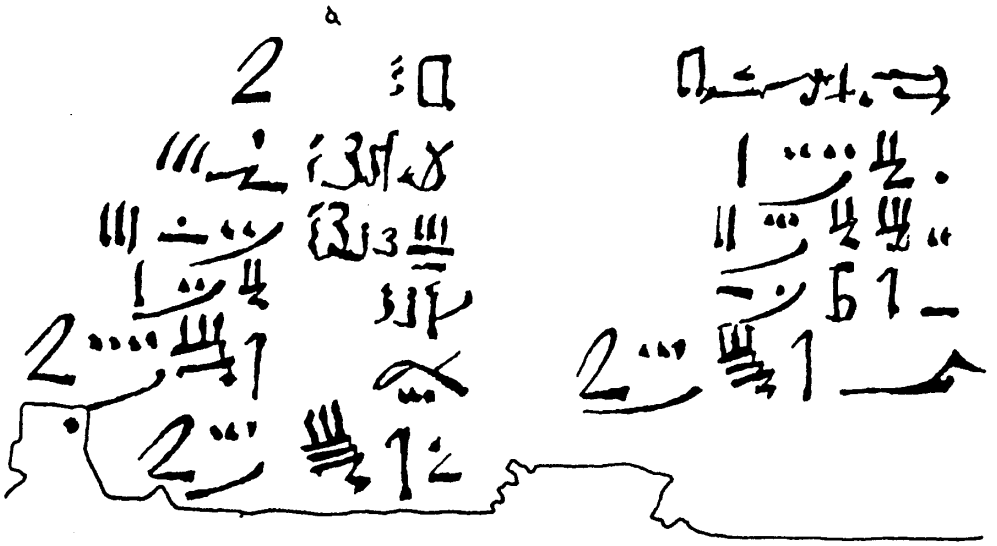


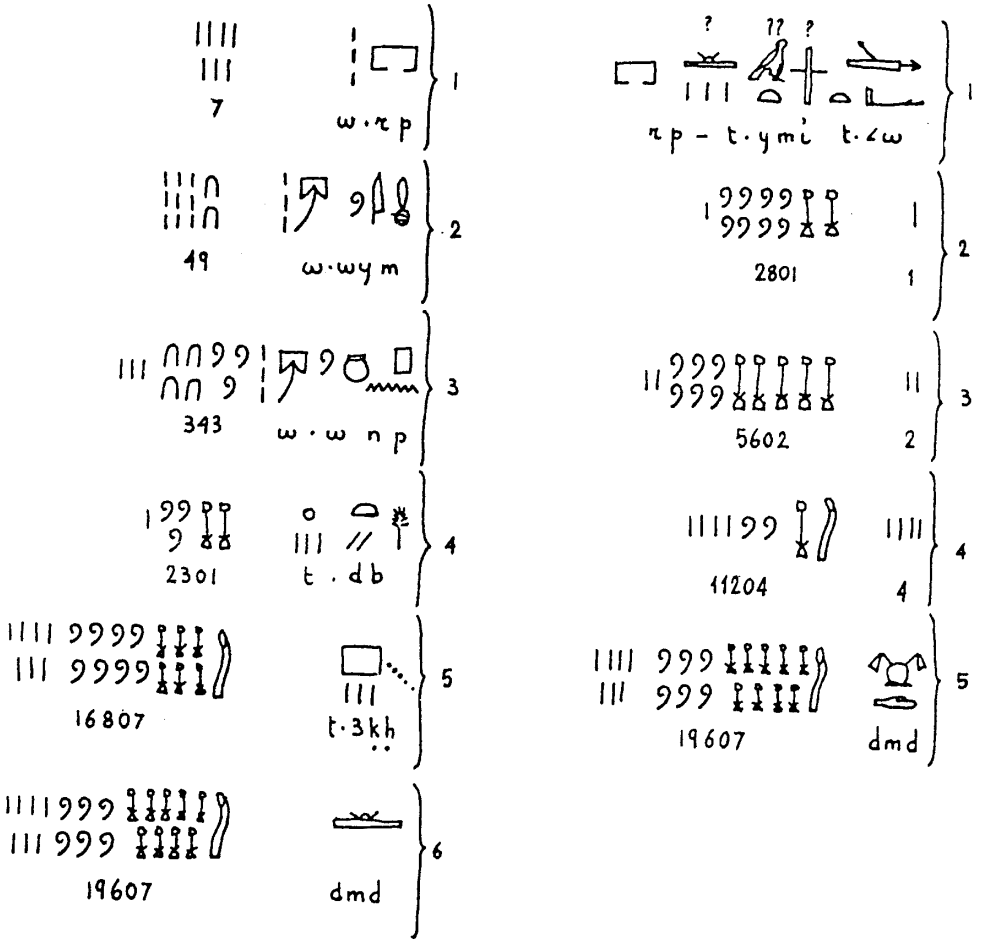
“ 1. Modo di operare per un trapezio di terreno -
Quando si dice a te: un trapezio di terreno.
2. di khet 20 per altezza (mry · t) di esso, khet 6 per base maggiore (tp · ra) di esso, khet 4 per base minore (hak) di esso, qual è l’area di esso ?
3. Aggiungi alla base maggiore di esso la base minore, viene 10. Calcola 1/2 di 10, cioè 5, allo scopo di farlo diventare rettangolare.
4. Fa tu. Moltiplica 20 per 5, viene 100; l’area di esso questo è.”

Il calcolo annesso al problema è il seguente:

« 1 1000 \ 1 2000
1/2 500 2 4000
\4 8000 totale 10000 facente in area
100 setat. L’ammontare di esso questo è in area.»

Il problema n. 79 del papiro di Rhind in scrittura demotica e geroglifica





Il papiro di Mosca

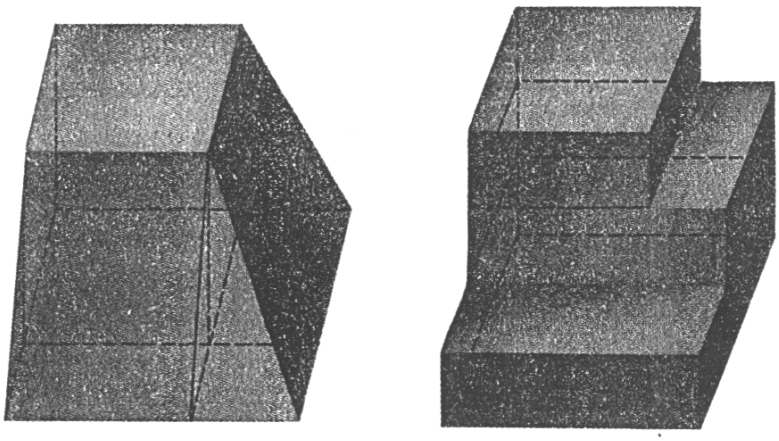
Storia

Questo papiro, noto anche come papiro di Golenisev, è lungo pressappoco come il **papiro di Rhind** - circa 5,5 m - ma è largo solo 7,5 cm. Fu scritto da un ignoto scriba della dodicesima dinastia (circa 1890 a.C.), e venne acquistato in Egitto nel 1893. Attualmente è conservato presso il Museo delle Belle Arti di Mosca.

Lo studio di questo documento, redatto come l'altro in caratteri ieratici, coinvolse E.Turajev, D.P. Tsinserling e W.Struve tra il 1917 ed il 1930, anno in cui il terzo autore diede alle stampe un'edizione contenente la riproduzione fotografica del papiro con la trascrizione geroglifica e la traduzione letterale in tedesco.

Contenuto

Il documento comprende 25 esempi di natura pratica, analoghi a quelli del papiro di Rhind. Le formule trovate nei due documenti sono perfettamente concordanti. Gli unici elementi di novità di questo papiro sono il Problema 10, in cui viene determinata l'area di una semisfera, ed il **Problema 14**, che riguarda invece il volume del tronco di piramide. Si pensa che la formula trovata per quest'ultimo sia stata dedotta scomponendo il solido in due prismi, un parallelepipedo ed una piramide, e ricomponendo i pezzi in modo da formare tre parallelepipedi, come in figura:



Questi parallelepipedi hanno tutti e tre altezza *2*, ed hanno basi *2·2, 2·4* e *4·4*. Ecco come gli Egizi descrissero il calcolo, interamente a parole:

Se ti si dice: una piramide tronca di 6 per l'altezza verticale, di 4 sulla base, di 2 sulla cima. Tu devi quadrare questo 4, risultato 16. Tu devi raddoppiarlo, risultato 8. Tu devi quadrare 2, risultato 4. Tu devi sommare il 16, l'8 e il 4, risultato 28. Tu devi prendere 28 due volte, risultato 56. Vedi è 56. Troverai che è corretto.

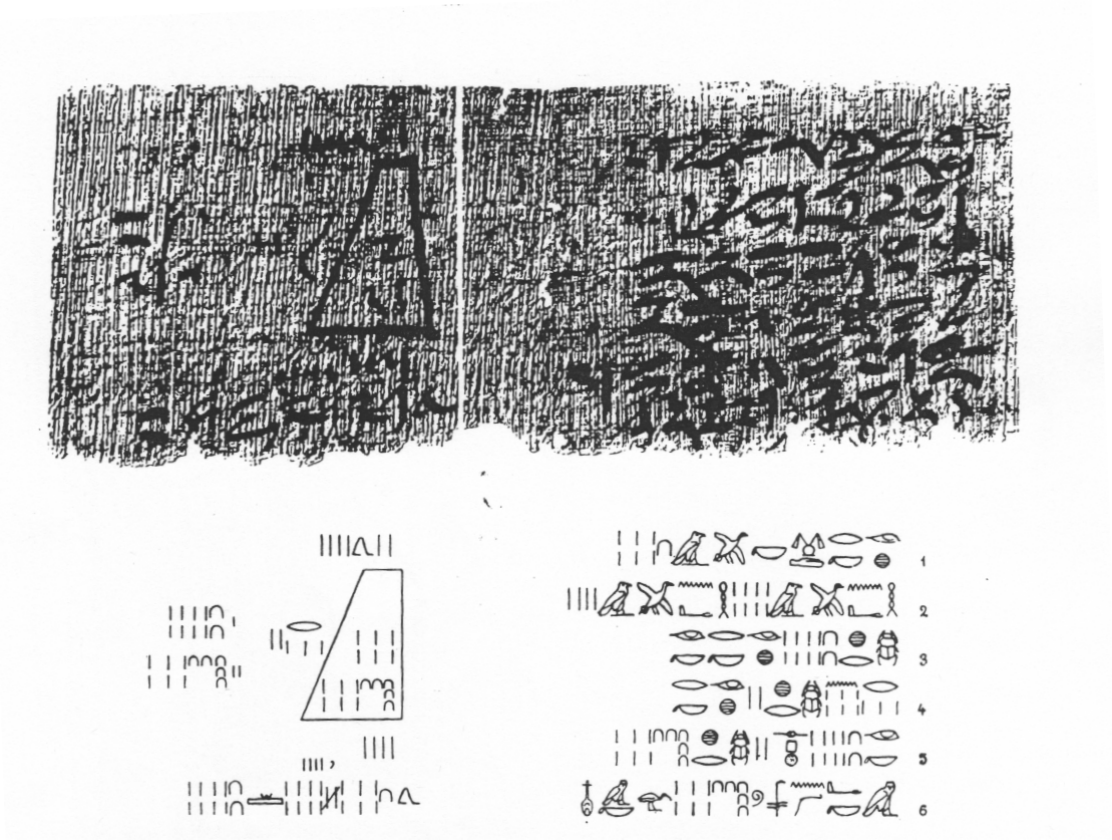
Questo modo di esprimere i concetti matematici prende il nome di ***algebra retorica***.

Il procedimento seguito dagli Egiziani può essere applicato in generale, e conduce alla nota formula

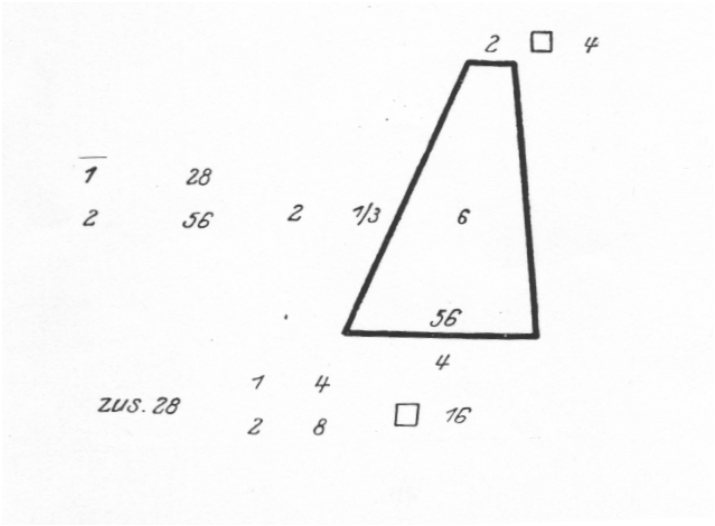
$$V = (1/3)h\,(a^2 + ab + b^2)$$

per il volume di un tronco di piramide di altezza h e basi a,b.

Il Problema 14 del papiro di Mosca



Il problema del volume di un tronco di piramide
In alto: riproduzione del frammento del papiro
Sotto: trascrizione geroglifica
In basso: traduzione



L'astronomia egizia

Il periodo egizio non ha portato significativi progressi nella conoscenza della struttura del cielo e del moto dei pianeti. Agli Egizi dobbiamo però due decisive innovazioni nella misurazione del tempo, così indovinate da essere sopravvissute, attraverso i millenni, fino ad oggi: la durata dell'anno di 360 giorni, più 5 supplementari, e la suddivisione del giorno in 24 ore. La prima deriva dalla correzione del calendario dei **Babilonesi**, che prevedeva 360 giorni. La seconda è il risultato di una semplice osservazione. Gli Egizi vedevano sorgere, in media, 12 astri per notte. Questi vennero scelti per segnare lo scorrere delle ore notturne. D'altra parte dieci erano le ore fra l'alba ed il tramonto. Aggiungendo due ore, rispettivamente per la durata dell'albore mattutino ed il crepuscolo serale, essi giunsero ad un totale di 24.

Altre suddivisioni del tempo di invenzione egizia sono, invece, andate perdute. Una di queste prevedeva periodi di 10 giorni, detti *decani*, durante i quali era sempre la stessa stella della notte a sorgere per ultima, sul far del giorno. Questa stella, che i Greci chiameranno *eliaca*, è riconoscibile per il fatto che, visibile all'orizzonte al primo chiarore dell'alba, scompare poco dopo all'aumentare della luce del Sole.

Diversa dalla nostra era anche la durata delle stagioni: gli Egizi ne conoscevano solo tre, che scandivano i cicli dell'attività agricola. L'inizio dell'anno era segnato dal sorgere eliaco di Sirio, che annunciava lo straripamento del Nilo, e dava inizio alla prima stagione dell'anno, detta inondazione *(akhet).* Seguivano l'inverno (*peret,* letteralmente "uscita della terra dalle acque") e l'estate (*shemon,* ossia "mancanza d'acqua").

Gli Egizi credevano nell'influsso delle posizioni degli astri sulla vita dell'uomo, erano, cioè, cultori dello **zodiaco**.

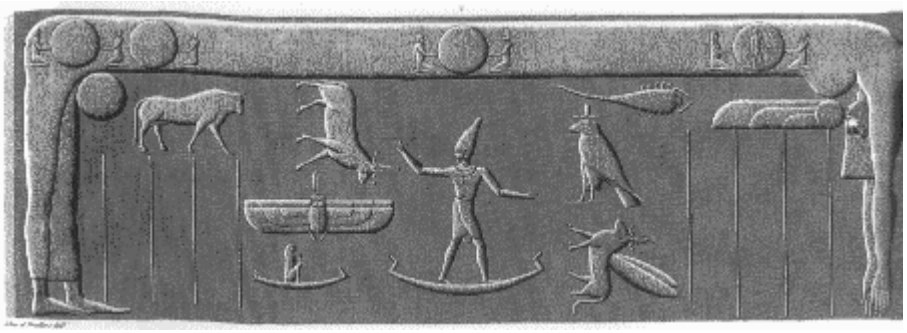
I decani negli affreschi di Ferrara
La volta celeste

La volta celeste per gli Egizi

Per gli Egizi la volta celeste era una donna, con il corpo disposto ad arco: era la **dea Nut**. Ce ne sono pervenute bellissime **raffigurazioni**.



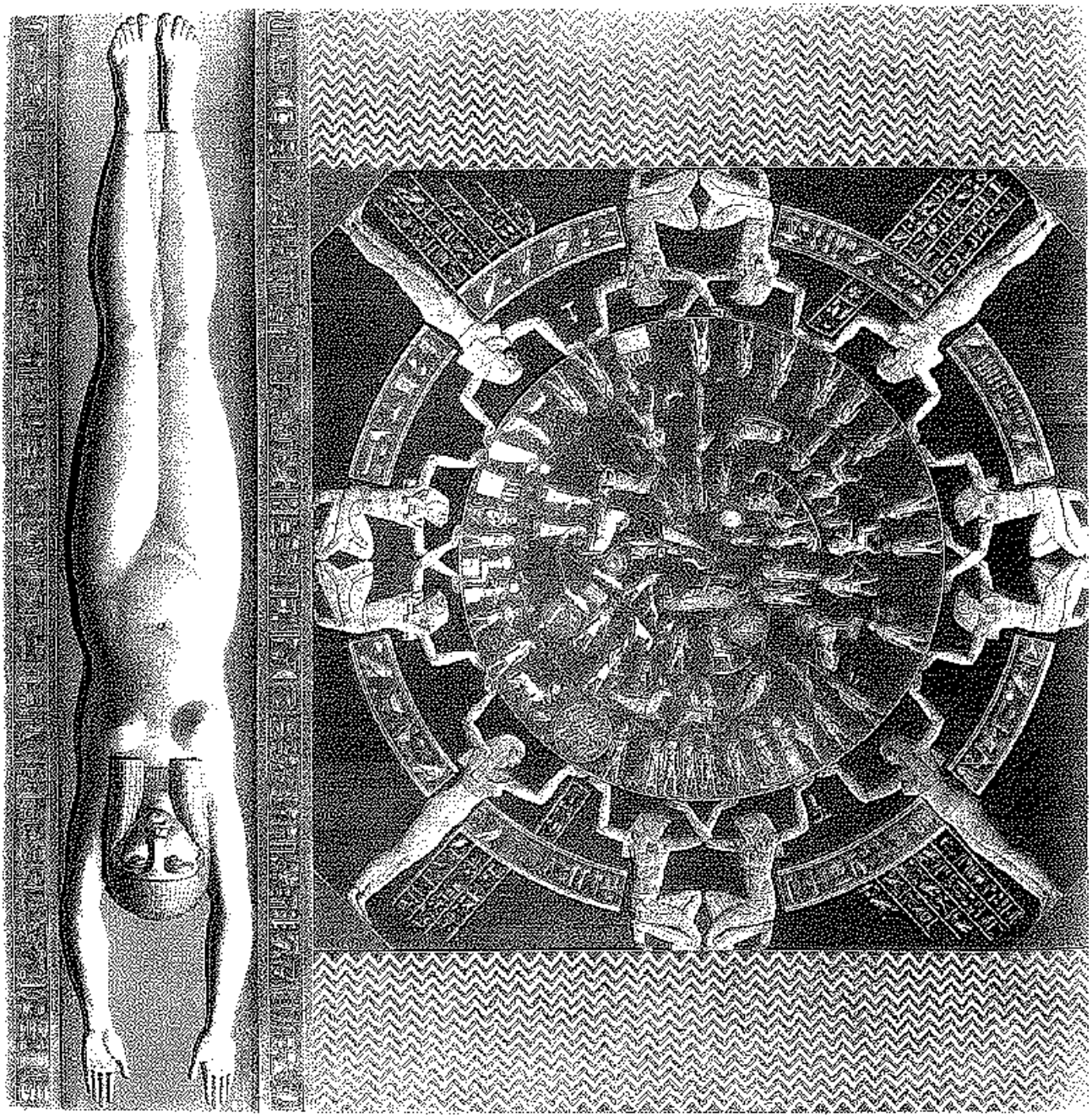
La dea del cielo Nut, da un bassorilievo del soffitto del santuario del tempio di Hermonthis

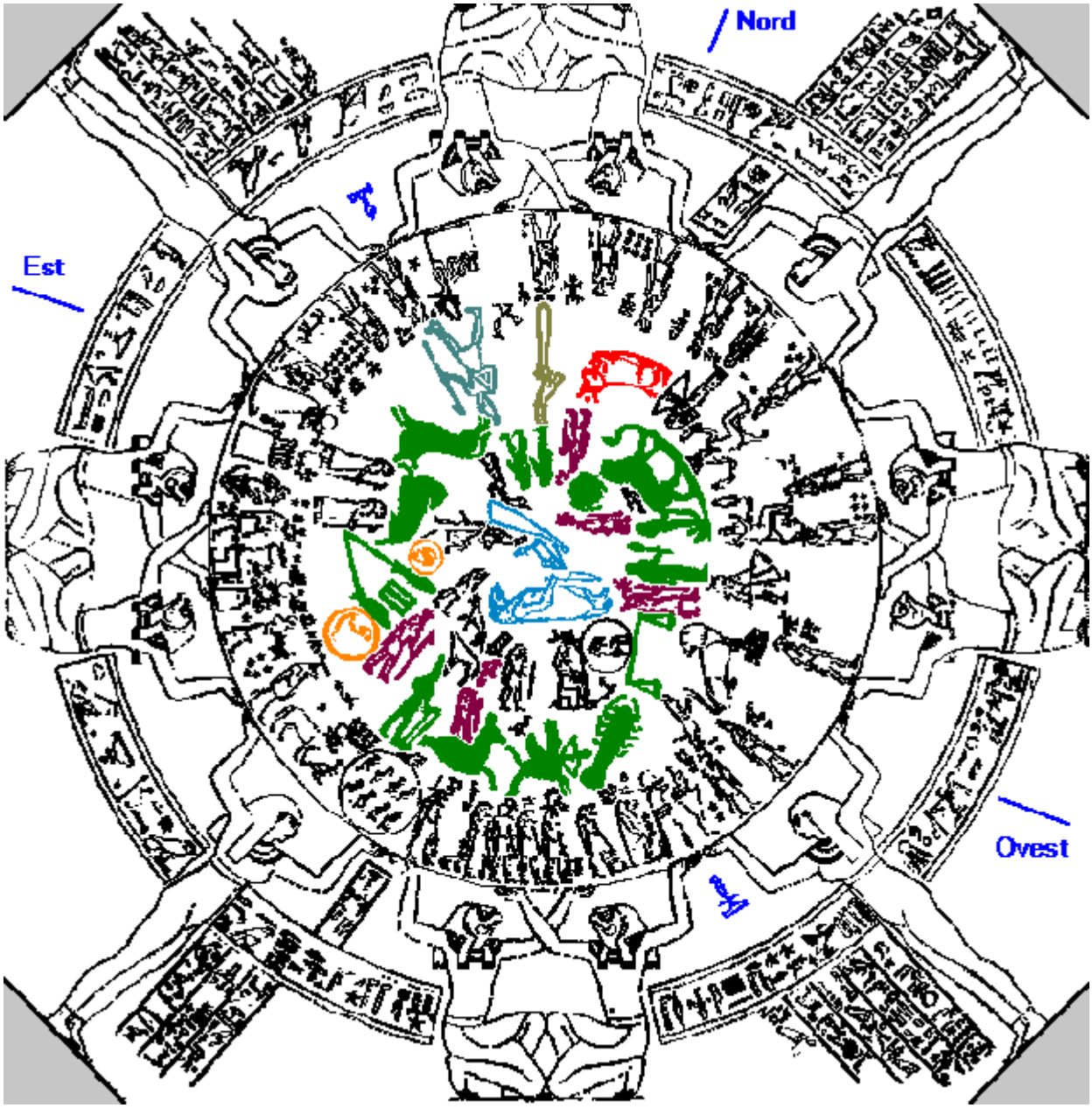


Una bella rappresentazione della dea Nut: le 36 fasce verticali indicano i decani



Lo zodiaco sul soffitto del tempio Hathor a Dendera




Nord
Est
Ovest

Zodiaco dalla tomba di due fratelli ad Athribis (periodo romano, II sec. d.C.)



Lo zodiaco secondo Tolomeo

Gli affreschi di Palazzo Schifanoia a Ferrara

Questa sontuosa residenza, il cui nome significa “schivar la noia”, cioè “divertimento”, fu costruita nel 1385 per volere di Alberto V d’Este. Un secolo dopo, il Duca Borso commissionò ad alcuni famosi artisti ferraresi un ciclo di affreschi che ancor oggi, sia pur in parte, ricopre le pareti del salone d’onore.



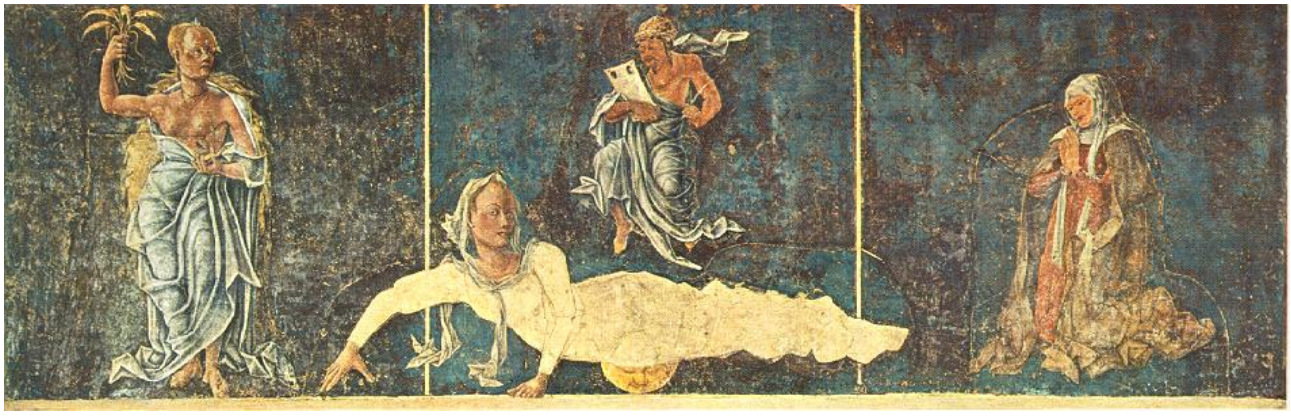
L’opera pittorica è suddivisa in dodici fasce verticali, ognuna delle quali rappresenta un mese dell’anno, ed è a sua volta composta di tre bande orizzontali. In quella inferiore sono riprodotte scene di vita a corte, in quella superiore compaiono divinità pagane, mentre quella centrale contiene il segno zodiacale e le raffigurazioni dei tre “decani”, in cui, secondo il **calendario egizio**, era suddiviso il mese.

Marzo
Aprile
Maggio
Agosto









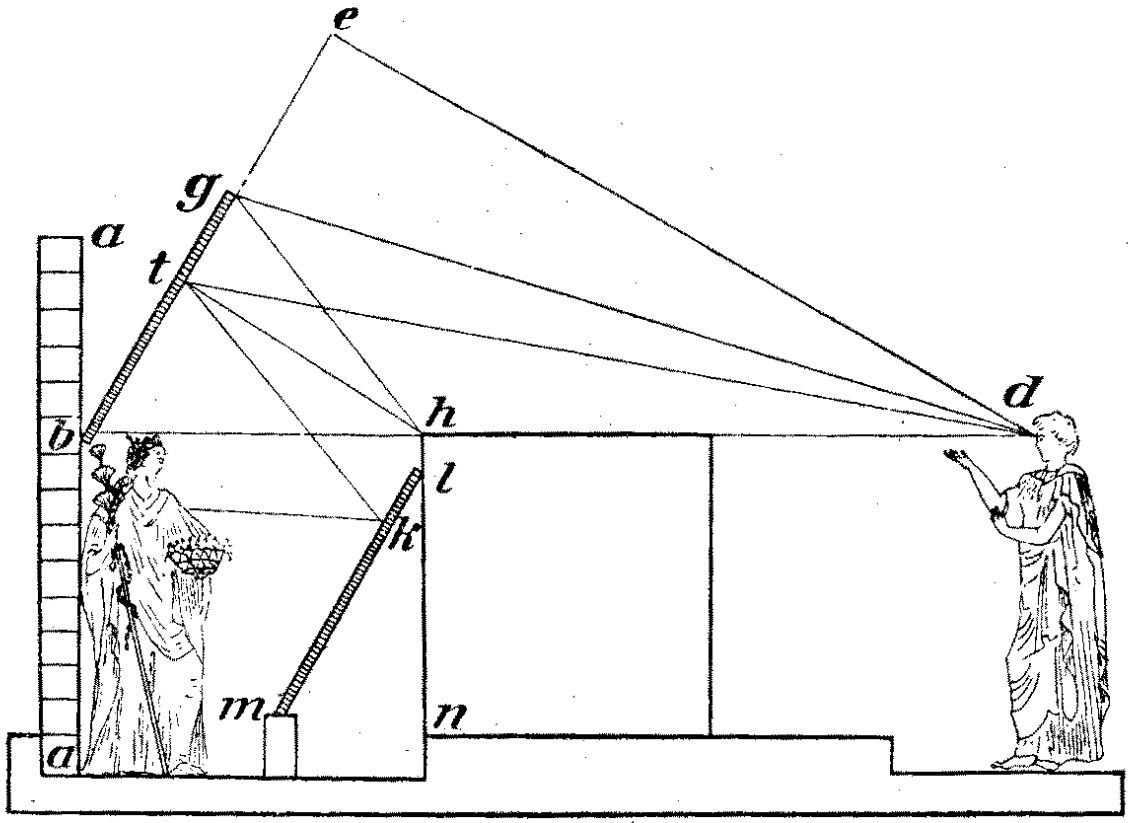
Il segno zodiacale della Vergine al centro, e, dietro, i tre decani di agosto: la Provvidenza, il Calcolo e la Gratitudine.

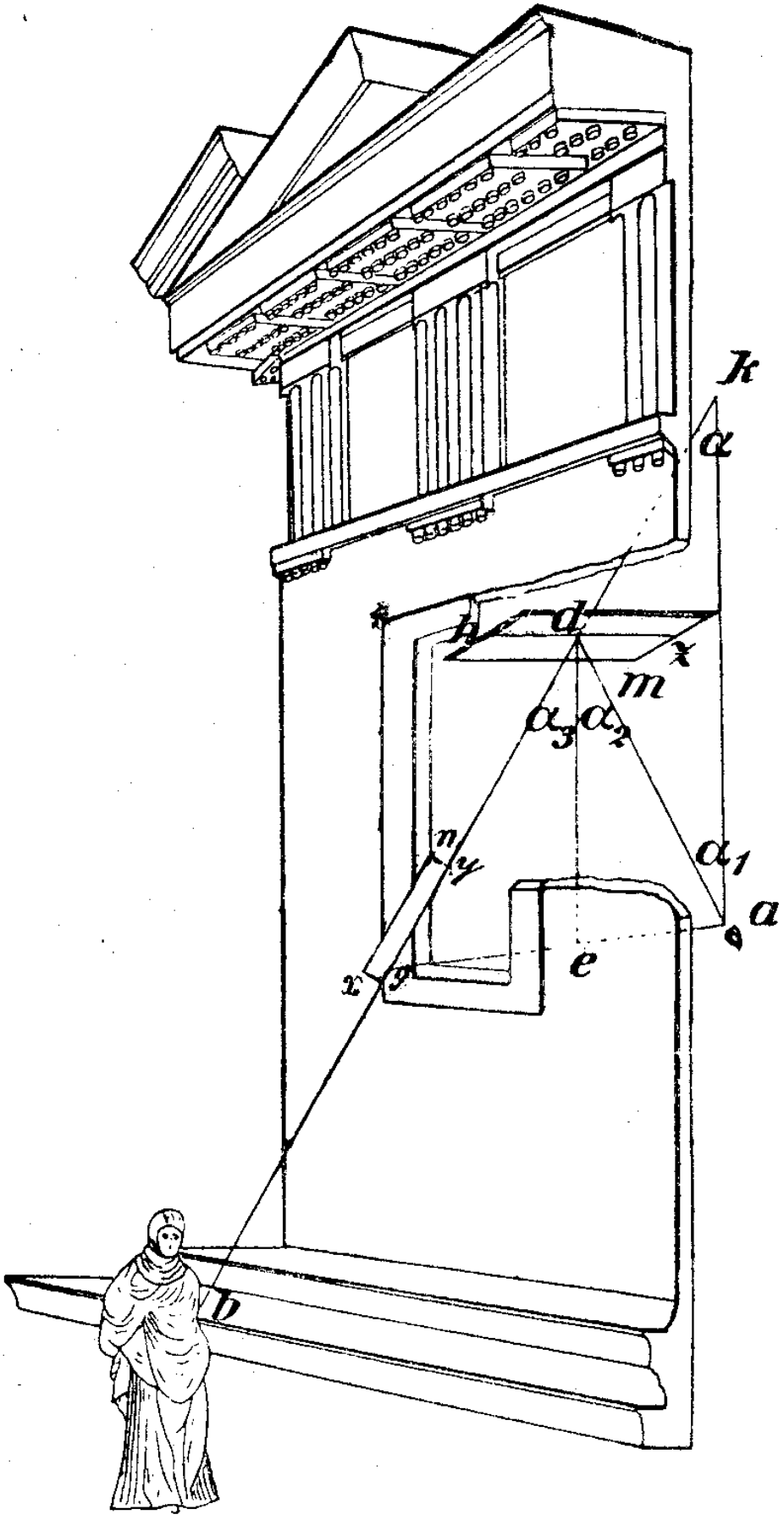
Erone di Alessandria (I secolo d.C.)

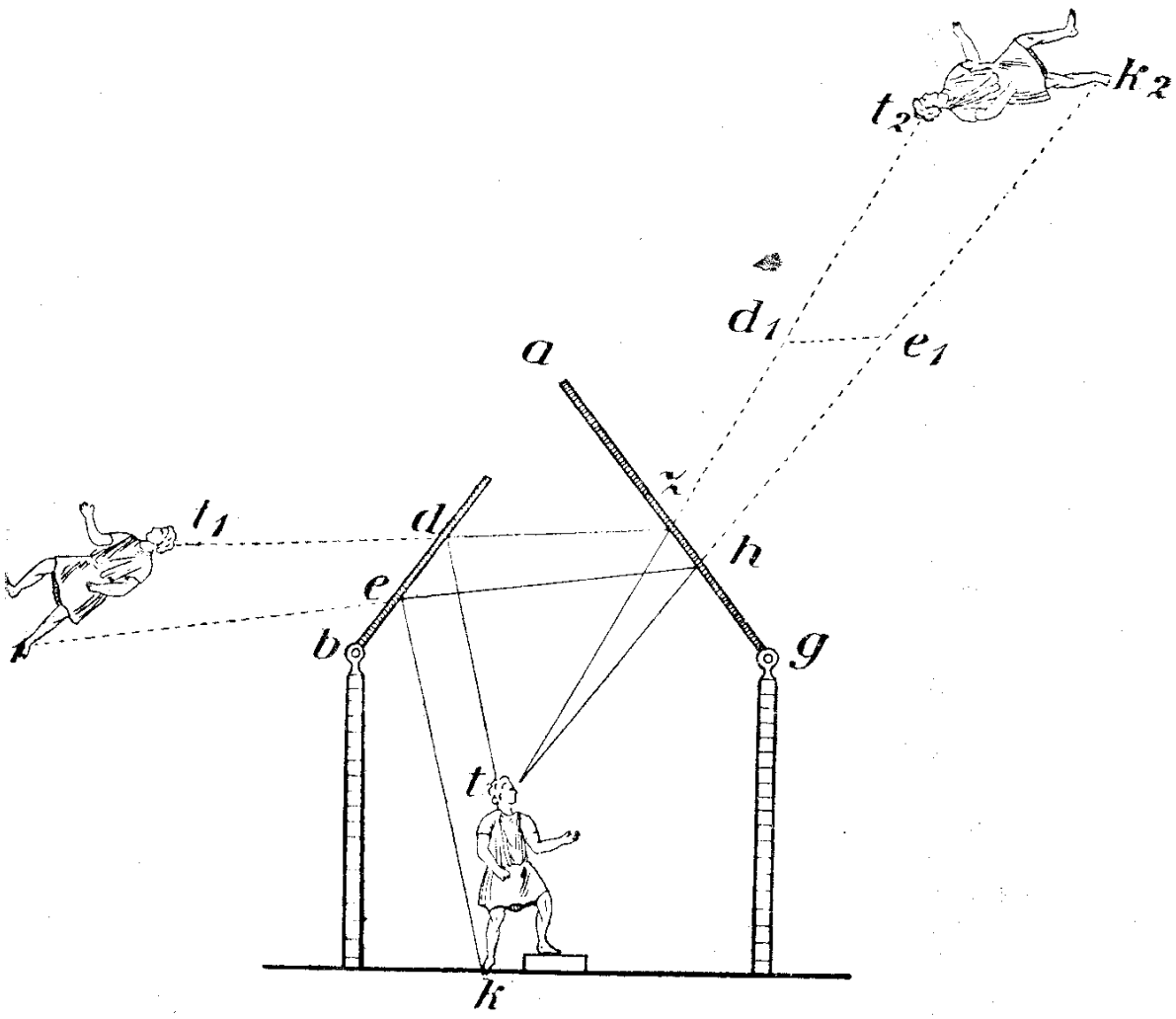
A questo scienziato greco viene talvolta attribuito l'algoritmo per la **determinazione della radice quadrata** per approssimazioni successive, che altri fanno invece risalire ad **Archita** (V-IV secolo a.C.): in realtà pare che esso facesse già parte della **matematica babilonese**. Egli presentò anche un analogo metodo per le radici cubiche. Ma il nome di Erone è legato soprattutto alla formula per la determinazione dell'area del triangolo mediante le lunghezze dei lati, benché sembri che essa fosse già nota ad **Archimede**. Questa formula fu riproposta molti secoli più tardi dalla ***Practica Geometriae*** di **Fibonacci**. La geometria di Erone riguarda principalmente la determinazione delle aree di figure piane, delle aree delle superficie delle figure solide e dei volumi di queste ultime. I suoi teoremi, raccolti nelle opere ***Metrica*** (in tre volumi, il suo capolavoro), ***Geometrica*** e ***Stereometria***, sono in parte ispirati all'antica **matematica egiziana**, in parte tratti dagli scritti di Archimede e dagli ***Elementi*** di **Euclide**: di questi ultimi Erone scrisse anche un commentario.
Gli studi compiuti da Erone sono essenzialmente finalizzati alle applicazioni pratiche, soprattutto alla misurazione del terreno, cui dedicò i trattati ***Geodesia*** e ***Diottra***. Egli fu anche fisico: nell'opera ***Meccanica*** presentò importanti risultati di statica e cinematica, nella ***Catottrica*** studiò le leggi della riflessione della luce, nella ***Pneumatica*** la teoria e l'uso dei gas compressi. In effetti il filosofo Proclo ricorda Erone soprattutto come *mechanicus,* cioè come ingegnere: Erone seppe utilizzare le regole e le formule da lui raccolte anche alla costruzione di macchine teatrali (***Sull'arte della costruzione degli automi***) nonché alla balistica, cui si riferiscono ***La costruzione delle catapulte*** e ***La progettazione dei cannoni***.

Catottrica

Quest'opera di **Erone di Alessandria** è dedicata allo studio della riflessione della luce, e porta lo stesso titolo di due opere precedenti, dovute ad **Euclide** ed **Archimede**, e di un'opera posteriore, una rielaborazione compiuta da **Teone di Alessandria**. Il manoscritto originale di Erone è andato perduto, a noi sono pervenute solo trascrizioni latine: in un primo tempo si credette erroneamente che queste si riferissero al trattato ***De Speculis*** di **Tolomeo**. Erone tratta dunque un argomento ampiamente studiato nell'antichità. La sua attenzione si rivolge soprattutto agli effetti ottenuti con specchi di varie forme (sferici, cilindrici, poligonali) e con sistemi di più specchi, variamente orientati, che possono essere sfruttati per creare illusioni ottiche: una di queste consiste nel far sì che uno **specchio rifletta sempre un'immagine prefissata**, indipendentemente dalla persona che vi si pone di fronte. Un'altra **invenzione** permette di vedere, da uno specchio posto all'interno della casa, le scene che si svolgono in strada, un'altra ancora crea l'illusione di un **uomo sospeso in aria**.

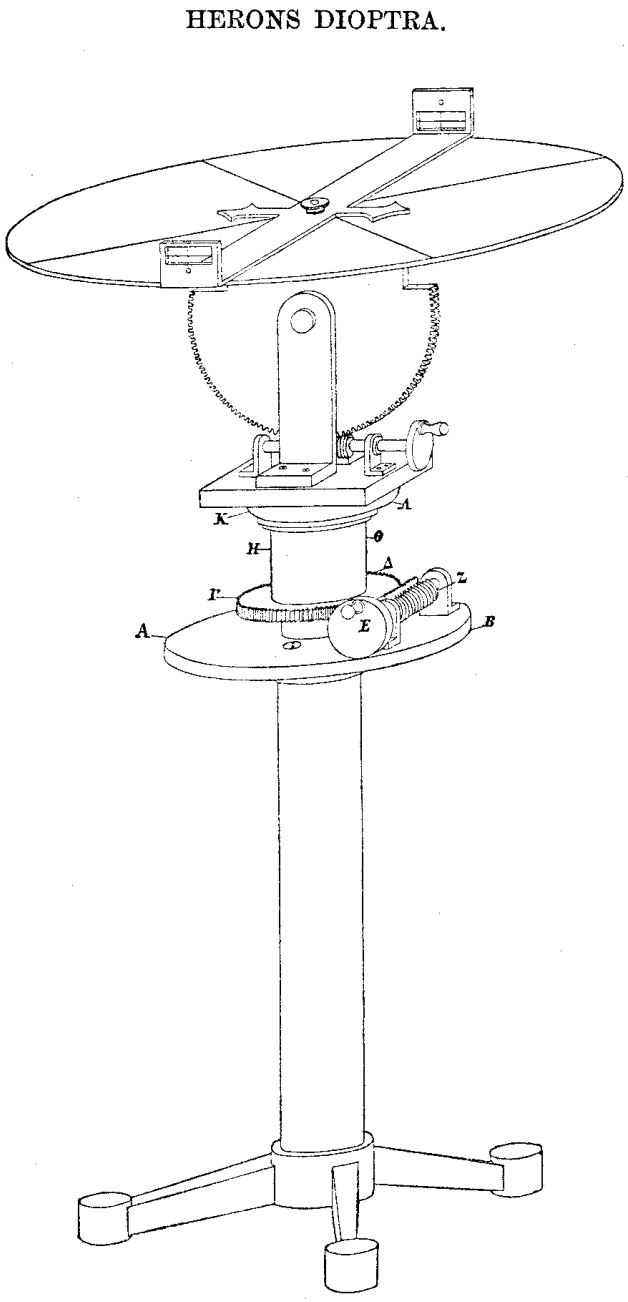

e
g
a
t
h
d
b
l
k
m
n
a


k
α
h
d
x
m
α3 α2
n
y
α1
a
x
y
e
b


k_2
t_2
d_1
e_1
a
z
l_1
d
h
e
b
g
t
k

Diottra

Il titolo di quest'opera di **Erone di Alessandria** è il nome di un primitivo strumento di misurazione del terreno, precursore del più moderno *teodolite.* Esso è essenzialmente costituito da una sorta di mirino, spesso montato su di un goniometro, che permette di misurare l'angolo compreso fra l'osservatore e due punti lontani, o comunque non accessibili. Sfruttando le proprietà del triangolo, da questo tipo di rilevamenti è possibile derivare la distanza fra i punti dati. Tale metodo, largamente impiegato nella antica **cartografia**, è detto **triangolazione**.



La diottra è la progenitrice del più moderno teodolite, che fu introdotto dal sec. XVI in poi, e venne perfezionato dopo l'invenzione del **cannocchiale**.

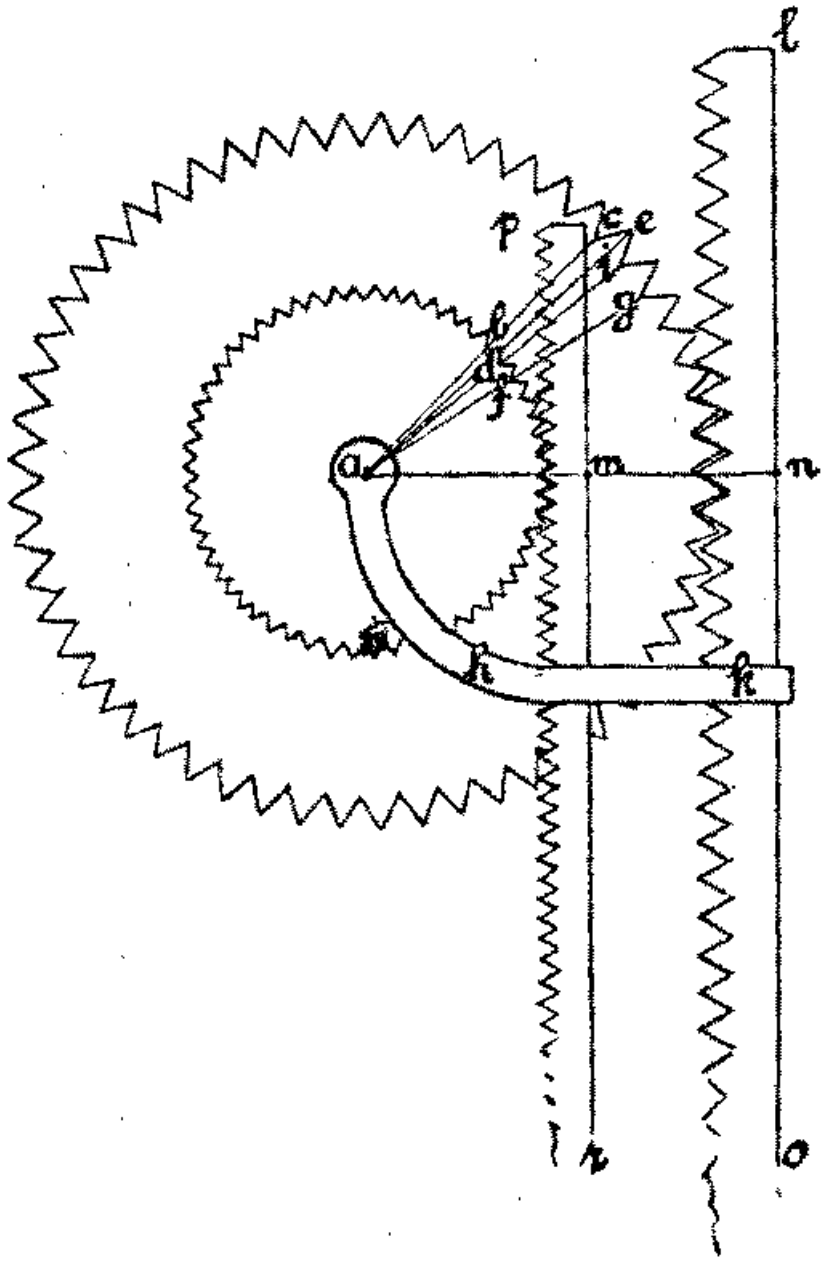
La diottra secondo Tartaglia

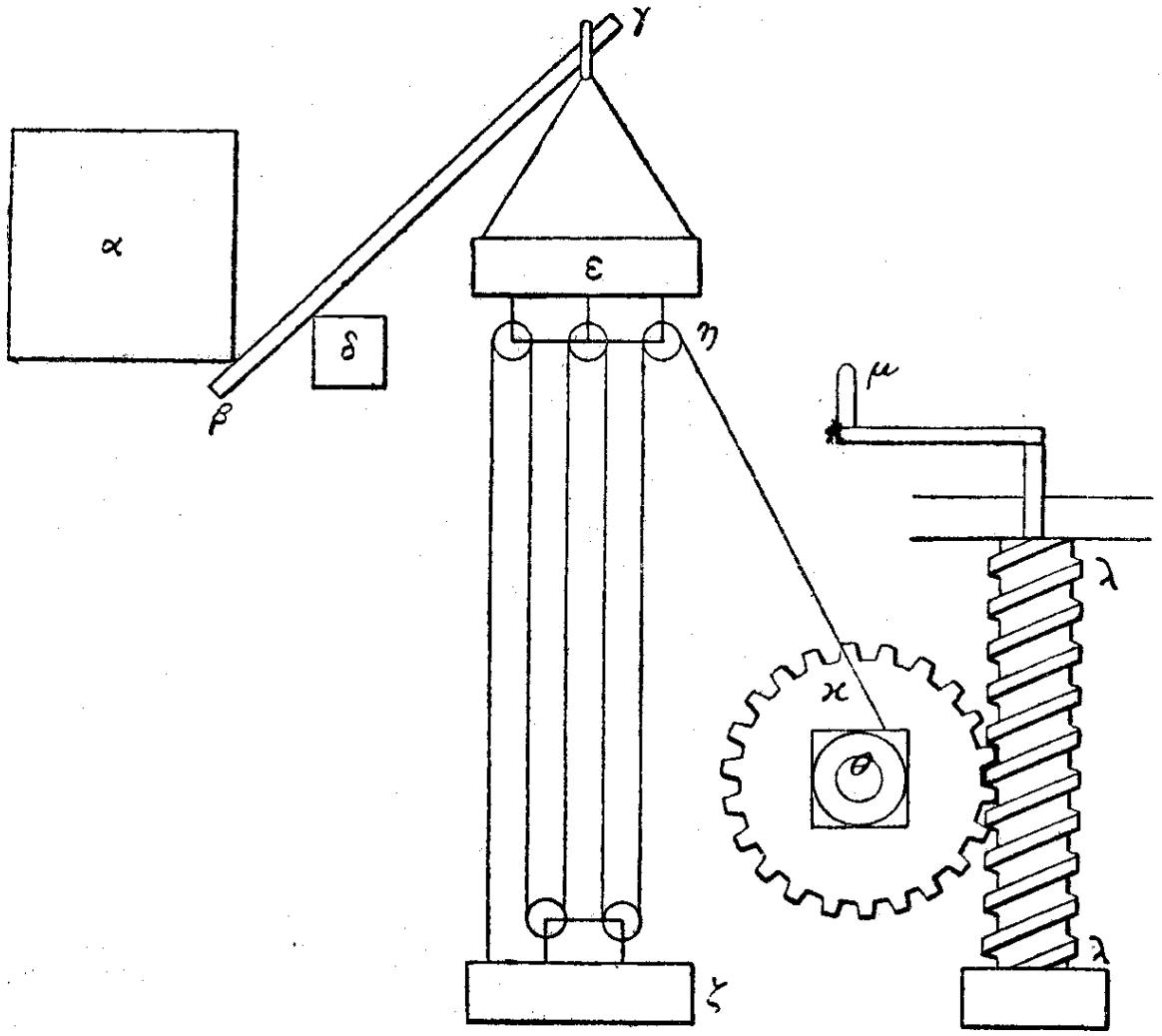
Meccanica

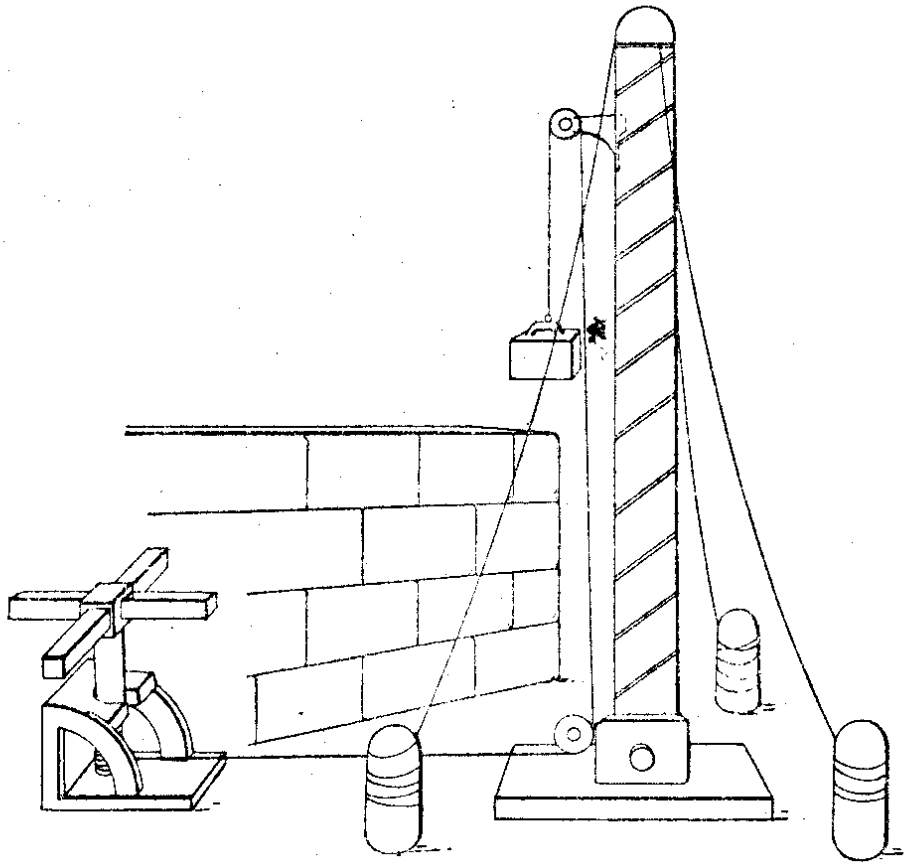
Il manoscritto originale di quest'opera di **Erone di Alessandria** è andato quasi interamente perduto: a noi sono pervenute soltanto alcune traduzioni in arabo, tra cui quella di ***Kosta ben Luka***, realizzata nella seconda metà del secolo IX d.C.. Il trattato è suddiviso in tre libri. Nel **Libro I** vengono descritti i funzionamenti di vari ingranaggi, costituiti da ruote dentate e viti. Largo spazio è dedicato allo studio del moto di ruote di diverso diametro collegate da un asse. I principi fisici e matematici che ne risultano vengono applicati alla costruzione di due importanti invenzioni:

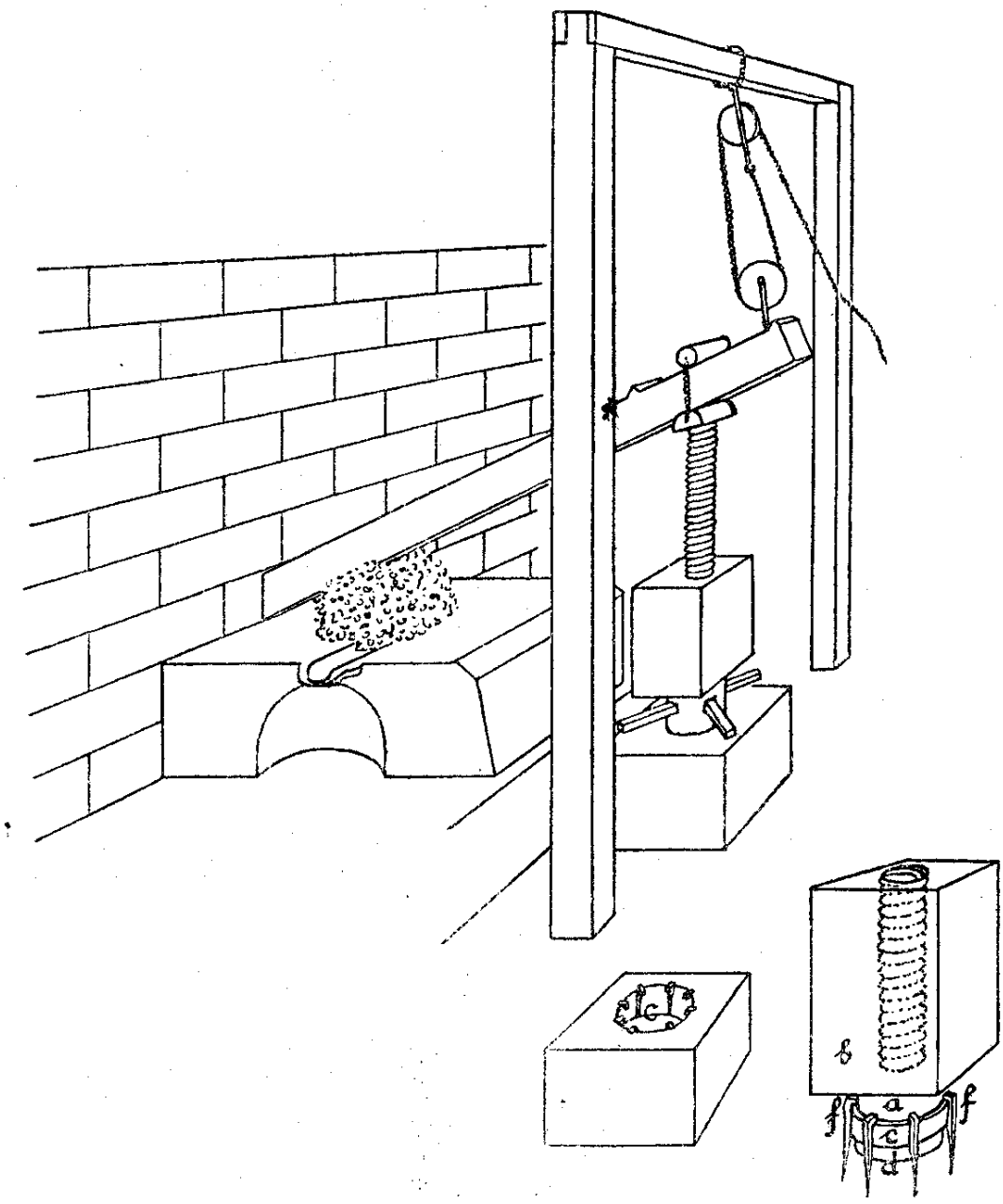
- l'***odometro***, uno strumento che, contando i giri di una ruota, permette di misurare la distanza percorsa da un pedone o da un veicolo: esso è ancora in uso al giorno d'oggi, fa parte dei meccanismi dei tassametri e dei contachilometri;
- il ***pantografo***, uno strumento che permette di riprodurre un disegno dato in una scala diversa.

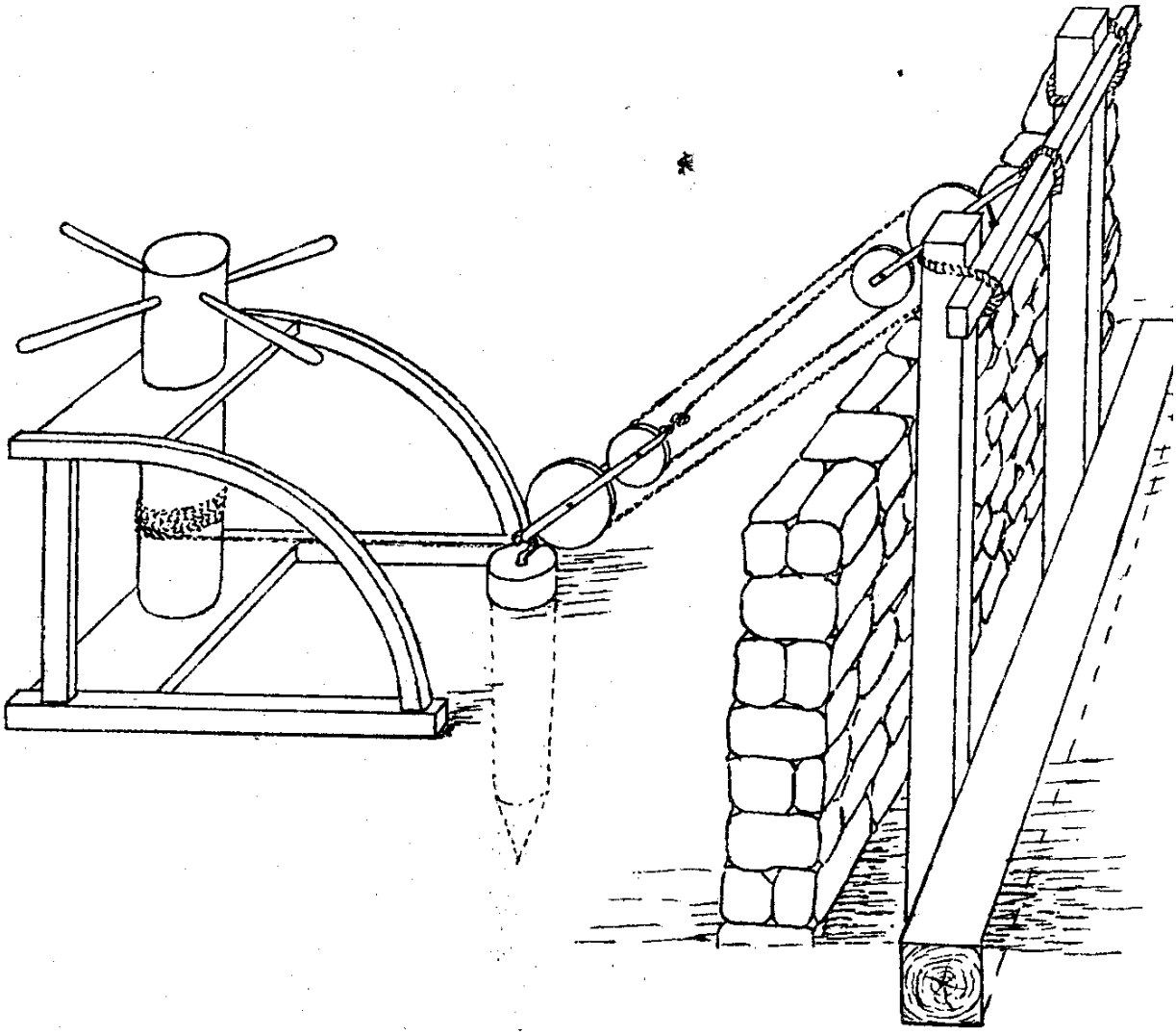
Nel **Libro II** vengono studiati problemi di statica, cioè legati all'equilibrio dei corpi soggetti alla sola forza di gravità, e vengono presentati metodi per la determinazione dei baricentri. Qui Erone inizia a prendere in esame le macchine fisiche elementari, come la leva e la carrucola, il cuneo, la vite: riesce a combinare tre di questi elementi in un **dispositivo** per sollevare oggetti pesanti. Prosegue nel **Libro III** con meccanismi più complessi come la **gru** e il **torchio** per uva, arrivando a presentare i rudimentali progetti per una teleferica, una slitta ed una chiatta. Una tra le invenzioni più curiose è una **macchina** per raddrizzare i muri inclinati dai terremoti.


l
p
c
e
i
g
b
d
f
a
m
n
k
k
h
o


α
β
γ
δ
ε
ζ
η
θ
κ
λ
λ
μ




c
b
a
f
f
c



Metrica

Quest'opera di **Erone di Alessandria** raccoglie, in tre libri, i principali teoremi di geometria elementare noti all'epoca, e le formule di maggior utilità ai fini delle applicazioni in agrimensura ed ingegneria.
Il trattato, in cui compaiono anche risultati dovuti ad **Archimede**, è dedicato in gran parte al calcolo di aree e volumi, e contiene la nota **formula** per l'area del triangolo che da Erone ha preso il nome.

Riportiamo, nella versione greca e tedesca di Wilhelm Schmidt:
Il calcolo (approssimato) dell'area dell'undecagono
Il calcolo del volume di un prisma

γ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΞ τῇ ΞΜ, ἡ δὲ ΕΝ τῇ ΝΖ· ἔσται ἄρα λόγος τῆς ΕΖ πρὸς ΜΝ, ὃν ϛ πρὸς ϑ, τουτέστιν ὃν β πρὸς γ. καὶ τοῦ ἀπὸ Ε⟨Ζ⟩ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ Μ⟨Ν⟩, ὃν β πρὸς γ· ὥστε πρὸς τὸ ΕΖΜ τρίγωνον, ὃν β πρὸς αλ· ὥστε πρὸς τὸ δεκάγωνον λόγον ἔχει, ὃν β πρὸς ιε. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ἀπὸ ΕΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ δεκάγωνον. συντεθήσεται δὲ οὕτως. τὰ ι ἐφ' ἑαυτά· γίγνεται ρ. ταῦτα ἐπὶ τὰ ιε· γίγνεται ,αφ. τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται ψν· τοσούτου ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δεκαγώνου.

κδ. Ἔστω ἑνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛΜ, οὗ ἑκάστη πλευρὰ μονάδων ι. εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἐμβαδόν. περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος, οὗ κέντρον ἔστω τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΝ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΗ. τὸ ἄρα ΖΗΞ τρίγωνον δύο ἑνδέκατα τοῦ ἑνδεκαγώνου ἐστίν. δέδεικται δὲ ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν, ὅτι λόγος τῆς ΖΞ πρὸς ΖΗ ὡς ἐγγιστα ὁ τῶν κε πρὸς ζ, ὁ δὲ τῆς ΞΗ πρὸς ΗΖ λόγος, ὃν κδ πρὸς ζ· τοῦ ἄρα ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ΖΗΞ τρίγωνον λόγος ὁ τῶν μϑ πρὸς πδ, τουτέστιν ὁ τῶν ζ πρὸς ιβ. τοῦ δὲ τριγώνου | πρὸς τὸ ἑνδεκάγωνον λόγος, ὃν β πρὸς ια· ὥστε πρὸς τὸ ἑνδεκάγωνον λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὃν ζ πρὸς ξϛ· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ἀπὸ ΖΗ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἑνδεκάγωνον. συντεθήσεται δὴ οὕτως· τὰ ι ἐφ' ἑαυτά· γίγνεται ρ. ταῦτα ἐπὶ τὰ ξϛ· γίγνεται ,ϛχ. τούτων τὸ ἕβδομον· γίγνεται ϡμβ ζ· τοσούτου ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνδεκαγώνου.

XXIV. Es sei $ABΓΔEZHΘKΛM$ ein gleichseitiges und gleichwinkliges Elfeck, von dem jede Seite $= 10$ sei. Zu finden seinen Inhalt. Man beschreibe um dasselbe einen Kreis, dessen Mittelpunkt N sein soll, und ziehe die Verbindungslinie ZN und verlängere sie bis $Ξ$, und ziehe die Verbindungslinie $ΞH$. Also ist das Dreieck $ZHΞ = \frac{2}{11}$ des Elfecks. Nun ist aber in der Schrift über die Geraden im Kreise nachgewiesen, daſs $ZΞ : ZH$ annähernd $= 25 : 7$ ist. Nun ist $ΞH : HZ = 24 : 7$; also ist ZH^2 zu dem Dreieck $ZHΞ = 49 : 84 = 7 : 12$. Das Dreieck verhält sich aber zu dem Elfeck wie $2 : 11$. So daſs ZH^2 zu dem Elfeck sich verhält wie $7 : 66$. Nun ist ZH^2 gegeben; also ist auch das Elfeck gegeben. Berechnet wird es folgendermaſsen.

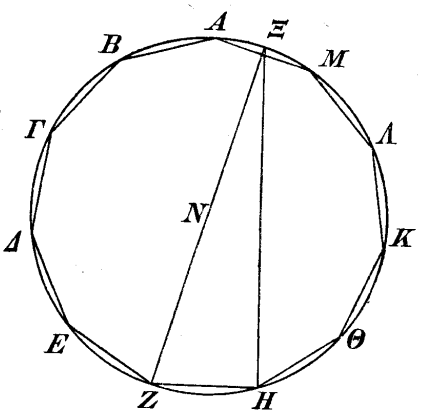


Fig. 29.

$$10^2 = 100$$
$$100 \times 66 = 6600$$
$$\frac{6600}{7} = 942\frac{6}{7}.$$

So groſs wird der Inhalt des Elfecks sein.

δοθὲν ἄρα καὶ τὸ *ΑΒΓΔΕΖΗΚΛΜΝ*. ὥστε δεήσει λαβόντα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ *ΑΒΓΔΕΖ* ἑξαγώνου πολλαπλασιάσαι ἐπὶ τὴν εἰρημένην κάθετον, τουτέστι τὰς

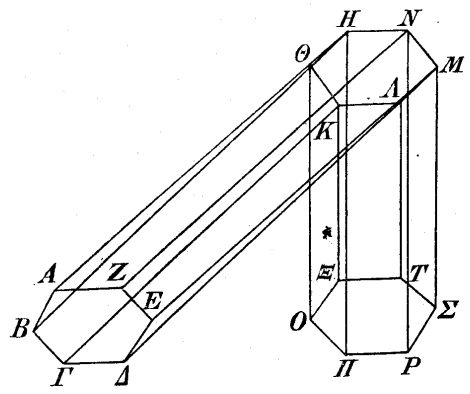


Fig. 46a.

η μονάδας, καὶ τοσούτου τὸ στερεὸν ἀποφήνασθαι. καὶ οἵαν δ' ἂν ἔχῃ βάσιν τὸ στερεὸν, ὡσαύτως μετρεῖται.

δ. | Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ *ΑΒΓΔ* παραλληλόγραμμον, κορυφὴ δὲ ἡ *ΕΖ* εὐθεῖα. καὶ ἔστω ἡ μὲν *ΑΒ* μονάδων ι, ἡ δὲ *ΒΓ* μονάδων η, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* κορυφῆς κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ *ΑΒΓΔ* ἐπίπεδον ἔστω μονάδων ε· εὑρεῖν τὸ στερεὸν τοῦ πρίσματος. συμπεπληρώσθω τὸ *ΑΒΓΔΕΖΗΘ* στερεὸν παραλληλεπίπεδον· τὸ ἄρα *ΑΒΓΔΕΖΗΘ* στερεὸν παραλληλεπίπεδον διπλάσιόν ἐστι τοῦ *ΑΒΓΔΕΖ*[*Η*] πρίσματος. δοθὲν δὲ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον·

δοθὲν ἄρα καὶ τὸ πρίσμα. ὥστε δεήσει τὰ η ἐπὶ τὰ ι πολλαπλασιάσαι καὶ τὰ γενόμενα ἐπὶ τὴν κάθετον,

gleich sind, so wird der Körper *ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛΜΝ* = dem Körper *ΞΟΠΡΣΤΗΘΚΛΜΝ* sein. Nun ist aber *ΞΟΠΡΣΤΗΘΚΛΜΝ* gegeben, also ist auch *ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛΜΝ* gegeben. Man wird daher den

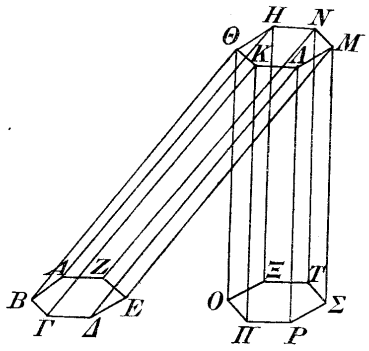


Fig. 46b (Rekonstruktion).

Inhalt des Sechsecks *ΑΒΓΔΕΖ* bestimmen und mit der genannten Senkrechten, d. h. 8, multiplizieren müssen und so grofs seinen Körperinhalt angeben müssen. Und welche Basis der Körper auch haben mag, er wird stets in derselben Weise gemessen.

IV. Es sei ein Prisma, dessen Basis das Parallelogramm *ΑΒΓΔ*, dessen Spitze die Gerade *ΕΖ* ist. Und es sei *ΑΒ* = 10, *ΒΓ* = 8. Die Höhe aber von der Spitze *ΕΖ* auf die Fläche *ΑΒΓΔ* sei = 5. Zu finden den Körperinhalt des Prismas. Man ergänze das Parallelepipedon *ΑΒΓΔΕΖΗΘ*. Es ist also das Parallelepipedon *ΑΒΓΔΕΖΗΘ* doppelt so grofs als das Prisma *ΑΒΓΔΕΖ*. Das Parallelepipedon aber ist gegeben, also ist auch das Prisma gegeben. Man wird daher 8 mit 10 multiplizieren und das Produkt mit der Kathete multiplizieren müssen,

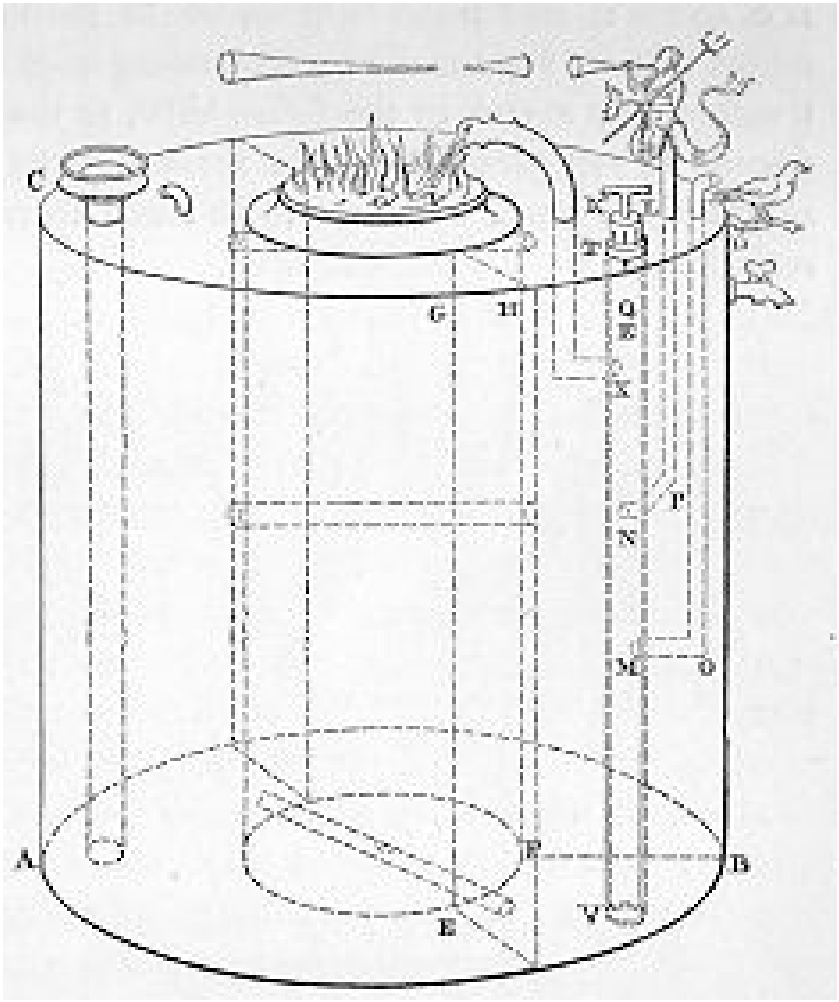
d. h. $80 \times 5 = 400$. Davon ist die Hälfte 200. So grofs wird der Inhalt des Prismas sein.

Pneumatica

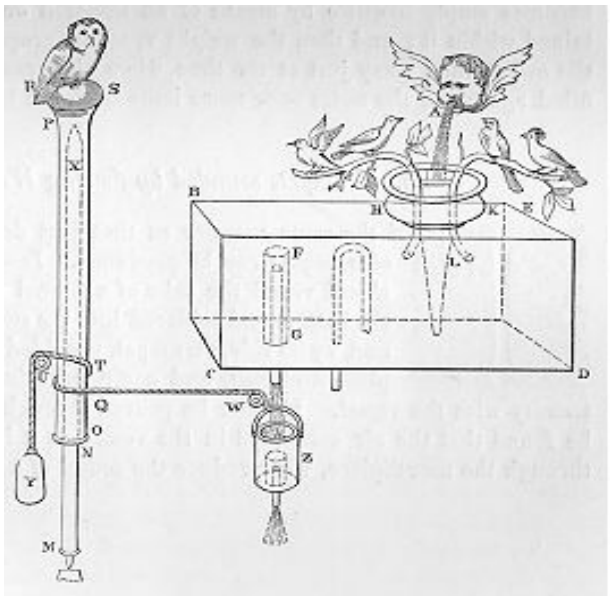
Quest'opera di **Erone di Alessandria** contiene un centinaio di invenzioni basate sulle leggi della pressione dei gas, in cui si sfrutta il moto dell'acqua e del vapore in sistemi, più o meno complessi, di vasi comunicanti. Si tratta di macchine di vario genere, alcune di utilità pratica, come il richiamo per uccelli o il dispositivo per mescolare acqua e vino in una concentrazione prestabilita, ed altre più fantasiose che, nelle intenzioni del loro creatore, devono suscitare meraviglia: grazie ad ingegnosi meccanismi idraulici Erone realizza suggestive **animazioni**, con animali che si abbeverano, uccelli che cantano, figure umane che danzano, suonano, versano acqua, e persino un **gioco**, ispirato alla mitologia, in cui, sollevando da terra una mela, si fa sì che Ercole colpisca una serpe con una freccia. Altri **congegni** sono ideati per il culto religioso: un fuoco acceso su di un altare antistante il tempio provoca l'apertura delle sue porte, ed un altro meccanismo fa sì che in quel momento una tromba si metta automaticamente a squillare.
Ma le invenzioni più importanti sono:

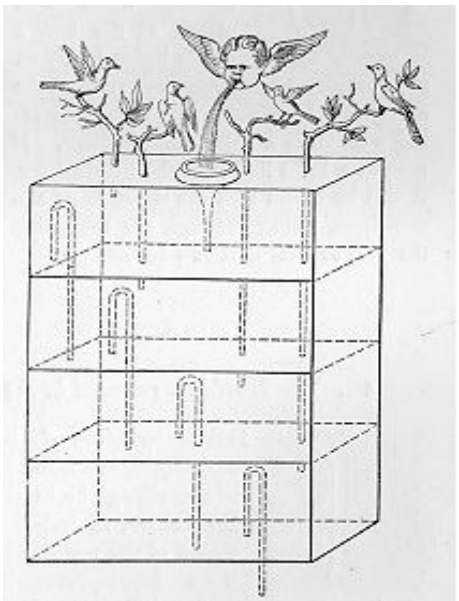
- l'***eolìpila***, una primitiva versione della turbina a vapore, cui si ispirarono, molti secoli più tardi, **Leonardo da Vinci** e **Giovanni Branca**
- la ***fontana di Erone***, una pompa idraulica, che sfrutta la pressione dell'aria per produrre un getto d'acqua;
- l'***orologio ad acqua***, cui l'autore aveva precedentemente dedicato un'opera in quattro libri, andata perduta;
- il ***termoscopio***, un primitivo strumento di misurazione del calore basato sulla variazione del livello dell'acqua contenuta in una boccia di vetro.

Le animazioni di Erone



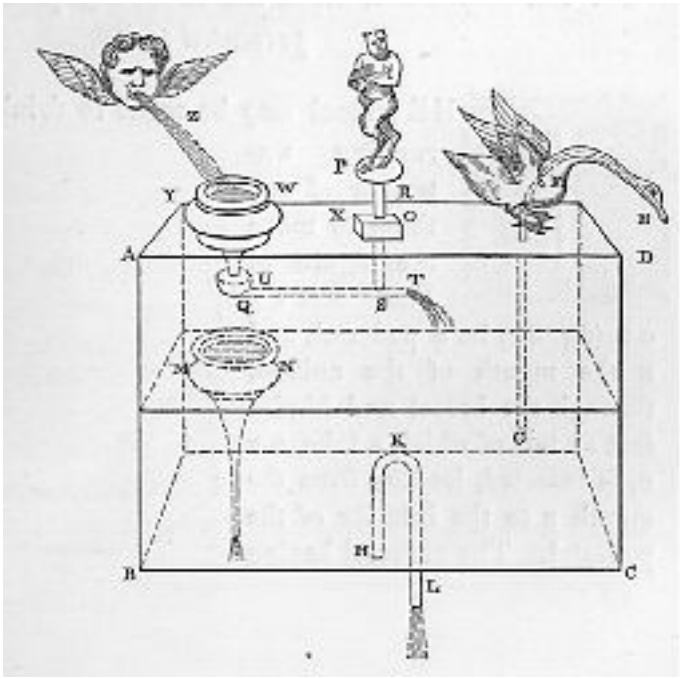
Versando del liquido in *C*, e girando il rubinetto *XT*, si può soffiare sul fuoco, far cantare l'uccello o far suonare la tromba del tritone



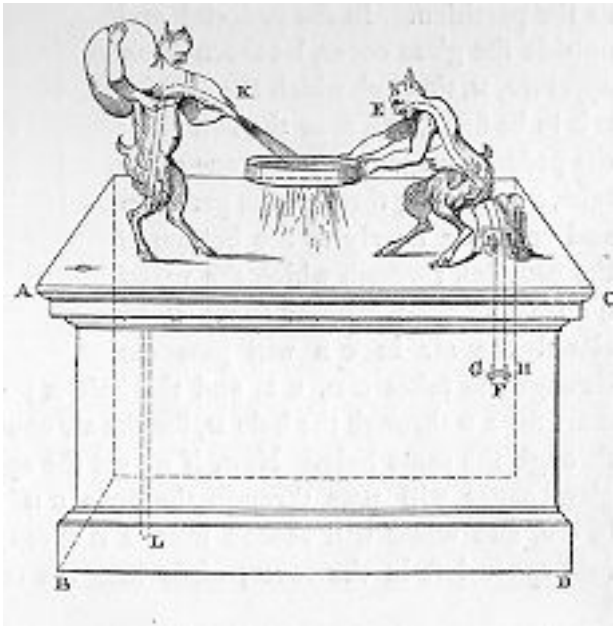


Il flusso d'acqua fa cantare gli uccelli

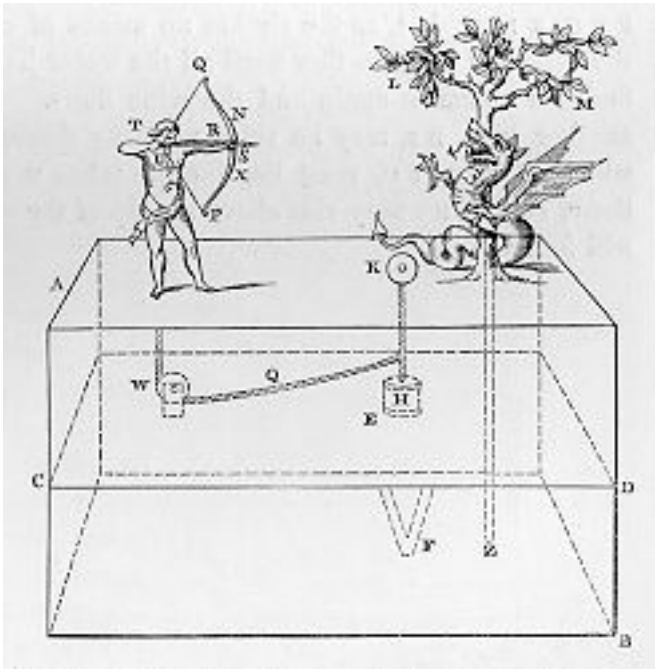
Girando la figurina di Pan, si può fare in modo che l'uccello beva o non beva



Satiri che versano acqua: il meccanismo funziona ad aria compressa

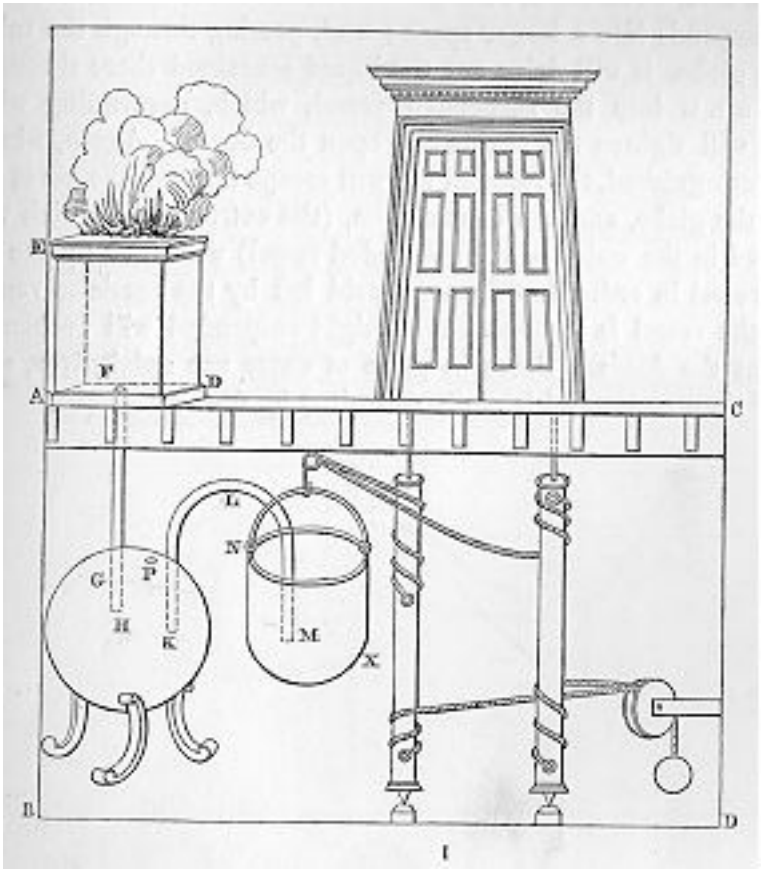


Il gioco di Ercole



Il piedistallo è formato da una scatola ermeticamente chiusa, divisa da un setto orizzontale *CD.* Lo spazio al di sopra di questo è riempito di aria, lo spazio di sotto è riempito di acqua. Di aria è pieno anche il vaso rovesciato *H,* che chiude l'apertura *E* del setto. Il vaso può scorrere, attraverso *E*, dentro un tronco di cono vuoto *F*, la cui base inferiore è aperta. La bocca del serpente comunica con un cannello, che pesca nell'acqua. Non appena si solleva la mela *K*, la funicella *Q* si tende, tirando la corda dell'arco e facendo scoccare la freccia. Nello stesso momento *H* si abbassa, spingendo l'aria dentro *F*. Da questo allora uscirà un certo volume di acqua, così che il livello del liquido nel cannello salirà, provocando la fuoriuscita di aria dalla bocca del serpente. Se questa sarà dotata di un fischietto, si udrà un sibilo.

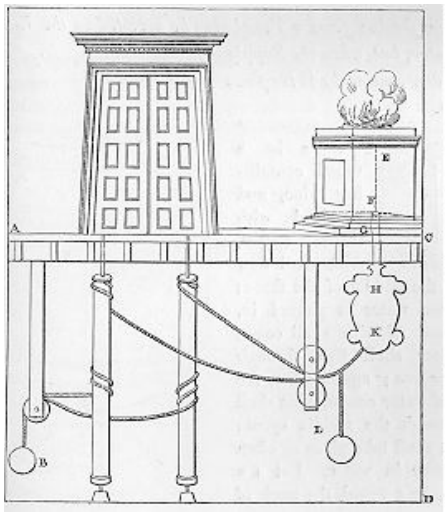
I congegni idraulici per il culto

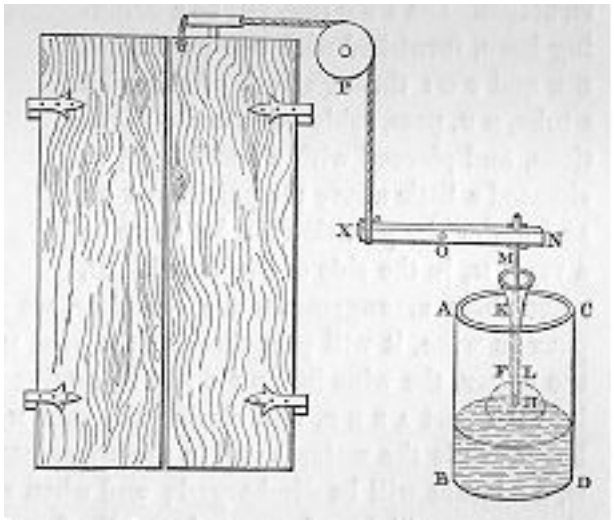


I

In questo dispositivo il fuoco acceso sull'altare riscalda l'aria contenuta nella boccia *H,* facendola espandere. Se la boccia è parzialmente riempita di acqua, questa verrà sospinta attraverso il tubo ricurvo *L* e finirà nel secchio *X*. Mano a mano che questo diventa più pesante, le corde cui è sospeso si tendono, facendo ruotare i cardini della porta del tempio.

Erone presenta una variante di questa invenzione, in cui l'aria riscaldata va a gonfiare una sacca di cuoio, la quale, a sua volta, solleva un peso.



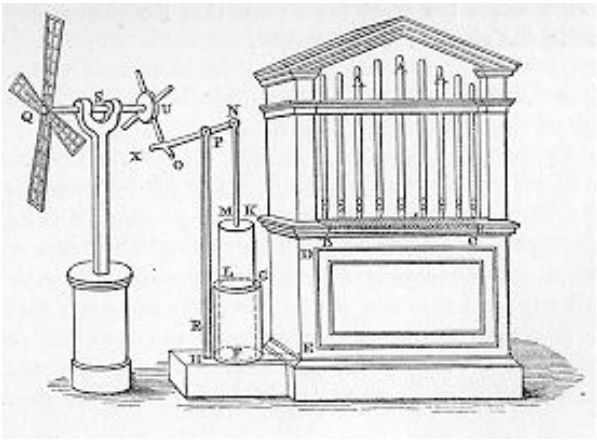


Ora si può fare in modo che, girando i cardini, allo stesso tempo un'altra corda si allenti, calando, come nella figura di destra, il bocchino di una tromba nell'acqua. L'aria che ne fuoriesce produrrà un suono.

Altri curiose attrezzature per templi inventate da Erone:

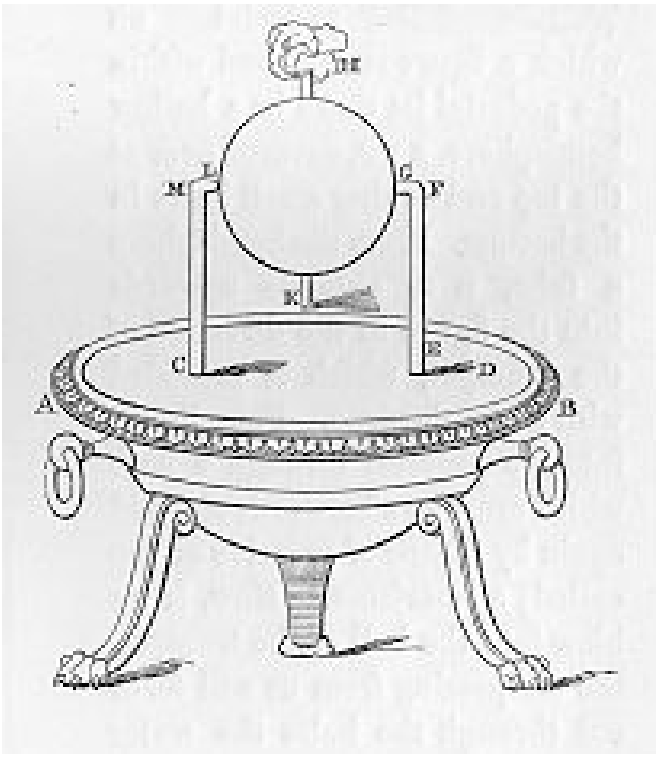


Accendendo il fuoco sull'altare il serpente si mette a sibilare e le figure umane versano vino.

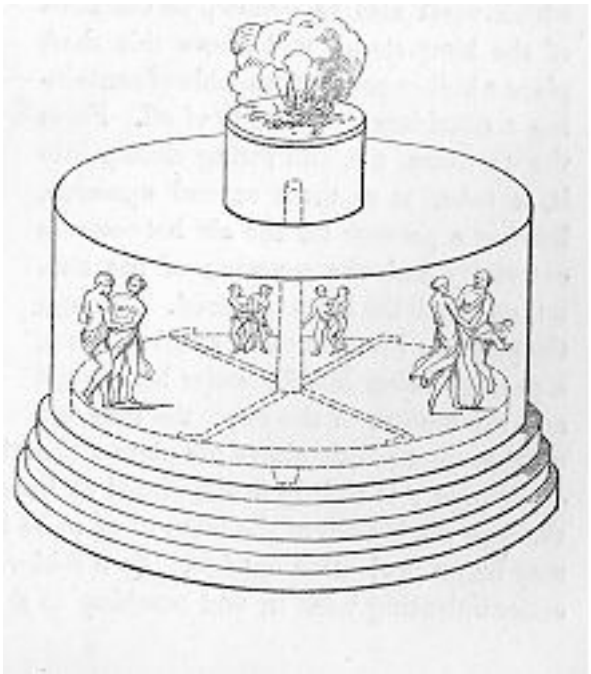


Un organo azionato da un mulino a vento

L’eolìpila

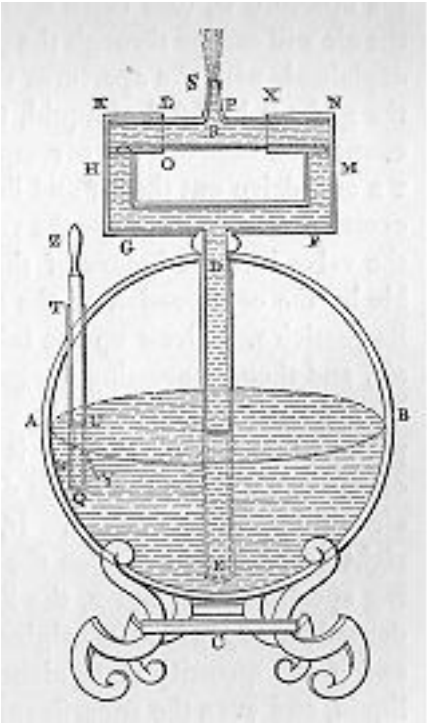


“Si ponga un calderone sul fuoco; una boccia ruoterà intorno ad un asse. Il fuoco è acceso sotto il calderone AB, contenente acqua, e chiuso dal coperchio CD; con questo comunica il tubo curvo EFG, la cui estremità è infilata dentro la boccia HK. Dalla parte opposta all’estremo G si collochi un asse LM, poggiante sul coperchio CD; la boccia sia dotata di due tubicini piegati a “L”, diametralmente opposti, e piegati in direzioni opposte […] Non appena il calderone si sarà riscaldato, il vapore, che entrerà nella boccia attraverso EFG, ne uscirà attraverso i tubicini, nella direzione del coperchio, causando la rotazione della boccia, come nel caso di figure danzanti.”



Il calore del fuoco provoca la rotazione delle coppie di danzatori

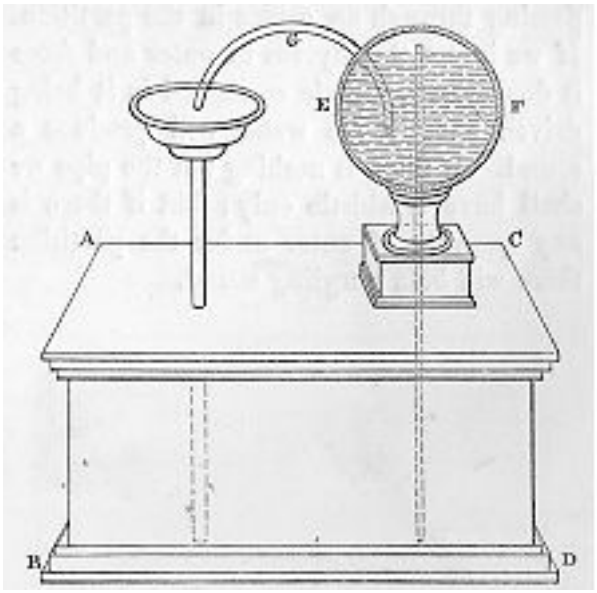
La fontana di Erone e il termoscopio



Il dispositivo in figura è dotato di un ugello *SP* per la fuoriuscita dell'acqua, e di un'apertura *Z* per l'entrata dell'aria: l'estremità *Q* è dotata di una valvola. Il tubo orizzontale *KN* presenta un foro *R*, e può essere ruotato in modo da chiudere *SP*.

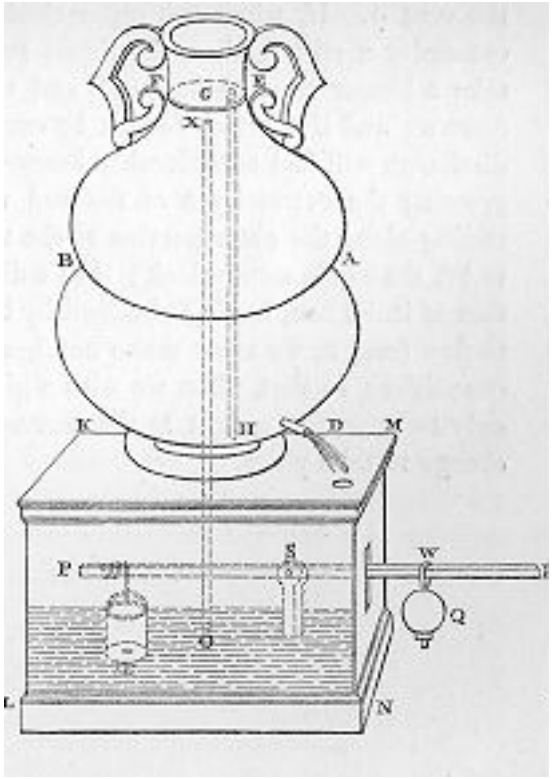
Immettendo una certa quantità di aria nella boccia, mentre l'ugello *SP* è chiuso, la pressione all'interno sarà maggiore di quella esterna: non appena si riaprirà *SP*, ne uscirà un getto d'acqua, tanto più violento e durevole, quanto maggiore sarà la quantità d'aria immessa. Se questa sarà abbastanza grande, tutto il liquido contenuto nella boccia uscirà.

Si può far salire la pressione dell'aria nella boccia anche riscaldandola. Erone sfrutta questo fenomeno nella fontana che funziona per azione dei raggi solari.



Se si sostituisce il tubo ricurvo della figura a lato con un cannello verticale sufficientemente lungo, l'innalzamento del livello dell'acqua nel cannello darà una misura della quantità di calore. Questo è il principio del **termoscopio**.

L'orologio ad acqua



La bocca del vaso della figura è chiusa da un setto *EF*, in cui è infilato un cannello *GH*, che termina poco sopra il fondo. Quest'ultimo è attraversato dal cannello *XO*, che poggia sulla superficie dell'acqua che riempie parzialmente il piedistallo. Nel liquido è immerso un piccolo recipiente *T*, col fondo forato, e sospeso ad una leva *F*, la quale poggia sul fulcro *S*. Dall'altro braccio pende un peso scorrevole *Q*.

Il vaso reca, nella parte inferiore, un ugello *D*.

Supponiamo che il vaso sia stato completamente riempito di acqua, e che la leva si trovi in equilibrio. In queste condizioni, l'aria non può in alcun modo entrare nel vaso: quindi niente esce da *D*. Se ora si sposta il peso *Q*, allontanandolo da *S*, il recipiente *T* si solleverà, trascinando con sé l'acqua in esso contenuta. Ciò farà momentaneamente scendere il livello del liquido nel piedistallo, scoprendo l'apertura *O* del cannello. Da qui l'aria potrà uscire, e un po' di liquido defluirà da *D*. Naturalmente, nel giro di pochi secondi l'acqua in eccesso uscirà dal foro di *T*, ripristinando la situazione iniziale. In quel momento il getto d'acqua cesserà.

Evidentemente lo spostamento di *Q* permette di determinare a priori la quantità di acqua che fuoriesce, ed usare il dispositivo come una clessidra o ***orologio ad acqua***.



***Sull'arte della costruzione degli automi* (*Peri automatopoietkes*)**

Questo trattato di Erone di Alessandria spiega come realizzare macchine per le rappresentazioni teatrali, quali, ad esempio, scenografie semoventi e marionette meccaniche. Il *teatro degli automi* era un genere di spettacolo molto apprezzato nell'Antica Grecia: i suoi realizzatori erano detti *taumaturghi,* cioè "artisti del meraviglioso" od "operatori di miracoli".

Teone di Alessandria (seconda metà del sec. IV d.C.)

È soprattutto grazie alla sua trascrizione degli ***Elementi*** di **Euclide** se quest'opera è giunta sino ai giorni nostri. Sulla versione di Teone si basa, ad esempio, la prima **edizione in lingua latina**, ad opera di Bartolomeo Zamberti (1505). Teone curò anche la riedizione dell'***Ottica*** di Euclide, rielaborò i trattati di catottrica di **Archimede** ed **Erone** e gli scritti di altri matematici greci. Fu anche studioso di astronomia, si interessò alle eclissi di sole e di luna, e redasse un commentario all'***Almagesto*** di **Tolomeo**. Fu lui ad introdurre in matematica il termine *analisi.* Sua figlia **Ipazia** passò alla storia come l'ultima esponente della **scuola matematica alessandrina**.

Ipazia (? – 415 d.C.)



Figlia di **Teone di Alessandria**, era una donna molto colta, che insegnava la filosofia di **Platone** ed **Aristotele**. Fu autrice di commentari alle opere di **Apollonio**, **Diofanto** e **Tolomeo**. Se si prescinde da Teano, la moglie di Pitagora, di cui nulla ci è pervenuto, Ipazia è la prima donna della storia della matematica, e, allo stesso tempo, l'ultimo esponente della **scuola alessandrina**.
A quel tempo l'Egitto faceva parte dell'Impero Romano, del quale, dall'anno 313, con l'editto di Costantino, il cristianesimo era diventato la religione ufficiale. Nel 392 l'imperatore Teodosio aveva bandito le religioni pagane, dando così in pratica il via alla distruzione della cultura greca. La stessa Ipazia cadde vittima dell'ondata di violento fanatismo religioso che ne conseguì: venne rapita e brutalmente assassinata.
Alla sua vita e alla sua tragica fine si è ispirato lo scrittore britannico Charles Kingsley (1819-1875), per il suo romanzo *Hypatia, or New Foes with an Old Face* (1853). Nel 1995 un'importante casa editrice statunitense ha pubblicato una sua biografia.

Una studiosa italiana, che si firma con lo pseudonimo di Caterina Contini, ha recentemente dedicato ad Ipazia un romanzo, in cui la storia personale della protagonista, i suoi sentimenti e la sua speculazione filosofica si intrecciano con le problematiche politiche e religiose degli ultimi anni dell'Impero Romano. La scrittrice così dipinge il rapporto tra Ipazia e suo padre:

"È notte fonda ad Alessandria. Tutti dormono, eccetto Ipazia. La casa è avvolta nella più completa oscurità e nel più profondo silenzio. Ipazia,

tutta sola, è seduta sulla torre e guarda il cielo. Osserva le stelle e i pianeti, guarda, calcola, pensa e ricorda. Quasi ogni sera, quando non c'era la luna, saliva quassù con Teone, suo padre. Sedevano l'uno accanto all'altra e guardavano insieme. Teone aveva preso quest'abitudine fin da quando lei era piccina: la portava sulla torre e le indicava col dito le stelle più grandi, i pianeti e le costellazioni. Avvicinava la testa alla sua, perché le due visioni collimassero, e poi le indicava gli oggetti astrali ad uno ad uno, nominandoli, e poi più tardi li indicava, in ordine sparso, per vedere se lei li ricordava."

(cit. da C. Contini, *Ipazia e la notte,* Longanesi & C., Milano 1999, pag. 17)

In un altro punto del libro l'autrice immagina una lezione di matematica ed astronomia impartita da Ipazia ad un vagabondo, capitato per caso nell'aula in cui la donna stava parlando di filosofia ai suoi allievi.

"[…] Tu hai ragione quando dici che senza aver tanto studiato, né letto gli uni i libri degli altri, gli uomini arrivano da soli alle stesse conclusioni. Ora ti farò vedere che, oltre ad essere un buon filosofo, cosa che hai appena dimostrato, sei anche un matematico ed un astronomo."
L'uomo resta di fronte ad Ipazia, un po' a malincuore, ma, al tempo stesso, incuriosito. Ipazia prende allora un sasso colorato e comincia a disegnare sulla lavagna, che di solito usa per le figure geometriche e i modelli cosmologici. Disegna la Terra, la Luna e il Sole, e traccia le orbite rispettive secondo il ***sistema tolemaico****; la Terra occupa il centro, il primo cielo sopra la terra è il cielo della Luna, ossia l'orbita lunare; poi ci sono le orbite dei pianeti e infine il Sole.*
"Partiamo da una posizione relativa di questi corpi celesti, a un momento dato. Se noi conosciamo le velocità rispettive di rivoluzione, possiamo calcolare le posizioni che Terra. Luna e Sole occuperanno dopo un certo tempo. È chiaro fin qui?"
Il vagabondo annuisce; è ancora perplesso, ma comincia ad appassionarsi al gioco. Piano piano, con pazienza, Ipazia lo conduce a fare i calcoli richiesti dal problema e a determinare un certo numero di posizioni successive. Finché, cosa stupefacente, si arriva a un momento in cui i tre corpi, la Luna, la Terra e il Sole si trovano quasi sulla stessa retta. Insieme, maestra, allievi e questo nuovo discepolo, sbalordito delle proprie capacità fino allora sconosciute, determinano il momento in cui questo avverrà: cinque anni, tre mesi e dieci giorni.

“Ci sarà un’eclisse parziale di Luna. La Terra infatti proietta un’ombra sulla Luna, pari alla porzione di Sole che copre al suo passaggio. Gli abitanti della Luna, se esistessero, vedrebbero un Sole oscurato, coperto dalla Terra. Io ho visto un’eclisse di sole, tanti anni fa, con mio padre. Era uno spettacolo terrificante e stupendo. Ma anche l’eclisse di Luna, sebbene meno spettacolare, è un fenomeno degno di attenzione.”
Ipazia si rivolge ora al vagabondo e gli sorride. “Bravo, hai dimostrato ottime capacità di calcolo e di intuizione. Hai indovinato la data di un’eclisse, un lavoro da astronomi molto avanzati negli studi. Ti do un appuntamento, anzi do un appuntamento a tutti noi. Tra cinque anni, tre mesi e dieci giorni saremo tutti qui, a verificare la giustezza della nostra previsione.”
Tutti sorridono, compiaciuti, e il vagabondo è addirittura radioso, per aver scoperto di se stesso cose che neppure aveva mai immaginato.
“Se io non fossi più in vita”, soggiunge Ipazia, quasi sottovoce, “non temete, sarò comunque con voi. Mi sentirete vicina, con lo sguardo rivolto al cielo, a contemplare la Luna e gli altri corpi celesti. Ogni volta che vi riunirete, a filosofare e a coltivare le scienze, io sarò in mezzo a voi.”

(ibid., pagg. 260-261)

Donne in matematica

La Scuola Matematica Alessandrina

La città di Alessandria fu fondata sul delta del Nilo nel 332 a.C. da Alessandro Magno, pochi anni dopo la conquista dell'Egitto da parte di suo padre Filippo il Macedone. Alla morte di Alessandro, l'Egitto divenne un regno indipendente sotto Tolomeo I *Soter* (il "salvatore"), che scelse Alessandria come capitale, la arricchì di palazzi e monumenti, e volle farne un importante centro per la diffusione della cultura ellenistica. Egli fondò l'Università e la Biblioteca, che richiamarono molti studiosi dagli ex-territori dell'Impero alessandrino. Il suo successore al trono Tolomeo II *Filadelfo* ("l'amante della sorella", Arsinoe, che sposò in seconde nozze), proseguì brillantemente l'opera, portando a più di 500.000 il numero di papiri complessivamente presenti nella Biblioteca e nel tempio di Serapide. Nel 30 a.C., a seguito della sconfitta di Antonio e Cleopatra nella battaglia di Azio, l'Egitto divenne parte dell'Impero Romano. Questo evento segnò l'inizio del declino della città, che fu accelerato, prima dall'avvento del Cristianesimo, e poi dall'ascesa di Bisanzio. La Biblioteca fu distrutta a più riprese: secondo la leggenda subì ben quattro incendi, l'ultimo dei quali, avvenuto nel 640 d.C. a seguito della conquista da parte degli arabi, la cancellò per sempre: si narra che, per ordine del califfo Omar I, gli ultimi libri furono destinati al riscaldamento dei bagni pubblici, circostanza che, però, non è mai stata storicamente accertata.

Nel periodo di massimo splendore, ad Alessandria fiorirono varie scuole, tra cui una di matematica, fondata da **Euclide**. Altri celebri esponenti furono: **Pappo**, **Apollonio**, **Menelao**, **Eratostene**, **Diofanto**, **Tolomeo**, **Erone**, **Teone**, **Ipazia**.

Curiosità Dopo tanti secoli, la biblioteca di Alessandria è stata finalmente ricostruita ed inaugurata nel 2000.



Euclide di Alessandria (ca. 300 a.C.)



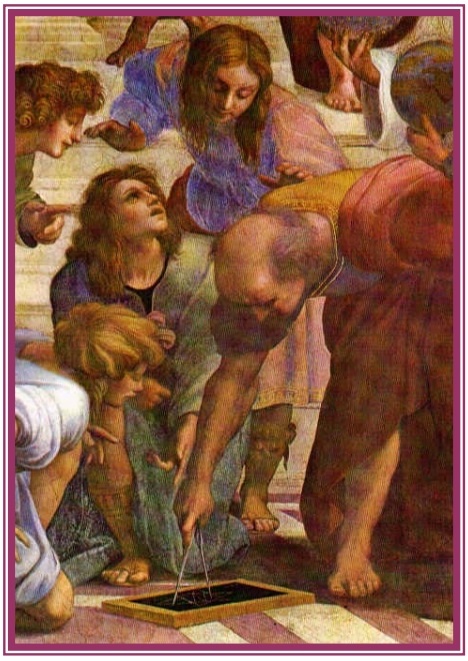
Solo da testimonianze indirette si riesce a collocare questo geometra egiziano in un periodo che coincide, pressappoco, con il regno di Tolomeo I. Egli fu infatti il primo direttore della Biblioteca di Alessandria. Si sa per certo che egli visse dopo Platone, ma prima di **Archimede**: quest'ultimo, infatti, lo cita nelle sue opere. La mancanza di dati storici precisi intorno a questo personaggio ha provocato clamorosi equivoci. Per molti secoli egli venne erroneamente identificato col filosofo Euclide di Megara, allievo di Socrate, assolutamente estraneo alle discipline matematiche. Anche il **Tartaglia** incorse in questo errore. In effetti, le uniche note biografiche che ci siano pervenute sono aneddoti riportati dagli scrittori antichi, come Proclo e Stobeo. Uno di questi narra che Euclide, rispondendo al re che gli aveva chiesto un modo semplice per imparare la geometria, pronunciò le seguenti parole: *"Non esiste una via regia che porti alla geometria"*. Altri autori, invece, attribuiscono la frase a **Menecmo**, che l'avrebbe rivolta al suo discepolo Alessandro Magno. Questa espressione racchiude comunque tutto il senso dell'opera euclidea: la geometria è il frutto di una laboriosa costruzione, eseguita con estremo rigore logico. Il punto di partenza è costituito da un insieme di oggetti e principi elementari dati a priori, tutto il resto è dedotto a posteriori attraverso una serie di passaggi. Così si potrebbe riassumere il contenuto del capolavoro di Euclide, l'opera in tredici libri intitolata ***Elementi***, che fu la bibbia della geometria fino all'Ottocento.

Ad Euclide vengono attribuiti altri scritti di vario argomento. Ce ne sono pervenuti solo quattro: il trattato sulla ***Divisione delle figure***, i ***Dati***, i ***Fenomeni*** e l'***Ottica***. Sono, invece, andate perdute le opere

Luoghi solidi, Luoghi superficiali, Le Coniche, Pseudaria e ***Porismi***. Il loro contenuto è per la maggior parte sconosciuto.

Euclide fu il fondatore della **Scuola Matematica Alessandrina**. Pochissimi matematici hanno avuto la sua fortuna: il suo nome è rimasto per sempre legato non ad un famoso teorema, come è avvenuto per **Pitagora**, né ad un nuovo potente metodo di studio, come è avvenuto per **Descartes**, ma, addirittura, ad un'intera disciplina: la geometria, che per quasi duemila anni è stata l'unica possibile, e che da lui ha preso il nome di **geometria euclidea**. Si pensi che le geometrie create nel 1800 ad opera di **Gauss**, **Bolyai**, e **Lobachevsky** sono citate come **geometrie non euclidee** e non con i nomi dei loro ideatori. Neppure **Einstein** ha conosciuto un destino tanto glorioso, mentre una sorte analoga a quella di Euclide è toccata a **Riemann**, ricordato per la **geometria Riemanniana**.

Quanto la figura di Euclide, per secoli, sia stata considerata emblematica, risulta anche da numerose testimonianze artistiche e letterarie. Dante Alighieri colloca Euclide *geometra*, insieme a Tolomeo, nel limbo, tra gli *spiriti magni*. Il pittore trecentesco Taddeo Gaddi lo raffigura come personificazione della Geometria nel suo affresco dedicato alle sette scienze. Raffaello, infine, lo ritrae nella *Scuola di Atene*, nell'atto di usare un compasso.



Per secoli la geometria di Euclide ha costituito una categoria filosofica a sé, è stata identificata con il metodo deduttivo che la caratterizza.

Così **Pascal**, ad esempio, contrappose l'*intelletto intuitivo,* basato sull'immediatezza del sentimento, all'*intelletto geometrico*, che procede ragionando su definizioni e principi. Un'analoga distinzione compì il **Leopardi**, per il quale l'aggettivo *geometrico* venne ad assumere una connotazione negativa: esso fu impiegato per designare le lingue dalle regole grammaticali rigorose e razionali, prive di libertà e di sfumature, e quindi poco *poetiche.*

Gli *Elementi* di Euclide

Questo trattato, in tredici libri, abbraccia vari argomenti della matematica pura. Esso, tra l'altro, contiene la prima sistemazione assiomatica che sia mai stata data ad una branca della matematica, che, in questo caso, è la geometria.
L'opera fu composta ad Alessandria, intorno al 300 a.C.. Lo straordinario merito del suo autore è messo in luce da due fatti di capitale importanza. In primo luogo va ricordato che i primi tentativi degni di nota di dare un'analoga sistemazione all'aritmetica furono compiuti solo alla fine dell'Ottocento. In secondo luogo si tenga presente che gli *Elementi* di **Euclide** furono la principale opera di riferimento per la geometria fino all'Ottocento. In essa troviamo una trattazione onnicomprensiva, che contempla simultaneamente quelle che oggi chiamiamo geometria affine, geometria metrica e geometria conforme.

Euclide rivolge la sua attenzione agli enti geometrici come oggetti che possono essere costruiti, con riga e compasso. La questione del disegno pare sia centrale nella geometria greca: i famosi tre problemi di **duplicazione del cubo**, **quadratura del cerchio** e **trisezione dell'angolo** riguardano, appunto, la possibilità di tracciare figure che possiedano esattamente certe misure assegnate.
L'opera di Euclide unisce l'interesse per l'applicazione pratica al rigore del ragionamento matematico astratto: essa comprende infatti sia proposizioni (enunciati dimostrabili) sia risoluzioni di problemi.

Tutte le citazioni si riferiscono alla traduzione di Frajese e Maccioni del testo ricostruito da Heiberg.

Il contenuto dell'opera

Il **Libro I** si apre con l'introduzione dei fondamenti della geometria euclidea:

- le ***Definizioni*** – 23 in tutto – presentano gli enti geometrici elementari, prima di tutti il punto (*"il punto è ciò che non ha parti"*) e la linea (*"linea è lunghezza senza larghezza"*). Seguono le nozioni di retta, superficie, angolo, figura, cerchio, triangolo, quadrilatero, e di parallelismo tra rette;
- i ***Postulati*** – che sono 5 – contenenti le proprietà fondamentali del punto, delle rette e del cerchio. L'ultimo dei postulati, noto anche come **postulato delle parallele**, darà da pensare ai matematici

delle epoche successive. Per secoli sopravvisse il sospetto, nutrito dallo stesso Euclide, che esso fosse, in realtà, già contenuto nei primi quattro. Molti cercarono, invano, di dimostrarlo. Solo nell'Ottocento, grazie ai contributi di **Gauss**, **Bolyai** e **Lobachevsky**, giunse la prova che il quinto postulato è, in realtà, indipendente dagli altri, e con essa la creazione delle prime **geometrie non euclidee**;

- le ***Nozioni comuni*** – 8 enunciati – che esprimono principi elementari sul confronto tra le aree di figure. Citiamo, ad esempio l'ottava nozione: *"Il tutto è maggiore della parte".*

La rimanente parte del **Libro I** è un elenco di proposizioni, ciascuna accompagnata dalla sua dimostrazione.

L'imbarazzo provato da Euclide di fronte al problema, irrisolto, del quinto postulato emerge chiaramente dal fatto che egli ne rinvia l'uso all'ultima parte del **Libro I**, utilizzandolo per la prima volta per provare la proposizione **29**.

È da notare che Euclide utilizza il termine "proposizione" non soltanto nella moderna accezione di "teorema". La **Proposizione 1**, ad esempio, così recita:

"Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero",

e, analogamente, la **Proposizione 46**:

"Descrivere un quadrato su una retta data."

Per Euclide "retta" o "retta terminata" significa "segmento". In questi due esempi, il testo si presenta dunque come l'enunciato di un problema di costruzione. La "dimostrazione" è, in questo caso, la descrizione del procedimento risolutivo. In realtà, anche quando Euclide dimostra una proposizione che si presenta sotto forma di un asserto vero e proprio, egli effettua una costruzione: aggiungendo, agli oggetti dati in partenza, opportuni punti e linee, egli realizza un disegno a cui può efficacemente applicare i postulati o le proposizioni stabilite in precedenza.

La costruzione è, per Euclide, unicamente quella effettuabile col solo ausilio di una riga (non graduata) e/o di un compasso. Non a caso questi sono spesso chiamati *strumenti euclidei*.

Le proposizioni del **Libro I** riguardano le prime proprietà e le costruzioni elementari relative a rette perpendicolari e parallele, ad angoli fra rette, a lati ed angoli di triangoli e parallelogrammi.

Vi sono contenute tutte le costruzioni fondamentali, vale a dire:

(a) bisecare un angolo (**Proposizione 9**);
(b) bisecare un segmento (**Proposizione 10**);
(c) condurre la perpendicolare ad una retta data da un punto della retta (**Proposizione 11**);
(d) condurre la perpendicolare ad una retta data da un punto esterno alla retta (**Proposizione 12**);
(e) costruire un triangolo i cui lati siano uguali a tre segmenti dati (**Proposizione 22**);
(f) condurre una parallela ad una retta data per un punto esterno dato (**Proposizione 31**).

Più avanti Euclide mostrerà che la costruzione (b) può essere generalizzata: è possibile, infatti, dividere un segmento in un numero qualunque di parti uguali, usando solo riga e compasso (**Libro VI, Proposizione 10**). Ciò non vale, invece, per la costruzione (a). La trisezione dell'angolo è irrealizzabile con gli strumenti euclidei, come ci assicura la moderna ***teoria di Galois***.

Molti teoremi stabiliscono confronti tra figure e tra grandezze, esprimendo uguaglianze, oppure disuguaglianze del tipo *"è maggiore di"* o *"è minore di"*.

La **Proposizione 4**, ad esempio, contiene un ben noto criterio di congruenza fra triangoli:

"Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo]."

Questo enunciato così lungo e complesso si compone di tre parti:

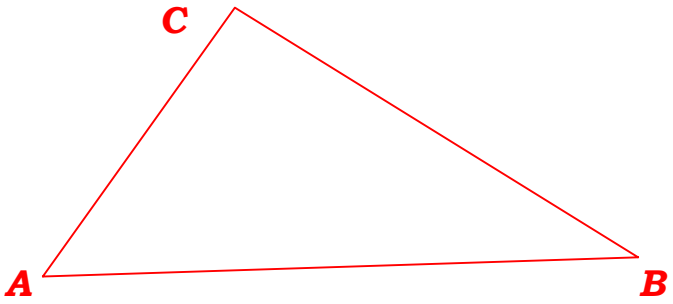
- due triangoli aventi in comune le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso fra gli stessi due lati hanno in comune anche la lunghezza del terzo lato (che Euclide chiama *base*);

- nelle stesse ipotesi, inoltre, i loro angoli sono ordinatamente uguali;

- i due triangoli [sono congruenti, e quindi] hanno la stessa area (v. **Nozione Comune VII**)

Un altro criterio di congruenza si trova più avanti:

Proposizione 26
"Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente."



In sostanza, l'enunciato afferma che il triangolo della figura è univocamente determinato una volta assegnati gli angoli in *A* e in *B* ed uno dei lati.

La **Proposizione 6** stabilisce invece uguaglianze tra angoli e lati di uno stesso triangolo:

"Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali fra loro."

Ne seguono altre che, invece, stabiliscono disuguaglianze. Ne riportiamo alcune:

Proposizione 16
"In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti."

Proposizione 17
"In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti."

Proposizione 18
"In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore."

Proposizione 20
"In ogni triangolo, la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente."

Quest'ultima è detta *disuguaglianza triangolare*.

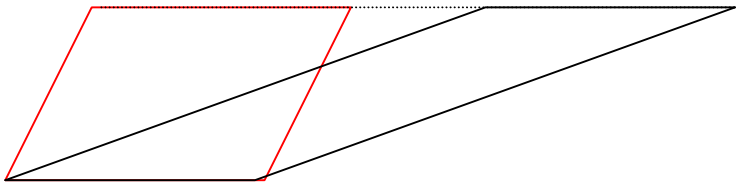
Proposizione 24
"Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base."

Questa proposizione si ricava dalla prima parte della **Proposizione 4** sostituendo l'uguaglianza con una maggiorazione. L'enunciato non va oltre, perché la maggiorazione non si estende alle aree, né agli angoli alla base, che, anzi, diminuiscono all'aumentare dell'angolo opposto.

Altre proposizioni (**14,15, 27–30)** riguardano le rette parallele e gli angoli formati da rette incidenti.

L'ultima parte del **Libro I** è dedicata al confronto tra le aree di quadrilateri e triangoli.
L'enunciato della **Proposizione 35** è il seguente:

"Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro."



Con il moderno linguaggio della geometria, diremmo, più in generale, che le aree vengono lasciate invariate da certe trasformazioni affini.

La **Proposizione 44** propone una costruzione:

"Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogramma uguale ad un triangolo dato."

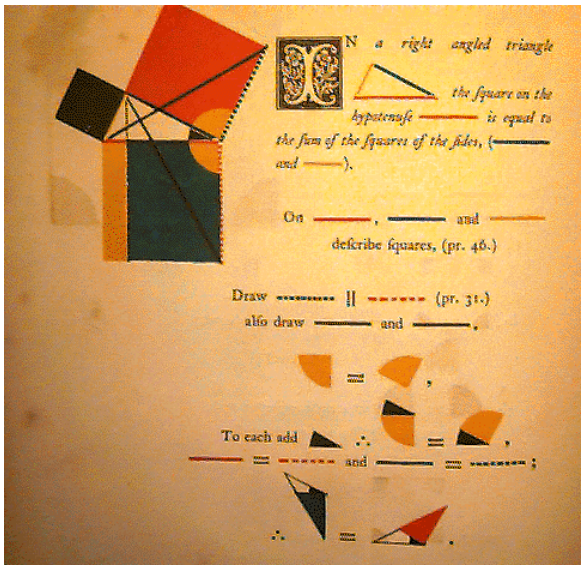
Se l'angolo dato è un angolo retto, e quindi il parallelogramma cercato è un rettangolo, la relativa costruzione fornisce la risoluzione geometrica dell'equazione di primo grado:

$$ax = A,$$

dove a è la lunghezza del segmento ("retta") dato, e A è l'area del triangolo. Questo problema è detto *applicazione parabolica.* Altri problemi di area si tradurranno, nel **Libro II**, in equazioni di secondo grado.

La **Proposizione 47** è il **Teorema di Pitagora**, la **Proposizione 48** è il suo inverso:

"Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto."
Questo teorema verrà generalizzato nel **Libro II**.



Il Teorema di Pitagora in Euclide: pagina tratta dal progetto grafico *"Euclid in colors"*

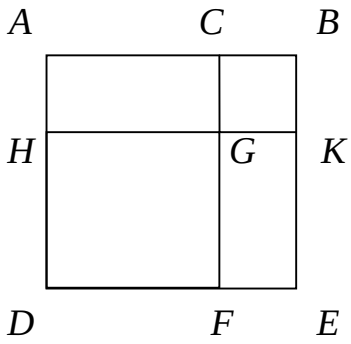
I libri successivi al primo sono articolati in due parti: *Definizioni* e *Proposizioni.*

Il **Libro II** contiene 14 proposizioni sulle aree dei rettangoli. Alcune di queste si traducono in identità algebriche di secondo grado. Le corrispondenti costruzioni geometriche vennero in effetti utilizzate da molti autori, fino al Medio Evo, per risolvere le equazioni quadratiche. Ne forniscono un esempio i metodi del matematico arabo **Al-Khuwarizmi**. Nella sua opera principale ***al-jabr w'al-muqabala*** egli effettua il completamento del quadrato, ossia applica la formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (*)$$

nella sua traduzione geometrica, data dalla **Proposizione 4**:

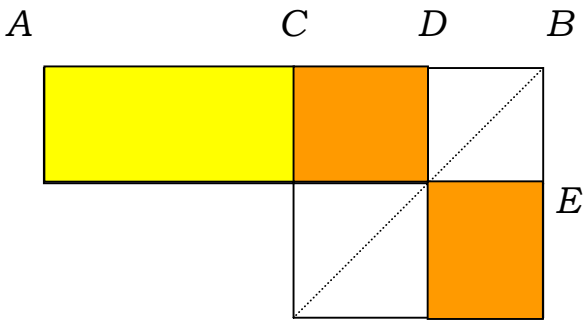
"Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti [stesse]."



La retta dell'enunciato è il segmento *AB*, che viene diviso nei segmenti *AC* e *CB*. Il quadrato di tutta la retta è *ABED*, i quadrati delle parti sono *HGFD* e *CBKG*, i rettangoli *ACGH* e *GKEF* coincidono col rettangolo delle parti. Ponendo *a=AC* e *b=CB* ed uguagliando opportunamente le aree, si ottiene la (*).
Il poligono *ABEFGH* prende il nome di *gnomone*: questa figura è ricorrente in tutto il **Libro II**. Essa ricompare, ad esempio, nella **Proposizione 5**:

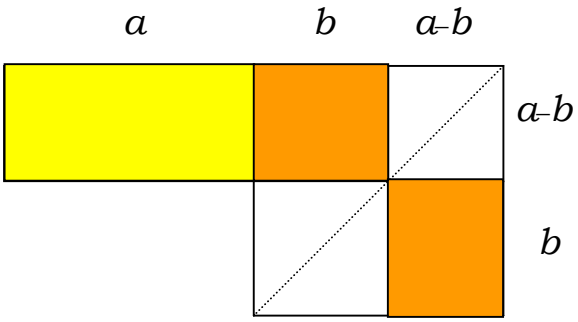
"Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta."

L'enunciato richiede di suddividere il segmento *AB* mediante due punti *C* e *D*, ove *C* è il suo punto medio. L'uguaglianza tra le aree è messa in evidenza dal disegno, ove *DB=BE.*



Se si pone $a=AC$ e $b=CD$, si ottiene la nota identità algebrica:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \quad (**)$$



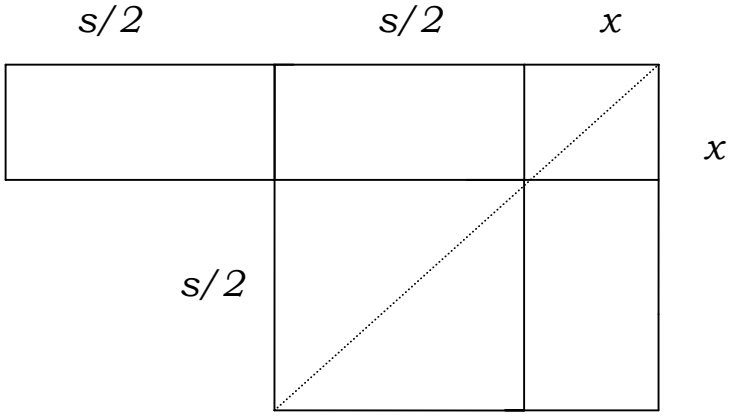
Essa permette di risolvere il problema della cosiddetta *applicazione ellittica:* determinare un rettangolo di cui siano note l'area A e la somma delle lunghezze dei lati. Detta s la somma dei lati e detta x la lunghezza di uno dei lati, e posto $a = s/2$, $b = s/2 - x$, dalla (**) si ricava:

$$(s-x)x = (s/2)^2 - (s/2 - x)^2,$$

ove il primo membro è pari ad A. Sostituendo si trova facilmente la formula risolutiva:

$$x = s/2 + \sqrt{(s/2)^2 - A}$$

La **Proposizione 6**, di contenuto analogo, corrisponde al disegno



ed alla formula:

$$(s+x)x = (s/2 + x)^2 - (s/2)^2,$$

che risolve il problema dell'*applicazione iperbolica*. Questa chiede di determinare un rettangolo di cui siano note l'area e la differenza delle lunghezze dei lati; *s* indica questa differenza, *x* uno dei lati incogniti, in modo che *s+x* sia l'altro. Allora $A=(s+x)x$. La formula risolutiva e quindi

$$x = -s/2 + \sqrt{(s/2)^2 - A}$$

Fibonacci si servì dell'applicazione ellittica per risolvere l'equazione

$$4x - x^2 = 3,$$

e dell'applicazione iperbolica per risolvere

$$x^2 + 4x = 140.$$

Per la prima equazione egli pose $A=3$ e $s=4$ e trovò $x=3$, per la seconda pose $A=140$ e $s=4$, e trovò $x=10$.

Altri enunciati si riferiscono a problemi algebrici di secondo grado. Ne ricordiamo solo un altro ancora: la **Proposizione 14**, che richiede di

"Costruire un quadrato uguale ad una figura rettilinea data"

dove per "figura rettilinea" si intende poligono. Questa, che sfrutta e completa la **Prop.44** del **Libro I**, viene applicata nella ***Géométrie*** di **Descartes**, per **l'estrazione geometrica della radice quadrata** di un numero reale positivo fissato.
La **Proposizione 7** corrisponde alla formula

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

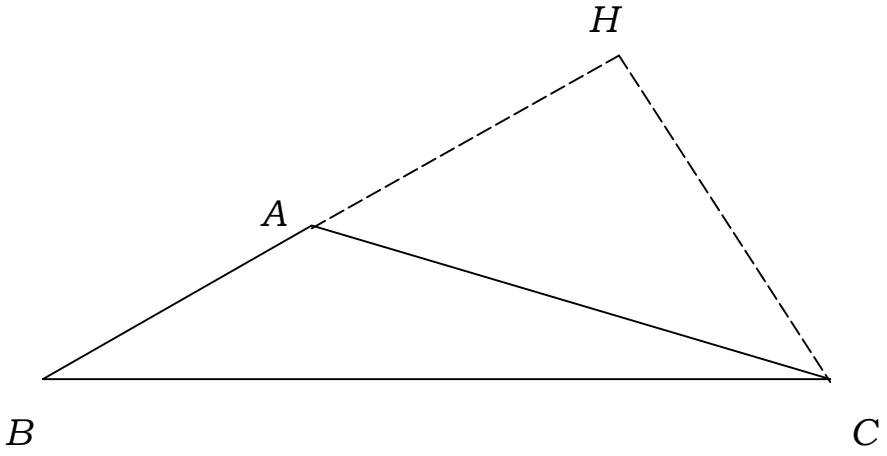
la **Proposizione 8** combina quest'ultima con la **Proposizione 4**: la sua traduzione algebrica è

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2 .$$

Analoghe costruzioni geometriche con gnomoni furono impiegate da **Cardano**, **Ferrari**, **Tartaglia** e **Bombelli** per la risoluzione di equazioni algebriche di terzo e quarto grado.

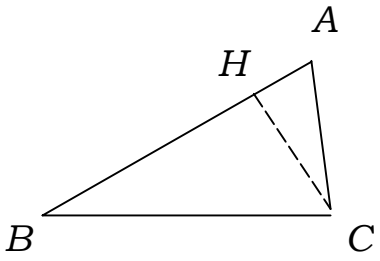
Al termine del **Libro II** Euclide dimostra due proposizioni, che estendono il Teorema di Pitagora al caso di triangoli aventi un angolo ottuso e due acuti (triangoli *ottusangoli*) e al caso di triangoli aventi tre angoli acuti (triangoli *acutangoli*):

Proposizione 12
"Nei triangoli ottusangoli il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo ottuso e dalla proiezione dell'altro su esso."



In simboli: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB \cdot AH.$

Proposizione 13
"Nei triangoli acutangoli il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è minore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo acuto, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo acuto e dalla proiezione dell'altro su esso."



In simboli: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AH.$

Il triangolo rettangolo rappresenta il caso limite fra triangolo ottusangolo e triangolo acutangolo. Il fattore correttivo $2\,AB \cdot AH$, che nel triangolo ottusangolo ha segno positivo e nel triangolo

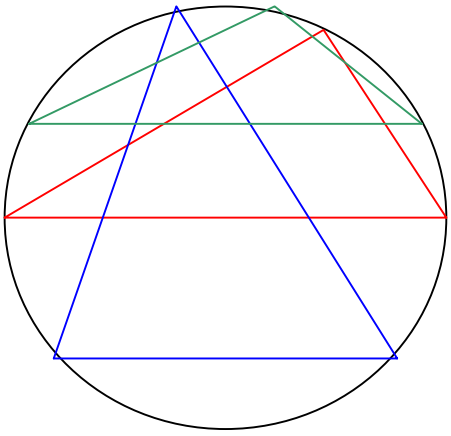
acutangolo ha segno negativo, nel triangolo rettangolo è nullo. D'altra parte, se l'angolo in A è retto, allora il punto H coincide con A, per cui AH ha lunghezza nulla.

Le Proposizioni 12 e 13 si possono riassumere in un'unica formula, nota come ***teorema del coseno***:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB.$$

Il **Libro III** (37 proposizioni) riguarda il cerchio. Vengono studiate le proprietà delle intersezioni tra cerchi e tra cerchi e rette, così come le relazioni tra le misure degli angoli (al centro e alla circonferenza), degli archi, delle corde e le aree dei segmenti circolari.
Tuttavia il lettore degli ***Elementi*** non dovrà aspettarsi dal **Libro III** il calcolo dell'area del cerchio o costruzioni di figure equivalenti, come invece avviene nel libro precedente per i triangoli ed i quadrilateri. Il motivo dovrebbe essere chiaro, alla luce di quanto osservato all'inizio sugli strumenti euclidei: la formula dell'area del cerchio comprende il numero π, che non può in alcun modo essere costruito con riga e compasso. Euclide forse lo immaginava, ma la dimostrazione di questo fatto – l'impossibilità di **quadrare il cerchio** – fu data solo nel 1882 da Lindemann. Una determinazione numerica approssimata dell'area del cerchio, basata su metodi geometrici, sarà data da **Archimede**.

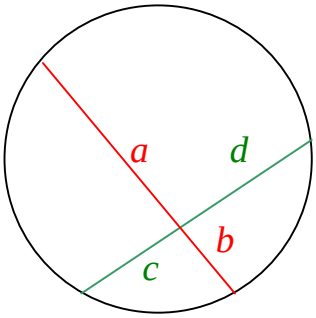
Nel **Libro III** Euclide dà anche le costruzioni fondamentali, come *"Trovare il centro di un cerchio dato"* (**Proposizione 1**), oppure *"Condurre da un punto dato una retta che sia tangente ad un cerchio dato"* (**Proposizione 17**).



La **Proposizione 31** contiene il famoso **Teorema di Talete**, secondo cui un angolo alla circonferenza inscritto in un semicerchio è sempre retto. Essa stabilisce, inoltre, che l'angolo è sempre minore (rispettivamente maggiore) di un retto se è inscritto in un segmento circolare maggiore (rispettivamente minore) di un semicerchio.

La **Proposizione 35** riguarda i rettangoli costruiti su due corde incidenti:

"Se in un cerchio due corde si tagliano fra loro, il rettangolo compreso dalle parti dell'una è uguale al rettangolo compreso dalle parti dell'altra."



ab=cd

Un altro enunciato sulle corde del cerchio sarà successivamente scoperto da **Tolomeo**, che lo riporterà nel suo ***Almagesto***. D'altronde la parte matematica dell'opera tolemaica è quasi interamente dedicata al calcolo delle corde in funzione dell'arco sotteso (*teoria delle corde*).

Il **Libro IV** (16 proposizioni) mostra come **costruire poligoni regolari**, che Euclide chiama "equilateri e equiangoli", e precisamente:

- il triangolo (**Proposizione 2**);
- il quadrato (**Proposizione 6**);
- il pentagono (**Proposizione 11**);
- l'esagono (**Proposizione 15**);
- il pentadecagono, cioè un poligono regolare avente 15 lati (**Proposizione 16**).

Si può osservare che il triangolo ed il quadrato erano già stati costruiti nel **Libro I** a partire dalla lunghezza dei loro lati, rispettivamente nelle **Proposizioni 1** e **46**. Qui il problema viene posto in maniera diversa: si richiede di inscrivere o circoscrivere un poligono regolare avente un certo numero di lati ad un cerchio assegnato. All'epoca non erano note altre costruzioni di poligoni regolari, a parte quelle che potevano essere ricavate da quelle esistenti bisecando gli angoli. Così, ad esempio, un decagono regolare poteva essere realizzato a partire da un pentagono inscritto in un cerchio: i sui vertici si ottengono, infatti, come punti medi degli archi sottesi ai lati del pentagono. Ora noi sappiamo che esistono molti altri poligoni regolari costruibili con riga e compasso: sono quelli verificanti il **criterio di Gauss**.

Il **Libro V** (25 proposizioni) è ancora a contenuto geometrico, ma è di ispirazione aritmetica: vi viene esposta la teoria delle proporzioni tra grandezze, che verrà ulteriormente sviluppata nel **Libro VIII** (27 proposizioni) e nel **Libro IX**. Il contenuto è in parte tratto da **Eudosso di Cnido**.
Euclide così descrive il concetto di proporzione, nella terza delle definizioni che compaiono all'inizio del **Libro V**:

"Rapporto fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità."

La prima serie di proposizioni (**1–6**) contiene le proprietà fondamentali dei multipli. Le restanti proposizioni riguardano, invece, più propriamente, i rapporti (quozienti) tra numeri.
Il linguaggio euclideo è fatto di frasi intere e non di parole miste a simboli ed abbreviazioni: Nesselmann parlerebbe di **algebra retorica**.
Per il lettore contemporaneo il testo di alcune proposizioni, in cui le identità algebriche sono tutte descritte a parole, può risultare alquanto ostico:

Proposizione 1
"Se si danno quantesivoglia grandezze che siano rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze, una delle prime grandezze è tante volte multipla della corrispondente delle altre grandezze quante volte anche la somma delle prime sarà multipla della somma delle seconde."

La traduzione in simboli è la seguente: dati un numero intero positivo m ed altri numeri $a_1, a_2, \ldots, a_k$, si ha che

$$ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_k = m(a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

Ecco un altro esempio, tratto dalla seconda parte:

Proposizione 24
"Se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza lo stesso rapporto che una terza ha rispetto ad una quarta, e pure una quinta grandezza ha rispetto alla seconda lo stesso rapporto che una sesta rispetto alla quarta, anche la somma della prima e della quinta avrà lo stesso rapporto rispetto alla seconda che la somma della terza e della sesta rispetto alla quarta."

Il significato è il seguente:

$$\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ \\ E : B = F : D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (A + E) : B = (C + F) : D$$

Il concetto di proporzione sarà alla base dell'estetica classica e rinascimentale. L'architetto romano **Vitruvio** imposterà la sua dottrina della bellezza su precisi rapporti numerici, imitato, in questo, dal genio quattrocentesco di **Leon Battista Alberti**. **Pacioli** scriverà il trattato ***De Divina Proportione***. D'altronde nella **teoria musicale pitagorica** l'armonia era espressa da determinate proporzioni tra gli intervalli musicali. Questo principio rimase praticamente inalterato attraverso i secoli. Lo ritroviamo, ad esempio, in **Boezio** ed in **Descartes**.

Nel **Libro VI** (33 proposizioni) la teoria delle proporzioni viene applicata al confronto tra le lunghezze di segmenti ed allo studio delle figure simili.

La **Definizione I** dice:
"Sono figure rettilinee simili quante abbiano gli angoli, uno ad uno, rispettivamente uguali, e proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali."

La **Proposizione 2** è il noto teorema, dovuto a Talete, sulla proporzionalità dei segmenti intercettati da rette parallele, che, tra l'altro, è alla base della **prospettiva**:

"Se in un triangolo si conduce una retta parallela ad uno dei lati, essa divide proporzionalmente i [due altri] lati del triangolo; e se due lati di un triangolo sono divisi proporzionalmente, la retta che congiunge i punti di divisione sarà parallela al lato del triangolo."

Vengono anche enunciati i principali criteri di similitudine fra triangoli, come, ad esempio, nella

Proposizione 6
"Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati comprendenti i due angoli uguali, i triangoli saranno fra loro

equiangoli: avranno cioè rispettivamente uguali gli angoli opposti ai lati omologhi."

La traduzione nel nostro linguaggio è: *due triangoli sono simili se hanno due lati proporzionali e hanno uguale l'angolo da essi formato.*

Euclide qui sviluppa le intuizioni avute dal matematico e filosofo presocratico **Talete,** che pare sia stato il primo a riconoscere lo stretto legame tra la nozione di "forma" di una figura e la proporzionalità tra le misure.

Nello stesso libro vengono anche indicati i procedimenti che consentono di risolvere le proporzioni geometricamente.

I tre principali problemi sono:

(a) la costruzione della quarta proporzionale: $a:b = c:x$ (**Prop.12**);
(b) la costruzione della media proporzionale: $a:x = x:b$ (**Prop.13**);
(c) la costruzione della **sezione aurea**: $a:x = x:(a–x)$ (**Prop.30**).

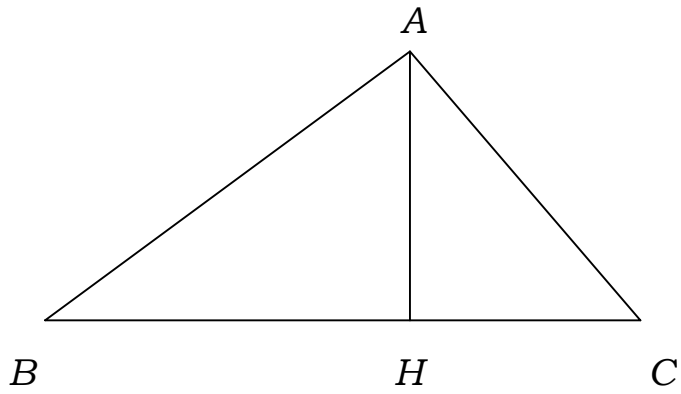
Non è difficile vedere che essi equivalgono ad altrettanti problemi di aree di quadrati e rettangoli: basta trasformare le proporzioni in uguaglianze fra prodotti. Il problema (a), in particolare, non è che una riscrittura dell'applicazione parabolica, di cui abbiamo parlato in relazione al **Libro II**; gli altri due sono problemi di secondo grado.
Il problema (b) può essere generalizzato attraverso la nozione di *proporzione continuata,* che verrà trattata nel **Libro VIII** e ripresa nel **Libro IX**: si tratta di una sequenza di proporzioni tali che il quarto termine della precedente coincide col primo termine della successiva. Il più semplice esempio di proporzione continuata è

$$a:x = x:y = y:z$$

Le quantità x e y si dicono le *due medie proporzionali* di a e b. Il problema di determinarle equivale ad un'equazione di terzo grado: secondo quanto stabilito dalla teoria di Galois, esso non è dunque risolubile geometricamente per mezzo degli strumenti euclidei. Esso equivale al problema della duplicazione del cubo, che, dopo la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio, conclude la terna dei grandi problemi geometrici dell'antichità. Una costruzione, effettuata con l'ausilio di particolari curve, è riportata da Descartes nella ***Géométrie***.

La **Proposizione 8** riguarda i triangoli simili:

"Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto sulla base, la stessa perpendicolare divide il triangolo in due triangoli simili a tutto quanto il triangolo e fra loro."



I triangoli *ABC, ABH, AHC* sono simili. Essi hanno dunque i lati ordinatamente proporzionali, per cui:

$$BC : AB = AB : BH$$

$$BC : AC = AC : HC$$

Se ne ricavano le identità

$$AB^2 = BC \cdot BH$$
$$AC^2 = BC \cdot HC,$$

che oggi vanno sotto il nome di *Primo Teorema di Euclide.* Analogamente si prova il *Secondo Teorema di Euclide:*

$$AH^2 = BH \cdot HC.$$

Il **Libro VII** (39 proposizioni) riguarda le proprietà di divisibilità fra numeri interi. Le **Definizioni del Libro VII** costituiscono una sorta di breve dizionario aritmetico.

La trattazione comprende le nozioni di massimo comune divisore, minimo comune multiplo e di **numero primo**. I principali risultati sono:

- la **Proposizione 2**, che presenta l'***algoritmo euclideo*** per la determinazione del massimo comune divisore di due numeri;

- la **Proposizione 31**, che asserisce che *"ogni numero composto ha per divisore un numero primo"* (v. ***teorema fondamentale dell'aritmetica***);
- la **Proposizione 33,** che si riferisce al procedimento di riduzione di una frazione ai minimi termini;
- la **Proposizione 34**, che mostra come determinare il minimo comune multiplo di due numeri.

È probabile che il contenuto di questo libro sia stato in parte tratto dagli studi di **Archita di Taranto**.

Il **Libro IX** (36 proposizioni) contiene la dimostrazione che esistono infiniti numeri primi (**Proposizione 20**), oltre ad un criterio per trovare **numeri perfetti** (**Proposizione 36**).

Il **Libro X** è il più lungo e complesso dell'opera. Consta di ben 115 proposizioni sulla commensurabilità ed incommensurabilità di numeri e grandezze geometriche: secondo la definizione riportata da Euclide, due quantità sono dette commensurabili se il loro rapporto è un numero razionale. Alla difficoltà dell'argomento trattato si aggiunge un'esposizione alquanto ostica, come anche il Fibonacci rilevò in uno dei suoi opuscoli. **Simone Stevin**, un matematico olandese del 1500, definì questo libro addirittura "la croce dei matematici".

L'esistenza di grandezze incommensurabili (noi diremmo: irrazionali) era già nota alla scuola di **Pitagora**: fu uno dei suoi membri a scoprire che il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili. La **dimostrazione** di ciò è implicitamente contenuta nella **Proposizione 2**.
Il **Lemma I** dà la formula per trovare tutte le **terne pitagoriche**: esso si basa essenzialmente sulla **Prop. 8** del **Libro II** e sulle **Prop. 1,2** del **Libro IX**.

Le grandezze incommensurabili studiate da Euclide nel **Libro X** sono essenzialmente riconducibili a 13 tipi diversi, e sono tutte esprimibili in termini di radici quadrate e delle quattro operazioni. Esse sono tutte costruibili con riga e compasso. Ne citiamo solo due, che ricompariranno in seguito: la terza dell'elenco è l'*apotome* di a e b, esprimibile nella forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, la nona è la *minore* di a e b, data da

$\sqrt{a-\sqrt{b}}$

L'ultima parte dell'opera è dedicata principalmente alla geometria solida.

Gli argomenti del **Libro XI** (39 proposizioni) sono: le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, gli angoli solidi e le proprietà dei prismi.
Il **Libro XII** (18 proposizioni) ed il **Libro XIII** (18 proposizioni) riguardano, per la maggior parte, i volumi di piramidi, coni, cilindri e sfere. Queste grandezze vengono confrontate, ancora una volta, dal punto di vista delle proporzioni e della commensurabilità.
Nel caso dei solidi di rotazione, non potendo far intervenire il numero π, è giocoforza ragionare solo in termini relativi, come nelle seguenti proposizioni:

Proposizione 10
"Ogni cono è la terza parte del cilindro che abbia la sua stessa base ed uguale altezza". (**dimostrazione**)

Proposizione 18
"Le sfere stanno fra loro in ragione triplicata rispetto a quella dei propri diametri."

Quest'ultimo enunciato, in linguaggio moderno, si traduce come: "il rapporto tra i volumi di due sfere è pari al rapporto fra i cubi dei loro diametri".

Ci si può chiedere come Euclide abbia potuto dimostrare risultati di questo tipo senza ricorrere alle formule esatte per i volumi. L'idea è quella di ricondursi a volumi di solidi di poliedri opportunamente scelti.
Per la **Proposizione 18**, ad esempio, Euclide immagina di inscrivere, nelle due sfere, due poliedri simili: egli dimostra poi che il rapporto tra i volumi delle sfere è uguale al rapporto fra i volumi dei poliedri, e conclude utilizzando le proprietà di questi ultimi.

Il **Libro XIII** si apre con una serie di proposizioni relative alla sezione aurea, prosegue con lo studio di alcune grandezze legate ai poligoni regolari, e si chiude con la **Proposizione 18**, che stabilisce i rapporti tra gli spigoli dei cinque **poliedri regolari**. Si ha la viva sensazione che questo enunciato sia una sorta di traguardo finale dell'opera, che tutto quanto lo precede ne sia la preparazione. In effetti in esso confluisce il materiale di un po' tutti i libri. Anche l'oscuro **Libro X** vi

è presente: il rapporto tra lo spigolo del dodecaedro ed il diametro della sfera circoscritta è pari all'*apotome*

$$\sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{1}{12}}$$

l'analogo rapporto per l'icosaedro è la *minore*

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}}}$$

La fortuna dell'opera

Quanto a numero di edizioni, gli *Elementi* di Euclide sono secondi solo alla Sacra Bibbia. È proprio grazie alle numerose trascrizioni succedutesi nei secoli anteriori all'invenzione della stampa se il trattato ci è pervenuto nella sua integrità: un destino toccato, purtroppo, solo a poche altre opere scientifiche dell'antichità. È pur vero che il testo di cui disponiamo ha subito varie modifiche successive da parte dei commentatori. Le principali fonti sono:
– i manoscritti tratti dalle lezioni di **Teone di Alessandria**, su cui si basa la prima edizione in greco che abbia visto la luce in Europa, a Basilea, nel 1533;
– alcune traduzioni in arabo, da cui furono tratte, a partire dal sec. XII, le prime versioni latine. La prima di cui si abbiano notizie certe è quella del dotto inglese **Adelardo di Bath**, effettuata intorno al 1120 d.C., e basata su testi da lui rinvenuti durante i suoi viaggi in Spagna e nel Vicino Oriente Un'altra traduzione, dovuta a **Giovanni Campano**, è contenuta nella prima edizione a stampa degli *Elementi,* che fu realizzata a Venezia nel 1482.

Nel 1505 appare, sempre a Venezia, un'altra **versione latina**, ad opera di **Bartolomeo Zamberti**, cui segue, nel 1509, la versione di **Luca Pacioli**. La più importante traduzione latina è quella di **Commandino da Urbino** (1572), che ne trasse una **versione italiana** (1575).
Non esistono, invece, traduzioni di epoca romana: gli *Elementi* non godettero di grande favore presso i Romani, che prediligevano i manuali di carattere pratico. Non a caso le prime versioni di cui si abbia notizia risalgono agli ultimi anni dell'Impero, in cui il declino politico coincide con il risveglio dell'interesse per le scienze. Pare che

anche Boezio ne abbia scritta una: ma di essa sono rimaste soltanto alcune tracce apocrife.

La prima edizione in volgare italiano è l'***Euclide Megarense*** (1543) del **Tartaglia**: questi, come la maggior parte dei precedenti autori, commise un errore storico confondendo Euclide con il filosofo Euclide di Megara.
Nel corso dei secoli si susseguirono molte altre versioni nelle principali lingue europee: esse rappresentano le tappe di una lunga ricerca filologica compiuta dai vari autori per riavvicinarsi, progressivamente, al testo originale. In Italia **Vitale Giordano** pubblicò l'***Euclide Restituto***, **Gerolamo Saccheri**, nel 1733, diede alle stampe l'***Euclides ab omni naevo vindicatus***, che, tra l'altro, comprendeva un tentativo di dimostrare il **postulato delle parallele**.

Nell'Ottocento **Enrico Betti** e **Francesco Brioschi** pubblicano una **versione didattica** dell'opera, in cui le proposizioni di Euclide vengono prese come spunto per numerosi esercizi.

Le costruzioni di Mascheroni

Le costruzioni di Steiner

Gli "Elementi" di Pascal

Gli *Elementi* nell'arte:
Gli Elementi di Pittura di L.B. Alberti
Punto linea superficie di W. Kandinsky

L'*Euclide Restituto* di Vitale Giordano

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Propoſitione.

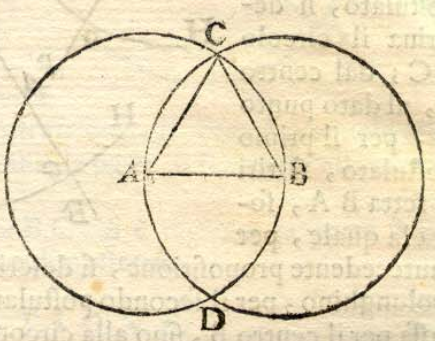
Sopra di qualunque data retta linea terminata, deſcriuere vn triangolo equilatere.

Eſpoſitione

Sia data qualſiuoglia retta linea terminata A B, ſopra la quale ſi voglia deſcriuere vn triangolo equilatere.

Coſtruttione.

Si faccia centro in vno degli eſtremi della retta data A B, come in A, e coll'interuallo A B, per il terzo poſtulato, ſi deſcriua il circolo C B D: di nuouo ſi faccia centro nell'eſtremo B, e col medeſimo interuallo B A, per il terzo poſtulato, ſi deſcriua il circolo C A D. Perche A B è ſemidiametro del circolo C B D, ed ancora del circolo C A D, perciò cade dentro dell'vno, e l'altro circolo; per la qual coſa parte d'vn circolo cade dentro dell'altro, e per l'annotatione dopo la 36. definitione, i circoli, e loro circonferenze ſi ſegano ſcambieuolmente. Sia dunque la loro interſegatione doue ſi voglia, come in C, & D, dal punto C alli centri A, & B, per il primo poſtulato, ſi tirino le rette C A, C B. Dico che il trilatere A B C è triangolo equilatere.



Dimoſtratione.

Perche nell'antecedente coſtruttione, intorno al centro A, s'è deſcritto il circolo C B D, e le rette linee A B, A C, ſono tirate dal medeſimo centro A alla medeſima circonferenza C B D, per la decimaquinta definitione, la retta A C è vguale alla retta A B. Similmente, perche il punto B, nella coſtruttione, è fatto centro del circolo C A D, e le rette linee B A, B C ſono tirate dal medeſimo centro B alla medeſima circonferenza C A D, per la decimaquinta definitione, ſarà la retta C B, vguale alla retta A B; mà fù dimoſtrata la retta A C vguale alla medeſima A B, ſarà, per il primo aſſioma, A C vguale alla retta C B; e tutti trè i lati A B, B C, C A ſono frà di loro vguali. Quel triangolo, che hà trè lati vguali, per la vigeſimaterza definitione, è triangolo equilatere; mà il triangolo A B C, per quel, che s'è dimoſtrato, hà trè lati vguali; il triangolo dunque A B C è triangolo equilatere.

Concluſione.

Per la qual coſa, ſopra qualunque data retta linea terminata, ſi può deſcriuere vn triangolo equilatere, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

Propoſitione.

Dato vn punto, e data vna retta linea terminata, ſi può dal dato punto tirare vna retta linea vguale alla retta data.

Eſpoſitione

Sia dato il punto A, e la retta linea terminata B C, ſi vuole dal dato punto A tirare vna retta linea vguale alla retta data B C.

Confronta: **La stessa pagina** nell'***Euclide Megarense*** del **Tartaglia**

Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web

Vitale Giordano
Euclide Restituto
Roma, 1680

Un'edizione rielaborata ed arricchita degli ***Elementi*** di **Euclide**. Il libro, di cui è interessante il **frontespizio**, esordisce con la definizione della matematica come quella parte della filosofia che riguarda la quantità continua e discreta. Essa si compone di quattro discipline: geometria, aritmetica, armonica e astronomia.
I teoremi sono esposti in una forma particolare: viene prima dato l'enunciato *(Proposizione)*, poi lo stesso viene parafrasato *(Esposizione)* con l'ausilio di figure *(Costruzione),* infine si passa alla *Dimostrazione* ed alla *Conclusione*. Si veda, ad esempio, **il Problema I, Proposizione I** del Libro I.

EVCLIDE
RESTITVTO
OVERO
GLI ANTICHI ELEMENTI GEOMETRICI
Riſtaurati, e facilitati
DA
VITALE GIORDANO
DA BITONTO.

Lettore delle Matematiche nella Reale Accademia
ſtabilita dal RE' CRISTIANISSIMO in Roma.

LIBRI XV.

Ne i quali principalmente ſi dimoſtra la compoſitione delle
proportioni ſecondo la definitione datane
dal ſuo antico Autore.



IN ROMA, Per Angelo Bernabò. M.DC.LXXX.
Con Licenza de' Superiori.

Gli *Elementi* di Euclide

Libro IV
PROPOSIZIONE 2

Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equiangolo rispetto, ad un triangolo dato.

Siano ABC il cerchio dato, e DEF il triangolo dato; si deve dunque iscrivere nel cerchio ABC un triangolo equiangolo rispetto al triangolo DEF.

Si conduca GH tangente in A al cerchio ABC, si costruisca sulla retta AH, e con vertice nel suo punto A, l'angolo HAC uguale all'angolo DEF; sulla retta AG, e con vertice nel punto A di essa, si costruisca l'angolo GAB uguale all'angolo DFE, e si tracci la congiungente BC.

*Poiché dunque una retta AH è tangente al cerchio ABC, e dal punto di contatto A è stata tracciata nel cerchio la corda AC, l'angolo HAC è uguale all'angolo alla circonferenza ABC iscritto nel segmento circolare alterno ABC. Ma l'angolo HAC è uguale all'angolo DEF, per cui anche gli angoli ABC, DEF sono uguali (**Nozione comune I**); per lo stesso motivo pure gli angoli ACB, DFE sono uguali; pure l'angolo rimanente BAC è quindi uguale all'altro angolo rimanente EDF.*

Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un triangolo equiangolo rispetto ad un triangolo dato. - Come dovevasi fare.

Gli *Elementi* di Euclide
Libro I

DEFINIZIONI

I. **Punto** è ciò che non ha parti.
II. **Linea** è lunghezza senza larghezza.
III. **Estremi** di una linea sono punti.
IV. **Linea retta** è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).
V. **Superficie** è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. **Estremi** di una superficie sono linee.
VII. **Superficie piana** è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).
VIII. **Angolo piano** è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.
IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'**angolo** si chiama **rettilineo**.
X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è un **angolo retto**, e la retta innalzata si chiama **perpendicolare** a quella su cui è innalzata.
XI. **Angolo ottuso** è quello maggiore di un retto.
XII. **Angolo acuto** è quello minore di un retto.
XIII. **Termine** è ciò che è estremo di qualche cosa.
XIV. **Figura** è ciò che è compreso da uno o più termini.
XV. **Cerchio** è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè, sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.
XVI. Quel punto si chiama **centro** del cerchio.
XVII. **Diametro** del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.
XVIII. **Semicerchio** è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E **centro** del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
XIX. **Figure rettilinee** sono quelle comprese da rette, vale a dire: **figure trilatere** quelle comprese da tre rette, **quadrilatere** quelle comprese da quattro e **multilatere** quelle comprese da più di quattro rette.

XX. Delle figure trilatere, è **triangolo equilatero** quello che ha i tre lati uguali, **isoscele** quello che ha soltanto due lati uguali, e **scaleno** quello che ha i tre lati disuguali.

XXI. Infine, delle figure trilatere, è **triangolo rettangolo** quello che ha un angolo retto, **ottusangolo** quello che ha un angolo ottuso, ed **acutangolo** quello che ha i tre angoli acuti.

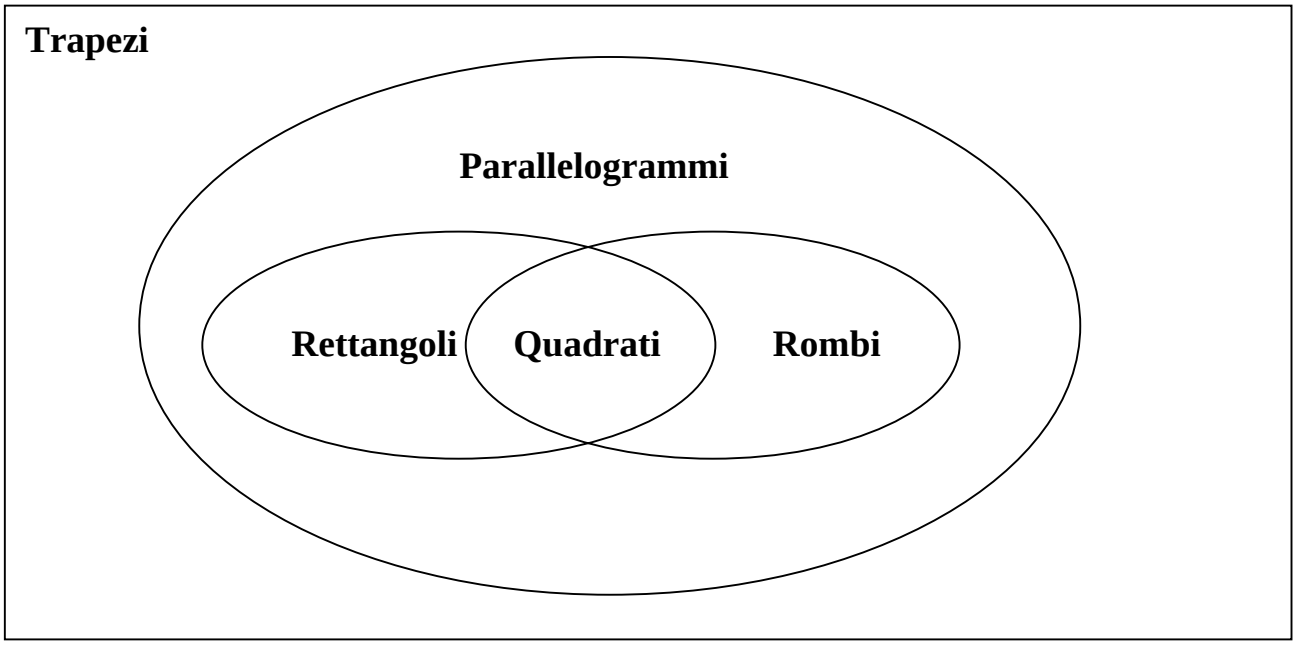
XXII. Delle figure quadrilatere, è **quadrato** quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, **rettangolo** quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, **rombo** quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, **romboide** quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera, né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino **trapezi**.

XXIII. **Parallele** sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Alcune di queste definizioni sono diverse da quelle in uso al giorno d'oggi.

Una di queste è la XX. Negli attuali testi di scuola è definito *isoscele* un triangolo che ha due lati uguali (viene a cadere l'avverbio *soltanto*), viene, cioè, compresa la possibilità che tutti e tre i lati siano uguali. Secondo questa definizione, quindi, diversamente da quanto stabilito da **Euclide**, ogni triangolo equilatero è isoscele.

Un discorso analogo vale per i quadrilateri. Quello che Euclide chiama romboide è un parallelogramma che non è né un quadrato, né un rettangolo, né un rombo. Nel significato moderno, un rettangolo è un parallelogramma avente i lati perpendicolari, un quadrato è un rettangolo avente i lati uguali, un rombo è un parallelogramma avente i lati uguali. Per Euclide i trapezi sono tutti i quadrilateri che non sono parallelogrammi: anche qui si riscontra una differenza rispetto alla definizione corrente, che richiede solo il parallelismo tra due lati. Per noi tutte queste nozioni sono dunque legate tra loro, nel modo illustrato in figura:



Secondo la definizione XXII di Euclide, invece, le quattro nozioni corrispondono a quattro insiemi disgiunti. È da rilevare, comunque, che nella versione di Heiberg e Menge, cui si fa riferimento in questa parte, comparirà, nei libri successivi, il termine parallelogramma usato nell'accezione moderna.

Le Definizioni del Libro VII

Wassily Kandinsky
Punto linea superficie

*"Il **punto geometrico** è un'entità invisibile. Deve quindi essere definito come un'entità immateriale. Pensato materialmente, il punto equivale a uno zero.*
Ma in questo zero si nascondono diverse proprietà, che sono "umane". Noi ci rappresentiamo questo zero – il punto geometrico – come associato con la massima concisione, cioè con un estremo riserbo, che però parla. In questo modo, nella nostra rappresentazione, il punto geometrico è il più alto e assolutamente l'unico legame fra silenzio e parola.[…] E perciò il punto geometrico ha trovato la sua forma materiale, in primo luogo, nella scrittura – esso appartiene al linguaggio e significa silenzio.[…] Il punto è la forma più concisa nel tempo.

*"La **linea geometrica** è un'entità invisibile. È la traccia del punto in movimento, dunque un suo prodotto. Nasce dal movimento – e precisamente dalla distruzione del punto, della sua quiete estrema, in sé conchiusa. Qui si compie il salto dallo statico al dinamico.*
La linea è, quindi, la massima antitesi dell'elemento pittorico originario – il punto. La linea può essere definita come elemento secondario.[…]

Se una forza esterna muove il punto in una qualsiasi direzione, abbiamo il primo tipo di linea, in cui la direzione presa rimane invariata e la linea ha l'inclinazione a correre dritta all'infinito.
*Questa è la **retta** che, quindi, nella sua tensione, rappresenta la forma più concisa dell'infinita possibilità di movimento. […]*

Possiamo osservare tre tipi fondamentali di rette. Tutte le altre rette rappresentano solo delle deviazioni da questi tipi.

1. *La forma più semplice è l'**orizzontale**. Nella rappresentazione che se ne fa l'uomo, essa corrisponde alla linea o alla superficie sulla quale egli si trova o si muove, […] ed essa può venir definita come la forma più concisa della infinita possibilità di movimento freddo.*

2. *Completamente opposta a questa linea, sotto l'aspetto esterno ed interno, è la **verticale**, che forma con essa un angolo retto; nella verticale la piattezza viene sostituita dall'altezza, e la freddezza dal calore. Così possiamo definire la verticale, la forma più concisa della infinita possibilità di movimento caldo.*

3. *Il terzo tipo della retta è la **diagonale**, che, in forma schematica, si distacca dalle altre due, formando con ciascuna un identico angolo e con ciò mostrando una medesima inclinazione verso ambedue; ciò determina il suo suono interno – unione, in ugual misura, di freddezza e di calore. Perciò: la forma più concisa della infinita possibilità di movimento freddocaldo."*

[…]

*Le forme più semplici delle **linee spezzate** sono costituite da due parti e sono il risultato di due forze che hanno arrestato la propria azione dopo un solo urto. Ma questo semplice processo crea una differenza importante tra le linee rette e le linee spezzate: in queste ultime si ha un contatto molto più intenso con la superficie, la linea spezzata porta già in sé qualcosa che appartiene alla natura della superficie. […] Le differenze fra le innumerevoli linee spezzate dipendono esclusivamente dall'ampiezza degli angoli, perciò possono essere divise in tre tipi schematici:*

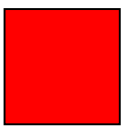
*a) ad **angolo acuto** – 45°*
*b) ad **angolo retto** – 90°*
*c) ad **angolo ottuso** – 135°*

[..]

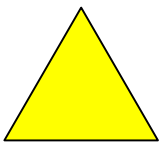
Dei tre angoli tipici il più oggettivo, e perciò anche il più freddo, è l'angolo retto.[…]
L'angolo che ha la massima tensione, e perciò anche il più caldo, è l'angolo acuto. […]
Superato l'angolo retto, si indebolisce la tensione in avanti.

[..]

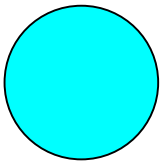
*L'elemento freddocaldo del **quadrato** e la sua chiara natura di superficie ci suggeriscono subito il rosso, che rappresenta un grado intermedio tra giallo e azzurro e ha le proprietà freddocalde.*



*[…] Se mettiamo davanti le aperture di due angoli [di 60° gradi] abbiamo un **triangolo equilatero** – 3 angoli acuti, attivi, che ci rimandano al giallo.*



[…] L'angolo ottuso perde sempre più in aggressività, penetrazione, colore, ed è perciò lontanamente affine a una linea senza angoli, che […] produce […] il ***cerchio****. E l'elemento passivo dell'angolo ottuso, la quasi insussistente tensione in avanti, dà a questo angolo una leggera colorazione azzurrina."*



(cit. da W. Kandinsky, *Punto linea superficie,* trad. di M. Calasso, Adelphi, Milano 1999)

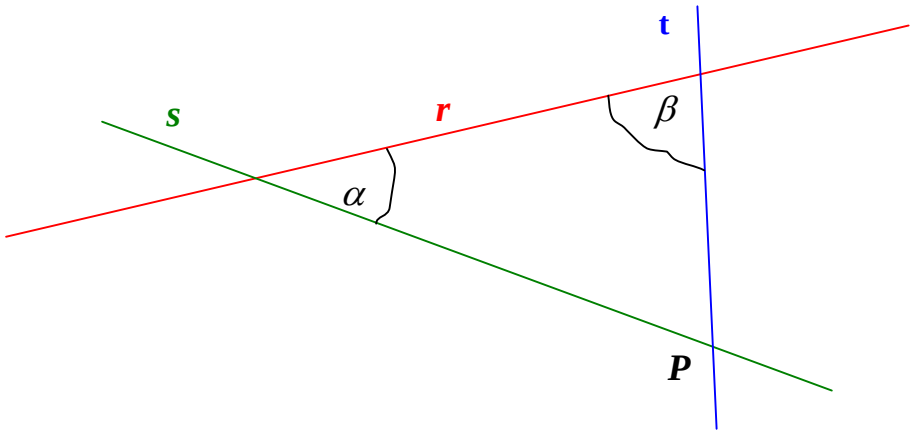
Gli *Elementi* di Euclide
Libro I

POSTULATI

I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
II. E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.
III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.
IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.
V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

La "retta terminata" è il segmento, la "distanza" del cerchio è il suo raggio.

Il Postulato V è dato qui in una formulazione diversa da quella usualmente citata. Lo illustriamo con un disegno:



La retta *r* forma con le rette *s* e *t* gli angoli α e β, entrambi minori di un angolo retto. Le rette *s* e *t* si intersecano, rispetto ad *r*, nel punto *P*, che si trova dallo stesso lato in cui si trovano gli angoli α e β.

La più nota formulazione equivalente del postulato è la seguente:

"Per un punto esterno ad una retta data è possibile condurre una ed una sola parallela alla retta stessa."

Da questa versione deriva il nome di ***postulato delle parallele***, con cui il postulato spesso è chiamato.

Altre formulazioni equivalenti sono:

- non esistono rette asintotiche (cioè rette che si avvicinino indefinitamente senza mai incontrarsi);
- per tre punti non allineati passa una circonferenza;
- dato un triangolo, ne esiste uno simile grande a piacere;
- la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti.

Una poesia tedesca sul V postulato

Una poesia tedesca sul V postulato di Euclide

Die zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz un Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da wards dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wußten selber nicht, -
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.

Christian Morgenstern (1871-1914)

Le due parallele

Andavano le parallele
verso l'infinito,
due lunghissime candele
di taglio assai squisito.

Non si volevano incontrare
mai, per nulla al mondo:
un principio, così pare,
da seguire fino in fondo.

Passarono anni luce
camminando fianco a fianco,
ma la solitudine conduce
a cambiar, di punto in bianco.

Non eran più le stesse
queste anime gemelle,
e l'una all'altra si concesse
nel bagliore delle stelle.

Nella luce senza fine
le due furono una:
si abbracciarono, divine,
nel cielo della Luna.

(traduzione e adattamento di Margherita Barile)

Gli *Elementi* di Euclide
Libro I

NOZIONI COMUNI

I. Cose che sono uguali ad una stessa sono anche uguali fra loro.
II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.
V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.
VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.
VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.

Qui l'uguaglianza si riferisce all'estensione (lunghezza, area o volume) di un ente geometrico. Due oggetti sono detti *coincidenti* se si possono sovrapporre esattamente: noi diremmo che essi sono *uguali* o *congruenti.* In particolare, la nozione VII significa che, ad esempio, due figure congruenti hanno la stessa area, ossia sono *equivalenti.*

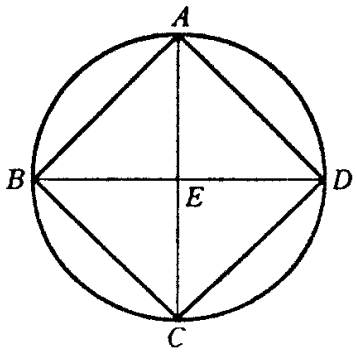
Non tutti gli autori concordano sul contenuto delle nozioni IV,V e VI. Esse appaiono, in effetti, pleonastiche, e in molti casi vengono omesse.

Gli *Elementi* di Euclide

Libro IV
PROPOSIZIONE 6

Iscrivere un quadrato in un cerchio dato.

Sia ABCD il cerchio dato; si deve dunque iscrivere un quadrato nel cerchio ABCD.



Si conducano nel cerchio ABCD i due diametri AC, BD perpendicolari fra loro, e si traccino le congiungenti AB, BC, CD, DA.

*Ora, poiché BE è uguale ad ED - difatti il punto E è il centro -, ed EA è comune e forma angoli retti con BD, la base AB è uguale alla base AD. Per la stessa ragione, è pure uguale ciascuna delle due rette BC, CD a ciascuna delle due rette AB, AD, sicché il quadrilatero ABCD è equilatero (**Nozione Comune I**). Dico adesso che ha anche gli angoli retti. Infatti, poiché la retta BD è diametro del cerchio ABCD, si ha che BAD è un semicerchio; l'angolo BAD è quindi retto. Per la stessa ragione, pure, ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDA è retto; il quadrilatero ABCD ha perciò gli angoli retti. Ma fu dimostrato che è anche equilatero; quindi esso è un quadrato (**Definizione XXII** del **Libro I**). Ed è stato iscritto nel cerchio ABCD.*

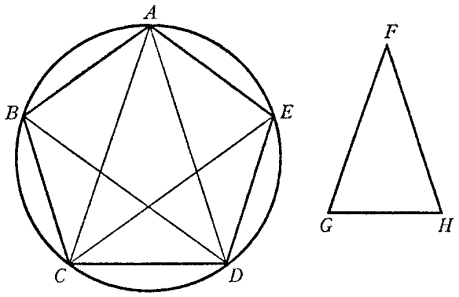
Dunque, nel cerchio dato è stato iscritto il quadrato ABCD. Come dovevasi fare.

Gli *Elementi* di Euclide

Libro IV
PROPOSIZIONE 11

Iscrivere in un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDE il cerchio dato; si deve dunque iscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo nel cerchio ABCDE.



Si assuma il triangolo isoscele FGH, avente ciascuno dei due angoli in G, H che sia il doppio dell'angolo in F, e nel cerchio ABCDE si iscriva il triangolo ACD equiangolo rispetto al triangolo FGH, in modo che l'angolo CAD sia uguale all'angolo in F, mentre gli angoli ACD, CDA siano uguali rispettivamente agli angoli in G, H; pure ciascuno dei due angoli ACD, CDA è quindi doppio dell'angolo CAD. Si dividano ora per metà gli angoli ACD, CDA rispettivamente con le rette CE, DB e risultino tracciate le congiungenti AB, BC, DE, EA.
*Poiché dunque ciascuno dei due angoli ACD, CDA è il doppio dell'angolo CAD, ed essi sono stati divisi per metà dalle rette CE, DB, i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sono uguali fra loro. Ma angoli uguali insistono su archi uguali; perciò i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono fra loro uguali. Ma archi uguali sottendono corde uguali; le cinque corde AB, BC, CD, DE, EA sono quindi uguali fra loro; dunque il pentagono ABCDE è equilatero. Dico adesso che è anche equiangolo. Infatti, poiché l'arco AB è uguale all'arco DE, si aggiunga ad essi in comune l'arco BCD; tutto quanto l'arco ABCD è perciò uguale a tutto quanto l'arco EDCB (**Nozione Comune II**). Ma l'angolo AED insiste sull'arco ABCD, mentre l'angolo BAE insiste sull'arco EDCB; quindi anche gli angoli BAE, AED sono uguali. Per la stessa ragione, pure ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale a ciascuno dei due angoli BAE, AED, per cui il pentagono ABCDE è equiangolo. Ma fu dimostrato che esso è anche equilatero.*

Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo. - Come dovevasi fare.

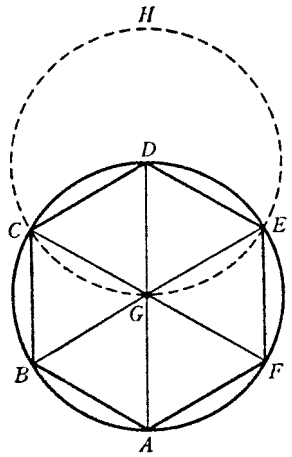
Gli *Elementi* di Euclide

Libro IV
PROPOSIZIONE 15

Iscrivere in un cerchio dato un esagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDEF il cerchio dato; si deve dunque iscrivere nel cerchio ABCDEF un esagono equilatero ed equiangolo.

Nel cerchio ABCDEF si conduca il diametro AD e si prenda il centro del cerchio stesso, cioè G, con centro D e raggio DG si descriva il cerchio EGCH, si traccino le congiungenti EG, CG e si prolunghino sino ai punti B, F, si traccino infine le congiungenti AB, BC, CD, DE, EF, FA; dico che l'esagono ABCDEF è equilatero ed equiangolo.
Infatti, poiché il punto G è il centro del cerchio ABCDEF, si ha che GE è uguale a GD. Di nuovo, poiché il punto D è il centro del cerchio GCH, si ha che DE è uguale a DG. Ma fu dimostrato che GE è uguale a CD, per cui anche GE, ED sono uguali; il triangolo EGD è quindi equilatero, e pure i suoi tre angoli EGD, GDE, DEG sono uguali fra loro, dal momento che nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono fra loro uguali. E poiché la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti, l'angolo EGD è un terzo di due angoli retti. Similmente si potrà dimostrare che anche DGC è un terzo di due retti. E poiché la retta CG innalzata su EB forma gli angoli adiacenti EGC, CGB la cui somma è uguale a due retti, pure l'angolo rimanente CGB è un terzo di due retti; gli angoli EGD, DGC, CGB sono quindi uguali fra loro, cosicché anche gli angoli rispettivamente opposti al vertice, cioè BGA, AGF, FGE sono uguali. Perciò i sei angoli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sono uguali fra loro. Ma angoli uguali insistono su archi uguali; quindi i sei archi AB, BC, CD, DE, EF, FA sono fra loro uguali. Ma archi uguali sottendono corde uguali, per cui le sei rette [sottese] sono fra loro uguali, e l'esagono ABCDEF è equilatero. Dico adesso che è anche equiangolo. Infatti, poiché l'arco FA è uguale all'arco ED, si aggiunga ad essi in comune l'arco ABCD; tutto quanto l'arco FABCD è perciò uguale a tutto quanto l'arco EDCBA. Ma sull'arco FABCD insiste l'angolo FED, mentre sull'arco EDCBA insiste l'angolo AFE; quindi l'angolo AFE è uguale all'angolo DEF. Similmente si potrà



dimostrare che pure gli angoli rimanenti dell'esagono ABCDEF sono uguali, ognuno, a ciascuno dei due angoli AFE, FED, sicché l'esagono ABCDEF è equiangolo. Ma fu dimostrato che esso è anche equilatero; ed è stato iscritto nel cerchio ABCDEF. Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un esagono equilatero ed equiangolo. - Come dovevasi fare.

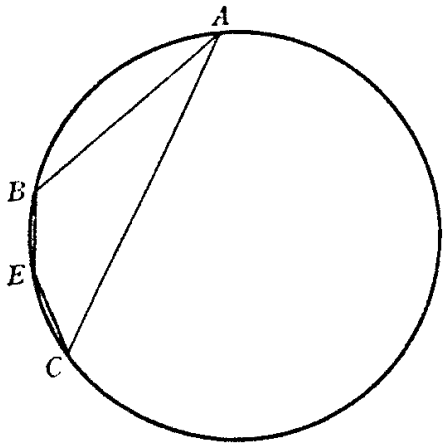
Gli *Elementi* di Euclide

Libro IV
PROPOSIZIONE 16

Iscrivere in un cerchio dato un pentadecagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCD il cerchio dato; si deve dunque iscrivere nel cerchio ABCD un pentadecagono equilatero ed equiangolo.

Sia AC il lato di un triangolo equilatero iscritto nel cerchio, e sia AB il lato di un pentagono equilatero [pure iscritto nel cerchio]; perciò dei quindici archi uguali di cui consta la circonferenza del cerchio ABCD,



l'arco ABC, che è un terzo della circonferenza, verrà a constare di cinque, mentre l'arco AB, essendo un quinto della circonferenza, verrà a constare di tre; quindi l'arco BC che rimane consterà di due [di quei quindici archi]. Si divida l'arco BC per metà in E; ciascuno dei due archi BE, EC è perciò un quindicesimo della circonferenza ABCD.

Se dunque, dopo aver tracciate le congiungenti BE, EC, adattiamo nel cerchio ABCD rette ad esse uguali in successione continua, verrà ad iscriversi in esso un pentadecagono che è equilatero ed equiangolo. - Come dovevasi fare.

Gli *Elementi* di Euclide
Libro VII

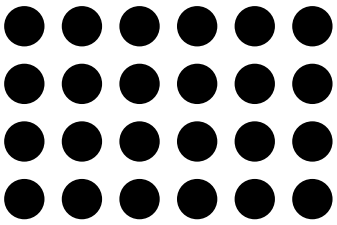
DEFINIZIONI

I. **Unità** è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno.
II. **Numero** è una pluralità composta da unità.
III. Un numero è "**parte**" di un [altro] numero, il minore di quello maggiore, quando esso misuri il maggiore (= lo divida).
IV. È "**parti**", invece, di un numero, quando non lo misuri.
V. Un numero maggiore è **multiplo** di un numero minore, quando sia misurato dal minore.
VI. **Numero pari** è quello che è divisibile in due parti (=numeri) uguali.
VII. **Numero dispari** è quello che non è divisibile in due parti uguali, ossia quello che differisce di un'unità da un numero pari.
VIII. **Numero parimente pari** è quello che è misurato da un numero pari secondo un numero pari (= è divisibile per quattro).
IX. **Numero parimente dispari** è quello che è misurato da un numero pari secondo un numero dispari (= è divisibile per due, ma non per quattro).
X. **Numero disparimente dispari** è quello che è misurato da un numero dispari secondo un numero dispari (= è prodotto di due numeri dispari).
XI. **Numero primo** è quello che è misurato soltanto dall'unità.
XII. **Numeri primi fra loro** sono quelli che hanno soltanto l'unità come misura (=divisore) comune.
XIII. **Numero composto** è quello che è misurato da un qualche numero.
XIV. **Numeri composti** fra loro sono quelli che hanno un qualche numero come misura comune.
XV. Si dice che un primo numero **moltiplica** un secondo numero, quando si ottenga un terzo numero componendolo con la somma di tante volte il secondo per quante sono le unità del primo.
XVI. Quando due numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un terzo numero, il prodotto si chiama **numero piano**, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi "**lati**".
XVII. Quando tre numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un quarto numero, il prodotto si chiama **numero solido**, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi "**lati**".
XVIII. **Numero quadrato** è quello che è prodotto di due numeri uguali, ossia è un numero piano che ha per lati due numeri uguali.

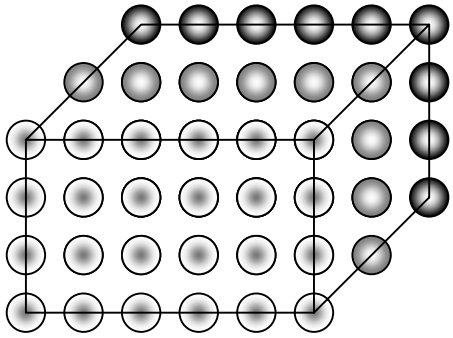
XIX. **[Numero] cubo** è quello che è prodotto di tre numeri uguali, ossia è un numero solido che ha per lati tre numeri uguali.
XX. [Quattro] numeri sono in **proporzione** quando, a seconda che il primo sia multiplo, sottomultiplo, o una frazione qualunque del secondo numero, corrispondentemente il terzo sia lo stesso multiplo, o lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione del quarto.
XXI. **Numeri** piani e solidi **simili** [fra loro] sono quelli che hanno i lati proporzionali.
XXII. **Numero perfetto** è quello che è uguale alla somma delle proprie parti (=dei suoi divisori).

Si noti che, come emerge chiaramente dalle Definizioni XIII e XIV, il numero è per **Euclide** sempre un numero intero positivo diverso da uno, il divisore (la "parte") è sempre non banale. Sulla distinzione tra "uno" e "numero" si veda un **commento** di **Pascal**.

Il concetto di *numero piano* della Definizione XVI richiama alla memoria l'usanza pitagorica di rappresentare i numeri come sassolini disposti su righe e colonne. Il numero piano è un particolare **numero poligonale**, avente la forma di un rettangolo:

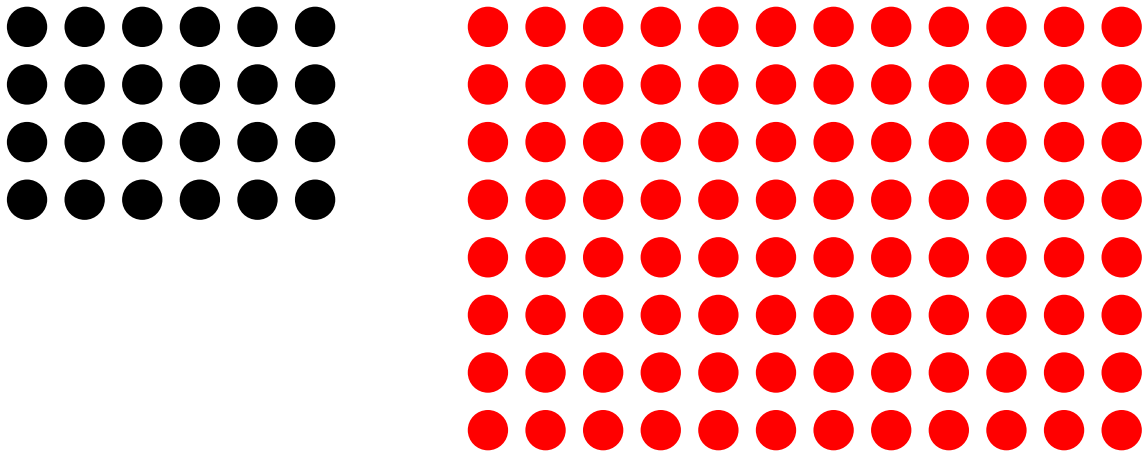


I "lati" corrispondono a due fattori in cui il numero – il 24 - si decompone: nell'esempio sono 4 e 6. Se i due lati sono uguali, il rettangolo è un quadrato, ed il numero è il prodotto di due fattori uguali, cioè è quadrato nel senso della Definizione XVIII.
Le nozioni di numero solido e di numero cubo (Definizioni XVII e XIX) sono le estensioni tridimensionali delle precedenti.



La figura rappresenta il numero solido 3×4×6 = 72.

Due numeri piani simili ai sensi della Definizione XXI sono rappresentati da rettangoli simili: i lati dell'uno si ottengono moltiplicando i lati del secondo per lo stesso numero, che nell'esempio raffigurato è il 2:



Il secondo numero sarà dunque ottenuto dal primo moltiplicandolo per un numero quadrato, nel nostro caso il 4 (**Libro VIII, Proposizione 26**).
Analogamente, dati due numeri cubi simili, uno sarà ottenuto dall'altro moltiplicandolo per un numero cubo (**Libro VIII, Proposizione 27**).
Come Euclide dimostra nel **Libro IX**, due numeri sono numeri piani simili se e solo se il loro prodotto è un numero quadrato (**Proposizioni 1 e 2**). Attenzione: non vale il risultato analogo per i numeri solidi!

A **Pitagora** risale anche la nozione di **numero perfetto**.

A questo breve dizionario aritmetico si ispirerà, nel 1700, **G.A. Alberti**.

I numeri primi

Le Definizioni del Libro I

Gli *Elementi* di Euclide
Libro VII

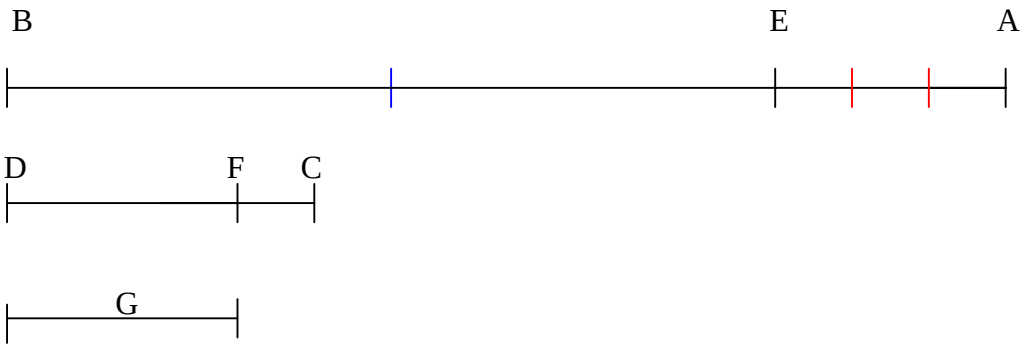
Proposizione 2

Dati due numeri che non siano primi fra loro, trovare il loro massimo comun divisore.

Svolgimento. Siano AB, CD i due numeri dati che non sono primi fra loro. Si deve comunque trovare il massimo comun divisore di AB, CD.

Supponiamo dapprima che CD divida AB; ma esso, d'altra parte, divide anche sé medesimo per cui CD [in tal caso] è divisore comune di CD, AB. Ed è evidente che è anche il massimo; infatti nessun numero maggiore di CD può dividere CD.

Se invece CD non divide AB, ed a partire da AB, CD si continua a sottrarre di volta in volta il numero minore dal maggiore, la differenza dal minore, e così via, rimarrà un numero che dividerà quello immediatamente precedente. Infatti non si avrà come ultimo resto l'unità; in caso contrario, AB, CD sarebbero primi fra loro, il che non è per ipotesi. Si avrà quindi un numero, come ultimo resto, che dividerà quello immediatamente precedente. E allora CD, dividendo BE, lasci il resto EA minore di CD, mentre EA, dividendo DF, lasci il resto CF minore di EA, e si supponga che CF divida AE. Poiché dunque CF divide AE, ed AE divide DF, si ha che CF dividerà pure DF, ma divide anche se stesso, per cui dividerà anche tutta quanta la somma CD. Ma CD divide BE; quindi anche CF divide BE; ma divide pure EA, per cui dividerà anche tutta quanta la somma BA; ma esso divide pure CD, quindi CF è divisore comune di AB, CD. Dico ora che è anche il massimo. Infatti, se CF non fosse il massimo comun divisore di AB, CD, un altro numero, che fosse maggiore di CF, dividerebbe i numeri AB, CD. Li divida, e sia esso G. E poiché G divide CD, ma CD divide BE, anche G divide BE; ma esso divide pure tutta quanta la somma BA, per cui dividerà anche la differenza AE. Ma AE divide DF; quindi anche G dividerà DF; ma esso divide pure tutta quanta la somma CD, per cui dividerà anche la differenza CF, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore – il che è impossibile; non può quindi un altro numero, che sia maggiore di CF, dividere i numeri AB, CD; dunque CF è il massimo comun divisore di AB, CD.



In questo svolgimento **Euclide** rappresenta i numeri sotto forma di segmenti, come in figura:
Assumendo che sia *AB* maggiore di *CD*, si esegue prima la divisione di *AB* per *CD*, che dà resto *EA*. Quindi si divide *CD* per *EA*, ottenendo come resto *FC*. Infine si divide *EA* per *FC*, ed il resto questa volta è zero. Si conclude che *FC* è il massimo comune divisore di *AB* e *CD*: ciò viene dimostrato nella seconda parte dello svolgimento.

Quello proposto da Euclide è *l'algoritmo delle divisioni successive*, che col simbolismo moderno descriveremmo nel modo seguente.

Siano a, b due numeri interi positivi, supponiamo sia $a>b$. Sia q_1 il quoziente e sia r_1 il resto della divisione di a per b. Allora $0 \le r_1 < b$, e si ha:

$$a = q_1 b + r_1.$$

Se $r_1 = 0$, allora b divide a, e quindi, come osserva Euclide, b è il massimo comune divisore di a e b. Altrimenti si procede eseguendo la divisione con resto di b per r_1 : detti q_2 ed r_2 il quoziente ed il resto si ha:

$$b = q_2 r_1 + r_2,$$

dove $0 \le r_2 < r_1$. Se $r_2 = 0$, allora r_1 è il massimo comune divisore di a,b. Altrimenti l'algoritmo prosegue con:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3.$$

Poiché la successione dei resti è una successione di numeri naturali strettamente decrescente, essa raggiungerà, prima o poi, lo zero. L'algoritmo terminerà, cioè, ad un certo passo k-esimo, quando si troverà come resto $r_k = 0$. Le ultime due righe saranno, quindi:

$$r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}$$
$$r_{k-2} = q_k r_{k-1}.$$

Il massimo comune divisore di *a, b* sarà l'ultimo resto diverso da zero, cioè $r_{k-1.}$

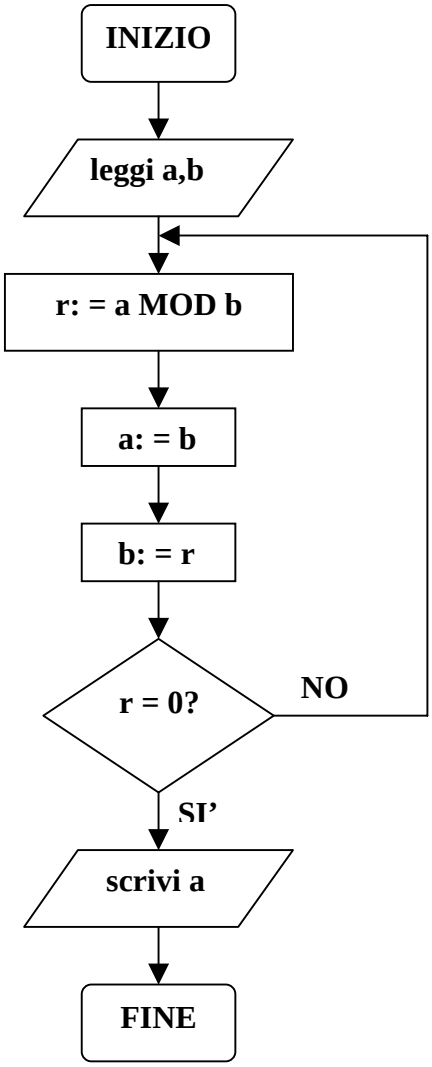
Nello svolgimento di Euclide si esamina il caso particolare in cui l'algoritmo termina al terzo passo. All'epoca non esisteva un formalismo che permettesse di trattare il caso generale: ciò richiede, infatti, il ricorso a variabili dotate di indici, che compariranno solo in epoca moderna. Fino al 1500 era consuetudine dei matematici presentare le regole e procedimenti generali attraverso esempi concreti. D'altra parte questo tipo di esposizione non è affatto limitativo: esso ha, invece, indubbi vantaggi dal punto di vista della chiarezza, della semplicità e dell'efficacia didattica. Quale insegnante, dovendo spiegare l'algoritmo euclideo ai suoi allievi, ne darebbe soltanto le formule senza svolgere un esempio di calcolo?

Per di più, traducendo il testo di Euclide in linguaggio moderno, ci rendiamo conto che, pur disponendo di simboli astratti, non possiamo fare a meno di completare le formule con parole che ne descrivano il significato e l'utilizzo. Per avere un linguaggio totalmente simbolico è necessario compiere un passo in avanti nell'evoluzione e ricorrere ad uno dei linguaggi di programmazione. Ecco l'algoritmo euclideo implementato in PASCAL:

```
PROGRAM  mcd(input, output)
      VAR a,b,r: integer;
   BEGIN
     readln (a, b);
     REPEAT
     r: = a MOD b;
     a: = b;
     b: = r;
     UNTIL r=0;
     write (a);
   END
```

Se confrontiamo questo con la versione di Euclide, vediamo che il salto è davvero notevole. Certamente il testo del programma è scritto in un codice artificiale praticamente incomprensibile ai non iniziati: esso è funzionale alla macchina, ma decisamente ostico per l'uomo. Un ottimo compromesso tra essenzialità e chiarezza è rappresentato dal diagramma di flusso, che riproduce le fasi della procedura di calcolo eseguita dal computer, visualizzandone la struttura logica in

modo che essa venga colta d'un colpo solo. I complessi passaggi effettuati dai microcircuiti vengono tradotti in prescrizioni e domande, la sequenza delle operazioni è indicata da frecce.



Questo esempio è tratto dal testo scolastico *Pascal e matematica di C. Di Comite e P. Ronchi* (**Scheda**).

Gli Elementi di Euclide

Gli *Elementi* di Euclide
Libro IX

Proposizione 20
*Esistono [sempre] **numeri primi** in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.*

Dimostrazione. Siano A, B, C i numeri primi proposti; dico che esistono numeri primi in maggior numero che A, B, C.
Infatti, si prenda il minimo comune multiplo di A, B, C, e sia esso K; si aggiunga a K l'unità U. Ora, il numero K+U o è primo o non lo è. Dapprima, sia un numero primo; si sono dunque trovati i numeri primi A, B, C, K+U che sono in maggior numero che A, B, C.
Ma sia adesso il caso in cui, per ipotesi, K+U non è primo, per cui esso è diviso da un numero primo. Sia diviso dal numero primo D; dico che D non è uguale a nessuno dei numeri A, B, C. Infatti, se possibile, sia uguale. Ma A, B, C dividono K; perciò anche D dividerebbe K. Ma D divide pure K+U, ossia D dividerebbe, pur essendo un numero, anche l'unità U che rimane di K+U: il che è assurdo. Quindi D non è uguale a nessuno dei numeri A, B, C. Ed è, per ipotesi, primo.

Dunque si sono trovati numeri primi, cioè A, B, C, D, più numerosi di quanti numeri primi si siano proposti, cioè A, B, C.

La dimostrazione è un esempio di ***reductio ad absurdum***.
Abbiamo riportato la versione originale, tratta dagli ***Elementi*** di **Euclide**, nella traduzione di Frajese e Maccioni. Riformuliamo ora enunciato e dimostrazione in lingua moderna, conservando, però, per quanto possibile, il senso letterale delle singole frasi.

Proposizione 20
Dato un numero qualunque di numeri primi, è sempre possibile trovare un ulteriore numero primo.

Dimostrazione. Siano *A, B, C* i numeri primi dati. Proveremo che esiste un ulteriore numero primo.
Sia *K* il minimo comune multiplo di *A, B, C.* Si sommi *1* a *K.* Ora, il numero *K+1* è primo o non lo è. Dapprima, supponiamo che sia un numero primo. Allora è l'ulteriore numero primo cercato. Poniamo ora il caso che *K+1* non sia primo, e quindi abbia un divisore primo *D.* Proveremo che *D* non è uguale a nessuno dei numeri *A, B, C.* Ora *A, B, C* dividono *K,* quindi, se uno di essi fosse uguale a *D*, anche *D* dividerebbe *K.* Ma *D* divide anche *K+1*. Quindi *D* dividerebbe anche

$K+1-K = 1$, pur non essendo uguale ad 1. Ciò è assurdo. Quindi D è distinto da A, B, C. Ed è primo per ipotesi. Dunque è l'ulteriore numero primo cercato.

Un autore contemporaneo, ovviamente, userebbe uno stile diverso. Ecco come si esprimerebbe:

Proposizione 20
Esistono infiniti numeri primi.

Dimostrazione. L'insieme dei primi è non vuoto, poiché il numero 2 vi appartiene. Supponiamo per assurdo che i numeri primi siano finiti, diciamo $p_1,\ldots, p_n$. Sia $m = p_1 \cdots p_n$. Poiché $m+1$ è distinto da $p_1,\ldots, p_n$, non può essere primo. Sia q un suo divisore primo. Quindi $q = p_i$ per qualche indice i. Pertanto p_i divide m. Ma allora p_i divide $m+1-m = 1$. Assurdo.

Gli *Elementi* di Euclide
Libro X

Il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili

In virtù del **Teorema di Pitagora** il quoziente tra la diagonale ed il lato di un quadrato è pari a $\sqrt{2}$: l'enunciato che compare nel titolo di questo paragrafo significa che questo numero è irrazionale. Ciò è noto dai tempi di **Pitagora**. **Euclide**, nel **Libro X** dei suoi ***Elementi***, dimostra l'asserto per via in parte aritmetica, in parte geometrica.

La **Proposizione 2** afferma che

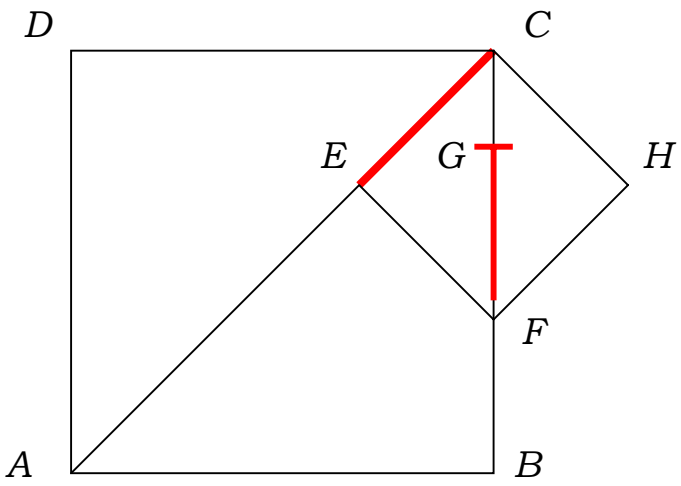
"Se di due grandezze disuguali veniamo a sottrarre, sempre e vicendevolmente, la minore dalla maggiore [quante volte sia possibile], e quella [ogni volta] restante non misura mai la grandezza ad essa precedente, le grandezze saranno incommensurabili."

Nel linguaggio degli *Elementi* un numero *misura* un altro numero se il secondo è multiplo intero del primo. Euclide qui si riferisce ad un procedimento che generalizza l'***algoritmo delle divisioni successive*** per i numeri interi. Detti a,b due numeri positivi, con $a \geq b$, esistono un quoziente intero positivo q_1 ed un resto r_1, tale che $0 \leq r_1 < b$ (r_1 in generale non sarà un numero intero) in modo che si abbia:

$$a = q_1 b + r_1.$$

Se $r_1=0$, allora a,b sono commensurabili. Altrimenti si trova un'analoga identità che lega i numeri b, r_1, con un nuovo resto r_2. Se questo è nullo, l'algoritmo si arresta, e si deduce che a,b sono commensurabili. Altrimenti si prosegue, ripetendo il procedimento per i numeri r_1, r_2, e per tutte le successive coppie di resti. Se, prima o poi, si perviene ad un resto nullo, allora a,b sono commensurabili. In tal caso, l'ultimo resto non nullo è la *massima comune misura di a,b,* cioè il più grande numero positivo di cui a,b siano entrambi multipli interi. Questa nozione generalizza quella di massimo comune divisore di due numeri interi. Se l'algoritmo non produce mai un resto nullo, allora a,b sono incommensurabili.

Se $a=\sqrt{2}$ e $b=1$, l'algoritmo si può realizzare geometricamente nel modo seguente.



Si considera un quadrato *ABCD* di lato *b=1.* Allora $a=\sqrt{2}$ è la sua diagonale. Si riporta il lato *AB* sulla diagonale *AC,* tracciando il punto *E* in modo che *AE=AB.* Si verifica immediatamente che la lunghezza di *EC* è minore di quella di *AB:* dunque il primo quoziente è *1* ed il primo resto è *EC.* Il secondo passo dell'algoritmo richiede che si riporti *EC* su *BC* quante più volte possibile. Si costruisca il quadrato *EFHC* come in figura. Ora, essendo per costruzione *EC=BF,* rimane da riportare *EC* su *FC,* tracciando il punto *G.* Al secondo passo il quoziente è quindi uguale a *2* ed il resto è *GC.* Iterando il procedimento si vede che ad ogni passo il resto è sempre la differenza tra la diagonale di un quadrato ed il suo lato. Esso, pertanto, non sarà mai uguale a zero. Con ciò è provato che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Una dimostrazione alternativa, esclusivamente algebrica, si ricava sfruttando in maniera congiunta altre proposizioni di Euclide. Il metodo è quello della ***reductio ad absurdum***, frequentemente impiegato dai matematici. Esso consiste nell'assumere che siano, allo stesso tempo, vera l'ipotesi e falsa la tesi, e nel dedurne una contraddizione. Nel nostro caso l'ipotesi è che *a* e *b* siano, rispettivamente, la lunghezza della diagonale e la lunghezza del lato di un quadrato. La tesi è che *a* e *b* sono incommensurabili. La sua negazione è, naturalmente: *a* e *b* sono commensurabili. Supponiamo che essa sia vera. Allora *a/b* è uguale al quoziente di due numeri interi positivi, diciamo *p/q.* Si ha allora che

$$p^2/q^2 = a^2/b^2$$

D'altra parte, come osservato all'inizio, $a/b = \sqrt{2}$, per cui il secondo membro è uguale a 2. Segue che

$$p^2 = 2q^2. \quad (*)$$

Ora, la **Proposizione 2** del **Libro IX** stabilisce che, se il prodotto di due fattori interi positivi è un numero quadrato, ed uno dei due fattori è un numero quadrato, anche l'altro deve esserlo. Ma 2 non è un numero quadrato. Ecco la contraddizione cercata.

Questa dimostrazione ammette una variante, che è quella normalmente citata. Si può supporre che la frazione p/q sia ridotta ai minimi termini. In tal caso p e q sono primi fra loro. Ora, dalla (*) segue che p^2 è pari, così che anche p è pari. Segue che p^2 è divisibile per 4. Dunque anche q è pari. Ma allora p e q non sono primi fra loro, perché hanno in comune il fattore 2. Ciò contraddice l'ipotesi.

Questa dimostrazione era già nota ad Aristotele. Per alcuni anni $\sqrt{2}$ fu l'unico numero irrazionale noto. Altre radici quadrate irrazionali di numeri interi furono scoperte intorno al 425 a.C. da **Teodoro di Cirene** e, successivamente, da **Teeteto**, protagonista dell'**omonimo dialogo** di Platone.

Il volume del cono e del cilindro

Il volume di un cono circolare retto è pari ad un terzo del volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza: questo è un risultato noto fin dai tempi dell'Antica Grecia. Lo troviamo, ad esempio, negli ***Elementi*** di **Euclide**, come **Proposizione 10** del **Libro XII**. Qui, come nel trattato ***Sulla Sfera e sul Cilindro*** di **Archimede**, la dimostrazione si avvale del **metodo di esaustione**, risalente ad **Eudosso**. Essa prevede un ragionamento ***ad absurdum***.

Si vuole dimostrare che il volume V del cilindro è uguale al triplo del volume U del cono:

$$V = 3\ U$$

Si suppone per assurdo che questa uguaglianza non sia verificata. Supponiamo dapprima che si abbia

$$V > 3\ U,$$

e poniamo

$$V - 3\ U = D$$

Sia P il volume di un qualunque prisma inscritto nel cilindro. Allora, evidentemente,

$$P < V.$$

Ora è possibile scegliere il prisma in modo che il suo volume differisca da quello del cilindro di una quantità piccola a piacere, in particolare possiamo supporre che sia

$$V - P < D. \qquad (1)$$

Allora

$$V - P < V - 3\ U,$$

da cui

$$P > 3\ U \qquad (2)$$

D’altra parte, in virtù della Proposizione 7 del Libro XII, il volume P è pari al triplo del volume Q della piramide avente la stessa base e la stessa altezza:

$$P = 3\,Q$$

La piramide è, naturalmente, inscritta nel cono, per cui

$$Q < U,$$

e dunque

$$3\,Q < 3\,U.$$

Riassumendo:

$$P < 3\,U.$$

Ma ciò contraddice la (2). Si giunge in maniera analoga ad un assurdo se si parte supponendo che $V < 3\,U$.

Il principio del metodo di esaustione interviene al momento di scrivere la (1): per essa si sfrutta, infatti, la possibilità di approssimare il volume del cilindro quanto bene si voglia con il volume di un prisma inscritto.

L'Ottica di Euclide

Quest'opera comprende 62 proposizioni di ottica geometrica, riguardanti le forme e le dimensioni con cui gli oggetti illuminati appaiono all'occhio umano. I principi fondamentali della teoria sono elencati all'inizio, con il nome di *premesse* o *definizioni* o *assiomi:*

"1. I raggi emessi dall'occhio procedono per via diritta.
2. La figura compresa dai raggi visivi è un cono che ha il vertice all'occhio e la base al margine dell'oggetto.
3. *Si vedono quegli oggetti cui arrivano i raggi visivi.*
4. *Non si vedono quegli oggetti ai quali i raggi visivi non arrivano.*
5. *Gli oggetti che si vedono sotto angoli maggiori, si giudicano maggiori.*
6. *Gli oggetti che si vedono sotto angoli minori, si giudicano minori.*
7. *Gli oggetti che si vedono sotto angoli eguali, si giudicano eguali.*
8. *Gli oggetti che si vedono con raggi più alti, si giudicano più alti.*
9. *Gli oggetti che si vedono con raggi più bassi, si giudicano più bassi.*
10. *Gli oggetti che si vedono con raggi diretti a destra, si giudicano alla destra.*
11. *Gli oggetti che si vedono con raggi diretti a sinistra, si giudicano alla sinistra.*
12. *Gli oggetti che si vedono con più angoli, si distinguono più chiaramente.*
13. *Tutti i raggi hanno la stessa velocità.*
14. *Non si possono vedere gli oggetti sotto qualunque angolo."*

Da queste premesse vengono dedotte le proposizioni, utilizzando semplici ragionamenti di geometria piana.

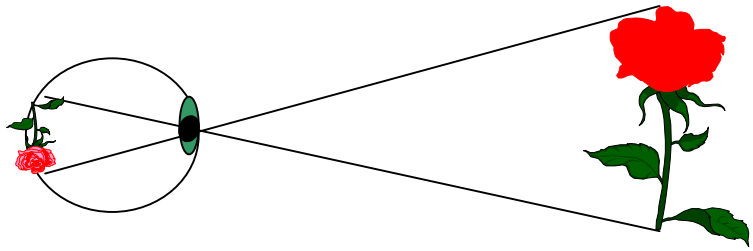
Gli enunciati sono per lo più semplici, ed enunciano fatti che risultano evidenti dall'esperienza, ma che **Euclide** vuole spiegare con rigore matematico:

Proposizione I
Un oggetto non può vedersi nella sua totalità d'un solo colpo d'occhio.

Proposizione II
Di oggetti eguali, differentemente distanti, i più vicini si distinguono più chiaramente.

Proposizione III
Per qualunque oggetto vi è una distanza determinata, oltrepassata la quale, esso non si vede più.

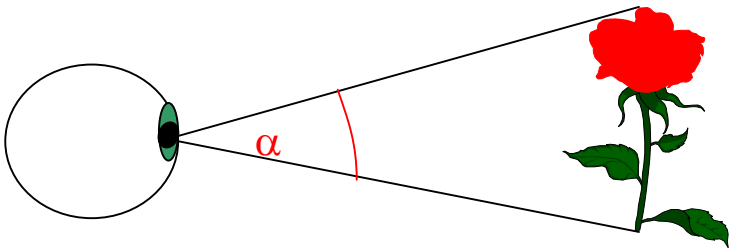
La comune origine di questi fenomeni risiede nel principio del ***cono visivo*** (che alcuni chiamano anche *piramide*), che è enunciato nella seconda premessa:



Il vertice è nell'occhio dell'osservatore, la base è data dai contorni dell'oggetto osservato.
Noi sappiamo che questo cono è formato dai raggi luminosi emessi dall'oggetto, e che è il prolungamento dello stesso cono al di là della pupilla a produrre l'immagine dell'oggetto sulla retina dell'osservatore. Da questo modello della visione si ricavano tutte le altre proprietà. Ad esempio, utilizzando le proprietà dei triangoli simili è immediato dedurre che tra due oggetti uguali posti a diversa distanza il più lontano apparirà più piccolo.

Ai tempi di Euclide, però, ancora non si sapeva che cosa avvenisse all'interno dell'occhio. Addirittura, la terza e la quarta premessa sembrano suggerire che, secondo Euclide, i raggi luminosi responsabili della visione dovessero provenire dall'occhio e non dall'oggetto osservato. **Teone di Alessandria**, nel suo commento all'opera, spiega che questa convinzione nasceva dal fatto che l'occhio, a differenza dell'orecchio e del naso, non possiede una cavità atta a ricevere corpi provenienti dall'esterno. Secondo un'altra interpretazione, i raggi citati da Euclide non sarebbero i raggi luminosi, ma le rette che delimitano il cono visivo.

In ogni caso, il modello di Euclide poteva basarsi esclusivamente sull'esterno dell'occhio. Così egli fa dipendere le dimensioni che l'oggetto assume per l'osservatore dall'***angolo visivo***, ossia dall'apertura del cono visivo:



Euclide intuisce la relazione tra l'angolo α e le dimensioni della immagine e la enuncia nella quinta e nella sesta premessa.
Questa proprietà non è nient'altro che la più semplice delle ***leggi della prospettiva***. Una proprietà ben più sofisticata è enunciata alla fine dell'opera: essa descrive il modo in cui un quadrato appare ad un osservatore che lo guardi obliquamente al piano del quadrato stesso.

Proposizione LXII
Se il raggio condotto dall'occhio sul punto d'intersezione dei diametri d'un quadrato non è perpendicolare sul piano di questo, né è eguale ad un mezzo diametro né fa angoli eguali con questi mezzi diametri, i diametri del quadrato appariranno ineguali.

I "diametri" del quadrato sono le sue diagonali: queste sono così chiamate perché coincidono con i diametri del cerchio circoscritto.

La prospettiva sarà oggetto di studio per i pittori a partire dal Rinascimento: vi si dedicarono con grande impegno, tra gli altri, **Leonardo da Vinci**, **Leon Battista Alberti**, **Piero della Francesca** ed **Albrecht Dürer**.

Nell'*Ottica* di Euclide i raggi si propagano sempre in linea retta: al fenomeno della riflessione egli dedicò un'opera a parte, la ***Catottrica***, di cui ci è però pervenuta soltanto una versione apocrifa.

EVCLIDIS DE ASPECTVVM DIVERSITATE LIBELLVS INCIPIT FELICITER



QVPPONATVR ASPECTVS QVI AB OCVLO PROuenient secundum lineas rectas ferri et inter se facere intervalla. ¶ Figuram quoq; que ex tota aspiciendi natura i colligitur konum esse qui uerticem in oculo situm beat. Basem uō in terminis aspecte rei. ¶ Et ea quidem uideri in que aspectus inciderit. Non uideri uō illa in que non inciderit aspectus. ¶ Item que sub maiori angulo sint aspecta maiora apparere. que uō sub minori minora. Et que sub equalibus angulis aspecta equalia indicari. ¶ Item que sub radijs eleuacioribus aspecta fuīnt ea eleuatiora apparere q̄ uō sub depressioribus depressiora. ¶ Similiter sub dexterioribus radijs aspecta dexteriora apparere. que uō sub sinistrioribus sinistriora. ¶ Item que sub pluribus angulis aspecta sint p̄spectiuis uideri. ¶ Nullum eorum que aspiciuntur simul totum p̄spici

NVLLVM eorum que aspiciuntur sil totum uideri.

¶ ESTO ITAQVE Quidpiam aspectum AD. et sit oculus B. a quo incidant aspectus BA. BC BK. BD. Cum itaq; interuallo ferantur aspectus incidentes non utiq; incident in AD. continuati quare fient secundum AD. interualla ad q aspectus non incident. Non igitur aspiciet AD.



BIBLIOTHECA APOSTOLICA VATICANA

1329. Urb.

Una curiosità dall'Ottica di Euclide

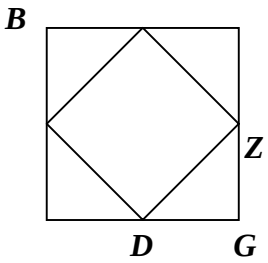
L'***Ottica*** di **Euclide** contiene la seguente curiosa

Proposizione IX

Oggetti rettangolari, guardati da lontano, appaiono circolari.

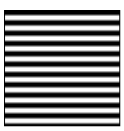
La dimostrazione data da Euclide così recita:

"Sia BG un oggetto rettangolare guardato da lontano. Poiché, per qualsiasi oggetto v'è una determinata distanza, oltre cui esso non si distingue più, accadrà che l'angolo G non si vedrà più, ma appariranno soltanto i punti D e Z. Accadrà lo stesso degli altri angoli. Perciò l'intero oggetto apparirà circolare."



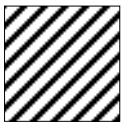
Il Prof. G. Ovio osserva, in un'edizione didattica d'inizio secolo:

"Il principio è giusto, ma non la dimostrazione. Una figura vedesi pel suo complesso, non per le sue singole parti – stando alla data dimostrazione – soltanto che si andasse così lontano che una sola di queste non si vedesse più, basterebbe perché tutta la figura sparisse. Nel caso in discussione, scomparsi, a cagione della lontananza a cui si guarda, gli angoli B,G, ecc., del quadrato rimangono gli angoli D,Z, ecc.; ma siccome questi sono eguali ai primi, non v'è alcuna ragione perché si debbano ancora vedere, quindi scompariranno anche questi. […] Per la stessa ragione accadrebbe che un uomo visto in distanza, poiché ha il capo ed i piedi più piccoli del tronco, apparirebbe senza testa e per aria.

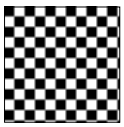


Pigliamo ancora il quadrato, ma disegniamolo a linee equidistanti e parallele ad uno dei lati. Essendo queste linee tutte eguali, se si può

vederne una, tutte si vedranno, e il quadrato apparirà come un quadrato.



Disegniamo similmente il quadrato ma con linee parallele ad una sua diagonale; quelle più lontane dalla diagonale, perché più piccole, dovrebbero sparire, quelle più vicine alla diagonale, rimanere, e così in luogo di un quadrato si dovrebbe vedere una specie di losanga.

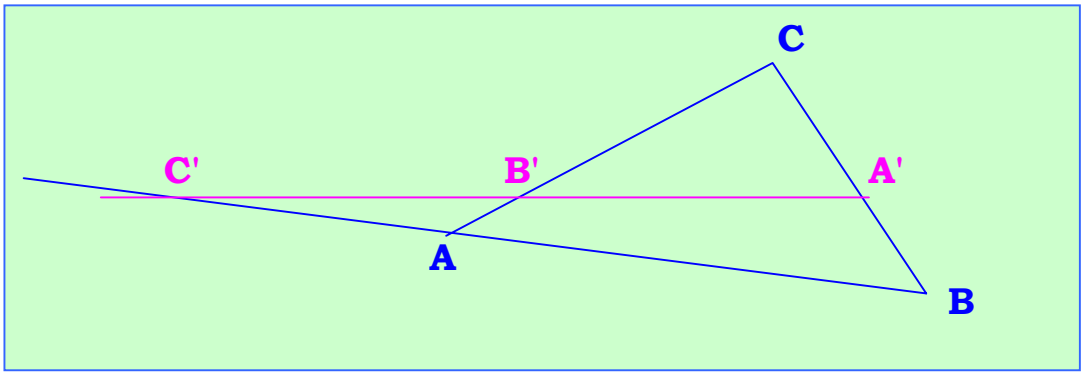


Disegnato a piccoli quadratini, quando uno di questi scompare, tutto il quadrato dovrebbe scomparire. Parimenti, preso un pallino di schioppo e portatolo così distante che non sia più possibile vederlo, non si dovrebbe vedere a quella distanza nemmeno una sfera formata da miriadi degli stessi pallini ravvicinati."

(cit. da G. Ovio, *L'Ottica di Euclide,* Hoepli, Milano 1918, pagg. 84-85)

Menelao di Alessandria (sec. I d.C.)

Questo esponente della **Scuola Matematica Alessandrina** fu autore della prima opera di **trigonometria sferica** della storia. Il suo nome è rimasto legato ad un **teorema** sul triangolo, il cui enunciato è quello dato dalla figura e dalla formula qui sotto riportate:



$$A'B \cdot B'C \cdot C'A = AB' \cdot BC' \cdot CA'$$

Leonhard Euler (Eulero)
nato a Basilea, Svizzera, il 15 aprile 1707
morto a San Pietroburgo, Russia, il 18 settembre 1783



Fu uno scienziato incredibilmente prolifico ed eclettico. Vantava una straordinaria capacità di elaborazione mentale ed una prodigiosa memoria, grazie alle quali riuscì a mantenere per tutta la vita un ritmo produttivo elevatissimo, nonostante le movimentate vicende familiari – si sposò due volte ed ebbe tredici figli – e malgrado la cecità, che lo accompagnò negli ultimi diciassette anni della sua esistenza.

Il suo primo insegnante di matematica fu il padre Paolo, pastore calvinista e parroco di Riechen, un paesino svizzero situato alle porte di Basilea. Il suo secondo insegnante fu **Johann Bernoulli**, che gli diede, per un certo periodo di tempo, lezioni private. Leonhard prese un tale gusto alla materia che vano fu il tentativo del padre di farne un religioso: il giovane si iscrisse all'Università per studiare ebraico e teologia, ma, sotto l'influenza dei Bernoulli, finì per scegliere definitivamente la strada della matematica.

Non v'è campo della matematica settecentesca in cui Eulero non abbia dato il suo contributo: il suo nome è legato alla teoria dei numeri, all'algebra, alla geometria, alla fisica, al **calcolo infinitesimale**. Ma seppe crearsi una fama soprattutto con la sua abilità nel risolvere problemi di ordine pratico; molti dei suoi risultati trovarono utile applicazione, ad esempio, nei trasporti marittimi. Egli si occupò infatti di **cartografia**, studiò il flusso delle maree, scrisse trattati sulla tecnica di costruzione delle imbarcazioni.
Durante la sua permanenza a San Pietroburgo svolse funzioni di consigliere per il Governo russo; altri incarichi gli furono affidati da Federico il Grande, che lo chiamò a corte nel 1741. Rimase a Berlino per 25 anni. Il re lo nominò direttore dell'Accademia Prussiana e lo volle come precettore di sua nipote, la principessa di Anhalt-Dessau. Le lezioni, redatte sotto forma di lettere, furono in seguito raccolte e pubblicate con il titolo di ***Lettere ad una principessa tedesca***.

Eulero scrisse anche trattati di meccanica, astronomia e ottica. I risultati da lui ottenuti sul moto della luna permisero all'inglese G.T.

Mayer di realizzare le prime tavole lunari, utili per **la determinazione della longitudine** in mare.

È quasi superfluo aggiungere che l'opera matematica di Eulero è di una tale vastità da non poter essere riassunta: non a caso è stato soprannominato "dai cento occhi". Inoltre, molti degli argomenti affrontati sono troppo specialistici per poter essere qui esposti. Possiamo però cogliere, nell'universo enciclopedico della sua produzione scientifica, alcune piccole perle.

In **teoria dei numeri** Eulero risolse molti dei problemi lasciati da **Fermat**, tra cui alcuni casi particolari dell'**Ultimo Teorema**. Generalizzò, inoltre, il **Piccolo Teorema**, mentre confutò la congettura sui **primi di Fermat**. Egli dimostrò, inoltre, che i **numeri perfetti** sono tutti e soli quelli dati dalla formula trovata da **Euclide**. Generalizzando un **risultato** del matematico persiano Tâbit ibn Qorra, formulò un **criterio** per individuare coppie di **numeri amicabili**. Fu il primo ad enunciare la **legge di reciprocità dei residui quadratici**, che sarebbe stata dimostrata da **Legendre** e **Gauss**.

Ad Eulero si deve anche una congettura, recentemente risultata falsa: secondo il matematico svizzero, l'equazione

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$$

non avrebbe avuto soluzioni intere non banali. Ma nel 1988 Noam Elkies lo ha smentito, trovando la soluzione $x=2682440$, $y=15365639$, $z=18796760$, $w=20615673$. Nel frattempo è stato trovato un controesempio con numeri più piccoli: $x=95800$, $y=217519$, $z=414560$, $w=422481$. Più in generale, Eulero credeva che la potenza n-esima di un numero intero maggiore di 1 non potesse mai essere rappresentata come somma di meno di n potenze n-esime di interi positivi. Questa sua convinzione è risultata falsa anche per $n=5$, ed anche in questo caso, il primo controesempio è stato trovato in tempi recenti. Esso risale al 1967, ed è dovuto a **Lander** e **Parkin**:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

In **algebra** Eulero scoprì la possibilità di rappresentare il **numero complesso**

$$z = \rho (\cos \vartheta + \boldsymbol{i} \operatorname{sen} \vartheta)$$

nella forma

$$z = \rho e^{i\vartheta}.$$

Ne ricavò la sorprendente formula:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Eulero fu il primo ad indicare con la lettera *e* il numero irrazionale, pari a circa *2,71828,* introdotto da **Napier** come base del suo *logaritmo naturale.* E fu sempre Eulero a consolidare l'uso del simbolo π per denotare il rapporto tra il perimetro ed il diametro della circonferenza: prima del Settecento, erano state impiegate lettere diverse. È inoltre dovuta ad Eulero la prima definizione rigorosa di **frazione continua**.

In **geometria** diede il nome alla formula, già nota a **Descartes**, che lega il numero *v* di vertici, il numero *s* di spigoli ed il numero *f* di facce di un qualunque **poliedro**:

$$v - s + f = 2.$$

Il matematico francese **Cauchy**, un secolo dopo, diede interessanti **generalizzazioni** di questa formula.

Il **teorema del cerchio** di Eulero afferma che, se un cerchio passa per i piedi delle tre altezze di un triangolo, allora passa anche per i punti medi dei lati.

In analisi, Eulero contribuì alla definizione del **concetto di funzione**, alla risoluzione di **equazioni differenziali** legate alla meccanica (come ricorda, tra l'altro, il **Riccati**) ma i suoi principali meriti riguardano forse lo studio delle **serie**, cui egli si dedicò su ispirazione dei lavori di **Taylor** e **Maclaurin**. Egli determinò la somma della serie dei reciproci dei quadrati perfetti, con cui già **Jakob Bernoulli** e **Leibniz** si erano cimentati invano. Utilizzando audaci passaggi algebrici Eulero dedusse che:

$$\pi^2/6 = 1/1 + 1/4 + 1/9 + 1/25 + \ldots$$

Egli ottenne anche gli sviluppi in serie di alcune funzioni elementari, tra cui la funzione esponenziale e^x. I suoi metodi, basati sul formalismo algebrico, mancano, però, di dimostrazione: essi nascono

in gran parte dall'intuizione, secondo la quale le proprietà aritmetiche valide per le somme finite si estenderebbero, in modo naturale, alle serie. Eulero si muoveva con grande disinvoltura tra infiniti e **limiti**, senza preoccuparsi di inquadrare i suoi calcoli all'interno di una teoria rigorosa. Aveva una fiducia cieca nella bontà delle sue tecniche, così audacemente trasferite dal finito all'infinito. A proposito della sua "ingenuità" metodologica, E.T. Bell scrive:

*"La quasi totale capitolazione di Eulero nei confronti delle seduzioni del formalismo è uno degli inspiegabili misteri della matematica. Al pari di **Newton**, Eulero era conscio che le serie devono convergere "in generale" se possono essere applicate praticamente, come in astronomia; ma diversamente da Newton, era incapace di moderare questa sua visione assurda. Pare che Eulero credesse che le formule non potessero fare alcun male; e fintantoché esse continuavano a fornire al loro genitore sempre nuove e prolifiche variazioni di se stesse, egli le incoraggiava a crescere e moltiplicarsi, confidando pienamente nel fatto che prima o poi tutti i loro frutti sarebbero stati legittimati. Per molti di essi ciò si è avverato, ed oggi prosperano come solide teorie che mossero i loro primi audaci passi in varie edizioni di tre capolavori di questo matematico, il più prolifico della storia:* **Introductio in Analysis Infinitorum** *(1748),* **Institutiones Calculi Differentialis** *(1755),* **Institutiones Calculi Integralis** *(1768-94)."*

A dire il vero, non tutti i risultati di Eulero si sono rivelati corretti. Ad esempio, secondo lui la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

la cui somma sappiamo essere indeterminata, doveva avere come somma ½. Di ciò era convinto anche Jakob Bernoulli, che ne trovò una **dimostrazione** davvero curiosa. Per citare una sua conclusione ancora più paradossale:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

Ovviamente, questa serie, in realtà, è divergente, la sua somma è infinita ($+\infty$). Eulero non aveva problemi ad accettare risultati contraddittori come questo, che appare assolutamente inconciliabile con il fatto, già noto all'epoca, che

$$+\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

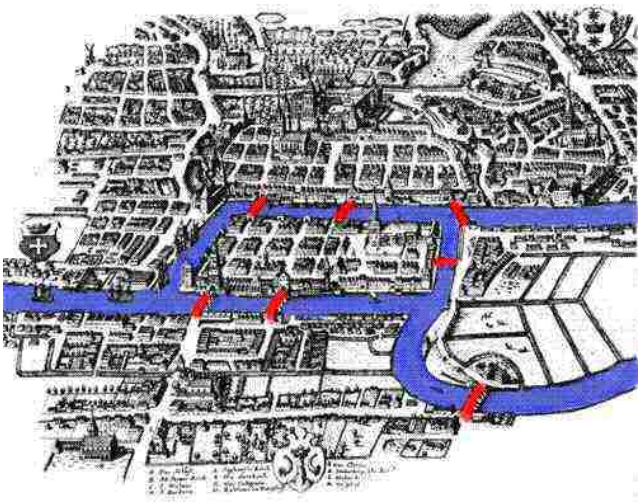
A rigor di logica, poiché i termini di quest'ultima serie sono più piccoli dei corrispondenti termini della serie precedente, la somma dovrebbe essere minore di *–1*. Eulero, pur di giustificare questo paradosso, arriva a dare una nuova interpretazione dell'infinito, a stravolgerne completamente il significato intuitivo, definendolo come una sorta di confine tra i numeri negativi ed i numeri positivi, ovvero assimilandolo, in definitiva, allo zero. Occorre tenere presente che ciò che ai nostri occhi appare ridicolo ed inammissibile, non aveva lo stesso effetto in un momento in cui il concetto di **infinito** era ancora indistinto e controverso tra i matematici.

A proposito del concetto di limite di una funzione, che proprio nel Settecento andava prendendo forma, il Bell così commenta l'atteggiamento di Eulero:

"Per Eulero una funzione divenne una congerie di rappresentazioni formali, che potevano essere trasformate l'una nell'altra tramite ingegnosi strumenti che spaziavano dall'algebra elementare al calcolo infinitesimale. Pascendosi della potenza pragmatica dei suoi metodi, Eulero non aveva bisogno di vedere alcunché di contraddittorio nella sua concezione del ***calcolo differenziale*** *come un procedimento per determinare il rapporto di incrementi evanescenti. I suoi differenziali sono primi ed ultimi zeri assoluti i cui rapporti, in virtù di qualche incomprensibile spiritualismo, si materializzano in numeri finiti e determinati. Come* ***Lagrange****, solitamente cortese, osserva, l'analisi di Eulero è priva di senso."*

Eulero condivideva con Newton la fiducia nel ***metodo delle prime ed ultime ragioni***, che, però, appariva destituito di fondamento matematico. Sarà proprio Lagrange a provvedere ad una risistemazione rigorosa del calcolo differenziale e della teoria delle serie.

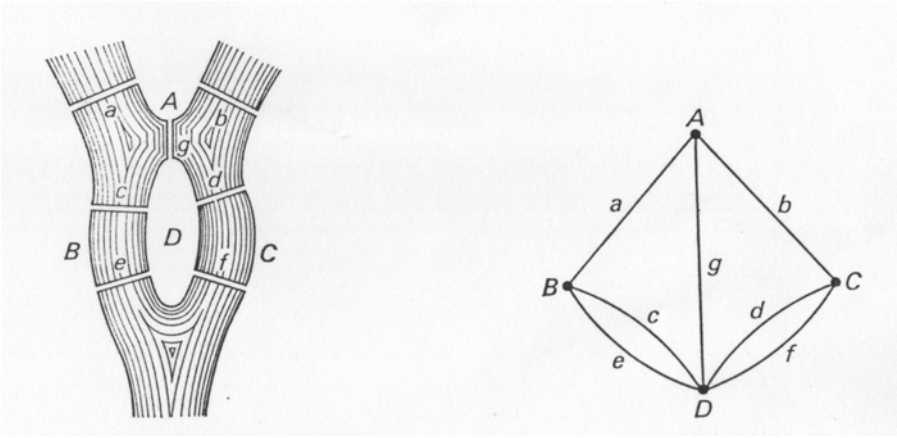
I ponti di Königsberg



Eulero non è ricordato come un grande innovatore della matematica, né come un grande teorico. Egli fu, in realtà, essenzialmente un geniale risolutore di problemi, un abile manipolatore di formule, una mente vivace ed attenta che, sfruttando al meglio gli strumenti sviluppati dai

suoi predecessori, seppe tirare le somme della matematica settecentesca, gettando, al contempo, le basi di nuovi sviluppi. Nei suoi studi sulle linee di curvatura, ad esempio, si può vedere il primo germe della moderna **geometria differenziale**.
E così la sua soluzione del **problema dei ponti di Königsberg** contiene già alcune idee fondamentali di quella che sarebbe diventata la **teoria dei grafi**: Eulero dimostrò che non è possibile trovare un percorso continuo che attraversi ognuno dei ponti della figura una ed una sola volta: si tratta dei ponti sul fiume Pregel, nel quale si trova l'isola di Kneiphof.

La pianta dei ponti di Königsberg può essere schematizzata mediante un ***grafo***: ogni punto *(vertice)* simboleggia una delle zone di terra



delimitate dal fiume, due punti sono collegati da un arco *(spigolo)* se e solo se esiste un ponte tra le zone corrispondenti. Il problema studiato da Eulero appartiene ad un teorema più generale di teoria dei grafi. Ne diamo la formulazione moderna:

Un grafo ammette una catena euleriana se e soltanto se è connesso e se il numero dei vertici di grado dispari è 0 o 2.

Spieghiamo la terminologia: una *catena euleriana* è un percorso che permette di tracciare l'intero grafo senza staccare la matita dal foglio, e senza passare per più di una volta sullo stesso punto; un grafo si dice *connesso* se, comunque presi due vertici, esiste un percorso che conduce da uno all'altro; il *grado* di un vertice è il numero di spigoli che da esso si dipartono.

Nel nostro caso il grafo è connesso, ma tutti e cinque i suoi vertici sono di grado dispari. Quindi non è verificata la condizione necessaria e sufficiente del teorema, e il percorso cercato da Eulero non esiste.

Curiosità

In una lettera datata 7 giugno 1742, ed indirizzata ad Eulero, il suo amico Goldbach formulò una congettura che è tuttora ben lungi dall'essere dimostrata: *ogni numero intero maggiore di 5 è somma di tre* ***numeri primi***. Eulero dimostrò che questo enunciato è equivalente ad un altro, che forse è ancora più notevole: *ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi.*

Curiosità

Leonhard Euler (Eulero)
Lettere a una principessa tedesca su diversi argomenti di fisica e di filosofia
Torino, 1958
(Traduzione dell'edizione originale in francese, Mietau e Lipsia, 1770)

Citiamo testualmente dall'introduzione di Gianfranco Cantelli: *"Le Lettere [...] costituiscono, nella loro chiarezza e semplicità di esposizione, la più accessibile e insieme la più originale introduzione alla fisica del diciottesimo secolo. Di agevole lettura, indirizzate a un pubblico assai vasto e non specializzato in difficili calcoli matematici, hanno il rarissimo pregio di non essere soltanto un libro di divulgazione scientifica, ma l'opera curiosa e originale di un grandissimo matematico e di un grandissimo fisico [...].*
Eulero *non compila, non raduna notizie, non fa la storia delle scoperte scientifiche del suo tempo, ma si rivolge immediatamente ai fenomeni della natura per esporli, interpretarli a uno a uno [...].*

Le Lettere [...] furono scritte fra il 1760 e il 1762. A Eulero era stato affidato l'incarico di istruire nelle varie discipline della matematica e della fisica una delle figlie del margravio regnante di Brandenburg-Schwedt, congiunto del re Federico II di Prussia ed uno dei più eminenti esponenti della sua Corte. Eulero aveva già impartito alla giovane Sophie Friedericke Leopoldine [...] i primi rudimenti dell'aritmetica e della geometria, quando le alterne vicende della Guerra dei Sette Anni costrinsero la Corte a rifugiarsi a Magdeburgo.[...]"

Frontespizio dell'edizione originale

Lettera 64: "Spiegazione particolareggiata del fenomeno del flusso e riflusso del mare, dovuto alla forza attrattiva della luna"

Lettera 103: "Sui sillogismi, e sulle loro differenti forme se la prima proposizione è universale"

Lettera 156: "Sulla grandezza della terra, sui meridiani e sul più breve cammino"

LETTRES

A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE

SUR DIVERS SUJETS

de

PHYSIQUE & de PHILOSOPHIE.

TOME PREMIER.

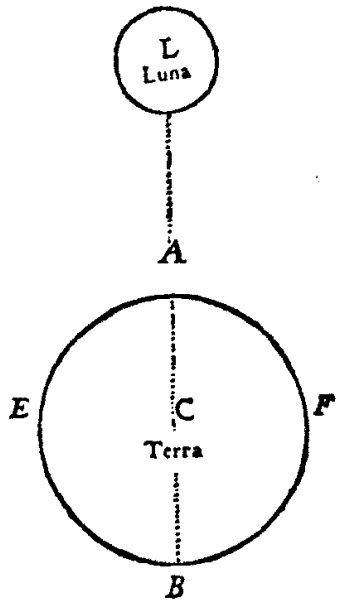


A MIETAU ET LEIPSIC
CHEZ STEIDEL ET COMPAGNIE.
1770.

LETTERA 64

SPIEGAZIONE PARTICOLAREGGIATA DEL FENOMENO DEL FLUSSO E RIFLUSSO DEL MARE, DOVUTO ALLA FORZA ATTRATTIVA DELLA LUNA

Poiché la teoria escogitata da **Descartes** *per spiegare il flusso e riflusso del mare con la pressione esercitata dalla luna sulla nostra atmosfera, non aveva avuto successo, era più ragionevole ricercarne la causa nell'attrazione che la luna esercita sulla terra e quindi anche sul mare. Poiché la forza attrattiva di tutti i corpi celesti è già sufficientemente provata da altri fenomeni, come ho avuto l'onore di dimostrare a Vostra Altezza, non è possibile dubitare che anche il flusso e riflusso del mare non ne sia una conseguenza. Difatti, dal momento che noi stabiliamo che la luna, come tutti gli altri corpi celesti, attrae a sé tutti i corpi con una* ***forza proporzionale alla loro massa e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza****, è facile comprendere che anche un corpo fluido come il mare non può rimanere insensibile all'azione di questa forza, tanto più che, e Vostra Altezza l'avrà certo notato, anche una minima forza è in grado di agitare un fluido. Si tratta solo di esaminare se la forza attrattiva della luna, quale noi la supponiamo, sia effettivamente capace di produrre nel mare quell'agitazione che noi conosciamo sotto il nome di flusso e riflusso. Supponiamo che i due circoli della figura rappresentino la terra e la luna. A è il punto dove si vede la luna al di sopra della terra; B è il luogo direttamente opposto, dove si trovano gli antipodi. C indica il centro della terra. Ora, poiché il punto A è più vicino alla luna del punto B, un corpo posto in A è più fortemente attratto verso la luna di un corpo simile posto in B. Se poi supponiamo un terzo corpo, simile ai precedenti, posto nel centro della terra C, è chiaro che su di esso la luna eserciterà un'attrazione minore che sul corpo A, ma maggiore che sul corpo B, essendo A e B, rispettivamente, l'uno più vicino e l'altro più lontano dalla luna che non il corpo C. Ora corpi simili, situati in E e in F, sono attratti dalla luna pressappoco con la stessa forza con cui è attratto il corpo che si trova al centro della terra C, perché si trovano circa alla stessa distanza dalla luna del corpo C. Ci rendiamo così conto che non tutti i corpi della terra sono attratti con egual forza dalla luna. La diversa intensità dell'attrazione dipende dalla differenza delle loro distanze dal centro*



della luna L, in modo che un corpo della terra è tanto maggiormente attratto dalla luna quanto più è ad essa vicino, e ne è tanto meno attratto quanto più ne è lontano. È a questa diversità delle forze, con cui i corpi diversamente situati sulla terra sono attratti dalla luna, che noi dobbiamo ora fare massimamente attenzione; perché se tutti i corpi fossero ugualmente attratti dalla luna, essi obbedirebbero egualmente a questa forza e non si verificherebbe nessuno squilibrio nella loro reciproca posizione. Vostra Altezza si rappresenti un certo numero di carri tirati da forze perfettamente eguali, essi proseguiranno nella loro strada in modo da conservare sempre fra loro lo stesso ordine e le stesse distanze; ma non appena alcuni carri cammineranno più velocemente e altri più lentamente l'ordine sarà turbato. Lo stesso avviene per i corpi della terra che sono attratti dalla luna. Se fossero tutti egualmente attratti, essi conserverebbero fra loro la stessa posizione e noi non potremmo scorgervi nessun cambiamento; ma se le forze, con cui sono attratti dalla luna, non saranno eguali, anche il loro ordine e la loro posizione reciproca risulteranno cambiati, purché simili corpi non siano uniti fra loro con legami che a tali forze non sarebbe possibile rompere, cosa che non può accadere in un corpo fluido come il mare. Infatti proprietà essenziale di ogni corpo fluido è di avere tutte le parti facilmente separabili le une dalle altre in modo tale che ciascuna può obbedire liberamente alle varie forze che l'agitano. È dunque chiaro che, se le forze agenti sulle diverse parti del mare non sono eguali fra loro, ne debba nascere un'agitazione e uno squilibrio nel suo assetto ordinario. Ma si è visto or ora che le varie parti del mare sono diversamente attratte dalla luna a seconda della diversa distanza che hanno dal suo centro. Ne segue che il mare deve venir agitato dalla forza della luna, e che, cambiando la luna continuamente posizione nei confronti della terra e facendo intorno ad essa la propria rivoluzione in 24 ore e tre quarti circa, anche il mare deve subire gli stessi cambiamenti e gli stessi fenomeni nello stesso intervallo di 24 ore e tre quarti; ovverosia il flusso e riflusso devono ritardare ogni giorno di tre quarti d'ora; cosa che si accorda perfettamente con l'esperienza. Si tratta di mostrare come l'alzarsi e il calare del mare a un intervallo di 6 ore e 12 minuti, dipenda dalla diversità delle forze esercitate dalla luna; è quanto mi propongo di esaminare nella prossima lettera.

4 ottobre 1760

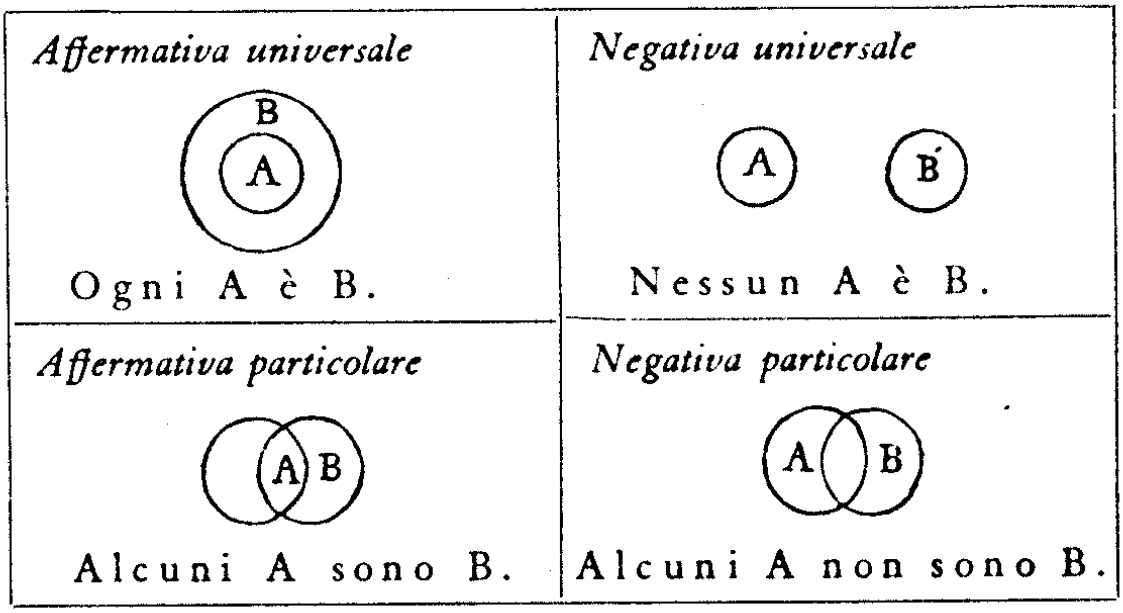
Lettere ad una principessa tedesca
Eulero

LETTERA 103

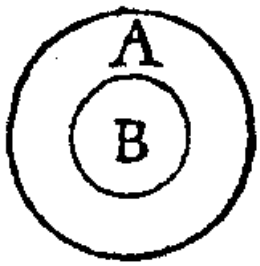
SUI SILLOGISMI, E SULLE LORO DIFFERENTI FORME SE LA PRIMA PROPOSIZIONE È UNIVERSALE

Tali figure circolari o meglio tali spazi (perché non importa quale forma si dia loro), sono quanto mai adatti a facilitare le nostre riflessioni su questa materia, e a rivelarci tutti i misteri di cui si mena vanto nella logica, e che si riesce a dimostrare solo con grande difficoltà, quando invece, servendosi di queste figure, tutto salta immediatamente agli occhi. Per rappresentare ogni nozione generale, dunque, si fa uso di spazi formati a piacere, e si indica con uno spazio, che contiene A, il soggetto di una proposizione, e con un altro spazio, che contiene B, il predicato. La natura della proposizione stessa esige sempre: 1) o che lo spazio A sia contenuto interamente nello spazio B; 2) o che vi sia contenuto solo in parte; 3) o che almeno una sua parte sia fuori dello spazio B; 4) o che infine lo spazio A sia completamente fuori di B. Ancora una volta vorrò porre davanti agli occhi di Vostra Altezza le figure o simboli delle quattro specie di proposizioni.

SIMBOLI DELLE QUATTRO SPECIE DI PROPOSIZIONI



Riguardo agli ultimi due casi, che rappresentano proposizioni particolari, osservo che essi danno luogo a qualche dubbio, poiché non è affatto deciso se a essere compresa in B, o a non esservi compresa, sia una grande parte di A. Potrebbe anche darsi che la nozione A contenesse in sé completamente la nozione B come nella figura;



perché è chiaro che in questo caso, mentre una parte dello spazio A rientra nello spazio B, un'altra parte di A non rientra affatto in B. Così se A fosse l'idea dell'albero in generale e B l'idea del pero in generale, che è senza dubbio compresa interamente nella prima, si potrebbero formare con questa figura le seguenti proposizioni:

1. *Tutti i peri sono alberi.*
2. *Alcuni alberi sono peri.*
3. *Alcuni alberi non sono peri.*

Egualmente, se di due spazi l'uno è completamente fuori dell'altro come:



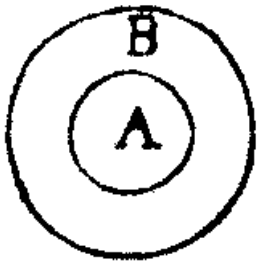
io posso dire altrettanto bene, nessun A è B, oppure nessun B è A; come se dicessi: nessun uomo è albero, e nessun albero è uomo.
Nel terzo caso, dove le due nozioni hanno una parte comune, come:



si può dire:

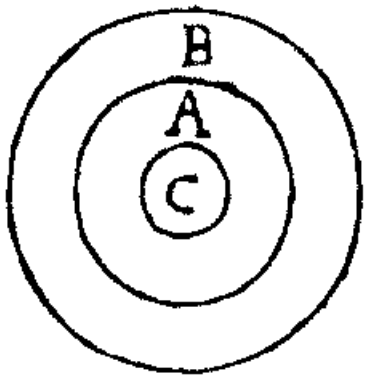
1. *Alcuni A sono B.*
2. *Alcuni B sono A.*
3. *Alcuni A non sono B.*
4. *Alcuni B non sono A.*

Questo può bastare per far vedere a Vostra Altezza come tutte le proposizioni possano essere rappresentate per mezzo di figure; ma il più grande vantaggio lo si ottiene in quei ragionamenti che, per essere enunciati con parole, sono chiamati ***sillogismi****, e la cui funzione è di trarre una giusta conclusione da alcune proposizioni date. Questo procedimento potrà farci immediatamente scoprire le esatte forme di tutti i sillogismi.*
Cominciamo con una proposizione universale affermativa:
ogni A è B,



dove lo spazio A è compreso interamente nello spazio B; vediamo ora come una terza nozione C deve essere riferita all'una o all'altra delle nozioni A o B, affinché se ne possa trarre una conclusione. La cosa è evidente nei seguenti casi:

1. Se la nozione C è interamente contenuta nella nozione A, essa sarà anche interamente contenuta nello spazio B:



Avremo allora questa forma di sillogismo:
ogni A è B,
ora, ogni C è A,
dunque, ogni C è B,
che è la conclusione.
Per esempio, se la nozione A contiene tutti gli alberi, la nozione B tutto ciò che ha radici, e la nozione C tutti i ciliegi, allora il nostro sillogismo sarà:
ogni albero ha radici;
ora, ogni ciliegio è un albero;
dunque, ogni ciliegio ha radici.

2. Se la nozione C ha una parte contenuta in A, la stessa parte sarà pure contenuta in B, poiché la nozione A si trova interamente contenuta nella nozione B

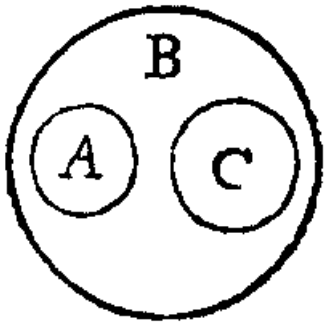


Di qui risulta la seconda forma del sillogismo:

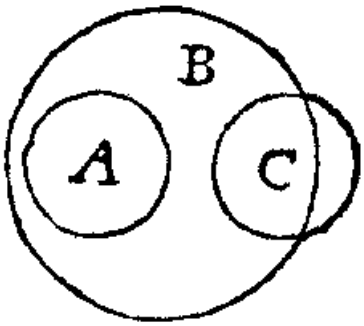
ogni A è B;
ora, alcuni C sono A,
dunque, alcuni C sono B.
Se la nozione C fosse completamente fuori della nozione A, non ne seguirebbe nulla in rapporto alla nozione B. Sarebbero infatti possibili soltanto tre casi, o che la nozione C sia completamente fuori di B,



o contenuta completamente in B,



o solo in parte contenuta in B,



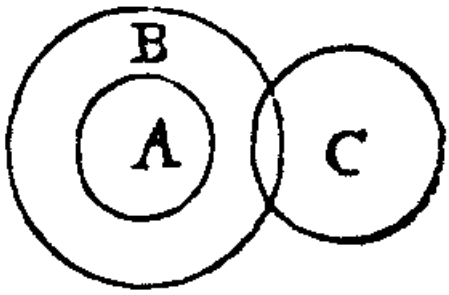
in modo che non sarebbe possibile trarre nessuna conclusione.

3. Ora se la nozione C fosse completamente fuori della nozione B, essa sarebbe anche completamente fuori della nozione A, come si vede nella seguente figura



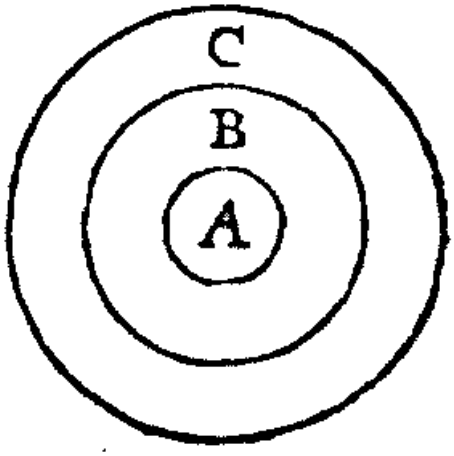
che ci fornisce questa forma di sillogismo:
ogni A è B;
ora, nessun C è B o nessun B è C;
dunque, nessun C è A.

4. Se la nozione C ha una parte fuori della nozione B, questa stessa parte sarà certamente fuori della nozione A, poiché quest'ultima è tutta intera nella nozione B.



Otteniamo così questa forma di sillogismo:
ogni A è B;
ora, alcuni C non sono B;
dunque, alcuni C non sono A.

5. Se la nozione C contiene in se stessa tutta la nozione B, una parte della nozione C cadrà certamente in A;
da dove risulta questa forma di sillogismo:
ogni A è B;
ora, ogni B è C;
dunque, alcuni C sono A.



Nessuna altra forma, oltre queste, è possibile se la prima proposizione è affermativa e universale.
Supponiamo ora che la prima proposizione sia negativa e universale, cioè:
nessun A è B,

il cui simbolo è dato dalla seguente figura,



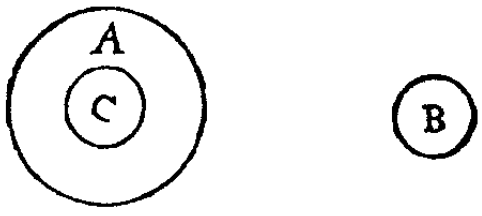
dove la nozione A si trova interamente fuori della nozione B; allora saranno i casi seguenti a fornirci conclusioni.

1. Se la nozione C è completamente contenuta nella nozione B, essa sarà allora interamente fuori dalla nozione A;



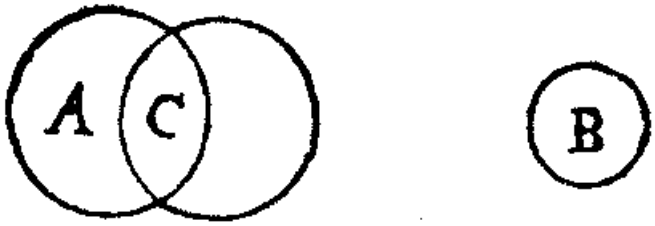
Si avrà così questa forma di sillogismo:
nessun A è B;
ora, ogni C è B;
dunque, nessun C è A.

2. Se la nozione C è interamente contenuta nella nozione A, essa sarà allora interamente fuori dalla nozione B: e si avrà questa forma di sillogismo:

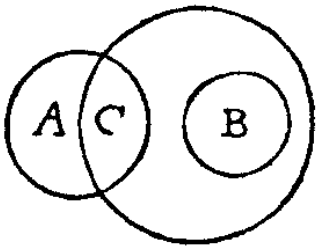


nessun A è B;
ora, ogni C è A;
dunque, nessun C è B.

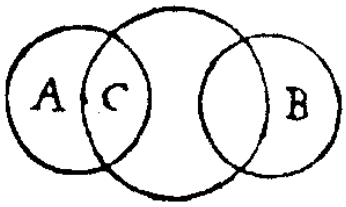
3. Se la nozione C ha un parte contenuta nella nozione A, questa parte si troverà certamente fuori della nozione B, come:



oppure come:



o ancora



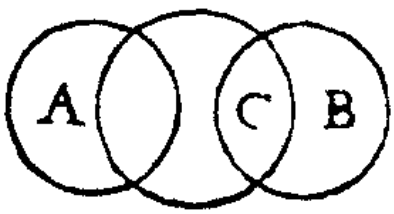
da dove si ricava questo sillogismo:

nessun A è B;
ora , alcuni C sono A; o alcuni A sono C;
dunque, alcuni C non sono B.

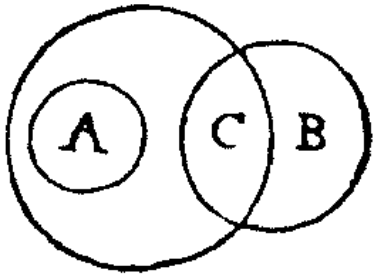
4. Egualmente se la nozione C ha una parte contenuta nella nozione B, tale parte si troverà certamente fuori della nozione A, come:



oppure come:



o ancora



da dove si ricava questo sillogismo:
nessun A è B;
ora, alcuni C sono B o alcuni B sono C;
dunque, alcuni C non sono A.

Per quanto riguarda le restanti forme, cioè quando la prima proposizione è particolare affermativa o negativa, le esporrò nella prossima lettera.

17 febbraio 1761

In questa lettera Eulero rappresenta le proprietà, indicate con le lettere maiuscole *A, B, C,* come insiemi. In effetti, dire che un certo oggetto verifica una certa proprietà equivale ad affermare che quell'oggetto appartiene all'insieme di tutti gli oggetti che verificano quella proprietà. Ecco un contesto in cui il linguaggio della **Logica** si può ricondurre a quello della **Teoria degli Insiemi**. Il matematico inglese **George Boole**, nell'Ottocento, ricondurrà invece la logica all'algebra, con le regole del cosiddetto **calcolo proposizionale**.

La raffigurazione delle relazioni tra insiemi mediante circoli che si sovrappongono in vario modo è ancora in uso al giorno d'oggi, nei testi didattici. I disegni di quel tipo sono chiamati ***diagrammi di Eulero-Venn***. Il secondo nome è quello di John Venn (1834-1923), un matematico inglese, che introdusse i diagrammi nell'uso comune con una sua pubblicazione del 1880, intitolata ***On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Proposition and Reasoning***.

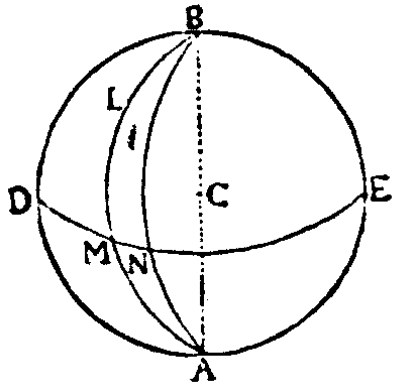
Lettere ad una principessa tedesca
Eulero

LETTERA 156

SULLA GRANDEZZA DELLA TERRA, SUI MERIDIANI E SUL PIÙ BREVE CAMMINO

Dopo aver fissato nella nostra mente l'idea dei poli e dell'equatore della terra, idea che Vostra Altezza può molto meglio immaginarsi su di un globo di quanto io non sia capace di rappresentarla con una figura, sarà facile trarne tutte le altre idee che ci sono necessarie.
Devo però aggiungere ancora una spiegazione. L'asse della terra, che passa da un polo all'altro attraverso il centro, è anche un diametro del globo terrestre, e misura quindi il doppio del raggio. Poiché il raggio della terra, ovverosia la distanza che intercorre fra ciascun punto della superficie e il centro, è di 860 miglia tedesche[1], l'asse della terra sarà di 1720. E poiché anche l'equatore è un cerchio avente il proprio centro al centro della terra e il raggio identico a quello della terra, cioè 860 miglia, anche il suo diametro sarà di 1720 miglia, e la sua circonferenza di 5400. Volendo fare quindi il giro della terra secondo la linea dell'equatore, sarebbe necessario percorrere 5400 miglia; ed è facile da ciò giudicare la grandezza della terra.
Il cerchio dell'equatore si divide in 360 parti eguali, chiamate gradi, e ogni grado dell'equatore misura esattamente 15 miglia tedesche, dato che 15 volte 360 fa 5400. Ogni grado si suddivide a sua volta in 60 parti eguali chiamate minuti, e ogni minuto corrisponde alla quarta parte di un miglio tedesco, cioè a 6000 piedi circa; mentre un secondo, che è la sessantesima parte di un minuto, corrisponde a 100 piedi.

Non potendo rappresentare sulla superficie della carta un globo se non come un cerchio, voglia Vostra Altezza rimediarvi con la immaginazione. Così se B e A sono i due poli della terra, B il polo boreale, e A quello australe, DMNE rappresenterà l'equatore, o meglio quella metà dell'equatore che è rivolta verso di noi, rimanendoci l'altra nascosta. La linea DMNE rappresenta dunque un semicerchio,



come semicerchi rappresentano anche le linee BDA e BEA, aventi tutte il loro centro nel centro del globo C. Si può ancora immaginare un'infinità di altri semicerchi, tutti tracciati dai due poli della terra A e B

[1] Un miglio tedesco equivale a 7.500 metri.

e tutti passanti attraverso altrettanti punti dell'equatore, come per esempio BMA e BNA, che saranno in tutto e per tutto simili ai primi semicerchi BDA e BEA, quantunque nella figura sembrino di grandezza diversa. In un globo però la cosa è evidentissima.

Si chiamano meridiani tutti i semicerchi tracciati fra i due poli, qualunque sia il punto dell'equatore che attraversano. Un meridiano cioè non è altro che un semicerchio tracciato sulla superficie terrestre da un polo all'altro, e Vostra Altezza comprenderà che, dato un punto qualsiasi della superficie terrestre, il punto L per esempio, si può sempre immaginare un meridiano BLMA che, passando dai due poli, lo attraversa. Questo meridiano si chiama allora meridiano del punto L. Se per esempio il punto L fosse Berlino, il semicerchio BLMA sarebbe il meridiano di Berlino, e così per tutti gli altri luoghi della terra. Vostra Altezza si rappresenti ora un globo, sulla cui superficie siano disegnati tutti i paesi della terra: continenti, mari e isole. Tale globo artificiale, che non può essere sconosciuto a Vostra Altezza, è chiamato globo terrestre.

Tutti i meridiani che si possono immaginare tracciati su di esso, e molti dei quali sono effettivamente tracciati, costituiscono dei semicerchi, divisi tutti dall'equatore in due parti eguali, ciascuna delle quali è quindi un quarto di cerchio, cioè un arco di 90 gradi. Così BD, BM, BE, sono dei quarti di cerchio come lo sono AD, AM, AN e AE, ciascuno dei quali misura 90 gradi ed è perpendicolare all'equatore, formando con esso angoli retti.

Volendo ora viaggiare dal punto M, posto sull'equatore, fino al polo B, il cammino più breve sarebbe quello di seguire la direzione del meridiano MLB, che essendo un arco di 90 gradi, e misurando ciascun grado 15 miglia tedesche, costituirebbe con le sue 1300 miglia il cammino più breve per andare dall'equatore a uno dei due poli.

Vostra Altezza ricorderà che il più breve cammino fra un luogo e un altro è costituito dalla linea retta tracciata fra i due luoghi stessi.

In questo caso però la linea retta, tracciata dal punto M dell'equatore al polo B, passerebbe nell'interno della terra e ci rimarrebbe impossibile seguirla, poiché siamo talmente legati alla superficie del nostro pianeta che non possiamo allontanarcene. Quindi, trattandosi del cammino più breve fra due punti posti sulla superficie di un globo, la questione si presenta ben diversamente. Tale cammino non sarà più una linea retta, ma un arco di cerchio tracciato da un punto a un altro della sua superficie e avente per centro il centro stesso del globo. Questo si accorda perfettamente con il nostro caso, perché per viaggiare dal punto M dell'equatore fino al polo B, l'arco del meridiano MLB, da me indicato come il cammino più breve, è effettivamente un arco di cerchio il cui centro si trova al centro della terra.

Egualmente, se noi consideriamo il punto L, posto sul meridiano BLMA il cammino più breve per andare da questo punto fino al punto B sarà l'arco LB, e, conoscendo il numero dei gradi di questo arco e contando 15 miglia per ogni grado, se ne conoscerà anche la lunghezza. Se invece si volesse andare da questo luogo all'equatore, percorrendo sempre il cammino più breve, sarebbe necessario seguire l'arco del meridiano LM, il cui numero dei gradi, moltiplicato per 15 miglia tedesche, darebbe la lunghezza della distanza percorsa.
Di solito ci si limita a esprimere queste distanze in gradi, sia perché è facilissimo ridurre questi valori in miglia tedesche, sia perché altre nazioni si servono di misure differenti, più grandi o più piccole. Così, considerando L la città di Berlino, si trova che l'arco LM, che conduce all'equatore, misura 52 gradi e mezzo; quindi per andare da Berlino all'equatore il cammino più breve è di 787 miglia e mezzo. Ma se da Berlino si volesse andare al polo boreale o settentrionale, si dovrebbe seguire l'arco BL, che, misurando 37 gradi e mezzo, avrà la lunghezza di 562 miglia e mezzo. Sommando insieme queste due distanze avremo 1350 miglia, come lunghezza dell'arco BLM, che è un quarto di cerchio di 90 gradi, la cui misura è, come abbiamo visto, di 1350 miglia tedesche.

22 agosto 1761

Lettere ad una principessa tedesca

Eulero

Il problema della longitudine

Pierre de Fermat (Tolosa, Francia, 1601?- Castres, Francia, 1665)



Fu un geniale matematico autodidatta, soprannominato "il principe dei dilettanti", e frequentatore dell'Accademia di **Mersenne**. Giurista di professione, detenne per un certo periodo la carica di consigliere presso il parlamento della sua città natale. Nel tempo libero amava dedicarsi soprattutto alla **teoria dei numeri**: si dilettava ad inventare teoremi, proposti sotto forma di quesiti, molti dei quali egli annotava sui margini di quello che forse era il suo libro preferito: l'***Arithmetica*** di **Diofanto**, che poco tempo prima aveva fatto la sua comparsa in Europa in **versione latina**. I più noti ed importanti enunciati sono passati alla storia con i nomi di **Piccolo Teorema di Fermat** ed **Ultimo Teorema di Fermat**. Gli appunti di Fermat spesso non contenevano le dimostrazioni delle proposizioni matematiche da lui scoperte: furono altri matematici, nel corso degli anni successivi, a doverle ricostruire. **Eulero**, nel Settecento, colmò molte delle lacune; egli dimostrò, tra l'altro, l'affermazione di Fermat secondo la quale ogni numero primo della forma $4k+1$ si scriverebbe in un unico modo come somma di due quadrati perfetti. Un numero primo della forma $4k+3$ non si scrive invece mai in questo modo.
Il compito lasciato ai posteri fu invece particolarmente arduo per l'Ultimo Teorema, che, dopo secoli di vani e disperati tentativi, è stato provato solo nel 1995 da **Andrew Wiles**.
Qualcuna delle congetture di Fermat fu anche confutata: la più celebre è quella riguardante i cosiddetti **primi di Fermat**.

Fermat diede un importante contributo alla nascita del **calcolo infinitesimale**, che applicò allo studio di particolari curve piane. Il suo trattato ***Methodus ad disquirendam maximam et minimam*** (1637) presenta un modo per determinare **la tangente ad una curva** in un punto dato che già contiene l'idea di **derivata** di una funzione.

Questo metodo, che si sarebbe rivelato validissimo (è quello solitamente impiegato oggi), conteneva, però, nella sua prima versione, alcuni inesattezze, che furono corrette da **Descartes**, come risulta da una delle sue numerose **lettere a Mersenne**.

La possibilità di studiare un luogo geometrico mediante espressioni algebriche presuppone l'uso della **geometria analitica**: Fermat, come Descartes, ispirandosi ad **Apollonio**, mostrò come rappresentare curve nel piano e superficie nello spazio mediante equazioni: è questo il principale scopo della sua breve opera intitolata ***Ad locos planos et solidos***, che sviluppa, estendendoli anche allo spazio tridimensionale, i principi enunciati nei *Luoghi piani* di Apollonio. A Fermat è dovuta l'invenzione di molte curve famose, come le **spirali** che da lui hanno preso il nome.

Un carteggio scientifico tra Fermat e **Pascal** riguardante l'antico **problema delle parti** anticipa l'avvento della **teoria della probabilità**, che verrà sviluppata da **Jakob Bernoulli**.

Il carteggio tra Fermat e Pascal



Monumento a Fermat a Tolosa

L'*Arithmetica* di Diofanto edita da Bachet (1621)

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

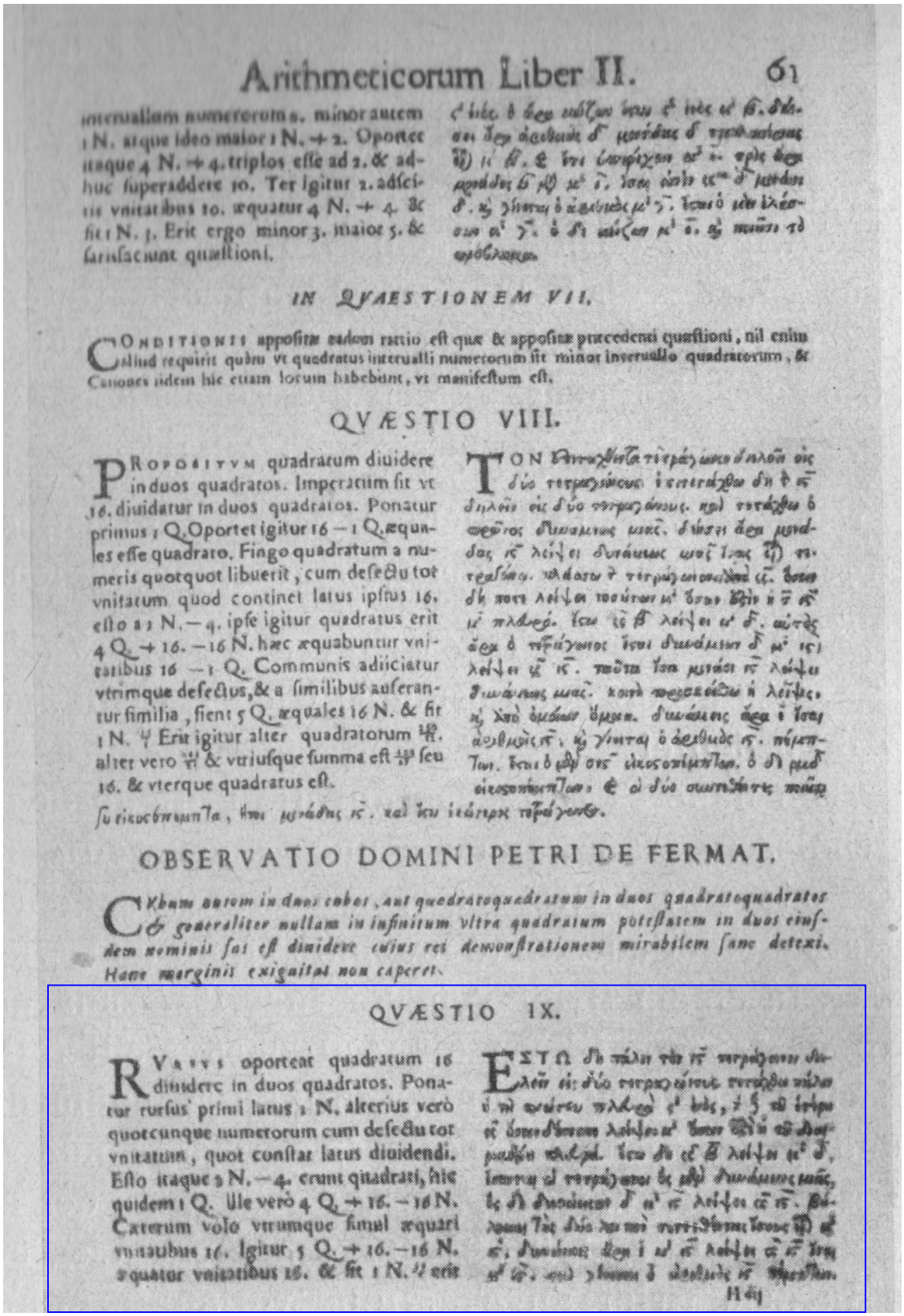
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obſeruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*

Acceſſit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex variis eiuſdem D. de FERMAT Epiſtolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Ieſu.
M. DC. XXX. I

L'*Arithmetica* di Fermat



Arithmeticorum Liber II. 61

intervallum numerorum 9. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adsciscis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus intervalli numerorum sit minor intervallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam horum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto 2 1 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 — 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{144}{25}$. alter vero $\frac{256}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 3 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 9 Q. + 16. — 24 N. Caterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 10 Q. + 16. — 24 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$ erit

Una pagina dell'edizione della *Arithmetica* di Diofanto commentata da Fermat: al centro l'enunciato dell'Ultimo Teorema

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρᾶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ις μ πλευρά. ἔστω ςς β λείψει μ δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μ ις [λείψει ςς ις] ταῦτα ἴσα μονάσι ις λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνς εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

DUKE UNIVERSITY SPECIAL COLLECTIONS LIBRARY

L'Ultimo Teorema di Fermat

Le origini del problema

Il matematico francese **Pierre de Fermat** era appassionato di **teoria dei numeri**, cioè della disciplina che studia i numeri interi e le loro relazioni. Questa nasce nell'Antica Grecia con **Diofanto** (circa 250 d.C.): la sua opera principale *"Arithmetica"* (questo era il nome originario della disciplina) approdò in Europa solo nel 1575. Fermat possedeva una copia della versione latina dovuta a Claude Bachet (1621): da questa egli trasse spunto per ideare diversi enigmi matematici, che egli usava annotare a margine del libro. Uno di questi riguarda i cosiddetti **primi di Fermat**, un altro riguarda l'equazione di una **curva ellittica**. Dopo la sua morte, suo figlio Clément Samuel, nel 1670, curò un'**edizione** dell'*Arithmetica* in cui erano riportati tutti gli appunti del padre. I vari rompicapi furono via via tutti risolti, ad eccezione di uno: si trattava dell'enunciato di un teorema privo di dimostrazione, che passò alla storia come **Ultimo Teorema di Fermat (UTF)**.

Il motivo ispiratore fu il **Problema VIII** del Libro II dell'*Arithmetica*, che chiede di *"dividere un quadrato assegnato in due quadrati"*. Diofanto dà la seguente soluzione, che traduciamo in moderno linguaggio matematico:

"Sia 16 il quadrato assegnato, sia x^2 *uno dei quadrati cercati, e sia* $(2x-4)^2$ *l'altro quadrato. Quindi deve essere soddisfatta l'equazione*

$$x^2 + (2x-4)^2 = 16.$$

Una soluzione è 16/5. Dunque i quadrati cercati sono 256/25 e 144/25."

In altri termini, si chiede di trovare due frazioni b e c che risolvano l'equazione:

$$16 = b^2 + c^2 \qquad (1)$$

Si noti che risolvere la (1) equivale a trovare le soluzioni $b=16$ e $c=12$ come soluzioni intere dell'equazione:

$$400 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

Questo non è che un caso particolare del problema più generale di trovare una terna di numeri interi (positivi) *a,b,c* verificanti l'equazione

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (3)$$

Fin dall'antichità si sa che esistono infinite terne numeriche di questo di questo tipo, dette ***terne pitagoriche***.
Fermat provò a risolvere lo stesso problema cambiando l'esponente della (3), cioè sostituendo 2 con 3 (cubi), poi con 4 (biquadrati), e così via. E giunse alla conclusione che con i nuovi esponenti il problema non ammetteva più soluzione. Questa affermazione è, appunto, l'UTF. Così egli la formulò nel 1637, annotandola accanto al Problema 8 di Diofanto (traduciamo il testo originale, scritto in latino):

"*D'altra parte non è possibile scomporre un cubo in due cubi, un biquadrato in due biquadrati, o, in generale, ogni potenza, eccetto il quadrato, in due potenze con lo stesso esponente.*"

E di seguito aggiunse:

"Di ciò ho scoperto una dimostrazione veramente meravigliosa. Tuttavia la ristrettezza del margine non basterebbe a contenerla."

Questa dimostrazione non fu mai ritrovata. Da allora, per più di tre secoli, i matematici di tutto il mondo si sono invano cimentati con questo problema, divenuto ben presto famosissimo. La sua trascrizione in moderno linguaggio matematico è la seguente:

Se n è un numero intero maggiore di 2, non esiste alcuna terna di numeri interi positivi a,b,c verificanti l'equazione

$$a^n = b^n + c^n \qquad (F)$$

I tentativi di dimostrazione
Fermat stesso scrisse la dimostrazione per gli esponenti ***n=3*** e ***n=4***, utilizzando un metodo da lui inventato, detto della *discesa infinita,* che è poi un particolare tipo di ***reductio ad absurdum***. Probabilmente ritenne che questo metodo si estendesse facilmente a tutti i valori di *n* più grandi, cosa che si è, però, rivelata falsa.

Nel 1729 il grande matematico tedesco **Eulero**, che allora aveva 22 anni, venne a conoscenza delle famose annotazioni di Fermat, ed iniziò ad occuparsi dei problemi ancora irrisolti. Riuscì a confutare la congettura sui primi di Fermat, ed a provare un altro enunciato riguardante le soluzioni intere di una certa equazione di terzo grado. Eulero trovò anche una nuova dimostrazione dell'UTF per i casi particolari ***n=3*** e ***n=4***, ma non poté andare oltre. Pare che nel 1742, dopo anni di infruttuosi tentativi, arrivò persino a chiedere ad un suo amico di frugare nella casa di Fermat alla ricerca di eventuali foglietti abbandonati.

Nel 1816 l'Accademia di Francia mise in palio un premio destinato al primo che avesse dimostrato l'UTF. Il matematico di Brema H.W.M. Olbers ne diede notizia a **Gauss**, il quale, però, si rese immediatamente conto della difficoltà del problema, e respinse la sfida. Rispondendo alla lettera dell'amico dopo due settimane, così si espresse:

"Le sono molto obbligato per la notizia del premio di Parigi, ma Le confesso che il Teorema di Fermat, come proposizione isolata, presenta scarsissimo interesse per me, perché potrei facilmente enunciare un gran numero di simili proposizioni, che non potremmo né dimostrare né confutare."

Intorno al 1830 **Dirichlet** risolse i casi ***n=5*** e ***n=14***, tra il 1839 ed il 1840 **Lamé** e **Lebesgue** risolsero il caso ***n=7***. Il caso *n=5* fu anche risolto da **Legendre**.
Alcuni anni prima la matematica francese **Marie-Sophie Germain** aveva dimostrato che se *n* è un numero primo tale che anche *2n+1* è primo, e la (F) ammette una soluzione *a,b,c,* allora uno di questi numeri è multiplo di *n.* I **numeri primi** siffatti sono oggi ricordati come ***primi di Germain***.
Seguirono le ricerche di **Kummer** che, intorno alla metà dell'Ottocento, provò l'UTF per un'infinità di esponenti, in particolare per tutti i multipli dei numeri da 3 a 99. Nel frattempo l'Accademia di Francia aveva portato il premio a 3000 franchi ed una medaglia d'oro. Ma nel 1856 decise di non ripetere l'offerta: la speranza di vedere dimostrato l'UTF sembrava ormai svanita. Kummer fu comunque premiato per i notevoli progressi compiuti.

Il risultato di Kummer fu solo il primo di una serie di teoremi di carattere generale che permisero di restringere sempre più il campo di ricerca delle eventuali soluzioni dell'equazione (F).
Nel 1956 **Wagstaff** poté verificare, con l'ausilio del calcolatore, che la (F) sicuramente non ammette soluzioni se *n* è multiplo di un numero compreso fra 2 e 125.000, nel 1992 questo limite fu elevato a 4.000.000.
Nel 1983 **Faltings**, un matematico tedesco di 27 anni, provò la **congettura di Mordell**: da questa segue che per ogni valore di *n* la (F) ammette al più un numero finito di soluzioni. Questo fu l'ultimo, e forse il più importante risultato ottenuto prima della completa risoluzione del problema.

L'impresa di Andrew Wiles
Il 23 giugno del 1993, in un'aula del *Sir Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences* di Cambridge, Inghilterra, l'evento tanto atteso sembrava finalmente giunto: al termine di un ciclo di tre lezioni, a sorpresa, il quarantenne professore inglese **Andrew Wiles** della Università di Princeton, USA, di fronte ad un pubblico di docenti, diede la dimostrazione del famigerato UTF. La sensazionale notizia fece subito il giro del mondo.
Il testo della dimostrazione, lungo 100 pagine, fu pubblicato nel 1995 negli *Annals of Mathematics,* una delle più prestigiose riviste matematiche di tutto il mondo. Il ritardo di due anni è dovuto ad un grave errore nella dimostrazione, scoperto nell'estate del 1993, che, fortunatamente, dopo mesi di lavoro, Wiles riuscì a correggere. L'**articolo** si apre con la citazione originale latina dell'annotazione di Fermat.

La dimostrazione utilizza strumenti di matematica avanzata, e purtroppo non può essere riassunta in termini elementari. In effetti il lavoro di Wiles non è che il coronamento di un progetto di ricerca al quale hanno contribuito, nel corso degli ultimi decenni, matematici di diversa provenienza geografica. L'oggetto fondamentale è dato dalle curve ellittiche, l'idea che spinse i ricercatori in questa direzione è dovuta ai matematici giapponesi **Taniyama** e **Shimura**: una congettura da loro formulata tra gli anni 50 e 60 risultò essere strettamente legata all'UTF: il matematico tedesco **Frey** intuì questa relazione all'inizio degli anni 80, ed il francese **Ribet** la confermò nel 1986. Wiles pervenne alla dimostrazione dell'UTF proprio passando attraverso la congettura di Shimura-Taniyama.

Curiosità

- Da uno scritto risalente ad uno sceicco risulta che già intorno al 970 il matematico ed astronomo arabo **Alhogendi** si era interessato all'equazione $x^3 + y^3 = z^3$, che, a suo parere, non poteva avere soluzioni intere. Questa affermazione ricompare, molti secoli più tardi, negli scritti del matematico persiano **Beha Eddin** (1547-1622).
- Nel giugno 1997, nell'Aula Magna dell'Università di Göttingen, Germania, Wiles ha ricevuto il premio Wolfskehl, istituito nel lontano 1908: l'industriale tedesco Paul Wolfskehl aveva lasciato in eredità il suo patrimonio, per un valore di 100.000 marchi, da destinare al primo che fosse riuscito a dimostrare l'UTF. La cifra, astronomica per l'epoca, è stata fortemente ridimensionata dall'inflazione: oggi corrisponde ad "appena" 100 milioni di lire.

L'UTF e il diavolo

Annals of Mathematics, **142** (1995), 443–551

Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem

By ANDREW WILES*

For Nada, Clare, Kate and Olivia

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

Introduction

An elliptic curve over $\mathbf{Q}$ is said to be modular if it has a finite covering by a modular curve of the form $X_0(N)$. Any such elliptic curve has the property that its Hasse-Weil zeta function has an analytic continuation and satisfies a functional equation of the standard type. If an elliptic curve over $\mathbf{Q}$ with a given j-invariant is modular then it is easy to see that all elliptic curves with the same j-invariant are modular (in which case we say that the j-invariant is modular). A well-known conjecture which grew out of the work of Shimura and Taniyama in the 1950's and 1960's asserts that every elliptic curve over $\mathbf{Q}$ is modular. However, it only became widely known through its publication in a paper of Weil in 1967 [We] (as an exercise for the interested reader!), in which, moreover, Weil gave conceptual evidence for the conjecture. Although it had been numerically verified in many cases, prior to the results described in this paper it had only been known that finitely many j-invariants were modular.

In 1985 Frey made the remarkable observation that this conjecture should imply Fermat's Last Theorem. The precise mechanism relating the two was formulated by Serre as the ε-conjecture and this was then proved by Ribet in the summer of 1986. Ribet's result only requires one to prove the conjecture for semistable elliptic curves in order to deduce Fermat's Last Theorem.

*The work on this paper was supported by an NSF grant.

L'UTF ed il diavolo

L'ultimo teorema di **Fermat** è stato così famoso da entrare perfino, nel 1958, nella novella *Il Diavolo e Simon Flagg* di **Arthur Poges**, contenuta nell'antologia *Deals with the Devil* (Patti con il Diavolo).
Il Diavolo chiede a Simon Flagg di fargli delle domande. Se saprà rispondere entro ventiquattro ore si prenderà l'anima di Simon, altrimenti dovrà dargli 100.000 dollari.
Simon chiede: ***l'ultimo teorema di Fermat è corretto?***
Dopo il tempo pattuito, il Diavolo ammette la sconfitta e dice:

"Hai vinto, Simon. Neppure io posso imparare abbastanza matematica in un tempo così breve per risolvere un problema tanto difficile. Più mi sono sprofondato nella questione e più difficile è diventata. Scomposizione non unica in fattori primi, ideali...Bah! Sai che neppure i migliori matematici sugli altri pianeti, che sono tutti molto più progrediti del vostro, l'hanno risolto? Su Saturno c'è un tipo - assomiglia ad un fungo su un paio di trampoli, che risolve le equazioni alle derivate parziali a memoria ed anche lui ha rinunciato."

Il Piccolo Teorema di Fermat

L'enunciato di questo teorema compare in una lettera indirizzata da **Fermat** ad un amico. Esso afferma che, se p è un numero primo, ed a è un intero positivo qualunque, allora il numero

$$a^p - a$$

è divisibile per p. In realtà vale un risultato più forte: se p non divide a, allora

$$a^{p-1} - 1$$

è divisibile per p.
La dimostrazione fu data nel 1736 da **Eulero**, che nel 1760 generalizzò il teorema. Egli introdusse la funzione φ, detta *totiente:* per ogni intero positivo n, indicò con $\varphi(n)$ il numero di interi compresi fra 1 e $n-1$ che non hanno, con n, divisori comuni non banali. Egli provò che, per qualsiasi intero positivo a coprimo rispetto ad n il numero

$$a^{\varphi(n)} - 1$$

è divisibile per n. Questo enunciato contiene il Piccolo Teorema di Fermat, in quanto, per ogni numero primo p, si ha che $\varphi(p)=p-1$.

Osservazioni aggiuntive

- Supponiamo che la **fattorizzazione** del numero n sia

$$n = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \cdots s^{\delta},$$

dove $p, q, r, \ldots, s$ sono una successione finita di primi a due a due distinti, e $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ sono una successione finita di numeri interi positivi.

Il totiente di n è allora espresso dalla formula:

$$\varphi(n) = n\,(1-1/p)(1-1/q)(1-1/r)\cdots(1-1/s),$$

- Il Piccolo Teorema di Fermat fornisce un metodo per verificare se un dato numero naturale n è composto, senza bisogno di cercarne i divisori. Si può provare a calcolare il valore di $a^n - a$ per vari interi a: se se ne trova uno per il quale $a^n - a$ non è divisibile per n, allora si è certi che n non è un numero primo. Purtroppo non è possibile utilizzare lo stesso criterio per individuare numeri primi: infatti esistono numeri naturali n per i quali $a^n - a$ è sempre divisibile per n, senza che n sia primo. Dal 1992 sappiamo che i numeri n siffatti sono infiniti.
  Il più piccolo di questi è $n = 561 = 3 \times 187$.

Cos'è una curva ellittica?

Una curva ellittica è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate *(x,y)* verificano un'equazione della forma:

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

dove a,b,c sono interi fissati tali che il polinomio a secondo membro non abbia radici doppie. Il nome deriva dal fatto che l'equazione è cubica, come quelle usate per calcolare il perimetro dell'ellisse.

Esempio: $y^2 = x^3 - 2$

Il polinomio $x^3 - 2$ ha $\sqrt[3]{2}$ come unica radice reale, in particolare non ha radici doppie. Questa curva ellittica compare nelle annotazioni di **Fermat**: egli afferma che essa possiede due soli punti a coordinate intere, ossia (3, 5) e (3, -5). Questo enunciato venne poi dimostrato da **Eulero**.

Le curve ellittiche sono alla base di moderni metodi per la **fattorizzazione** di interi molto grandi.

Le cubiche classificate da Newton

Il problema delle parti

Un gioco, disputato tra due persone, viene improvvisamente interrotto: in quel momento il primo giocatore ha totalizzato *p* punti ed il secondo *q* punti. Conoscendo il numero *n* di punti necessari a vincere, si chiede come debba essere suddivisa la posta tra i due giocatori. Il quesito fu trattato da **Pacioli** nella ***Summa***, e successivamente da **Cardano** e **Galileo** (autori, fra l'altro, di trattati sul gioco dei dadi), **Tartaglia**, **Pascal** e **Fermat**. Quest'ultimo risolse il caso in cui *p=n-2* e *q=n-3*, trovando che la posta va divisa nel rapporto di *11* a *5*. Il metodo impiegato è basato sul calcolo delle combinazioni, i cui numeri compaiono nel **triangolo aritmetico**. Gli sforzi compiuti da tutti questi matematici sono storicamente molto rilevanti, poiché sono anteriori alla nascita ufficiale della **teoria della probabilità**, avvenuta solo nel sec. XVIII per merito di **Jakob Bernoulli**.

Una delle prime testimonianze dell'uso della nuova teoria si trova in uno scritto di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano: è una **formula** che permette di calcolare la giusta vincita spettante ad un giocatore che azzecchi una certa combinazione al lotto.

Lettere di Fermat e Pascal sul problema delle parti

Considerazioni sopra il giuoco de' dadi **di Galileo**

Un teorema sul gioco del lotto

In una raccolta d'opuscoli e scientifici e filologici, edita a Venezia nel 1735, il matematico **Giulio Carlo de' Fagnani** presenta una formula per stabilire il giusto premio spettante ad un giocatore del lotto in base alla combinazione giocata ed alla somma spesa. Ecco il testo originale:

Chiamisi (u) la moltitudine de' numeri che stanno nell'urna, (e) la moltitudine de' numeri, che se n'estraggono, (g) la moltitudine de' numeri, che si giocano combinati insieme; v. g. se si gioca un numero solo, o un ambo, o un terno ec. g rappresenta rispettivamente un numero solo, o un ambo, o un terno ec.
Chiamisi in oltre (f) la moltitudine di quei numeri della combinazione (g), che debbono avere un luogo, o sia ordine fisso nell'estrazione; v. g. se si gioca un numero solo con questa condizione, che il numero giocato sia il primo estratto, allora f significherà l'unità; se si gioca un ambo con la condizione, che due, ovvero uno de' numeri dell'ambo abbiano un luogo fisso nell'estrazione, allora f denoterà 2, ovvero rispettivamente 1 (..).
Finalmente, se nel numero giocato non vi è la condizione, che alcuno de' numeri abbia un luogo fisso nell'estrazione, in questo caso f significherà zero.

Teorema generale
Poste le suddette significazioni, e definizioni, e posto ancora, che (d) rappresenti la spesa contribuita dal giocatore, e (p) la ricompensa, che se gli debbe, allorché vince; io dico, che sussiste l'equazione seguente:

$$p = (u+1,\ldots., u-g)d/(e-f+1,\ldots., e-g) - d.$$

Nella notazione di Fagnani, la scrittura $(m,\ldots,n)$, ove m,n sono numeri naturali (il primo maggiore del secondo) indica il prodotto di tutti i numeri strettamente compresi fra n e m. Se $m=n+1$, quella scrittura indica il numero 1.

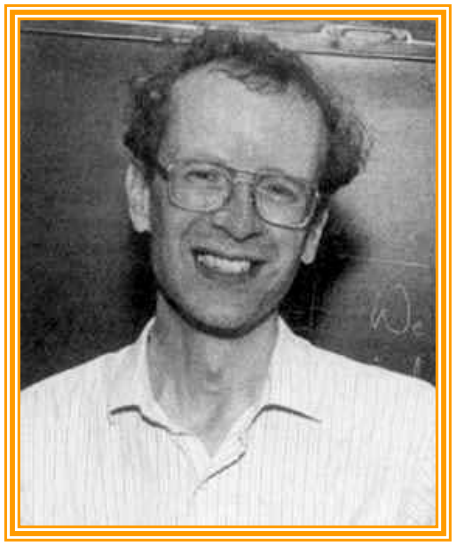
In base al Teorema Generale di Fagnani, è possibile, ad esempio, calcolare il premio spettante ad un giocatore che realizzi un 5+1 al Superenalotto con una schedina da 1900 lire. Il giocatore gioca una combinazione vincente puntando su questa 950 lire. I numeri nell'urna sono $u=90$, i numeri estratti sono $e=7$, i numeri giocati $g=6$. Il giocatore indovina il settimo estratto (il numero jolly), e cinque dei

precedenti estratti. Poiché egli non precisa quale dei numeri da lui giocati debba essere il settimo estratto, è come se giocasse 6 volte la stessa combinazione, in cui il settimo estratto occupa sei diverse posizioni. Per ciascuna di queste *f=1*. Dunque egli vince con una combinazione su cui ha puntato 950/6 lire. Il Teorema Generale stabilisce che la giusta ricompensa è:

$$p = (91,\ldots,84)950/6(7,\ldots,1) = 85\cdot86\cdot87\cdot88\cdot89\cdot90\cdot950/2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot6 - 950 = 98.580.648.800,$$

più di 98 miliardi!

Andrew Wiles (nato l'11 aprile 1953 a Cambridge, Inghilterra)



Il suo nome è balzato agli onori della cronaca – e, allo stesso tempo, è passato alla storia – il 23 giugno 1993, quando, al termine di un ciclo di seminari tenuti all'Università di Cambridge, ha annunciato di aver trovato la dimostrazione dell'**Ultimo Teorema di Fermat**, risolvendo un difficilissimo problema di **teoria dei numeri** che attendeva una risposta da ben più di tre secoli. La soluzione, riveduta e corretta, è stata pubblicata nel 1995 in un articolo di un centinaio di pagine.

La sua brillantissima e rapida carriera si è svolta tra le Università di Oxford, Cambridge e Harvard. Attualmente è professore a Princeton, negli Stati Uniti.

La prima pagina dell'articolo di Wiles

Matematica e Ottica

Galileo Ferraris
Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici
***Esposizione elementare della teoria di Gauss e delle sue applicazioni*, 1877**

Il testo trova il suo fondamento nella presentazione fatta da **Gauss** il 10 dicembre 1840 della sua opera ***Dioptrische Untersuchungen*** alla società delle Scienze di Göttingen, ovvero di una memoria sul cammino seguito attraverso i sistemi di mezzi rifrangenti da quei raggi di luce che si dicono centrali. È precisato nella prefazione che tale memoria segnò il più grande progresso che, nel XIX secolo, abbia registrato questa parte fondamentale della teoria degli strumenti diottrici. L'opera è suddivisa in due parti, preceduta da un'ampia prefazione e da un accuratissimo indice.
Nella prima parte, sono esposte le proprietà cardinali dei sistemi diottrici in generale, cioè quelle proprietà che si riferiscono ai raggi centrali di luce omogenea. L'autore afferma che il metodo da lui adottato ha, rispetto ad altri, i pregi di un maggior rigore e di una maggiore uniformità, nulla perdendo nella facilità, ma solo accostandosi, più che non fosse stato fatto dagli altri, alle considerazioni geometriche dalle quali il Gauss ricavò le equazioni del raggio rifratto.
La seconda parte è dedicata alle applicazioni all'occhio, alle lenti ed ai **sistemi di lenti** che si adoperano più spesso nella composizione degli strumenti, ed infine, agli strumenti stessi.
L'autore precisa che avrebbe potuto dare alla trattazione una maggiore generalità, in modo che essa potesse comprendere anche i casi nei quali si avessero insieme alle superfici rifrangenti, alcune superfici riflettenti, insieme alle lenti, alcuni specchi.
Si afferma però, a pag. XV della prefazione: *"Io non lo feci temendo di dare all'esposizione un carattere di astrazione forse soverchio in un lavoro come questo; il quale raggiungerà tanto meglio lo scopo che io mi sono prefisso nel pubblicarlo, quanto più sarà giudicato facile ed elementare."*

Il cannocchiale di Galileo
Dalla *Dioptrique* di Cartesio: Il cannocchiale parabolico
La macchina per la fabbricazione delle lenti

Il telescopio a riflessione totale di Newton

LE PROPRIETÀ CARDINALI

DEGLI

STRUMENTI DIOTTRICI

ESPOSIZIONE ELEMENTARE DELLA TEORIA DI GAUSS

E DELLE SUE APPLICAZIONI

DELL'INGEGNERE

GALILEO FERRARIS

Membro della facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali
della R. Università di Torino.
Incaricato dell'insegnamento della fisica tecnologica nel R. Museo Industriale italiano



ROMA TORINO FIRENZE

ERMANNO LOESCHER

1877

66. Lenti piano-concave. Nelle lenti che si dicono piano-concave una faccia è piana e l'altra è concava come nelle figure 30 e 31. Le formole relative a queste si deducono da quelle delle lenti piano-convesse osservando solo che i raggi di curvatura hanno segni contrarii. Pella prima lente (fig. 30) metteremo adunque $-R$ in luogo di r nelle formole della lente della figura 28, ed otterremo:

$$\varphi = -\frac{R}{\mu - 1}, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\frac{\Delta}{\mu}.$$

Pella lente della fig. 31 metteremo nelle formole dell'articolo

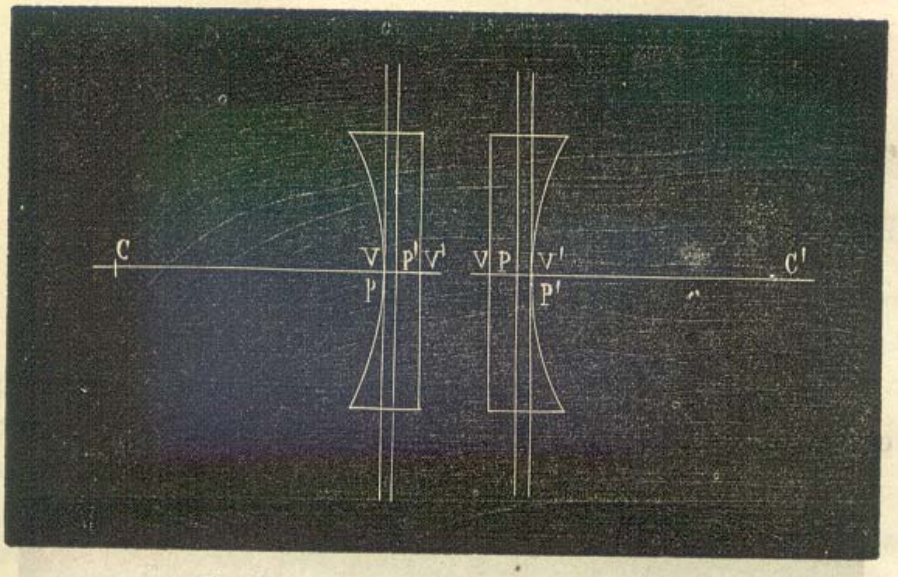


Fig. 30 Fig. 31

precedente r' in luogo di $-R'$, ed otterremo:

$$\varphi = -\frac{r'}{\mu - 1}, \qquad VP = \frac{\Delta}{\mu}, \qquad V'P' = 0.$$

Queste formole mostrano:

1° Che le lenti piano-concave sono sempre divergenti;

2° Che uno dei punti principali cade nel vertice della faccia curva e l'altro giace nell'interno della lente alla distanza $\frac{\Delta}{\mu}$ dalla faccia piana, come pelle lenti piano-convesse.

67. Lenti concavo-convesse o menischi. Per ultimo consideriamo il caso in cui una delle faccie è concava e l'altra è convessa (figure 32 e 33). Quando questo succede la lente dicesi concavo-convessa od anche menisco.

Pei menischi r ed r' hanno lo stesso segno, e quindi il prodotto rr' è positivo, e φ ha il segno di ρ. Dunque un menisco è convergente o divergente secondochè ρ è positivo o

negativo: è convergente se è soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1} (r - r') ,$$

ed è divergente se è soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1} (r - r') .$$

Distinguiamo tre casi:

Primo caso (fig. 32). Il valore assoluto del raggio di curvatura della faccia concava sia maggiore di quello del raggio

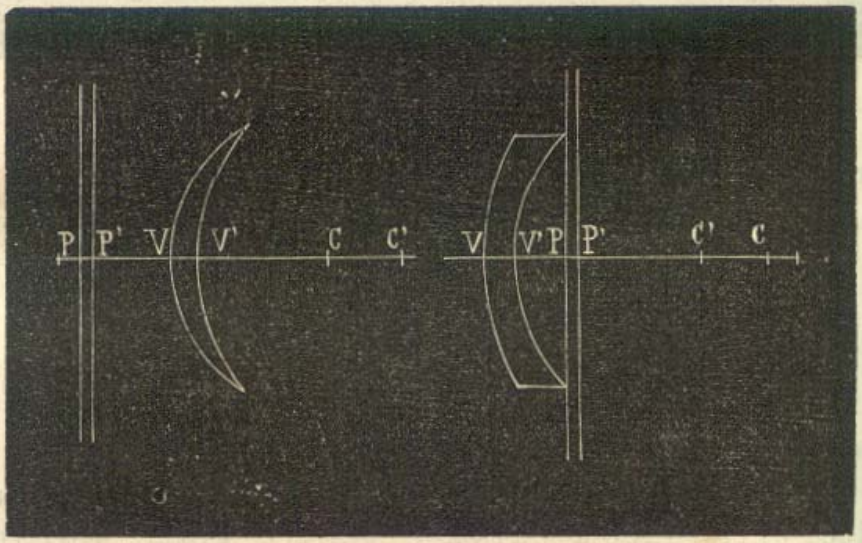


Fig. 32 Fig. 33

di curvatura della faccia convessa. In questo caso la differenza $r - r'$ è negativa. Infatti se r ed r' sono entrambi positivi, la faccia convessa è la prima ed il raggio maggiore è r'; se i due raggi sono negativi ed uguali rispettivamente a $-R$ ed a $-R'$, la faccia convessa è la seconda, R è maggiore di R' e la differenza

$$r - r' = R' - R$$

è negativa. Siccome adunque Δ è una grandezza essenzial-

ordinariamente verificata: perciò nella pratica le lenti di questa specie sono divergenti.

Come esempio di lente concavo-convessa studiamo una lente a faccie concentriche. Se supponiamo r ed r' positivi, abbiamo in questo caso $\Delta = r - r'$, e se supponiamo $\mu > 1$ come è pelle lenti pratiche, abbiamo $\frac{\mu}{\mu - 1} > 1$. Dunque

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r') ,$$

e la lente è divergente. Per una tale lente abbiamo

$$\rho = -\Delta + \frac{\mu - 1}{\mu}\Delta ,$$

ossia

$$\rho = -\frac{\Delta}{\mu} ;$$

e quindi

$$\varphi = -\frac{\mu}{\mu - 1}\frac{rr'}{r - r'} ,$$

la quale formola si può anche scrivere

$$\frac{1}{\varphi} = -\frac{\mu - 1}{\mu}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) .$$

La distanza focale così calcolata va all'infinito quando lo spessore $r - r'$ diminuisce fino a zero.

Pei menischi le distanze VP, V'P' dei punti principali dai vertici delle faccie, date dalle formole [2'] e [3'], hanno sempre il medesimo segno, cioè i due punti principali sono sempre situati entrambi dalla parte della convessità o dalla parte della concavità della rispettiva superficie della lente. Queste distanze poi hanno il segno dei raggi r ed r' od hanno il segno contrario secondochè ρ è negativo o positivo; dunque i due punti principali sono situati dalla parte della convessità se la lente è convergente (fig. 32), e sono situati dalla parte della concavità se la lente è divergente (fig. 33).

mente positiva, così è sempre soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

e la lente è sempre convergente.

Secondo caso. I due raggi di curvatura sieno uguali. Allora $r - r' = 0$; epperò anche qui è sempre

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

e la lente è sempre convergente.

Terzo caso. Il raggio di curvatura della faccia convessa sia, in valore assoluto, più grande di quello della faccia concava. In questo caso la lente può essere divergente o telescopica o convergente, a seconda del valore di Δ. Allora infatti la differenza $r - r'$ è positiva, e quindi è sempre possibile scegliere un valore dello spessore Δ, tale che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

o l'uguaglianza

$$\Delta = \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

o la disugualianza

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r').$$

Per $\mu = \frac{3}{2}$ la lente è divergente, telescopica o convergente secondochè è

$$\Delta < 3(r - r'), \qquad \Delta = 3(r - r'), \qquad \Delta > 3(r - r').$$

Per le lenti di piccola grossezza quali sono quelle che fanno parte dei nostri istrumenti ottici la prima disuguaglianza è

Pel vetro a faccie concentriche, poc'anzi considerato come esempio, si ha

$$VP = r\,, \qquad V'P' = r'\,,$$

e quindi i due punti principali coincidono col comune centro di curvatura delle due superficie.

Leonardo Pisano detto il Fibonacci (Pisa 1170 -??)



Il nome **Fibonacci** è in realtà una contrazione di *filius Bonacci*, come lo stesso Leonardo ha lasciato scritto. Era infatti figlio di un Bonacci, notaio dei mercanti pisani di Bugia (Barberia). Fu noto anche come **Leonardo Pisano**.
Da giovane si dedicò alla attività mercantile e sempre per scopi commerciali viaggiò molto, spostandosi tra Africa, Grecia ed Asia.
Compiuti i trenta anni, ritornò in patria portandovi il frutto delle conoscenze accumulate, tra cui le tecniche di calcolo aritmetico proprie della **matematica indiana**.

Opere principali:
Liber abaci (Libro dell'abaco) **(1202)**
Practica Geometriae (Pratica della Geometria) **(1220)**
Liber quadratorum (o Trattato dei numeri quadrati) **(1225)**
Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium **(1225)**

Gli Opuscoli di Leonardo Pisano

I numeri di Fibonacci

Bigolli

Il nomignolo di *bigollone* o *bighellone* fu dato al Fibonacci dai suoi concittadini. Secondo una interpretazione, questo epiteto conterrebbe una sfumatura dispregiativa, volendo designare un uomo che, pur vivendo in una città molto operosa, dedita al traffico ed agli affari, passava il suo tempo occupandosi di astruserie scientifiche. Una seconda interpretazione, forse più verosimile, è riportata nel **1867** dal *Milanesi* nel giornale *Arcadico, tomo CXCVII-LII* della nuova serie. Egli riferisce che la parola *bigollo* significò originariamente *trottola* e quindi poté semplicemente significare una persona che gira sempre o viaggia molto, ed in questo senso ben si addice alla personalità del Fibonacci. A sostegno della sua tesi, il Milanesi riporta la seguente quartina di un *sonetto di* ***Cecco Angiolieri***, morto intorno al 1306.
"Qualunque giorno non veggio 'l mio amore
La notte come sempre mi travello,
E sì mi giro che pajo un bigollo:
Tanta è la pena che sente il mio core."

Che il soprannome bigollo non potesse essere di scherno, si deduce anche dal fatto che esso appare in una pubblica delibera riferita nel *Costituto pisano* in cui, con parole di elogio, è conferita a Leonardo una ricompensa annua di 20 libbre per l'ufficio di rivedere tutti *i libri delle ragioni e delle entrate* del Comune, con l'obbligo di insegnare l'Aritmetica agli ufficiali del Comune. Riportiamo questa delibera che, scolpita in marmo, si trova nell'*archivio di Stato* di Pisa.

Considerantes. nostre. civitatis. et. civium. honorem. atque. profectum. qui. eis. tam. per. doctrinam. quam. per. sedula. obsequia. discreti. et. sapientis. viri. magistri. leonardi. bigolli. in abbacandis. estimationibus. et. rationibus. civitatis. eiusque. officialium. et. aliis quoties. expedit. conferuntur. ut. eidem. leonardo. merito. dilectionis. et gratie. atque. scientie sue. prerogativa. in. recompensatione. laboris. sui. quem. substinet. in. audiendis. et. consolidandis. estimationibus. et. rationibus. supradictis. a. comuni. et. camerariis. pubblicis. de. comuni. et. pro comuni. mercede. sive. salario. suo. annis. singulis. libre. XX. denariorum. et amisceria. consueta. dari. debeant. ipseque. pisano. comuni. et. eius. officialibus. in. abbacatione. de. cetero. more. solito. servat. presenti. constitutione. firmamus.

I numeri di Fibonacci

Nel suo ***Liber abaci*** (1202) **Fibonacci** risolve il famoso **problema dei conigli**:

Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna dà alla luce una nuova coppia, che diventa produttiva a partire dal secondo mese?

Il numero complessivo delle coppie di conigli esistenti allo scadere di ogni mese è dato dalla successione numerica:

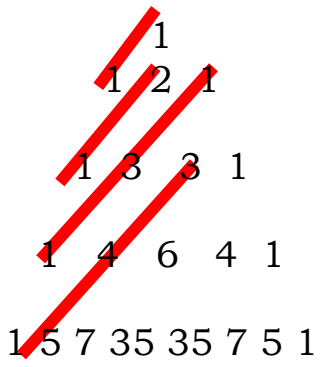
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Dal terzo termine in poi, ogni termine è la somma dei due termini precedenti. Detto u_n l'n-esimo termine della successione, si ha che $u_1=u_2=1$, e per $n\geq 3$,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

I termini di questa successione sono detti ***numeri di Fibonacci***, e presentano sorprendenti proprietà aritmetiche, oltre a giocare un ruolo fondamentale nell'arte ed in alcuni fenomeni naturali.

È certo curioso il fatto che i numeri di Fibonacci sono leggibili nel **triangolo aritmetico**: sono le somme dei numeri che si trovano sulle diagonali discendenti da destra verso sinistra:



Interessante è anche la formula di **Binet**:

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

In essa compare il numero

$$\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}6180,$$

detto, fin dall'antichità, ***numero aureo***[1]. Il valore del rapporto u_{n+1}/u_n, al crescere di n, si avvicina sempre più Φ. Per convincersene, è sufficiente far eseguire, ad una calcolatrice, i quozienti:

2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, 144/89, 233/144, e così via.

Il numero aureo è anche uguale al valore della **frazione continua**

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Quesito aperto: Quanti numeri di Fibonacci sono **primi**? Ne esistono infiniti? A tutt'oggi nessuno è riuscito a dare una risposta.

I numeri di Fibonacci in botanica: la fillotassi

I numeri di Fibonacci in musica

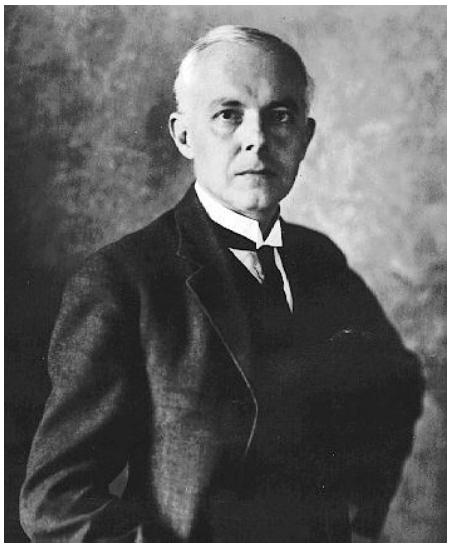
I numeri di Fibonacci nell'arte: la sezione aurea

[1] Spesso questo nome viene attribuito anche al numero $\varphi = 1/\Phi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}6180$.

La musica "aurea"

Secondo la teoria musicale risalente a **Pitagora**, le combinazioni di suoni più gradevoli all'orecchio sono quelle espresse da rapporti fra **numeri di Fibonacci** consecutivi: 2:1 (ottava), 3:2 (quinta), 5:3 (sesta maggiore), 8:5 (sesta minore). Recenti sperimentazioni hanno prodotto brani musicali in cui i numeri di Fibonacci vengono utilizzati per generare particolari effetti ritmici. Una singolare suddivisione è quella scelta dal compositore ungherese Bela Bartok (1881-1945) per il primo movimento della sua *Musica per archi, percussioni e celesta.* Questo brano si estende per 88 battute, più una battuta muta. Il momento culminante della composizione (*fff)* giunge dopo 55 battute: nelle prime 34 agli archi sono applicate le sordine, che vengono rimosse per le restanti 21. Le ultime 34 battute della composizione sono suddivise analogamente in due parti, della durata di 13 e 21 battute rispettivamente, in cui gli archi suonano prima senza, poi con la sordina. Le 21 battute finali sono a loro volta suddivise in due gruppi di 13 e 8.

I numeri di Fibonacci nell'arte: la sezione aurea



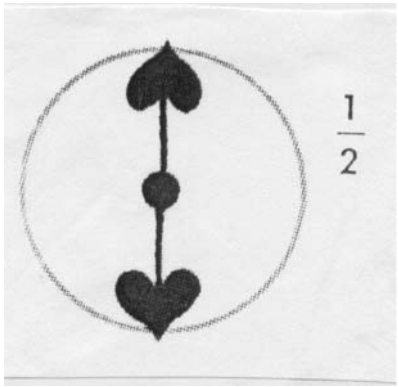
Bela Bartok

I numeri di Fibonacci in natura: la fillotassi

Il cosiddetto "**problema dei conigli**", ben noto ai matematici, induce a pensare che i **numeri di Fibonacci** si prestino a descrivere il fenomeno della crescita in natura, che, in fondo, trae origine dal processo di moltiplicazione della popolazione cellulare. Quest'idea trova un efficace riscontro in botanica. Uno degli esempi più sorprendenti è quello del cerfoglio: se si misurano, lungo uno dei suoi rami, le distanze fra due germogli consecutivi, si vede che esse corrispondono ai primi termini della successione di Fibonacci. Lo stesso dicasi per le lunghezze delle foglie stesse.

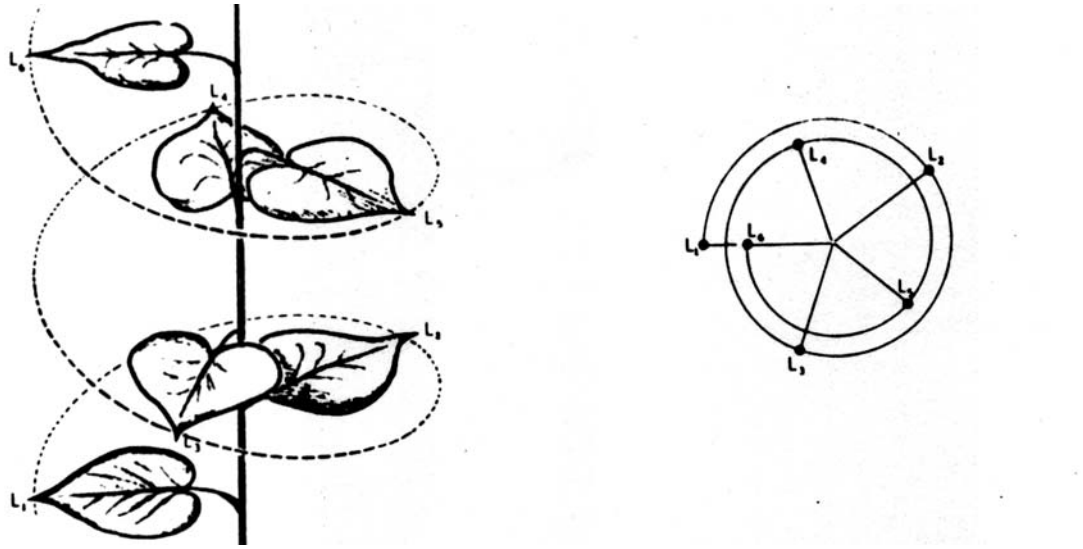


Si è inoltre osservato che, in molte piante, la disposizione delle foglie lungo ogni ramo (*fillotassi*) ha uno sviluppo elicoidale. Per passare da una foglia alla successiva, è necessario spostarsi lungo il ramo e, contemporaneamente, ruotare di un angolo che ha sempre la stessa ampiezza. Si compie così una frazione di giro che, per la maggior parte delle piante, è uguale al quoziente fra due numeri di Fibonacci. Ad esempio, presentano una 1/2-fillotassi i tulipani e gli olmi:



Le foglie si alternano, lungo il ramo, ognuna diretta in maniera opposta alla successiva.

Le rose ed i ciliegi presentano invece una 2/5 -fillotassi:



I numeri di Fibonacci descrivono anche la struttura dei coni delle conifere e degli ananas: le squame sono disposte lungo due serie di strisce, una serie si sviluppa da destra a sinistra, l'altra in senso contrario. I numeri delle strisce appartenenti alle due serie sono sempre due numeri di Fibonacci consecutivi: si va dalla coppia (2,3) di certi tipi di abete alla coppia (5,8) o (8,13) dell'ananas. Una analoga proprietà si riscontra nei girasoli: le infiorescenze del capolino sono disposte su due serie di **spirali auree**, orarie e antiorarie, e contando le spirali delle due serie si ottengono due numeri di Fibonacci consecutivi. Si sono trovati esemplari corrispondenti alle coppie (34,55), (55,89) e si segnalano perfino fiori giganti da (89,144).



I numeri di Fibonacci compaiono frequentemente come numero di petali di fiori: 3 per i gigli, 5 per i ranuncoli, 8 per il delfinio, 13 per la calendula, 21 per l'aster, 34, 55 o 89 per la margherita.

Questi numeri sono strettamente legati alla **sezione aurea**: anche quest'ultima, che è un particolare tipo di proporzione, ricorre spesso in natura.

Già **Pitagora**, nell'antichità, aveva intuito il fondamentale ruolo svolto dai rapporti numerici in natura.

La sezione aurea

Sia dato il segmento *AB*, di lunghezza *1*. Si cerca il punto *C* del segmento tale che

$$AB : BC = BC : AC \qquad (1)$$

Si dice che il punto *C* suddivide *AB* in *media ed estrema ragione,* o secondo la ***sezione aurea***. Posto $x = BC$, la (1) si riscrive nella forma:

$$1/x = x/(1-x),$$

che equivale a

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Dalle **formule di Newton** segue facilmente che la sola radice positiva di questa equazione è

$$\phi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}6180$$

il cui reciproco è detto ***numero aureo***.

Il ruolo che questo numero riveste in matematica va, però, ben al di là di questa semplice definizione algebrica. In aritmetica lo si ricorda perché strettamente legato ai **numeri di Fibonacci**. In geometria è importante in quanto compare in particolari poligoni regolari. Si dimostra infatti facilmente che:

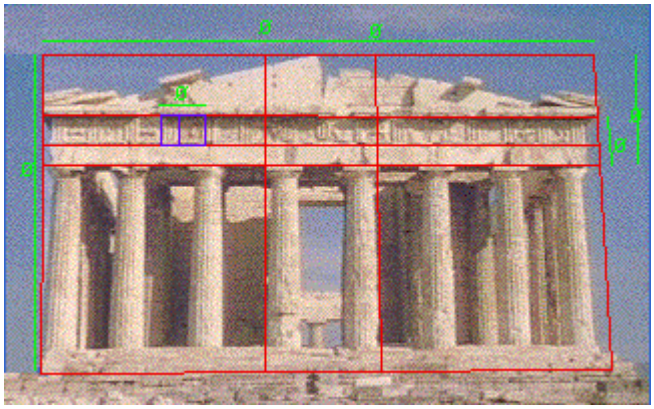
- il **decagono** regolare iscritto in una circonferenza unitaria ha il lato di lunghezza ϕ.

- nel **pentagono** il punto d'intersezione di due diagonali qualsiasi divide queste ultime secondo la sezione aurea.

Il rapporto aureo

Il valore estetico, perfino magico, della sezione aurea, già riconosciuto nell'Antico Egitto (**il papiro di Rhind** lo definisce *"proporzione sacra"*), esaltato in epoca classica, e riscoperto nel Rinascimento, venne ampiamente trattato da **Pacioli** nella sua opera ***De divina proportione***.
Pare che una forma in cui il rapporto fra le dimensioni è dato dal numero aureo (*rapporto aureo*) sia particolarmente gradevole all'occhio. Non è sicuramente un caso se nella Grande Piramide di Giza il quoziente tra l'altezza di ogni faccia e metà della lunghezza della base è uguale al numero aureo. Ed è sempre il numero aureo a determinare l'armonia tra le parti dell'arco di Costantino (secolo IV) o della cattedrale di Friburgo in Svizzera (secolo XIII).

Un rettangolo in cui il rapporto fra altezza e lunghezza è uguale al numero aureo è detto ***rettangolo aureo***. Sono rettangoli aurei la parte frontale del Partenone (secolo V a.C.), e le facciate di molti palazzi rinascimentali, ma anche molte costruzioni moderne, come il Palazzo di Vetro delle Nazioni Unite.

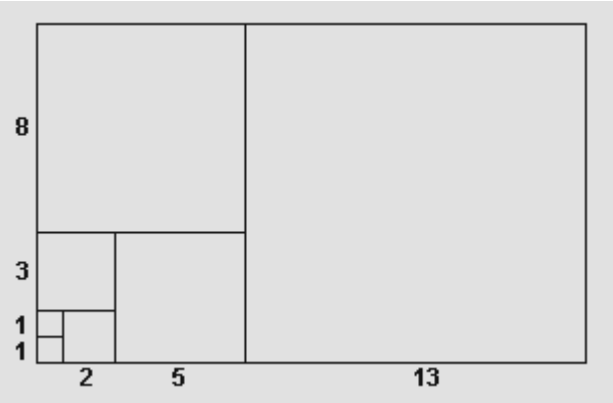




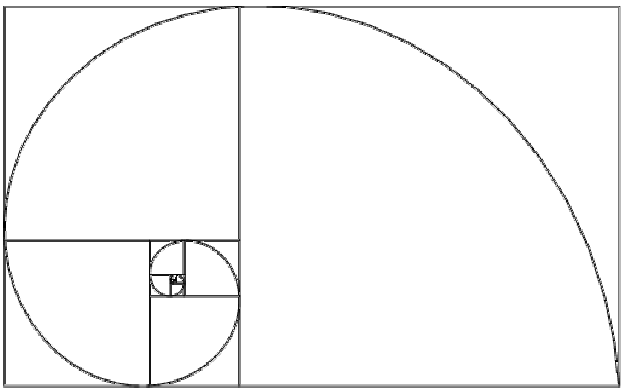
Molti dipinti, come l'***Annunciazione*** di Leonardo, ***La flagellazione di Cristo*** di **Piero della Francesca**, o ***La Parade*** di Georges Seurat, sono strutturati secondo una griglia di rettangoli aurei, come quelle che costituiscono le **composizioni astratte** di Piet Mondrian.

Un'interessante proprietà geometrica del rettangolo aureo è la seguente: se ne tagliamo via un quadrato costruito sul lato minore,

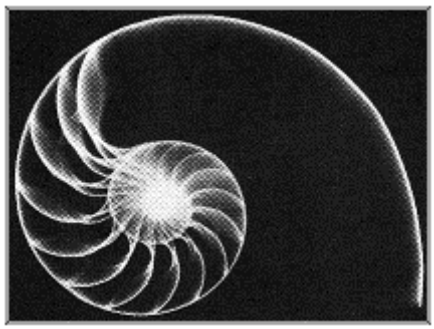
ciò che resta è ancora un rettangolo aureo. Il procedimento può essere idealmente ripetuto all'infinito:



Iscrivendo in ognuno dei quadrati un quarto di circonferenza, si ottiene una spirale detta ***spirale aurea***, che è una **spirale logaritmica**.



Questa è la forma della conchiglia del *nautilus,* e delle linee di infiorescenze del girasole.



La larghezza e la lunghezza delle foglie della rosa formano un rapporto aureo; e molte altre piante racchiudono in sé il misterioso fascino di questa proporzione.

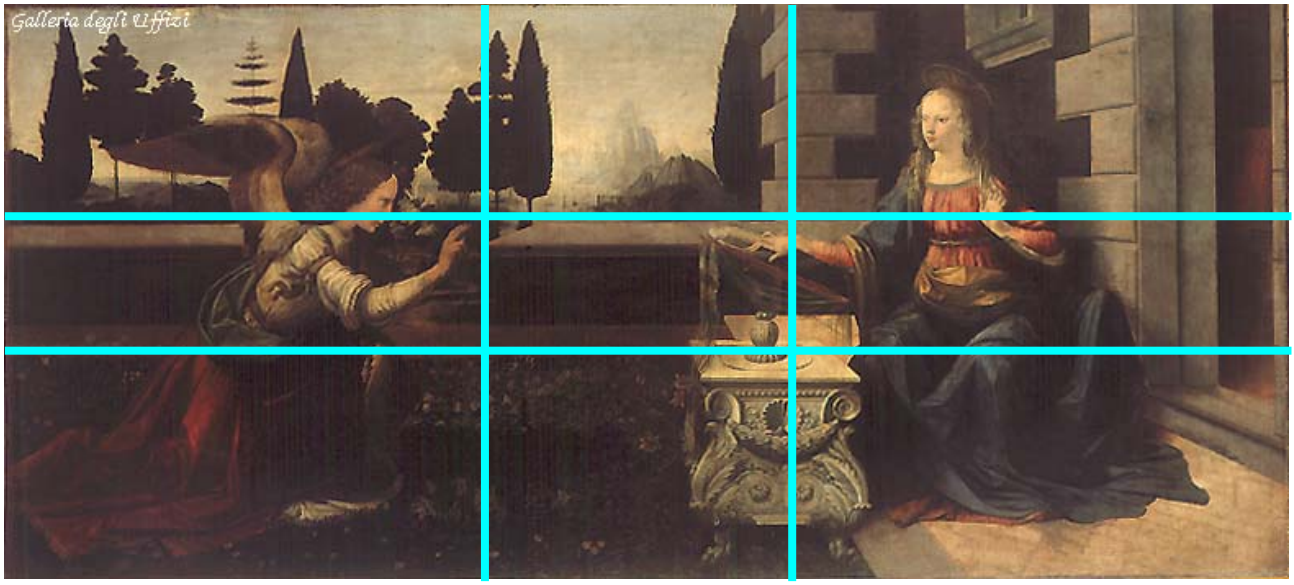
Parlando dell'armonia di proporzioni è quasi inevitabile pensare alla musica, in cui la consonanza è creata dal giusto rapporto tra le altezze dei suoni che determinano l'accordo: anche in questo settore dell'arte incontriamo i **numeri di Fibonacci**.

I numeri di Fibonacci in musica

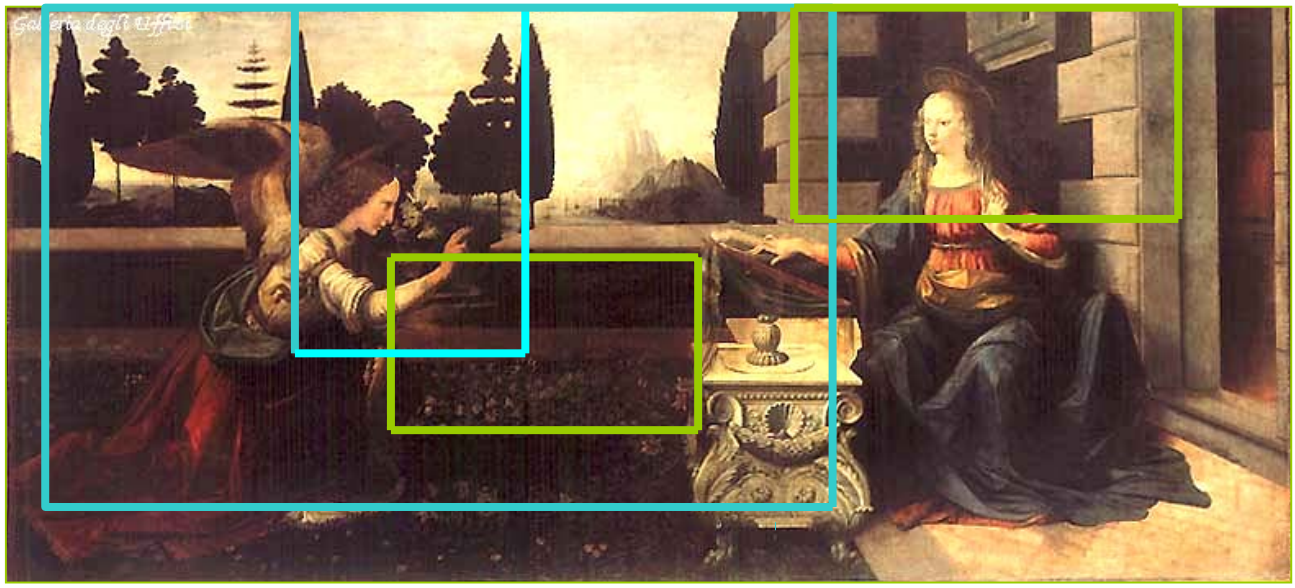
I numeri di Fibonacci in botanica: la fillotassi

L'Annunciazione **di** **Leonardo da Vinci**

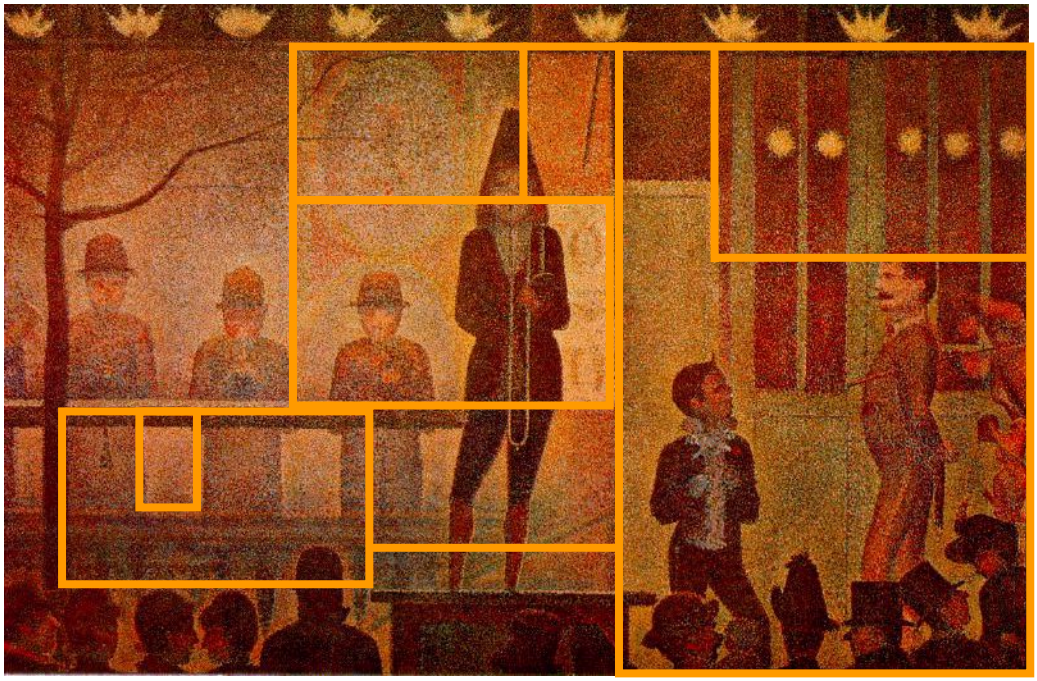
Questo famoso dipinto, esposto alla Galleria degli Uffizi, a Firenze, è un interessante esempio di applicazione della sezione aurea. Tracciando le perpendicolari ai bordi nei punti che li dividono secondo la sezione aurea, si ottengono alcune delle fondamentali linee del dipinto:



Esaminando le altre linee del quadro, si può scoprire che esse determinano vari rettangoli "quasi" aurei, nei quali il rapporto tra i lati è pari al quoziente di due **numeri di Fibonacci** consecutivi.



La Parade di Georges Seurat



Alcuni dei rettangoli "aurei" in cui è suddiviso il quadro: i rapporti tra i lati sono pari ai quozienti di due numeri di Fibonacci consecutivi.

Le frazioni continue

Una frazione continua è il numero ottenuto al limite di un particolare procedimento ricorsivo. Ne descriviamo uno. Data una successione di interi positivi a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,..., si inizia scrivendo il numero

$$a_0 + 1/a_1,$$

quindi si aggiunge al denominatore a_1 la frazione $1/a_2$:

$$a_0 + 1/ (a_1 + 1/a_2),$$

e poi, al terzo passo, si aggiunge $1/a_3$ al denominatore a_2:

$$a_0 + 1/ (a_1 + 1/(a_2 + 1/a_3)).$$

Si prosegue in questo modo, sommando, al passo n-esimo, $1/a_n$ al denominatore a_{n-1}. Si ottiene, al limite, una frazione con infiniti denominatori:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

I numeri irrazionali, come, ad esempio, il **numero aureo**, possono essere rappresentati mediante frazioni continue. Il primo ad avere quest'idea fu **Bombelli**, nel Cinquecento. Egli trovò, ad esempio, il seguente risultato:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ldots}}}$$

Noi oggi lo scriviamo in questa forma, ma il nostro simbolismo è molto diverso da quello usato da Bombelli. Il metodo delle frazioni continue per l'estrazione delle radici quadrate fu ulteriormente sviluppato da **Pietro Antonio Cataldi** (1552 –1626). Successivamente **Lagrange** lo estese alla risoluzione delle equazioni algebriche.
Le frazioni continue possono essere utilizzate per la risoluzione approssimata delle equazioni algebriche, come mostra, ad esempio un brano di un testo didattico ottocentesco dell'**Abbé Marie**.

La prima definizione rigorosa di frazione continua è dovuta ad **Eulero**.

Interrompendo il processo iterativo al passo *n*-esimo si ottiene un numero razionale: esso approssima il valore della frazione continua in maniera tanto più accurata quanto maggiore è *n*. In altri termini, i numeri razionali costruiti passo dopo passo formano una successione il cui limite è il numero irrazionale considerato.

Una frazione continua si dice ***periodica*** se la successione dei termini $a_0, a_1, a_2, \ldots$, da un certo punto in poi, è formata dalla ripetizione indefinita della stessa sequenza finita di numeri. Un interessante risultato sulle frazioni continue periodiche che sono radici di equazioni algebriche è dovuto a **Galois**.

Nel Seicento, il matematico inglese **William Brouncker**, che fu collaboratore di **John Wallis**, trovò questa interessante identità:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}$$

		368 libre	2 soldi	1 denari
Pro tali	20 libre LII et soldi IIII et denarii II	52	4	2
Pro tali	libre XII et soldi XV et denarii V	12	15	5
Pro tali	libre LIII	53		
Pro tali	libre LXXX	80		
Pro tali	soldi XV		15	
Pro tali	soldi XVIII		18	
Pro tali	soldi VIIII et denarii X		9	10
Pro tali	denarii XI			11
Pro tali	denarii VII			7
Pro tali	libre V et soldi VI et denarii XI	5	6	11
Pro tali	libre VIII et soldi VII et denarii V	8	7	5
Pro tali	libre LXXXVII et denarii VIIII	87		9
Pro tali	libre VIII et soldi VI	8	6	
Pro tali	libre XXVII et soldi XV et denarii VI	27	15	6
Pro tali	soldi XIII		13	
Pro tali	denarii VII			7
Pro tali	libre XXX et soldi VIII	30	8	
Summa	libre CCCLXVIII et soldi II et denarii I	6	6	

Certamente dalla semplicità di questo modello, non devesi dedurre un apprezzamento qualsiasi sulla maggiore o minore estensione dell'arte computistica in fatto di tenuta dei libri, all'epoca del Fibonacci. S'egli seppe rivedere la contabilità del Comune raccogliendo onori e lodi, scolpiti perfino in lapidi, vuol dire che le sue cognizioni in tale materia, dovevano necessariamente essere ben maggiori di quelle, che forse potrebbe lasciar supporre la semplicità di questo modello. Nel quale pertanto si vede, che Leonardo segue per l'addizione, il modo usato nel suo *Liber Abaci* per l'insegnamento di questa operazione; cioé il totale non lo nota appiedi della pagina (come si fa ora) ma in alto, nella testata, segnando in basso soltanto i riporti.

Modello del libro delle spese

(Dalla *Storia della Ragioneria Italiana* di Plinio Bariola)

Leonardo Pisano
Flos

Il titolo di questo opuscolo indica che il contenuto era per il suo autore il "fiore dell'algebra". Vi troviamo, tra l'altro, un risultato davvero sorprendente. **Fibonacci** dà la soluzione dell'equazione cubica

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

approssimandola fino alla decima cifra dopo la virgola:

$$1{,}3688081075.$$

Si tratta di un numero irrazionale, e il calcolo è esatto fino alla nona cifra. Fibonacci dimostra che questo numero non rientra tra quelli elencati da **Euclide** nel Libro X degli ***Elementi***. È il primo esempio di un numero irrazionale non esprimibile mediante radici quadrate di numeri razionali: in particolare, come ci insegna la ***teoria di Galois***, questo numero non è costruibile con riga e compasso.

Non si conosce la via seguita da Fibonacci per ricavare quel risultato, ma il Nostro potrebbe aver applicato un algoritmo per la risoluzione approssimata delle equazioni algebriche appreso durante i suoi viaggi in Oriente. I **Cinesi**, all'epoca, già padroneggiavano queste tecniche di calcolo.

Leonardo Pisano
Liber abaci

Con questa opera, **Fibonacci** si afferma come il primo aritmetico italiano e d'occidente.
Il libro è diviso in 15 Capitoli, cinque dei quali, dal 8° al 12°, sono dedicati a questioni commerciali (**Sommario**).
In esso Leonardo chiama *figure* i simboli adoperati per rappresentare i numeri, che sono praticamente quelli attualmente in uso (**Tavola**).
La parola "*cifra*" venne infatti più tardi, secondo alcuni dall'arabo "*Sife*" che significa zero. Secondo Leonardo invece la parola zero verrebbe dalla voce "*Zephirum*".
Egli scrive: "*Novem figure indorum sunt: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.*
Cum is itaque novem figuris, et cum signo 0, quod arabice zephirum appellatur scribitur quilibet numerus ut inferius demonstratur: Nam numerus est unitatum perfusa collectio sive congregatio unitatum, qui per suas in infinitum ascendit gradus."
Leonardo è il primo autore che dà lo svolgimento delle operazioni aritmetiche, egli spiega anche il **metodo digitale** molto usato fino al secolo XVII e poi gradualmente scomparso grazie alla facilità dei metodi operativi scritti affermatisi.
Svolge l'addizione e la sottrazione come si fa oggi, con l'unica variante che il risultato della operazione è riportato in alto invece che in basso.
La moltiplicazione è svolta sia con il metodo mnemonico sia con i metodi scritti che furono poi detti a ***crocetta*** e a *scacchiere*.
Analogamente la divisione e l'estrazione di radice vengono insegnate sia con il metodo mnemonico, sia per iscritto.
Le operazioni non vengono indicate con segni ma con vocali.
Per primo adopera la linea per separare dividendo da divisore nelle frazioni (o *numeri rotti*).
Leonardo chiama "**res**" (cosa) la quantità incognita ricercata in una determinata questione; da ciò derivò nel volgo la denominazione data all'arte analitica di "**regola**" od "**arte della cosa**", come si ritrova in Luca **Pacioli** ed in **Tartaglia**, molto più tardi.
Al Nostro sembra sia dovuta anche la regola di dividere i numeri in gruppi di tre cifre, così come si fa oggi.
In questa opera, Egli introduce i cosiddetti **numeri di Fibonacci** ed insegna anche le regole da osservare per tenere correttamente un *libro delle spese*, e ne dà anche un **modello**.
Egli fu dunque anche un ragioniere insigne, almeno per i suoi tempi. Non è un caso infatti che la contabilità del comune di Pisa, di cui gli

era stata affidata la revisione, fosse molto ben ordinata e presentasse un giusto criterio di controllo economico.
Presentiamo alcuni **problemi** risolti dal Fibonacci.

Tavola

Ecco come s'incominciarono a scrivere, o come furono scritte, da primi aritmetici, le cifre arabiche:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Arabe (dopo Cristo)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Persiani (» »)	1	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰
Fibonacci (1202)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Sacrobosco (1250)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Planudio (1327)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

In Gerberto, le nove cifre sono così scritte:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

e dicevansi per ordine

igin, andras, ormis, arbas, quinas, calcus, zenis, themenias, celentis, rota.

Questa tavola l' abbiamo tolta dal *Compendio d' Aritmetica* di Giovanni Luvini, il quale a sua volta la tolse dal *Sunto Storico dell'Aritmetica* del Cav. Martines (Messina 1855).

(Dalla *Storia della Ragioneria Italiana* di Plinio Bariola).

Sommario del Liber Abaci

Explicit prolugus: incipit capitulum

1. De cognitione novem figuram yndorum et qualiter cum eis omnis numeris scribatur, et qui numeri et qualiter retineri debeant in manibus et de introductionis abbaci.

2. De moltiplicatione integrum numerorum**.**

3. De addictione ipsorum ad invicem.

4. De extractione minorum numerorum ex majoribus.

5. De divisione integrorum numerorum per integros.

6. De multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis, atque ruptorum sine sanis.

7. De additione et extratione et divisione numerorum integrorum cum ruptis atques partium immerorum in singulis partibus reductione.

8. De emptione et venditione rerum venalium et similium.

9. De barattis rerum venalium et de emptione bolsonaliae et quibusdam regolis similibus.

10. De societatibus factis inter consocios.

11. De consolamine monetarum atque eorum regulisquae ad consolamen pertinent.

12. De solutionibus multarum positarum quaestionum quas

Esposizione del prologo: titolo dei Capitoli

1. Nozioni sulle nove cifre indiane, del modo che con esse si scrive qualsiasi numero, quali numeri e in qual modo si possano ricordare con le dita e introduzione all'abaco.

2. Sulla moltiplicazione dei numeri interi.

3. Dell'addizione degli stessi tra loro.

4. Della sottrazione del numero minore dal maggiore.

5. Della divisione di numeri interi per altri interi.

6. Della moltiplicazione di interi con rotti, e di rotti senza interi.

7. Dell'addizione, sottrazione e divisione di numeri interi con rotti e riduzione di rotti in altri rotti.

8. Della compra e vendita di cose mercantili e simili.

9. Di baratti mercantili, delle compere bolsonaliae (come dice il testo) e di altre regole simili.

10. Delle società in uso fra associati.

11. Della coniazione delle monete e delle regole che appartengono a detta coniazione.

12. Della soluzione di varie questioni da noi proposte

erraticas appellamus.

13. De regula elcatayn, qualiter per ipsum fere omnes erraticae questiones solvantur.

14. De reperiendis radicibus quadratis et cubiis et multiplicatione et divisione sen extratione eorum in se, et de tractatu biniomorum et recisorum et eorum radicium.

15. De regulis et proportionibus geometriae pertinentibus, de quaestionibus algebrae et almachabelae.

sparsamente.

13. Della regola d'Elcatayn, e come con essa si possa risolvere qualsiasi questione.

14. Dell'estrazione delle radici quadrate e cubiche, moltiplicazione e divisione ossia estrazione delle stesse, e trattato recisorum (come dice il testo) e delle loro radici.

15. Delle regole e proporzioni pertinenti alla geometria, e delle questioni d'algebra e almucabula.

Alcuni problemi dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano

Molti dei problemi di aritmetica trattati nel ***Liber abaci*** sono esposti non sotto forma di equazioni, ma mediante un testo, che descrive situazioni della vita di tutti i giorni. Poiché **Leonardo Pisano** era di professione mercante, egli era particolarmente interessato

- alle *proporzioni* (**Problema 1**), con cui si determina il prezzo di una certa quantità di merce a partire dal prezzo unitario, o si calcola il controvalore di un certo importo in monete diverse;
- a quelli che per noi sono *sistemi di equazioni lineari* (**Problema 2**), con cui si risolvono i problemi riguardanti le spartizioni delle eredità;
- alle *successioni* e ai processi iterativi (**Problema 3**), che stanno alla base del calcolo degli interessi.

Di tutti questi problemi daremo una soluzione "moderna", sia nei metodi sia nel linguaggio.

Un problema di proporzioni dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano

"Un re mandò 30 uomini a piantare alberi nel suo frutteto. Se questi riuscivano a piantare 1000 alberi in 9 giorni, in quanti giorni 36 uomini avrebbero piantato 4400 alberi?"

Soluzione. Sia x il numero di alberi piantati da 36 uomini in 9 giorni. Vale allora la proporzione:

$$x : 36 = 1000 : 30$$

Questa si risolve applicando la ***regola del tre***, cioè moltiplicando entrambi i membri per 36. Si ottiene

$$x = 1200.$$

Sia ora y il numero dei giorni impiegati da 36 uomini a piantare 4400 alberi. Si ha una nuova proporzione:

$$y : 4400 = 9 : 1200.$$

Applicando di nuovo la regola del tre, troviamo:

$$y = (9 : 1200) \cdot 4400 = 33.$$

Un problema di eredità dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano

"Un uomo lasciò al suo figlio maggiore un bisanzio di terreno e un settimo del rimanente, poi diede al suo secondo figlio due bisanzi e un settimo del rimanente, al suo terzo figlio tre bisanzi e un settimo del rimanente, e così via. Con questa divisione tutto il terreno fu equamente distribuito tra i figli. Quanti erano i figli? Quanti erano i bisanzi di terreno?

Soluzione: Sia x il numero complessivo di bisanzi del terreno, e sia y il numero di bisanzi ricevuti da ciascun figlio. Il primo figlio ha ricevuto

$$y = 1 + 1/7\,(x-1)$$

bisanzi, ed il secondo ne ha ricevuti

$$y = 2 + 1/7\,(x - (3 + 1/7\,(x-1))).$$

Eguagliando i membri destri della (1) e della (2), si trova un'equazione lineare nell'incognita x che ha $x = 36$ come soluzione. Sostituendo questo valore nella (1) si ricava $y = 6$. Il numero dei figli era dunque $36/6 = 6$.

Un problema di interessi dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano

"Un uomo entrò in un frutteto attraverso sette cancelli, e colse alcune mele. Uscendo, diede metà più una delle mele alla guardia del primo cancello, poi metà più una delle rimanenti mele alla guardia del secondo cancello, e così via. Alla fine gli rimase una mela. Quante mele aveva colto?

Soluzione: Ad ogni passaggio il numero delle mele si riduce della metà più una. Detto a_0 il numero delle mele colte, sia a_n il numero delle mele dopo l'n-esimo passaggio. Allora

$$a_{n+1} = a_n / 2 - 1.$$

Dunque

$$a_1 = a_0/2 - 1,$$

$$a_2 = a_1/2 - 1 = a_0/4 - 3/2$$

$$a_3 = a_2/2 - 1 = a_0/8 - 7/4$$

$$a_4 = a_3/2 - 1 = a_0/16 - 15/8$$

$$a_5 = a_4/2 - 1 = a_0/32 - 31/16$$

$$a_6 = a_5/2 - 1 = a_0/64 - 63/32$$

$$a_7 = a_6/2 - 1 = a_0/128 - 127/64.$$

Eguagliando l'ultima espressione a 1 si ottiene $a_0=382$. Naturalmente, con un po' di metodo è possibile dare una formula generale che esprime a_n in funzione di a_0:

$$a_{n+1} = a_0/2^n - (2^n - 1)/2^{n-1}.$$

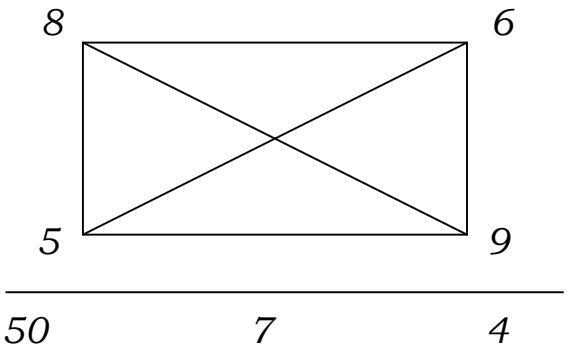
Leonardo Pisano, però, non possedeva ancora il formalismo necessario a compiere questo passaggio.

Un esempio più semplice di processo iterativo è dato dal "problema delle sette vecchiette", basato su di una progressione geometrica, che compare già nel **papiro di Rhind**.

La moltiplicazione per crocetta

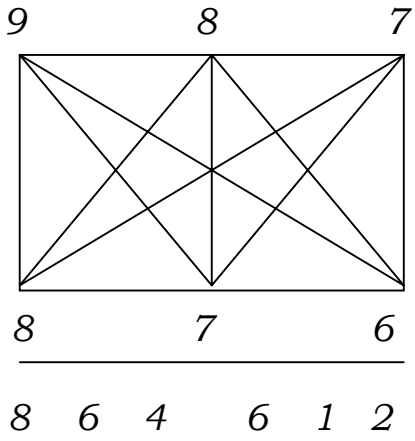
Fibonacci, nel primo capitolo del ***Liber abaci***, descrive questo modo particolare di moltiplicare due numeri interi, svolgendo due esempi di calcolo:

"Moltiplicar per Crocetta, o Casella, si puol moltiplicar, e far di quante figure tu vorrai, ma bisogna tenere il capo a bottega per gli incrociamenti che gli vanno, e per questa causa pochi lo adopera da due figure in suso. E fassi in questo modo, pono che habbi a moltiplicare 86 fia 59; acconcia le tue figure come vedi qui da canto, e comincia dalla prima figura da man destra, e di' 6 fia 9 fa 54 e metti 4 e tieni 5, e poi di' 8 fia 9 fa 72 e serva, poi di' 5 fia 6 in croce fa 30, hor summa 5 che tenesti e 72 che servasti con 30, fa 107, e metti 7 e tieni 10, e poi di' 5 fia 8 fa 40, e 10 che tenesti fa 50, metti 50 in bina con 74, starà così 5074 e tanto fa 59 fia 86, e così puoi far tutte le simili, e la prova farai come alle antedette, fatta.



Ma se volesti moltiplicare 987 fia 876 per crocetta, assetta le tue figure, come vedi qui in figura un poco larghette, acciò tu vedi gli incrociamenti. E poi di' 6 fia 7 fa 42, e metti 2 e tieni 4 per le decene, e poi incrocia le due prime e di' 6 fia 8 fa 48 per un verso, e fia 7 per l'altro fa 49, e aggiongi insieme 4 che tenesti e 48 con 49, fa 101 e metti 1 dietro a 2 e tieni 10, poi va alle terze figure e quelle incrocia con le prime, e di' 6 fia 9 fa 54 per un verso, e 7 fia 8 fa 56 per l'altro verso. Hor summa insieme 10 che tenesti e 54 con 56, fa 120, e serva, poi moltiplica quelle di mezzo senza incrociare, di' 7 fia 8 fa 56 e questo aggiongi con 120 che servasti, fa 176, e metti 6 dietro 1 e tieni 17 per decena. Hor poiché sei gionto in capo, lascia le prime, e moltiplica le seguenti in croce, e di' 7 fia 9 per 63 per un verso, e per l'altro di' 8 fia 8 fa 64, hor summa 17 che tenesti e 63 con 64, fanno 144, e metti 4 dietro a 6 e tieni 14, e poi moltiplica solamente le due ultime l'una con l'altra, di' 8 fia 9 fa 72, e 14 che tenesti fa 86, e poi metti 86 dietro 4, starà così

864612, e tanto farà detta moltiplicatione. Si che dirai che a moltiplicare 987 fia 876 fa 864612, fatta."



(cit. da Bottazzini, U., Freguglia, P., Toti Rigatelli, L., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze 1992, pagg. 24-25)

Altri tipi di moltiplicazione

Leonardo Pisano
Liber quadratorum

Alcuni ritennero che questo *Trattato dei numeri quadrati* fosse andato perduto e che non fosse noto l'anno in cui Leonardo lo compose. Ma il *Boncompagni*, in "*Di alcune opere di* ***Leonardo pisano***", Roma **1854**, smentì entrambe le affermazioni, dal momento che due codici manoscritti, uno presso la *Biblioteca Ambrosiana* di Milano, segnato *n.75, Parte superiore*, e l'altro presso la *Biblioteca Vaticana*, *Codice Urbinate N. 291*, precisano l'anno in cui fu scritta questa opera e riportano anche la traduzione in lingua italiana di gran parte del trattato. Anche il *Cossali*, nella "*Storia dell'origine, trasporto in Italia e primi progressi in essa dell'Algebra*" del **1797**, raccolse questi *Numeri Quadrati* ordinandoli e raffrontandoli con quelli di **Diofanto**.
L'opera contiene la formula per trovare tutte le **terne pitagoriche**. Fibonacci vi risolve numerosi problemi in cui, come nell'***Arithmetica*** di Diofanto, si cercano le soluzioni razionali di equazioni di secondo grado. Uno di questi, tratto da un torneo matematico disputato alla corte di Federico II, chiede di *trovare un numero razionale x tale che* x^2+5 *e* x^2-5 *siano entrambi quadrati di numeri razionali.* Fibonacci trova $x = 41/12$.

Tre pagine dell'opera con annotazioni manoscritte: (1) (2) (3)

I numeri congrui

Uno dei problemi proposti da Giovanni da Palermo a **Fibonacci** alla corte di Federico II di Svevia è un problema aritmetico indeterminato: si richiede di trovare un quadrato perfetto tale che, se gli si aggiunge o toglie 5, si ottenga in entrambi i casi un quadrato perfetto. Nel moderno simbolismo esso si traduce nel seguente sistema di due equazioni, di cui si ricercano le soluzioni intere:

$$\begin{cases} x^2 + 5 = y^2 \\ x^2 - 5 = z^2 \end{cases}$$

Fibonacci, nel suo ***Liber quadratorum***, risolve questo problema in una forma più generale, in cui il numero 5 è sostituito da un numero intero qualunque *C,* detto ***numero congruo****:*

$$\begin{cases} x^2 + C = y^2 \\ x^2 - C = z^2 \end{cases}$$

Il numero x^2 è invece detto *quadrato congruente.*
Il metodo risolutivo proposto da Fibonacci è il seguente. Prima vengono sommate le due equazioni, e si ottiene:

$$2x^2 = y^2 + z^2.$$

Quindi si effettuano le sostituzioni

$$y = u + v \quad \text{e} \quad z = u - v,$$

dopo di che l'equazione diventa:

$$x^2 = u^2 + v^2.$$

Le sue soluzioni intere sono le **terne pitagoriche**, che sono date, al variare degli interi positivi a,b, $a<b$, dalle formule:

$$x = a^2 + b^2, \quad u = 2ab, \quad v = b^2 - a^2.$$

Fibonacci suppone che a e b siano relativamente primi, e distingue due casi:

- Se a e b sono entrambi dispari, un numero congruo è

$$C= ab(b-a)(a+b),$$

ed il corrispondente quadrato congruente è

$$x^2 = (a^2 + b^2)^2/4$$

- Se a e b sono uno pari e l'altro dispari, un numero congruo è

$$C= 4ab(b-a)(a+b),$$

ed il corrispondente quadrato congruente è

$$x^2 = (a^2 + b^2)^2$$

Ad esempio, per $a = 1$ e $b = 9$, Fibonacci trova

$$C = 720 \quad \text{e} \quad x = 41.$$

Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web

Leonardo Pisano
Opuscoli
Firenze 1856, Seconda edizione

La prefazione è stata scritta da *Baldassarre Boncompagni*, e vi vengono elencati numerosi testi e articoli su riviste scientifiche contenenti citazioni da opere di Leonardo Pisano, a testimonianza del prestigio di cui egli godeva presso i suoi contemporanei.
Gli opuscoli, tratti da un codice quattrocentesco della *Biblioteca Ambrosiana di Milano*, sono interamente scritti in latino. Eccone i titoli:
***Flos* Leonardi *Bigolli* Pisani**
Epistula ad Magistrum Theodorum
Liber Quadratorum

Particolari sono le note manoscritte riportate alle **pag.48** , **pag.92**, **pag.96** **e** **pag.119**.

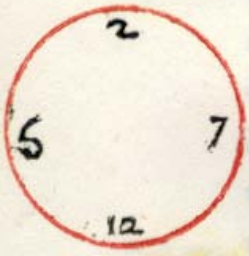
La vita di Leonardo Pisano

tium 40, et altera 20, et diuidam 40 per 8, uenient perdices 5, et diuidam 20 per 5 uenient columbe 4, relique que sunt usque in 30, scilicet 21, sunt passeres.

Item passeres 5 ualent denarium 1, et turtures 3 dentur pro uno denario, et columba ualeat denarios 2, et perdix ualeat denarios 3, et uolo ex his quatuor generibus auium habere aues 24 pro denarijs 24. Ponam pretia uniuscuiusque generis auium in ordine, videlicet $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$ et 2, et 3, ut in margine cernitur, et extraham pretium unius passeris de pretio cuiusque reliquorum trium generum, scilicet $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{3}$ et de 2, et de 3, et residua ponam super ipsa pretia per ordinem, et habebo $\frac{2}{15}$ super $\frac{1}{3}$, et $\frac{4}{5}$ 1, scilicet $\frac{27}{15}$, super 2, et $\frac{4}{5}$ 2, scilicet $\frac{42}{15}$, super 3; deinde pretium 24 passerum extraham de denarijs 24, remanebunt denarij $\frac{1}{5}$ 19, quos multiplicabo per 15, ut faciam ex eis quindecimas, sicut sunt differentie suprascripte, erunt $\frac{e}{15}$ 288, quas diuidam in tres partes,

fol. 16 verso | quarum una integraliter diuidatur per 42, et altera per 27, et tertia per 2, quia melioratio mutationis unius passeris in perdicem est $\frac{42}{15}$, et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{15}$. et melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{15}$, et melioratio mutationis passeris in turturem est $\frac{2}{15}$, et ideo diuidende sunt $\frac{e}{15}$. 288 in tres partes, quarum una diuidatur integraliter per 42, secunda per 27, tertia per 2, et quod ex ipsis tribus diuisionibus prouenerit cadat infra numerum auium emptarum, scilicet infra 24, quod poterit fierj dupliciter; primum de 288 extraham quadruplum de 42, et de 27, scilicet 168 et 108, que sunt in summa 276, et remanebunt pro tertia parte 12, et diuidam 168 per 42, et 108 per 27, et 12 per 2, uenient perdices 4, et columbe 4, et turtures 6, que sunt in summa aues 14, relique que sunt

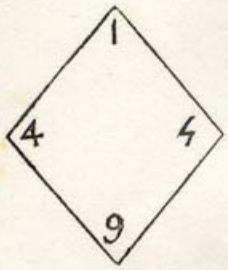
et ex *b a* est 4. et ducatur. 4. in numeris *a g* et *g d*, et ueniet pro multitudine imparium primi congrui. 28. et pro multitudine secundi. 12. et multiplica unumquemque numefol. 30 recto. rorum | *a g* et *d g* per duplum *b g*, et habebis. 70. pro numero, circa quem sunt 12 impares numeri facientes secundum congruum, et 30., circa quem erunt 28 impares facientes primum. Quare extractis 28. de 30. remanent. 2. quorum medietas, scilicet unum est radix primi quadrati; et adde 28 cum. 30. erunt. 58. cuius medietas, scilicet 29 est radix secundi quadrati. Item adde. 12 cum. 70. faciunt .82 quorum medietas scilicet 41. est radix tertij quadrati, et ex ductu. 28. in. 30. uel 12. in. 70. habentur 840 pro congruo. Egreditur autem idem. 840. ex alijs duobus adiacentibus numeris, scilicet ex septenario et quinario, quia si solidum, quod fit ab eis, et ab eorum coniuncto, ducatur in binarium, scilicet id in quo. 7. excedit. 5. proueniet. 840. Egreditur enim multitudo prima imparium facientium ipsum ex ducto binario in septenarium. Quare ipsi impares numeri sunt 14, et sunt circa 60, qui egreditur ex quinario ducto in. 12. multitudo quidem secunda prouenit ex binario ducto in quinarium, et est illa multitudo circa. 84. qui prouenit ex septenario ducto in. 12. Nam decies 84. uel sexagesies 14. equantur solido, qui fit a 5 et 7 et 12. ducto in binarium. Vnde cuiuslibet congrui (1) vigesima quarta pars est integra, ut superius ostensum



(1) Ciò che si legge nella presente pagina (lin. 12-24) da « in 70 habentur 840 » fino alle parole « cuiuslibet congrui » forma le nove linee 7ª-15ª della carta 30 *recto* del Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*. Presso a queste nove linee sul margine laterale esterno della medesima carta 30 *recto* trovasi la figura riportata in *fac-simile* nel margine laterale esterno della presente pagina 92.

drati ducto in. 1. qui est quadratus, facit iterum quincuplum quadrati. Ergo congruum quod fit ab his quinta pars erit quadrata.

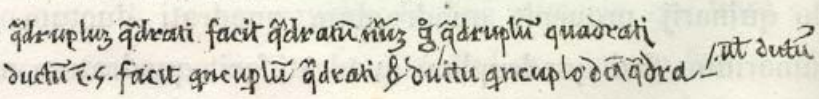
Hec questio predicta in prologo libri huius.



Volo inuenire quadratum, cui addito. 5. uel diminuto, faciat quadratum numerum. Adiaceat congruum, cui quinta pars sit quadrata, eritque 720., cuius quinta pars est. 144. in quo diuide quadratos congruentes eidem. 720. quorum primus est. 961. secundus est. 1681. tertius autem est. 2401. et est radix primi quadrati 31. Secundi. 41. tertii. 49. exibit pro primo quadrato $\frac{97}{144}$ 6, cuius radix est $\frac{7}{12}$. 2., que prouenit ex diuisione 31. in radicem de 144., hoc est in. 12. et pro secundo, hoc est pro quesito quadrato, ueniet $\frac{97}{144}$ 11, cuius radix est $\frac{5}{12}$ 3, que prouenit ex diuisione. 41. in. 12. (1) et pro ultimo quadrato ueniet $\frac{97}{144}$ 16, cuius radix est $\frac{1}{12}$ 4.

Si duo quilibet numeri componantur facientes compositum ex his parem numerum, proportio compositi ad re-

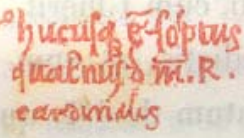
superiore. Fra queste due linee al di sopra delle lettere terza e quarta della parola « *ductu* » vedesi un segno di richiamo, e sul margine laterale esterno del medesimo *recto* un segno simile di richiamo, seguito da una postilla, come nel *fac-simile* seguente di tali linee segni e postilla.



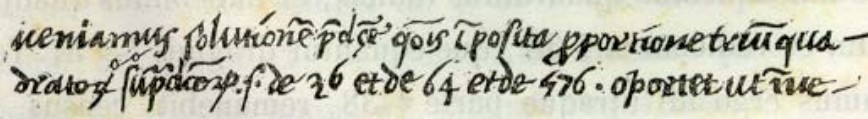
(1) Ciò che si legge nella presente pagina 96, lin. 8-17, dalla terza lettera della parola *quadratum* fino a « 41 in 12 » forma le sette linee 11-17 della carta 31 *recto* del Codice Ambrosiano *E*. 75, *Parte Superiore*. Presso a queste sette linee sul margine laterale esterno della medesima carta 31 *recto* trovasi la figura riportata in *fac-simile* nel margine laterale esterno della presente pagina 96.

postquam hec omnia demonstrata sunt, redeamus ad questionem phylosophi, et procedamus predicto modo, donec habeamus quod census et radix et 32 equantur quadrato de 36. deinde uideamus quot radices sunt 32 de 36.. hoc est quod diuidamus 32 per radicem de 36., venient radices $\frac{1}{3}$ 5. et propter hoc, ut inueniamus solutionem predictę questionis in posita proportione trium quadratorum (1) supradictorum, scilicet de 36 et de 64 et de 576. oportet ut inueniamus quadratum aliquem, de quo extractis radicibus $\frac{1}{3}$ 5. ipsius, remaneat numerus qui procreatur ex multiplicatione dictorum numerorum inequalium, quorum maior addat. 1. super minorem. Quod inueniemus si posuerimus numerum aliquot radicum superhabundantem predictas radices $\frac{1}{3}$ 5. Quod quidem possumus facere in infinitis modis. Vnde ponamus ad libitum radices. 7. et diuidamus. 7. in duas partes, quarum una addat. 1. super alteram, eruntque 3 et 4., et multiplicetur 3 per 4, fa-

(1) Ciò che si legge nella presente pagina (lin. 6-11), dalla terza lettera della parola *inueniamus*, fino a tutta la parola *inequalium*, forma le linee 8-11 della carta 38 *verso* del Codice Ambrosiano *E*, 75, *Parte superiore*. Presso a queste quattro linee, sul margine laterale esterno della medesima carta 38 *verso*, si trova la seguente postilla:



Un segno al tutto simile a quello contenuto in questa postilla trovasi fra le linee ottava e nona del medesimo *verso*, precisamente come nel seguente fac-simile:



Leonardo Pisano
Practica Geometriae

In quest'opera, edita nel 1220, **Fibonacci** risolve problemi geometrici utilizzando strumenti algebrici. Il libro pare basato su di una traduzione araba del trattato sulla ***Divisione delle figure*** di **Euclide**. Il principale merito dell'autore sta nell'aver riportato alla luce la trigonometria dell'Antica Grecia, mostrandone l'utilità in agrimensura, disciplina in cui, da molti secoli ormai, si impiegavano unicamente i metodi geometrici inventati dai Romani. Fibonacci dimostra molti teoremi elementari sui triangoli, ad esempio prova che le mediane dei lati di un triangolo si intersecano sempre nel rapporto 2 a 1, e presenta anche un analogo tridimensionale del **Teorema di Pitagora**. Egli, inoltre, ripropone un'importante formula dovuta ad **Erone di Alessandria**, che esprime l'area A di un triangolo in funzione delle lunghezze a, b, c dei lati, e del semiperimetro s:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Fibonacci, come era d'uso a quell'epoca, descrive questa formula a parole, senza ricorrere a simboli matematici: egli si serve della cosiddetta *algebra retorica*.

La stessa opera contiene anche un'approssimazione del numero π, ottenuta perfezionando il metodo adottato da **Archimede**:

$$1440/(458 + 4/9) < \pi < 1440/(458 + 1/5)$$

La formula di Erone (dalla *Practica Geometriae* di Fibonacci)

DALLA «PRACTICA GEOMETRIAE»[1]

...Nam ut mensurandi doctrina perfecte in hoc libro contineatur; qualiter quodlibet trigonum sine investigatione catheti mensurari possit, indicabimus. Trigoni latera in unum coniunge, et dimidium sume accipe eorum; de qua extrahe per ordinem latera trigoni; et multiplica residuum unius lateris per residuum alterius; et sumam[2] multiplica per residuum alterius lateris; quod totum per medietatem trium laterum[3] multiplica; et summe radicem invenias, que erit area totius trigoni.[4] Verbi gratia: additis in unum lateribus suprascripti trigoni,[5] scilicet .13. et .11. et .20., faciunt .44.; cuius dimidium est .22., a quo maius latus distat perticis .2.; secundum perticis .9.; tertium perticis .11.: multiplicatio quidem residui primi lateris, scilicet .2., in residuo secundi lateris, scilicet in .9., multiplicata per residuum tertii lateris, scilicet per .11., faciunt .198.; quo numero iterum multiplicato per dimidium laterum, scilicet per .22. faciunt .4356.; que sunt potentia[6] aree trigoni, quorum radix est .66., ut pro area ipsius superius invenimus.

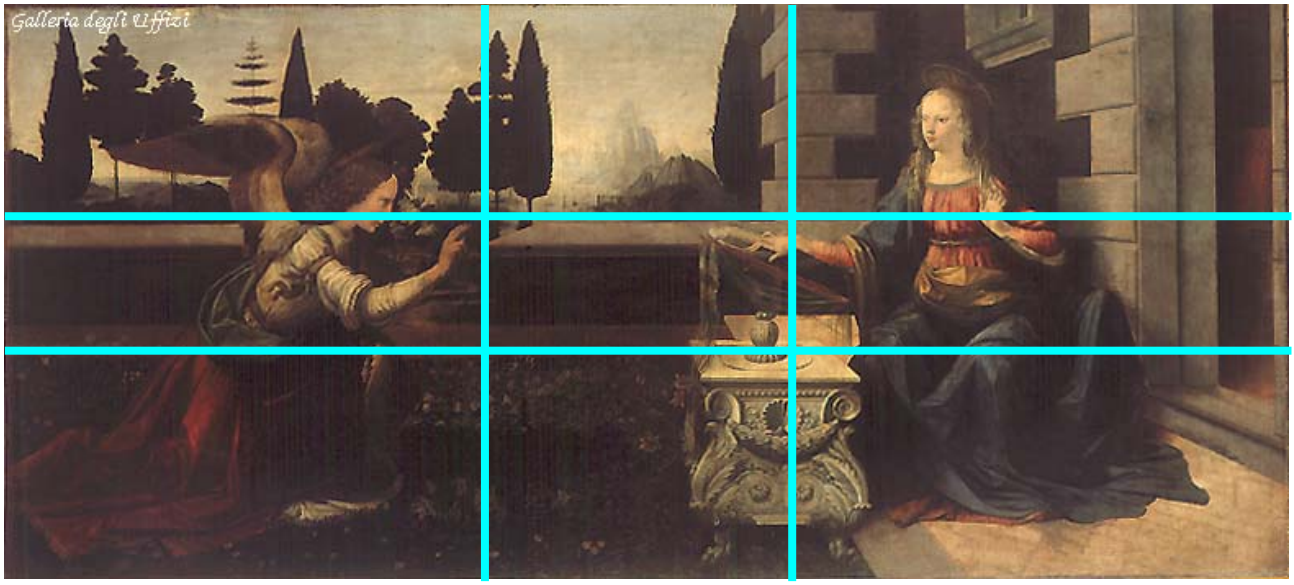
DALLA «PRATICA DELLA GEOMETRIA»

...Affinché invero la dottrina del misurare abbia in questo libro trattazione completa, indicheremo come qualunque triangolo possa misurarsi senza la ricerca dell'altezza. Somma i lati del triangolo e del risultato prendi la metà, dalla quale ordinatamente sottrai i lati e moltiplica il residuo di un lato per quello di un altro ed il risultato moltiplica per il residuo del rimanente lato, il qual tutto moltiplica per la metà dei tre lati e del risultato cerca la radice che sarà l'area dell'intiero triangolo. Per esempio sommati i lati del sopraddetto triangolo, cioè 13 ed 11 e 20 fanno 44; la cui metà è 22, dalla quale il maggior lato differisce di pertiche 2; il secondo di pertiche 9 ed il terzo di pertiche 11; il prodotto poi del residuo del primo lato, cioè 2 nel residuo del secondo cioè in 9, moltiplicato per il residuo del terzo lato, cioè per 11, fanno 198; moltiplicato ancora il qual numero per la metà dei lati, cioè per 22, fanno 4356; che sono la potenza dell'area del triangolo, la cui radice è 66 come per l'area del triangolo sopra abbiamo trovato.

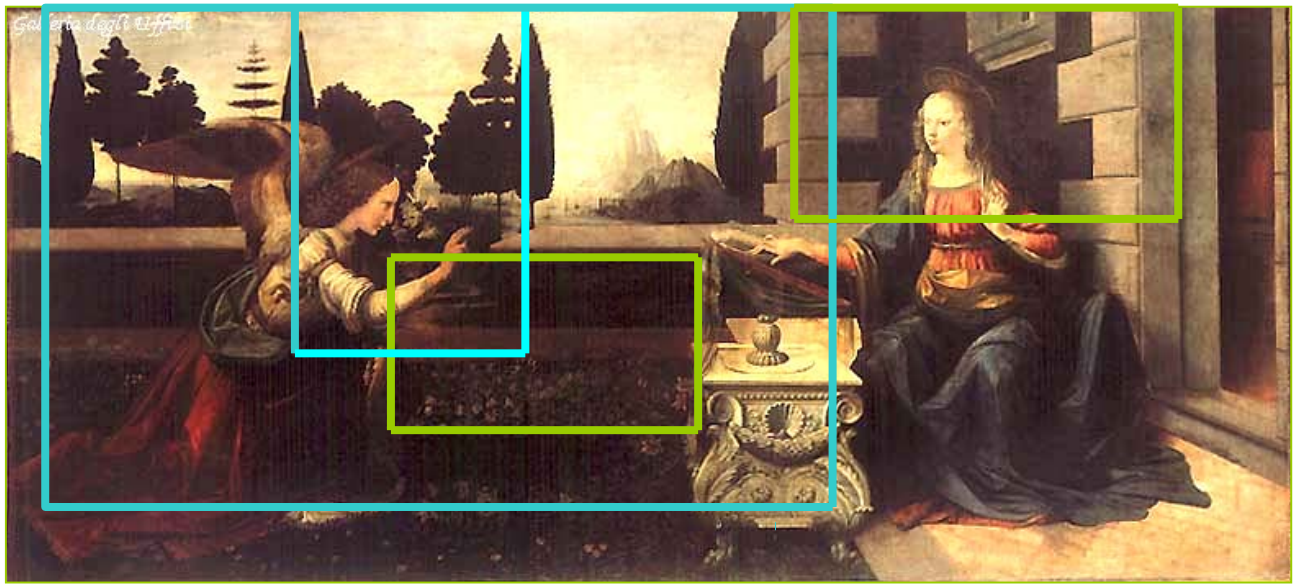
(da: AA. VV., La letteratura italiana, Storia e testi, Ricciardi, Milano Napoli 1956, Vol. I, pagg. 830-831)

L'Annunciazione **di** **Leonardo da Vinci**

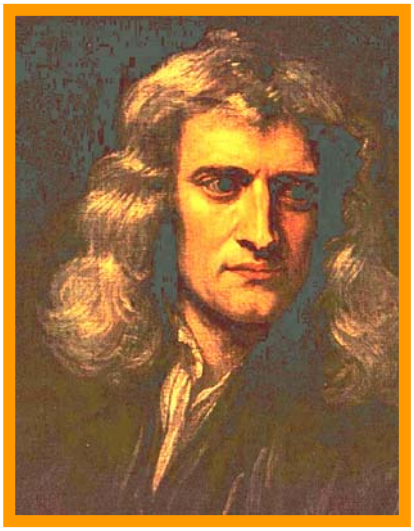
Questo famoso dipinto, esposto alla Galleria degli Uffizi, a Firenze, è un interessante esempio di applicazione della sezione aurea. Tracciando le perpendicolari ai bordi nei punti che li dividono secondo la sezione aurea, si ottengono alcune delle fondamentali linee del dipinto:



Esaminando le altre linee del quadro, si può scoprire che esse determinano vari rettangoli "quasi" aurei, nei quali il rapporto tra i lati è pari al quoziente di due **numeri di Fibonacci** consecutivi.



Isaac Newton (1642-1727)



I meriti di questo scienziato inglese vanno ugualmente divisi tra la matematica e la fisica; questi non furono, però, gli unici interessi che egli coltivò, nel corso della sua lunga vita. A tratti Newton si ritirava dalle ricerche per dedicarsi ai misteri dell'alchimia e della teologia.
Pare che il suo interesse per la geometria fosse nato dalla curiosità suscitata in lui da un libro di astrologia, e dal desiderio di comprendere la trigonometria delle congiunzioni planetarie. Scrisse di esegesi biblica, di storia e letteratura classica.

Nato in un villaggio inglese il giorno di Natale, già orfano di padre, fu definitivamente affidato alla nonna dopo il secondo matrimonio della madre.
Studiò al Trinity College di Cambridge, dove ebbe **Isaac Barrow** come professore di geometria. Questi gli cedette la cattedra nel 1669.

Maturò le sue principali idee matematiche tra il 1665 e il 1667, al suo villaggio natale, durante un esilio forzato dovuto ad un'epidemia di peste.
Fu qui che egli affrontò per la prima volta il problema di determinare le tangenti alle curve e le aree sottese a queste ultime. Newton seppe mettere a frutto le idee di Barrow e di **John Wallis** per gettare le basi del **calcolo differenziale** e del **calcolo integrale**. La vera novità metodologica è contenuta nel suo ***Methodus Fluxonium*** (1671), nel quale Newton presenta una nuova idea su quella che oggi chiamiamo *funzione* (il termine fu introdotto da **Leibniz** nel 1692): essa sarebbe l'espressione di un moto, che comporterebbe la variazione continua (*flussione*) di una quantità matematica (*fluente*). Un'interpretazione cinematica delle funzioni era già stata applicata da **Torricelli**.

Al calcolo integrale Newton dedicò anche lo scritto ***De quadratura curvarum*** (1676).

Nel 1687 Newton pubblicò il suo capolavoro, il trattato ***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica***, contenente i suoi principali risultati riguardanti la meccanica ed, in particolare, il moto dei corpi celesti.

I calcoli di Newton erano supportati da osservazioni astronomiche: nel 1668 Newton aveva costruito da sé un telescopio per studiare i satelliti di Giove e, d'altra parte, egli era grande amico di **Edmund Halley**, lo scienziato che diede il nome alla famosa cometa.

Newton realizzò anche studi di ottica, che avvalorano la ***teoria corpuscolare*** della luce; spiegò la riflessione come effetto dell'elasticità e la rifrazione mediante l'attrazione tra i corpi. Fu il primo a scomporre la luce bianca nei sette colori dell'iride. Nel 1671 inventò il **telescopio a riflessione totale**, a 38 ingrandimenti.

Tra i risultati ottenuti in matematica va ricordata anche la **formula per lo sviluppo del binomio** - i cui coefficienti sono quelli del **triangolo aritmetico** - oltre a rilevanti contributi alla teoria delle equazioni, contenuti nella ***Arithmetica Universalis*** (scritta tra il 1683 e il 1684, ma pubblicata solo nel 1707). Egli sviluppò un metodo algoritmico, perfezionato da Raphson, per la determinazione approssimata delle soluzioni di un'equazione. Esso è anche noto con il nome di *metodo delle tangenti,* ed ha trovato, recentemente, applicazione ai **frattali**. Nella stessa opera Newton presentò la famosa **regola** che completa la **regola dei segni** di **Cartesio** per le radici di un'equazione algebrica.
Gli studi compiuti da Newton sulle curve piane contengono anche una **classificazione** delle curve algebriche piane definite da un'equazione cartesiana di grado 3, dette ***cubiche***.

A Newton furono riconosciuti, in vita, i meriti scientifici, ma egli fu apprezzato anche – e forse di più - per le sue doti pratiche, che ebbe modo di mettere a frutto nella vita pubblica. Nel 1672 fu eletto membro della "Royal Society", di cui divenne presidente nel 1703. Nel 1689 fu inviato a rappresentare l'Università al Parlamento, incarico che gli venne nuovamente affidato negli anni 1701-02. Nel 1696 fu nominato Governatore della Zecca, con il compito di riformare il conio; nel 1699 ricevette il titolo di Gran Maestro. Nel 1705 la regina Anna lo investì della dignità di Cavaliere. Nel 1714 entrò a far parte

del collegio di esperti insediato dalla regina per risolvere il **problema della longitudine**.

Il metodo newtoniano d'indagine scientifica è fondato sull'**induzione**, il processo secondo il quale il ricercatore giunge a formulare, sulla base di ripetute osservazioni sperimentali, leggi fisiche di validità generale. La novità rispetto all'**impostazione cartesiana** risiede nella visione filosofica dell'universo. Questo non sarebbe, come invece sostenuto da Descartes, il risultato di una concatenazione di cause ed effetti *(determinismo meccanico)*, ma sarebbe, piuttosto, frutto del volere di Dio, ogni fenomeno sarebbe finalizzato al compimento di un preciso disegno divino. Tutto quanto avviene nel cosmo non sarebbe solo il prodotto di una causa, ma sarebbe funzionale ad uno scopo *(teleologia)*. D'altra parte, solo con la presenza di un agente divino, trascendente rispetto alla materia, sarebbero spiegabili il **vuoto** e le azioni a distanza. Questi fenomeni erano stati negati da Cartesio, secondo il quale l'opera di Dio sarebbe stata limitata al primissimo istante del mondo. Per Newton, invece, Dio interverrebbe a ripetizione per ricaricare l'orologio del mondo, che altrimenti tenderebbe al decadimento. Questa visione della costante presenza di Dio nell'universo accomuna il Nostro a **Galileo**, che aveva dedicato parte della sua vita al tentativo di riconciliare fede e ragione. Con Newton può dirsi compiuta l'opera di unificazione del mondo terrestre e di quello celeste. La sua fisica nasce dalla correzione di quella cartesiana e dall'approfondimento di quella galileiana.



Il monumento a Newton presso il Trinity College di Cambridge

La meccanica di Newton è oggi nota come ***meccanica classica***: è stata superata solo nel Novecento dalla ***meccanica relativistica*** scoperta da **Einstein**. Per Newton spazio e tempo sono grandezze assolute, indipendenti dall'osservatore. Oggi noi sappiamo che questo è vero con ottima approssimazione solo per gli osservatori che si muovono, l'uno rispetto all'altro, con velocità molto inferiori a quella della luce. Quindi la meccanica newtoniana, anche se imperfetta, è tuttora impiegata per studiare i fenomeni macroscopici che avvengono sulla Terra, quelli osservabili ad occhio nudo ed appartenenti alla

nostra vita quotidiana. Ed è infatti la meccanica newtoniana quella che si studia a scuola.

Forse grazie al fervente spirito religioso che anima la sua scienza, Newton fu celebrato dal Leopardi, che vide nella sua opera la decisiva sconfitta del materialismo cartesiano. Lo scrittore non amava troppo la ragione pura, priva di poesia e spiritualità. Nella *Storia dell'Astronomia* egli esalta la figura del fisico inglese a scapito di **Euclide**: "*Per apprendere le matematiche egli non istudiò Euclide, che sembrogli troppo chiaro e indegno di lui. Gli uomini grandi amano le difficoltà, che danno al loro ingegno campo di esercitarsi. Newton sapea quasi il contenuto degli scritti di Euclide prima di leggerli. Un'occhiata, che egli desse de' teoremi, gliene faceva conoscere la dimostrazione.*"

Curiosità su Newton
Newton riporta un brano di John Wallis

Curiosità su Isaac Newton

- Si narrano parecchi aneddoti sulla proverbiale distrazione di Newton. Era un tipo solitario, che, al di là dell'interesse scientifico, poco si curava del mondo circostante. Quando era immerso nelle sue riflessioni matematiche, si estraniava completamente da tutto e da tutti, dimenticandosi perfino di provvedere ai bisogni del suo corpo. Spesso lasciava intatto il pranzo. Finì per ammalarsi, mentre si narra che il suo gatto…divenne obeso.

- Pare che Neewton fosse anche decisamente misogino. L'unica donna che godette della sua ammirazione fu la bellissima nipote Catherine Conduitt, di cui si innamorò Jonathan Swift, l'autore dei ***Viaggi di Gulliver***. Voltaire ebbe a dire, ironicamente, che gran parte della popolarità di Newton, personaggio estremamente asociale, fosse da attribuire all'avvenenza della fanciulla.

- Lo storico Rouse Ball sottolinea la grande rettitudine morale di Newton, che pur non ne mitigava il carattere suscettibile: questo lo portava a volte ad assumere toni aspri ed arroganti, come nella **disputa** che lo oppose a Leibniz. Egli conservò comunque una modestia scientifica esemplare. È divenuta famosa una sua frase: *"io non so ciò che posso parere al mondo; ma a me stesso io sembro essere stato soltanto come un fanciullo, che giuoca sulla riva del mare e si diverte a trovare qua e là un ciottolo più liscio o una conchiglia più appariscente delle solite, mentre il grande oceano della verità sta tutto nascosto davanti a me."*

- **Carl Friedrich Gauss** riservò solo a Newton, tra i matematici che lo avevano preceduto, il titolo di *summus*.

- Sulla tomba di Newton sono incise queste parole:

"Let mortals rejoice that such and so great an ornament to human kind has been"

(Possano i mortali gioire del fatto che un così grande ornamento dell'umanità è esistito)

Un epitaffio in versi fu dedicato a Newton dal fisico inglese **Alexander Pope** (1688-1744):

"Nature and nature's law lay hid in night.
God said, let Newton be, and all was light."

(La natura e la sua legge giacevano nascoste nel buio. Dio disse, Newton sia, e tutto fu luce.)

- Lo scrittore italiano **Francesco Algarotti** (1712-1764) compose, nel 1737, un trattato di divulgazione scientifica, destinato alle donne della nobiltà ed alta borghesia, intitolato *Il newtonianesimo per le dame.* In questo libro la fisica di Newton è l'argomento di una conversazione salottiera tra una marchesa ed un suo corteggiatore. La materia perde la sua seria veste scientifica per tingersi di galanterie e svenevolezze: la gravitazione viene paragonata alla passione amorosa, che con la lontananza si affievolisce.

Il calcolo infinitesimale secondo Newton

Il **calcolo infinitesimale**, ossia il fondamento della moderna **analisi matematica**, vide la luce con le innovazioni metodologiche introdotte, a cavallo tra il Seicento ed il Settecento, da **Newton** in Inghilterra e **Leibniz** in Germania. A chi spetti la paternità dell'invenzione non è chiaro: la **disputa** scaturì quanto i due matematici erano ancora in vita.

Il pensiero di Newton conobbe, nel giro di pochi anni, un'evoluzione decisiva, che lo portò a discostarsi progressivamente, nello studio delle curve, dal retaggio della geometria classica, costruttiva e sintetica, per pervenire, infine, ad una visione dinamica della geometria, mutuata dalla fisica del moto.

Riportiamo, in ordine cronologico, le tre tappe fondamentali di questo sviluppo.

1. Il metodo delle serie infinite

Nelle sue prime opere Newton fa ancora esplicito uso delle quantità infinitesime, che egli indica con la lettera *o.* Nel trattato ***De analysi per æquationes numero terminorum infinitas***, pubblicato solo nel 1711, ma sicuramente già scritto nel 1669, *o* denota un piccolissimo incremento della variabile *x*, che, in certi calcoli, può essere trascurato. Egli lo utilizza per il calcolo dell'area sottesa ad una curva definita da un'equazione del tipo $y = ax^{m/n}$, quello che per noi è l'**integrale** indefinito della funzione $f(x)= ax^{m/n}$, e trova la formula seguente, che riscriviamo con le notazioni moderne:

(*) $$\int a\, x^{m/n}\, dx = n\, a\, x^{(m+n)/n} / (m+n)$$

Oggi diremmo che la funzione $F(x) = n\, a\, x^{(m+n)/n} / (m+n)$ è una *primitiva* della funzione $f(x)$. Questo risultato era stato provato, per alcuni esponenti interi, per via geometrica, da **Cavalieri**.

Molte espressioni, come, ad esempio, la radice quadrata di $x^2 + b^2$, con $b > 0$, possono essere riscritte sotto forma di una somma infinita di termini del tipo $a\, x^{m/n}$:

$$b + x^2/2b - x^4/8b^3 + x^6/16b^5 - 5x^8/128b^7....$$

Newton chiama quest'operazione *estrazione della radice*. La moderna terminologia la indica invece come *sviluppo in serie di potenze.*

Applicando la formula (*) ad ogni addendo si trova che l'integrale della radice quadrata di $x^2 + b^2$ è

$$bx + x^3/6b - x^5/40b^3 + x^7/112b^5 - 5x^9/1152b^7....$$

Questa tecnica è tuttora applicata per il calcolo di integrali per i quali non è possibile dare una formula del tipo (*), cioè, non esiste un'espressione "finita" della primitiva. Poiché ogni troncamento della serie è un'approssimazione dell'integrale, questo metodo permette anche la determinazione numerica (approssimata) degli integrali definiti.
Newton utilizza il metodo delle serie, ad esempio, per calcolare, con approssimazione, l'area sottesa all'iperbole di equazione $y=1/(x+1)$ nell'intervallo di estremi *0* e *0,1*. Questo numero, come sappiamo, è pari al logaritmo naturale di *1,1* e quindi è uguale al valore della ***serie logaritmica***

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ....$$

in *0,1*. (**testo originale di Newton**).

Ricordiamo che estrarre la radice quadrata equivale ad elevare alla potenza ½: più in generale, Newton trova lo sviluppo in serie dell'espressione

$$(x^2 + b^2)^{m/n},$$

dove *m* e *n* sono interi positivi. Egli determina i coefficienti per ***interpolazione***. Il ragionamento, per sommi capi, è il seguente. Quando l'esponente è un numero intero *m*, la serie ha un numero finito di termini: i coefficienti dei primi addendi sono quelli dati dalla **formula del binomio di Newton,** cioè i numeri che formano la *m*-esima riga del **triangolo aritmetico**. I restanti infiniti termini hanno coefficiente nullo. Quando l'esponente è un numero frazionario, i coefficienti diversi da zero sono infiniti: è però ragionevole pensare che, quando, ad esempio, l'esponente varia da *1* a *2*, la successione

dei coefficienti vari con continuità. Se l'esponente si discosta poco da *2*, i primi tre coefficienti della serie si discosteranno poco da *1, 2* e *1* rispettivamente, gli altri coefficienti si discosteranno poco da *0*.

2. Il metodo delle flussioni

Nell'opera ***Methodus Fluxionum***, composta nel 1671, e pubblicata nel 1736, le espressioni contenenti una variabile vengono viste, per la prima volta, come descrizioni dell'evoluzione ***(flussione)*** di un valore variabile nel tempo, che Newton chiama ***fluente***. Una curva è vista come la traiettoria di un punto che si muove nel piano: quella che, nella nostra visione moderna, è il grafico di una funzione $x = x(t)$. Newton considera un intervallo infinitesimale, detto ***momento***, e denotato con la lettera *o*, nel quale il fluente *x* subisce una variazione piccolissima, detta ***momento del fluente***. Il rapporto tra momento del fluente e momento è la ***velocità*** di variazione della *x*, e viene indicata con il simbolo *x* sormontato da un puntino. Si tratta, di fatto, della derivata della *x* rispetto al tempo, anche se Newton non la chiama ancora con questo nome. Egli però, sulla scia delle osservazioni di **Fermat**, riconosce il ruolo della derivata nella determinazione dei massimi e dei minimi di una funzione, nonché il suo significato geometrico di pendenza della tangente alla curva definita da una funzione.
È da rilevare che nel *Methodus* l'integrazione, detta ***metodo delle quadrature***, viene presentata anche come ***metodo inverso delle tangenti***, ossia viene riconosciuta come inversione della derivazione. Pare che, però, Leibniz sia stato il primo a formulare questa idea.

Nella definizione di velocità, Newton dà significato al rapporto tra due quantità infinitesime. Queste ultime, che erano state al centro della **teoria degli indivisibili** di **Cavalieri** e **Torricelli**, nel Settecento non incontrano più il favore del mondo matematico, che le considera problematiche, se non contraddittorie. Newton corre allora ai ripari, ridefinendo il significato di quel rapporto, nella maniera esposta nel prossimo paragrafo.

3. Il metodo delle prime ed ultime ragioni

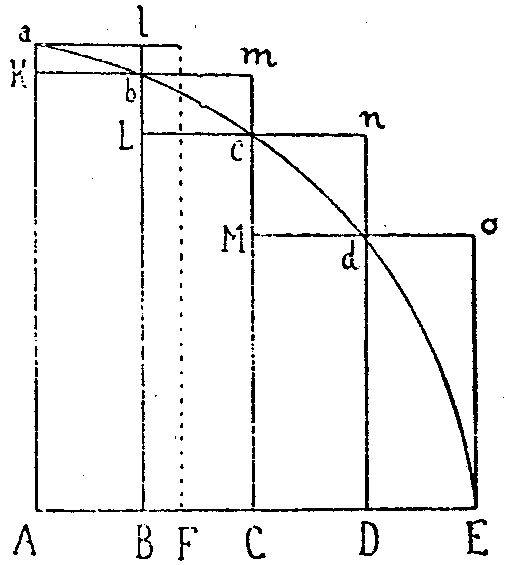
Nel Libro I dei ***Principia***, usciti in prima edizione nel 1686 e in seconda edizione nel 1713, Newton espone il principio del calcolo dell'area di una figura piana curvilinea tramite un passaggio al limite, che rappresenta il termine ultimo ideale di un processo di progressiva approssimazione. La figura in questione è inscritta in una certa

unione di rettangoli (la cui area complessiva è una stima per eccesso dell'area da determinare) ed è circoscritta, a sua volta, ad un'altra unione di rettangoli opportunamente scelti (la cui area complessiva è, invece, una stima per difetto). Aumentando il numero dei rettangoli (e riducendo quindi le loro dimensioni), entrambe le stime migliorano, tendendo a convergere – l'una dall'alto, l'altra dal basso – verso un medesimo valore. Esso coincide con l'area della figura curvilinea. In generale, questo non è mai raggiunto da nessuna delle due stime, se non nel caso ideale in cui il numero dei rettangoli da grandissimo diventa infinito. Per dirlo con le parole di **Pascal**: *"l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie"*. Il risultato, comunque, non dipende dal procedimento usato per aumentare il numero dei rettangoli. L'essenziale è che le dimensioni di tutti i rettangoli vengano ridotte oltre ogni limite, che i rettangoli tendano a scomparire, a diventare *evanescenti.*

Riportiamo la trattazione di Newton, nella rielaborazione di Enriques e Forti:

Lemma I. Le quantità e i rapporti di quantità che tendono costantemente a divenire eguali in un tempo finito, e la cui differenza, prima di quel tempo, diviene minore di qualsiasi differenza data, saranno infine eguali.

Prova. Se si nega ciò tali quantità o rapporti saranno infine diseguali, e la loro ultima differenza sarà D. Ma allora le quantità date non potranno avvicinarsi tanto all'eguaglianza da non distare da essa della quantità D. Ciò che è contro l'ipotesi.



Lemma II. Se in una qualunque figura AacE, compresa fra le rette Aa, AE, e la curva acE, si inscrivono quanti si vogliono parallelogrammi Ab, Bc, Cd, ecc., di basi AB, BC, CD, ecc., eguali, e di lati Bb, Cc, Dd, ecc., paralleli al lato Aa della figura; e si tracciano i parallelogrammi aKbl, bLcm, cMdn, ecc.; se si diminuisce infine la larghezza di questi parallelogrammi aumentando il loro numero all'infinito, allora le ultime ragioni che avranno fra loro la figura

inscritta AKbLcMdD, la circoscritta AalbmcndoE, e la curvilinea AabcdE, sono ragioni di eguaglianza.
Prova. Infatti la differenza fra la figura inscritta e la circoscritta è data dalla somma dei parallelogrammi Kl, Lm, Mn, Do, cioè (data l'eguaglianza delle loro basi) dal rettangolo Abla avente per base una qualsiasi delle basi eguali – la Kb – e per altezza la somma Aa di tutte le altezze dei parallelogrammi dati. Ma questo rettangolo ABla, poiché la sua larghezza AB diminuisce all'infinito, diverrà minore di qualsiasi rettangolo dato. Dunque (per il Lemma I) la figura iscritta e la circoscritta – ed a maggior ragione la curvilinea intermedia – diverranno da ultimo eguali. C.D.D.

Lemma III. Ancora le ultime ragioni diverranno ragioni di eguaglianza, se le basi AB, BC, CD, ecc., sono diseguali, e se tutte diminuiscono infinitamente.

Prova. Sia AF la base massima, e sia dato il parallelogramma FaAf. Esso sarà maggiore della differenza fra la figura iscritta e la circoscritta, ma poiché la sua larghezza AF diminuisce all'infinito, anch'esso sarà più piccolo di qualunque rettangolo dato. C.D.D.

Corollario 1. Quindi la somma ultima dei parallelogrammi evanescenti coincide in ogni sua parte con la figura curvilinea.

Corollario 2. E a maggior ragione la figura rettilinea compresa sotto le corde degli archi evanescenti ab, bc, cd, ecc., coinciderà da ultimo con la figura curvilinea.

Corollario 3. Lo stesso sarà della figura rettilinea circoscritta compresa sotto le tangenti a tali archi.

Corollario 4. E per conseguenza queste ultime figure (quanto ai loro perimetri acE) non sono rettilinee, ma sono limiti curvilinei di figure rettilinee.

Da questa trattazione emerge l'idea di curva come limite di una poligonale inscritta o circoscritta, che era poi, in fondo, quella contenuta nelle opere di **Euclide** ed **Archimede**. Questi approssimavano, infatti, la circonferenza con poligoni regolari inscritti e circoscritti. L'approssimazione – del perimetro e dell'area - è tanto migliore, quanto maggiore è il numero dei lati e, di conseguenza, quanto minore è la loro lunghezza. Un procedimento analogo era

stato impiegato ai tempi di **Descartes** per calcolare **l'area sottesa alla cicloide.**
Se andiamo a vedere la definizione di integrale secondo **Riemann** in un moderno testo di analisi matematica, noteremo che anche lì si immagina di approssimare l'area sottesa al grafico di una funzione in un intervallo chiuso e limitato dal basso e dall'alto con rettangoli, alla stessa maniera di Newton. Il valore dell'integrale non compare, tuttavia, come limite di un processo *dinamico* di riduzione, bensì in forma *statica*: tale valore è definito come *estremo superiore* delle aree delle unioni di rettangoli inscritti (o come estremo inferiore delle aree delle unioni dei rettangoli circoscritti). Si ricorre quindi alla *relazione d'ordine* tra numeri reali, ossia ad una nozione *insiemistica.* D'altra parte la stessa definizione di limite che si insegna oggigiorno non contiene più l'idea di un progressivo e continuo avvicinamento ad una quantità, ma è espressa in termini di *intorni* di punti, ossia, se vogliamo, in termini *topologici*.

Il passaggio al limite, nelle opere di Newton, prende il nome di ***metodo delle ultime ragioni***. In uno **Scolio** dei *Principia* Newton così ne descrive la natura:

"Queste ultime ragioni con cui le quantità divengono evanescenti non sono realmente le ragioni di quantità ultime, bensì limiti verso cui le ragioni delle quantità, decrescendo oltre ogni limite, sempre convergono, e ai quali si avvicinano più di ogni differenza data, senza mai oltrepassarle, né mai raggiungerle effettivamente prima che le quantità siano diminuite all'infinito."

In ciò vediamo una correzione della definizione di velocità di variazione di una variabile (cioè, della derivata), rispetto al metodo delle flussioni. Essa non corrisponde più al rapporto fra quantità infinitesime, bensì al limite (ideale) verso cui tende un rapporto fra quantità finite, mano a mano che queste vengono *indefinitamente* diminuite, cioè diventano piccole a piacere. Ancor oggi noi definiamo la derivata come il limite del *rapporto incrementale,* che è il rapporto tra *l'incremento della funzione* (la variazione Δx della x) e *l'incremento della variabile* (l'intervallo temporale Δt in cui avviene la variazione stessa):

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A ricordarci il significato originario della derivata è la scrittura, ancora in uso,

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

nella quale dx e dt sono le notazioni usate da **Leibniz** per indicare gli incrementi infinitesimi della funzione e della variabile.

Il passaggio al limite che dà origine al calcolo di un integrale, viene anche chiamato ***metodo delle ultime somme***, il cui significato risulta chiaro dall'esempio sopra riportato. Esso fu adottato per la prima volta nell'opera ***De quadratura curvarum***, del 1676.

Il calcolo infinitesimale secondo Leibniz

Calcolo dell'area sottesa all'iperbole

By whose first terme is represented y^e square of y^e Hyperbola, viz: y^t it is

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{[8]}^{(82)}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}.\ \&c.^{(83)}$$

As if $x=\frac{1}{10}$. or $cq=\frac{11}{10}=1,\ 1.$ y^n is

$$dapq=\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}-\frac{1}{40000}+\frac{1}{500000}-\frac{1}{6000000}.\ \&c.$$

y^t is

$apqd=[x=]$	0,	10000.	00000.	00000.	00000.	00000.	000	[...]	
$\frac{1}{3}x^3=$	+0,	00033.	33333.	33333.	33333.	33333.	333	[...]	
$\frac{1}{5}x^5=$	+0,	00000.	20000.	00000.	00000.	00000.	000	[...]	
−0,	00500.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	0
	2.	50000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	0
		1666.	66666.	66666.	66666.	66666.	66666.	66666.	6
		12.	50000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	0
			10000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.	0
			83.	33333.	33333.	33333.	33333.	33333.	3
				71428.	57142.	85714.	28571.	42857.	5
				630.	55555.	55555.	55555.	55555.	5
					5045.	45454.	54545.	45454.	5
						41666.	66666.	66666.	6
						384.	61538.	46153.	5
						3.	57142.	85714.	1
							3364.	58333.	3
								29411.	5[85]
−0,	00502.	51679.	26750.	72059.	17744.	28779.	27385.	30147.	14044.

12586

cui addendum

−277.	77777.	77777. 7
2.	63157.	89421. 0
	02523.	80952. 4[86]
		22727. 3
		217. 4
		2. 1
−280.	43459.	71098.[87]

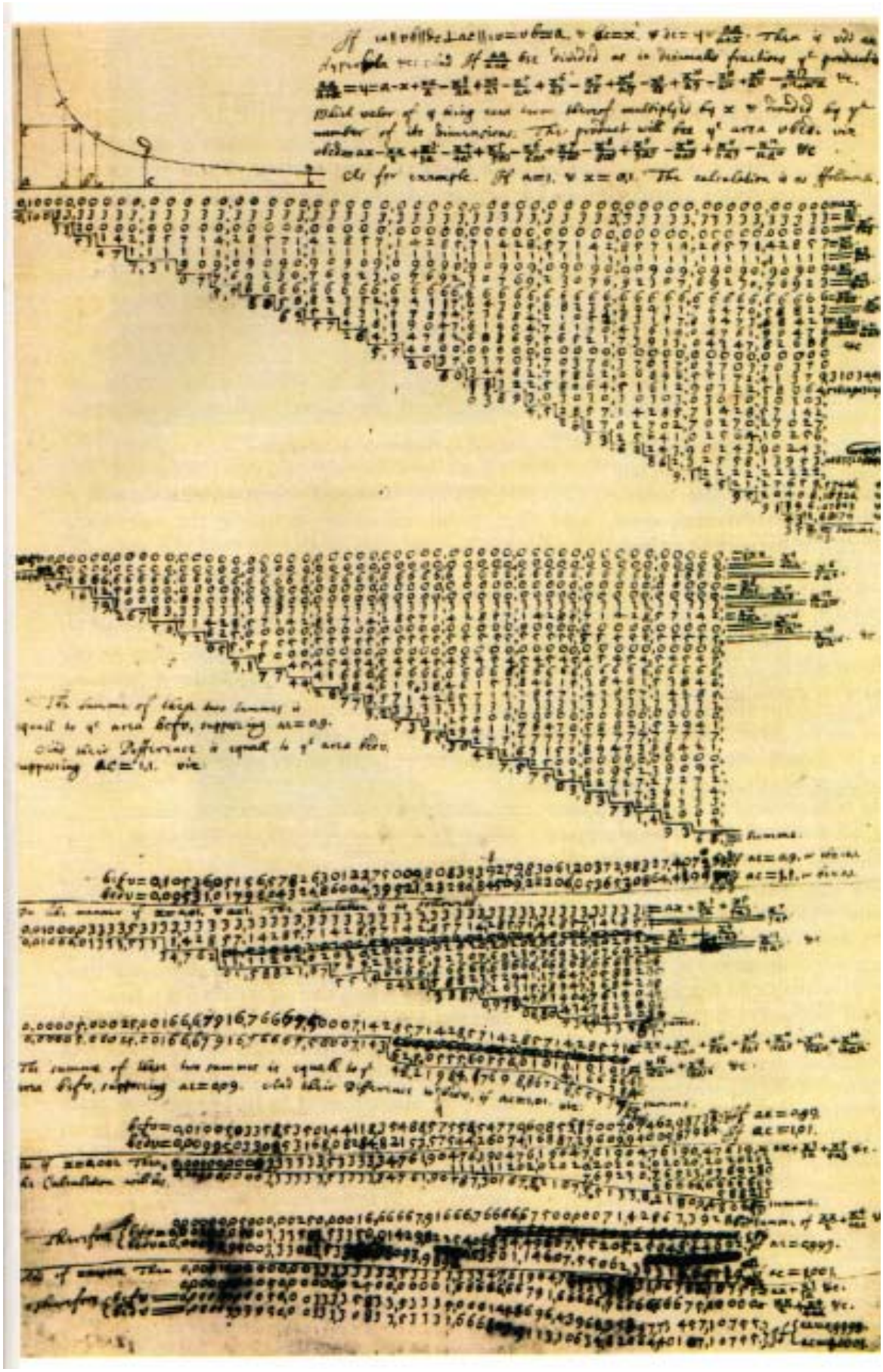
that is

And so y^e summes will bee

+0,	10033,	53477.	31075.	58063.	57265.	520	[...]	
−0.	00502.	51679.	26750.	72059.	17144.[88]	287	[...]	
0.	09530.[89]	01798.	04324.	86004.	40121.[90]	232	[...]	wch is y^e quantity of

y^e area *adpq*, If *cpab* = 1. & *cp* = *ab* = 10 *pq*. & *qde*||*ap*||*bc* = *ap*.[91]

La pagina originale di Newton



La classificazione delle cubiche secondo Newton

Le cubiche del piano sono quelle curve che sono rappresentate, nel piano cartesiano, da un'equazione algebrica di terzo grado in due indeterminate, diciamo x e y. Newton tratta qui alcuni esempi, tra cui la curva da lui battezzata *tridente*, che già compare nella ***Géométrie*** di **Descartes**.

Due pagine originali di Newton

gles of the Aſymptotes, but in the contiguous or adjoining ones, and that on each Side the Abſciſſa

Fig. 68.

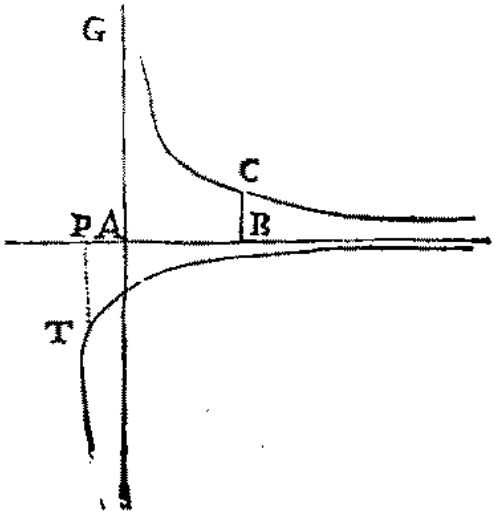
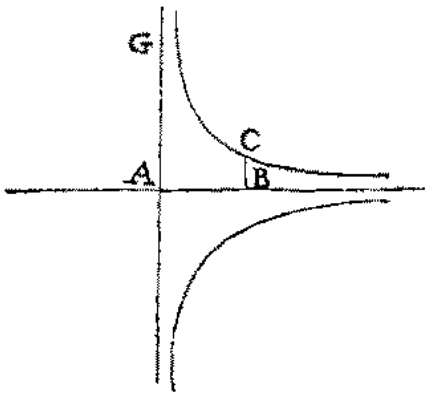


Fig. 69.

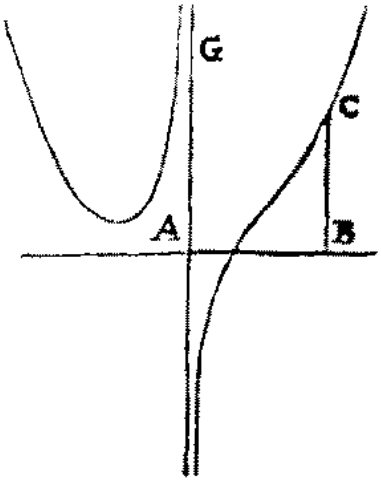


AB; and even without any Diameter, if the Term ey be there, but with one if that be wanting. Which two *Species* are the *Sixty fourth* and *Sixty fifth*.

A Trident.

26. In the ſecond Caſe of the Equations there is $xy = ax^3 + bxx + cx + d$: And the Figure in this Caſe will have four infinite Legs, of which

Fig. 76.



two are Hyperbola's about the Aſymptote *AG* tending towards contrary Parts; and two converging Parabola's, and, with the Former, making as it were the Figure of a *Trident*. And this Figure is that Parabola by which *D. Cartes* conſtructed Equations of ſix Dimenſions. This therefore is the *Sixty ſixth Species*.

Five Diverging Parabola's.

27. In the third Caſe the Equation was $yy = ax^3 + bxx + cx + d$; and deſigns a Parabola, whoſe Legs diverge from one another, and run out infinitely contrary ways. The Abſciſſa *AB* is its Diameter, and its five Species are theſe:

If, of the Equation $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, all the Roots *Aγ*, *AT*, *Aτ*, are real and unequal; then the Figure is a diverging Parabola

Fig. 70.

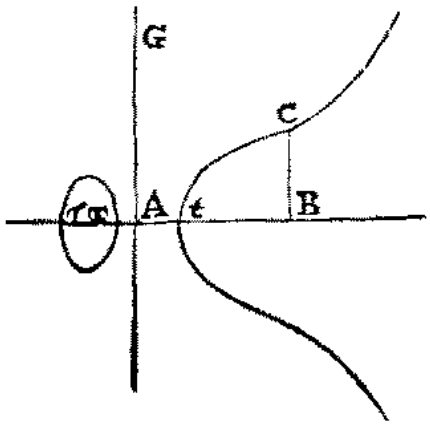
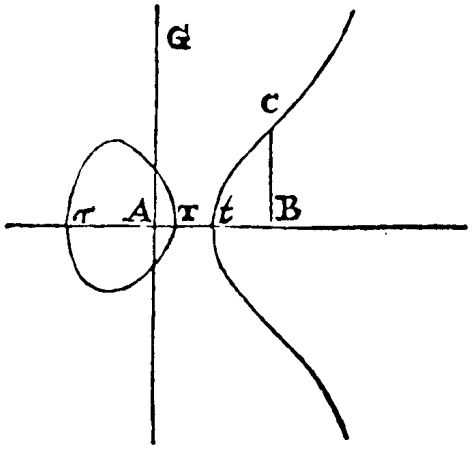


Fig. 71.



of the Form of a Bell, with an Oval at its Vertex. And this makes a *Sixty ſeventh Species.*

If two of the Roots are equal, a Parabola will be formed, either *Nodated* by touching an Oval,

Fig. 72.

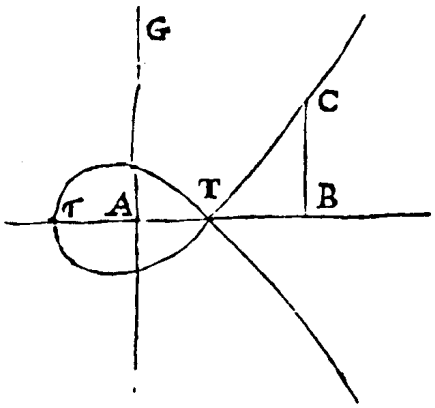
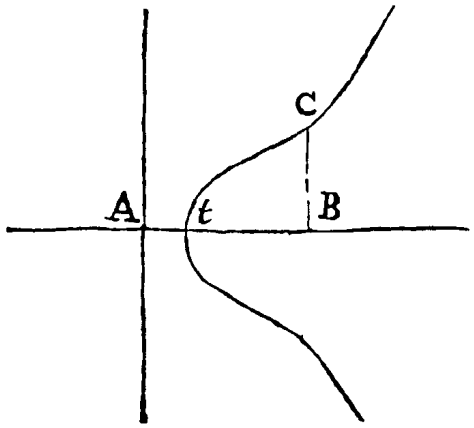


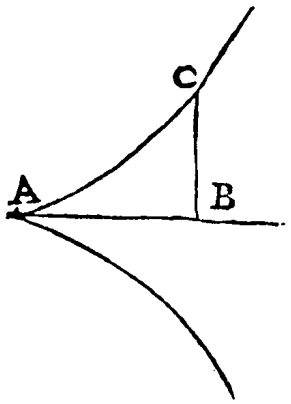
Fig. 73.



or *Punctate*, by having the Oval infinitely ſmall. Which two *Species* are the *Sixty eighth* and *Sixty ninth.*

If three of the Roots are equal, the Parabola will be *Cuſpidate* at the Vertex. And this is the

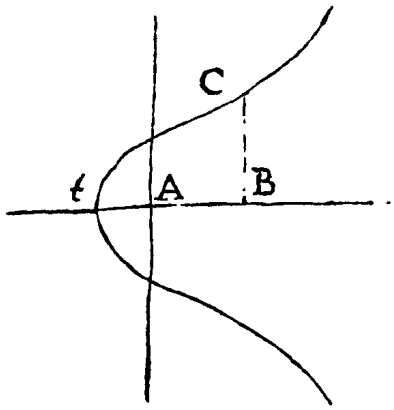
Fig. 75.



Neilian Parabola, commonly called Semi-cubical. Which makes the *Seventieth Species.*

If two of the Roots are impoſſible, there will (See *Fig.* 73.)

Fig. 73.



be a *Pure* Parabola of a Bell-like Form. And this makes the *Seventy firſt Species.*

La formula per il raggio di curvatura

Newton determina l'espressione del **raggio di curvatura** della generica curva piana di equazione cartesiana

$$f(x,y) = 0,$$

ove $f(x,y)$ è una funzione reale di due variabili reali dotata di derivate parziali fino al secondo ordine. Ecco le notazioni impiegate da Newton.

$$\mathfrak{C} \equiv f(x, y)$$
$$\mathfrak{C} = xf_x,\ \mathfrak{C} = yf_y;\ \mathfrak{C} = x^2f_{xx},\ \mathfrak{C} = xyf_{xy},= xyf_{yx},\ \mathfrak{C} = y^2f_{yy}.$$

Ed ecco la formula:

Theorems whereby to find the quantity of crookedness in any parte of any given line.

Then will the Theorems bee

$$c=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}yy+\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xx}{-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}y+2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}y-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}y}.\ \text{Or}\ c=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}yy+\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xx}{\frac{-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}y+2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}y-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}y}=hp.$$

$$d=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}yy+\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xx}{-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}x+2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}x-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}x}.\ \text{Or}\ d=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}yy+\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xx}{-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}x+2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}x\frac{-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}x}{\mathfrak{C}}}=pm.$$

$$\sqrt{cc+dd}=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}yy+\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xx\ \text{in}\ \sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}yy+\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xx}}{-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xy+2\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xy-\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}xy}=hm.$$

Newton effettua il calcolo del raggio di curvatura hm nel caso particolare della **parabola**.

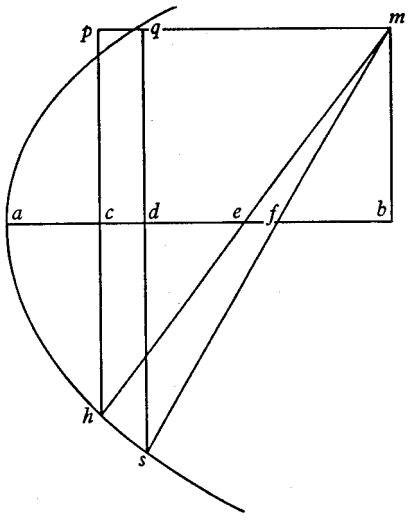
Example y^e first. Suppose the crookednes of some parte of y^e Parabola was desired, The terms expre[ss]ing its nature being $rx-yy=0$. Then by this Rule I put

$$\overset{1}{\mathfrak{C}}=\overset{0}{rx}-yy.\ \mathfrak{C}=rx-\overset{0}{yy}.\ [\text{or}]\ \mathfrak{C}=rx.$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}=-\overset{0}{yy}+rx=-2yy.\ \text{Or w}^{\text{ch}}\ \text{is y}^{\text{e}}\ \text{same}$$

$$\overset{0}{\mathfrak{C}}=-\overset{-2}{yy}+rx=-2rx.\quad \overset{0}{\mathfrak{C}}=\overset{-1}{rx}-\overset{0}{yy}=0.$$

$$\overset{2\times 1}{\mathfrak{C}}=-yy+\overset{0\times -1}{rx}\quad =-2yy=-2rx.$$



$0\times 1 \quad 2\times 0$

$\mathfrak{XC}=rx-yy=0$. Now were it required y^t $c=hp$ be found Then substitute these valors of $\mathfrak{XC}$, $\mathfrak{XE}$, $\mathfrak{EC}$, $\mathfrak{CE}$, $\mathfrak{CC}$ into theire places in y^e precedent rule And there will result $\dfrac{rrxxyy+4r^2x^4}{\dfrac{-rrxx\times -2rxy}{-2rx}\ **}=-y-\dfrac{4xx}{y}=-y-4x\sqrt{rx}^{(77)}=c$. But if d is to be found then by y^e 2^d rule $\dfrac{rrxxyy+4rrx^4}{+2rxrxx\ **}=\dfrac{yy}{2x}+2x=\dfrac{1}{2}r+2x=d$. Or if, $hm=\sqrt{cc+dd}$ the radius of a circle as crooked as y^e given parte (h) of y^e parabola bee required then by the third theorem

$$\sqrt{cc+dd}=\frac{rrxxyy+4rrx^4 \text{ in } \sqrt{rrxxyy+4rrx^4}}{+2rrxxxy^3\ **}=\frac{r+4x}{2r}\sqrt{rr+4rx}=hm.^{(78)}$$

La regola di Newton

Secondo il **Teorema fondamentale dell'algebra**, ogni polinomio di grado *n* a coefficienti reali ha *n* radici **complesse** (contate con la rispettiva molteplicità). **Newton**, nel **Libro II** della sua ***Arithmetica Universalis***, (1683-1684, pubblicata nel 1707), presenta un criterio che permette di individuare, per ogni dato polinomio, il numero delle radici complesse non reali (immaginarie), senza determinarle. Questa regola si avvale unicamente di semplici calcoli aritmetici sui coefficienti.

"Prendete una sequenza di frazioni i cui denominatori formino la progressione aritmetica 1, 2, 3, 4, 5, e così via fino al numero che sarà l'indicatore delle dimensioni della vostra equazione (leggi: il grado) *e per numeratori delle vostre frazioni, prendete la sequenza dei termini che forma i denominatori, ma in un ordine inverso. Dividete ciascuna di queste frazioni per quella che la precede, e ponete le frazioni che risulteranno da queste divisioni, sopra i termini medi dell'equazione. Poi elevate ciascun termine medio al quadrato, e moltiplicate questo quadrato per la frazione che è sopra il termine corrispondente, e poi esaminate se questo prodotto è più grande o più piccolo del rettangolo* (leggi: il prodotto) *dei due termini adiacenti a destra e a sinistra al termine che state esaminando; se è più grande, ponete sotto a questo termine il segno +, se è più piccolo, ponete il segno -. Scrivete sotto al primo e all'ultimo termine, il segno +. Ci saranno nell'equazione tante radici immaginarie quante sono le variazioni nei segni sottoscritti di + in - e di - in +.*

Se si ha l'equazione $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$, *si forma in primo luogo questa serie di frazioni, 3/1, 2/2, 1/3, poi si dividerà la seconda 2/2 per la prima 3/1, e la terza 1/3 per la seconda 2/2, e si porranno i quozienti 1/3 e 1/3 sopra i termini medi, come segue:*

$$1/3 \qquad 1/3$$

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$$

$$+ \qquad - \qquad + \qquad +$$

Dopo questo, poiché il quadrato del secondo termine px^2 *moltiplicato per la frazione 1/3 che è sopra di esso, dà un prodotto* $p^2x^4/3$, *meno grande del prodotto del primo termine* x^3 *per il terzo termine* $3p^2x$, *prodotto che è*

$3p^2x^4$, si porrà sotto il termine px^2 il segno -. Ma poiché il quadrato $9p^4x^2$ del terzo termine $3p^2x$ moltiplicato per la frazione 1/3, che è sopra di esso, è più grande di zero, e a maggior ragione, più grande del prodotto negativo del secondo termine px^2 per - q, si porrà sotto questo termine il segno +. E scrivendo sotto il primo termine x^3, e sotto l'ultimo - q, il segno +, i segni sottoscritti formeranno la sequenza, + - + +, nella quale ci sono due variazioni, l'una di + in -, e l'altra di - in +, cosa che indica due radici immaginarie."
(cit. da U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica,* Sansoni, Firenze 1992, pagg. 190-191)

Sappiamo dunque che il polinomio dell'esempio ha almeno due radici complesse non reali. In realtà, poiché ogni polinomio di grado tre a coefficienti reali ha sempre una radice reale, la regola permette di concludere che le radici immaginarie sono esattamente due. Si sa inoltre che queste sono *coniugate,* ossia hanno la stessa parte reale, ma parti immaginarie uguali e di segno opposto.

La regola di Newton completa la **regola dei segni** di **Cartesio**.

La risoluzione delle equazioni di terzo grado

Isaac Newton
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Si tratta della principale opera di **Newton**, e fu pubblicata a Londra nel 1686. Essa getta le basi dell'astronomia fisica, e rappresenta una reazione alla **scienza** di **Cartesio**, che Newton considerava inadeguata, priva di rigore e non immune da errori. Il trattato è suddiviso in tre libri.

Il **Libro I** contiene i **tre principi della dinamica** (detti anche assiomi o leggi del moto), che traduciamo nel moderno linguaggio fisico:

Legge I *"Qualunque corpo non soggetto a forze rimane nello stato di riposo o di moto rettilineo uniforme."*

Legge II *"La variazione della quantità di moto è proporzionale e concorde alla forza applicata."*

Legge III *"L'azione e la reazione sono uguali ed opposte".*

A Newton è dovuta, tra l'altro, la formulazione della nota **regola del parallelogramma** per la composizione delle grandezze fisiche vettoriali (forze, velocità, ecc.): un primo accenno di questo metodo si trova, in realtà, già nelle opere meccaniche di **Galileo**. L'enunciato appare nel **Libro I** come corollario alle Leggi I e II del moto:

COROLLARIO II "Un corpo sotto l'azione di due forze congiunte descrive la diagonale del parallelogramma nel tempo stesso che impiegherebbe a descrivere i lati di esso sotto l'azione delle singole forze."

Newton introduce anche la nozione di ***quantità di moto***, che egli chiama "momento", e la nozione di ***inerzia***, che per lui è una "forza insita o innata", e che segna il punto di arrivo degli studi sulla conservazione del moto iniziati da Galilei e Descartes. Così Newton enuncia la ***legge di conservazione della quantità di moto***, nel **Libro I**, deducendola dalle Leggi II e III del moto:

COROLLARIO III "La quantità di moto che risulta dalla somma di tutti i moti aventi uno stesso verso e dalla differenza di quelli aventi verso contrario, non viene mutata dall'azione reciproca dei corpi."

Sarà invece **Leibniz** a formulare la *legge di conservazione dell'energia cinetica*, che egli chiamerà "forza viva".

Ricerche storiche accurate hanno stabilito che il contenuto del Libro I non è interamente originale: a Newton spetta comunque il merito di aver saputo raccogliere l'eredità dei suoi predecessori, restituendola, sulla carta, in una veste tutta nuova. Nessuno, prima di lui, era stato in grado di costruire la meccanica dell'universo come un sistema unitario, fondato su assiomi da cui tutto il resto può essere dedotto. Lo storico Truesdell, parafrasando le espressioni di ammirazione che i *Principia* di Newton suscitarono nei suoi contemporanei, dice: *"Ciò che Newton scrive è corretto, limpido, e conciso. Nelle opere precedenti gli splendidi diamanti della scoperta giacevano segreti in una opaca matrice fatta di complessi casi particolari, dettagli laboriosi, metafisica, confusione ed errore, mentre Newton segue una vena di oro puro."*

Il **Libro II** è dedicato al moto dei corpi in un mezzo resistente ed al moto dei fluidi, e pone le basi dell'**idrodinamica**.

Il **Libro III** riguarda l'ordinamento del sistema del mondo e contiene la famosa **legge della gravitazione universale**:

PROPOSIZIONE VII. TEOREMA VII. Se la massa di due globi gravitanti l'uno verso l'altro è omogenea a distanze uguali dai loro centri, i due globi si attraggono con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i loro centri.

Questa legge, che Newton applica alla Terra, al Sole, alla Luna, a Saturno e Giove con i rispettivi satelliti (scoperti da **Galilei** e da lui studiati nel ***Sidereus Nuncius***), rappresenta un'unificazione della teoria del moto dei pianeti (il "Sistema del mondo"). Questa viene così riassunta dallo stesso Newton:

PROPOSIZIONE V. TEOREMA V. I satelliti di Giove gravitano verso Giove, quelli di Saturno verso Saturno, e i pianeti verso il Sole; e le loro forze di gravità li ritraggono dal moto rettilineo e li trattengono nelle loro orbite curvilinee.

La forza di attrazione gravitazionale svolge dunque, nel moto curvilineo dei pianeti, il ruolo di ***forza centripeta***: si tratta della forza che in ogni punto della traiettoria agisce sul corpo in movimento puntando verso quello che, in quel punto, è il ***centro di curvatura*** della traiettoria stessa. Noi sappiamo che la forza centripeta è ortogonale *(normale*) alla tangente alla traiettoria in quel punto. Newton trova un criterio geometrico per determinare la normale, ed una formula che dà il valore della forza ad ogni istante in funzione

della velocità. Fu Newton a coniare il termine *forza centripeta*, ma il primo a studiare il fenomeno era stato **Huyghens**.

La nozione di ***curvatura*** verrà successivamente estesa da **Eulero** e **Gauss** dalle linee alle superficie.

Dalla legge della gravitazione universale è possibile dedurre facilmente le **tre leggi di Keplero**, e spiegare fenomeni come le perturbazioni del moto della Luna (dovute all'attrazione da parte della Terra e del Sole, e che già **Tolomeo** aveva osservato), il moto delle comete, la precessione degli equinozi, il fenomeno delle maree: tutto ciò che Descartes aveva cercato di giustificare alla luce della sua fantasiosa ***teoria dei vortici***. A Descartes va comunque riconosciuto il merito di aver posto, nell'universo, tanti centri di moto rotatorio.

Considerando il complesso delle opere fisiche di Newton, ci si accorge che egli è il primo a riconoscere l'esistenza di due forze d'attrazione: quella che oggi chiamiamo *debole*, e che si esercita tra grandi masse collocate a grandi distanze, e quella *forte,* che si esercita tra piccole particelle vicine. Come afferma il **Leopardi** nella sua ***Storia dell'astronomia***, *"l'attrazione fu il grande agente di Newton"*. In effetti lo scienziato inglese ricorse all'attrazione debole tra le particelle della luce e del mezzo in cui essa si propaga per spiegare il fenomeno della rifrazione. Il fatto di aver riconosciuto un'analogia sostanziale tra le forze che governano il moto dei pianeti e quelle che risiedono nella struttura microscopica della materia costituisce la prima importante intuizione dell'uniformità delle leggi naturali. Quando, nel 1666, Newton vide cadere la leggendaria mela dall'albero, egli pensò che se la Luna fosse stata al posto di quel frutto, essa si sarebbe comportata allo stesso modo. L'idea che i corpi potessero esercitare forze a distanza venne rifiutata da molti contemporanei di Newton, tra cui **Huyghens**, che disse: *"Non riesco a capire come il Signor Newton abbia potuto dedicare tanta buona matematica ad un'ipotesi fisica così assurda."*

Nei *Principia* Newton distingue, per primo, il concetto di ***massa*** (quantità di materia) da quello di ***peso***. Ciò emerge chiaramente anche dalla lettura delle pagine del **Libro III**:

PROPOSIZIONE VI. TEOREMA VI. Tutti i corpi gravitano verso i singoli pianeti, e – a pari distanza dal centro – i loro pesi su di uno stesso pianeta sono proporzionali alla loro quantità di materia.

L'argomento del **Libro III** è ripreso ed ampliato da Newton in un opuscolo pubblicato postumo, il ***Sistema del mondo***. Qui egli riporta e rielabora osservazioni astronomiche di altri scienziati, tra cui **Keplero**, uno dei primi autori che egli aveva studiato in gioventù. Grande è lo spazio dedicato alla storia dei più recenti avvistamenti di comete. Di questi corpi celesti egli studia la luminosità ed il moto: la traiettoria ha la forma di un'**ellisse** allungata, che può essere confusa (ed in passato lo era stata, da parte di molti autori) con una **parabola**. Nel Seicento la natura di questi fenomeni e la loro collocazione nel cielo erano state oggetto di accese controversie, che avevano coinvolto anche Galilei. Newton le riconosce come corpi celesti, che divengono visibili quando passano vicini alla Terra, ad una distanza che può essere anche inferiore a quella di Marte.

La struttura dei ***Principia*** ricorda quella degli ***Elementi*** di **Euclide**: è, infatti, organizzata in definizioni, assiomi, lemmi, proposizioni, corollari. Sebbene Newton sia uno dei fondatori del **calcolo infinitesimale**, in quest'opera egli non ricorre mai a quantità infinitesime di per sé, a cui preferisce le "quantità evanescenti divisibili", ossia grandezze geometriche passibili di essere ridotte a piacere. In ciò Newton procede nel solco della geometria classica, che concepiva, nel **metodo di esaustione**, la possibilità di suddividere una figura geometrica un numero qualsivoglia di volte. Essa, però, non si preoccupava di dare significato al risultato limite del procedimento (**differenza tra infinito potenziale ed infinito attuale**).
Col passare del tempo Newton ha della geometria una visione sempre più *dinamica.* Alla fine gli oggetti geometrici non sono più, come nella ***teoria degli indivisibili***, il risultato dell'unione di infinite particelle infinitesimali, bensì il frutto di un certo processo evolutivo. Una curva è descritta da un punto che si muove, un angolo è generato dalla rotazione di una linea retta. Spesso le sue dimostrazioni si richiamano più all'intuizione fisica che al rigore matematico. Ciò è in perfetto accordo con la sua visione dell'analisi matematica, che è il ***calcolo delle flussioni***, cioè studio del modo in cui variano le quantità nel tempo e nello spazio. Così, ad esempio, quella che noi chiamiamo *velocità istantanea* non è il rapporto tra uno spazio infinitesimo "∂s" ed il tempo infinitesimo "∂t" necessario per percorrerlo, ma il valore cui tende la velocità media Δv nell'intervallo di tempo Δt, mano a mano che questo viene ridotto. Newton immagina di sottoporre gli intervalli temporali, o i segmenti che li rappresentano, ad un procedimento di riduzione *continua.* In questo il metodo newtoniano si distingue, ad esempio, da quello

discreto discusso da Galileo nei suoi ***Discorsi***, dove le lunghezze infinitesime vengono concepite come il risultato finale dei dimezzamenti successivi di un segmento.
L'idea newtoniana di passaggio al limite è ben illustrata nel **Libro I** dei *Principia,* in cui Newton presenta il ***metodo delle prime ed ultime ragioni***.

Uno dei maggiori estimatori dell'opera newtoniana fu il fisico austriaco **Ernst Mach** (1838-1916), noto per i suoi studi di aerodinamica.

La fisica di Newton secondo Einstein

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

La fisica di Newton secondo Einstein

Nell'anno 1942, mentre in Europa imperversa la guerra, e lo sviluppo della tecnologia coincide con la creazione di mezzi di distruzione sempre più micidiali, **Albert Einstein** riflette sul progresso della scienza moderna. Egli dedica alcune pagine ad una figura lontana nel tempo, ad uno scienziato puro, che appare così estraneo ai nefasti risvolti della fisica del Novecento: **Isaac Newton**.

"La ragione, ovviamente, è debole se confrontata con la sua meta infinita. Debole, veramente, di fronte alle follie e alle passioni dell'umanità, le quali, dobbiamo riconoscerlo, controllano quasi completamente i nostri destini, nelle piccole cose come nelle grandi. Eppure le opere dell'intelletto sopravvivono alle rumorose e affaccendate generazioni e diffondono luce e calore attraverso i secoli. Rinfrancati da tale pensiero rivolgiamo, in questi giorni inquieti, il nostro pensiero a ***Newton****, il quale tre secoli fa entrò a far parte dell'umanità.*
Pensare a lui significa pensare alla sua opera. Infatti un tale uomo può essere compreso soltanto pensando a lui come a una scena sulla quale si svolse la lotta per la verità eterna. Molto prima di Newton vi erano state delle menti potenti che pensavano dovesse essere possibile, ***attraverso la deduzione logica da semplici ipotesi fisiche, fornire delle spiegazioni convincenti dei fenomeni percettibili dai nostri sensi. Ma Newton fu il primo che riuscì a trovare una base chiaramente formulata dalla quale poter dedurre un gran numero di fenomeni mediante il ragionamento matematico, logico, quantitativo e in armonia con l'esperienza.*** *Invero, egli poteva giustamente sperare che la base fondamentale della sua meccanica sarebbe giunta con il tempo a fornire la chiave per la comprensione di tutti i fenomeni. Così pensarono i suoi allievi, con maggior sicurezza di lui, sino alla fine del diciottesimo secolo. Come nacque questo miracolo nella sua mente? Perdonami, lettore, la domanda illogica. Se infatti potessimo trattare con la ragione il problema del come, allora non vi potrebbe essere alcuna questione circa il miracolo nel vero senso della parola.* ***Scopo di ogni attività dell'intelletto è quello di convertire un miracolo in qualche cosa che esso può comprendere.*** *Se in questo caso il miracolo si lascia convertire, allora la nostra ammirazione per la mente di Newton diventa ancora maggiore. […]*
Che cosa accade allora nel caso di un corpo che cade nello spazio? Un corpo in caduta libera si comporta praticamente come un punto privo di dimensioni, se se ne considera il moto complessivo. Esso è accelerato

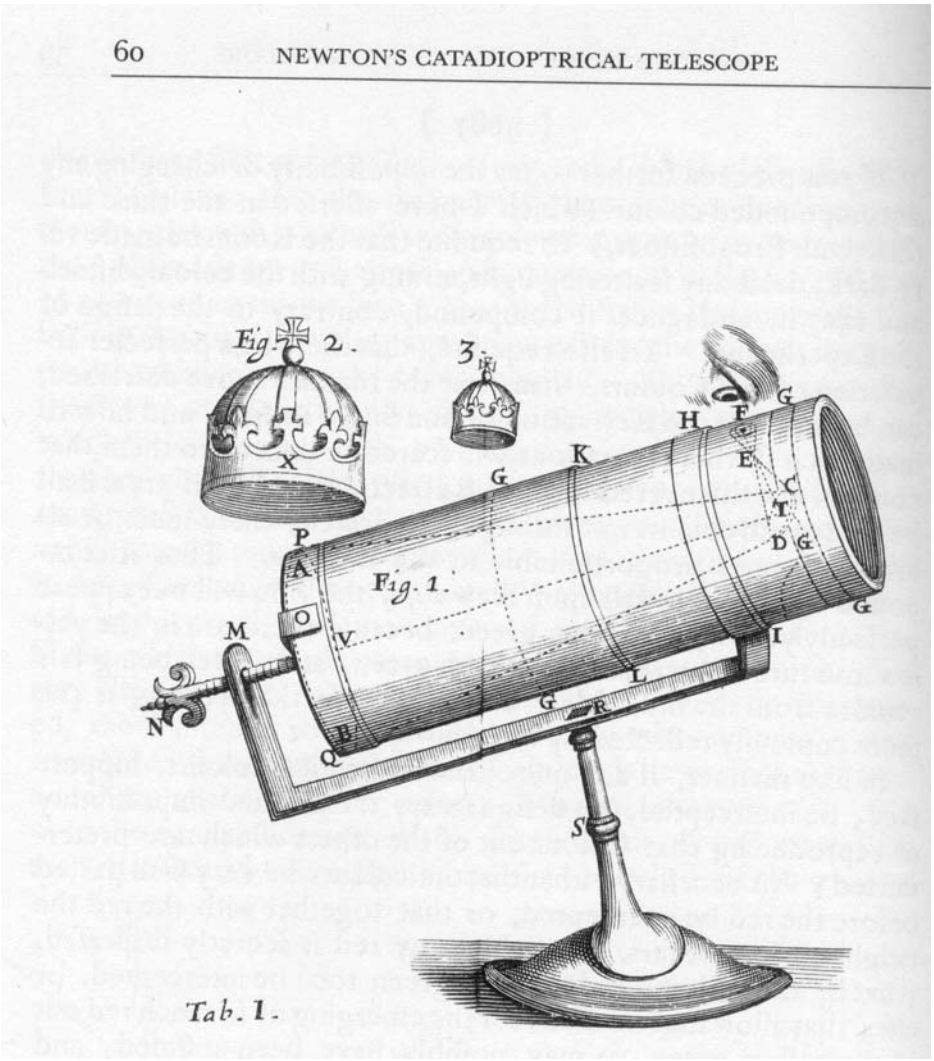
*verso il basso. L'accelerazione, secondo **Galileo**, è indipendente dalla sua natura e dalla sua velocità. La Terra, naturalmente, ha una funzione essenziale circa l'esistenza di questa accelerazione. Sembrerebbe, allora, che la terra con la sola sua presenza eserciti una forza sul corpo. La terra è costituita di moltissime particelle. Sembra inevitabile allora l'idea che ciascuna di queste particelle agisca sul corpo in caduta e che tutti questi effetti si sommino. Sembra allora che vi sia una forza che i corpi con la loro stessa presenza esercitano l'uno sull'altro attraverso lo spazio. Queste forze sembrano essere indipendenti dalle velocità, e dipendenti soltanto dalla posizione e dalle proprietà quantitative dei vari corpi che le esercitano. Questa proprietà quantitativa potrebbe dipendere strettamente dalla massa, in quanto la massa sembra caratterizzare il corpo dal punto di vista meccanico. Questo strano effetto a distanza può essere chiamato **gravitazione**.[…]*
A questo punto, soltanto l'esperimento può venire in aiuto.
*Un tale esperimento, tuttavia, era a disposizione di Newton. L'accelerazione della luna era nota attraverso la sua orbita e poteva essere confrontata con l'accelerazione di un corpo qualsiasi in caduta libera sulla superficie della terra. Inoltre, i moti dei pianeti intorno al sole erano stati determinati da **Kepler** con grande precisione e descritti da leggi empiriche semplici. […] **Newton trovò che tutto era spiegabile con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza**. E con ciò l'obiettivo era raggiunto, la scienza della meccanica celeste era nata, e doveva essere confermata migliaia di volte da Newton stesso e da coloro che vennero dopo di lui.*
*E per gli altri campi della fisica? **La gravitazione e la legge non potevano spiegare tutto**. Che cosa determina l'equilibrio delle varie parti di un corpo solido? Come si potevano spiegare la luce e i fenomeni elettrici? Introducendo i punti materiali e forze di vario tipo agenti a distanza, ogni cosa sembrava potersi derivare in modo abbastanza semplice dalle leggi del moto.*
Questa speranza non è stata confermata, e nessuno crede più nella soluzione di tutti i nostri problemi su tale base. Ciononostante, il modo di pensare dei fisici di oggi è condizionato in grande misura dai fondamentali concetti di Newton. Finora non è stato possibile sostituire alla concezione unificata newtoniana dell'universo una nuova concezione generale parimenti unificata. Ma ciò cui siamo pervenuti finora sarebbe stato impossibile senza il limpido sistema di Newton.
Dall'osservazione delle stelle abbiamo tratto sostanzialmente gli strumenti intellettuali indispensabili per lo sviluppo della tecnica moderna. Dell'abuso di quest'ultima nel nostro tempo creatore, intelletti come quello di Newton non sono responsabili più di quanto non lo siano le stelle stesse, dalla contemplazione

delle quali si innalzarono i nostri pensieri. È necessario dire queste cose, perché nel nostro tempo la considerazione dei valori intellettuali per se stessi non è più così viva come lo era nei secoli del rinascimento intellettuale.”

(cit. da A. Einstein, *Pensieri degli anni difficili,* trad. di L. Bianchi, Bollati Boringhieri, Torino 1996, pagg. 140-144)

Il telescopio catadiottrico di Newton

Questo cannocchiale, detto anche *a riflessione totale*, fu costruito da **Newton** nel 1671. Esso presenta due specchi: uno, concavo, è situato sul fondo del tubo *(AB)*, dove raccoglie i raggi luminosi provenienti dall'oggetto osservato e li riflette verso il secondo specchio *(CD)*, piano ed ovale, che li dirige a sua volta verso l'oculare.



Con questo strumento era possibile ottenere 38 ingrandimenti. La figura mette a confronto le dimensioni di un oggetto visto con uno dei cannocchiali circolanti all'epoca (13-14 ingrandimenti) e le dimensioni con cui lo stesso appare usando il telescopio di Newton: il diametro della corona aumenta di 2 volte e mezzo.

Il cannocchiale di Galileo
Il cannocchiale parabolico di Cartesio

Il calcolo infinitesimale secondo Leibniz: il calcolo delle differenze

La branca dell' **analisi matematica** che si occupa delle derivate delle funzioni si dice **calcolo differenziale**: il nome trae origine dal metodo introdotto dal matematico tedesco **Leibniz** per lo studio delle curve. Egli pubblicò il suo primo articolo in merito nel 1684, nella rivista *Acta Eruditorum,* che aveva fondato nel 1682, e di cui era direttore.

Con Leibniz nasce il primitivo **concetto di funzione** come legge che ad ogni numero x (variabile) associa un altro valore numerico $f(x)$. Se si effettua questa assegnazione per ogni intero naturale, i valori ottenuti formano una *successione*:

$$f(1), f(2), f(3),\ldots,f(x), \ldots$$

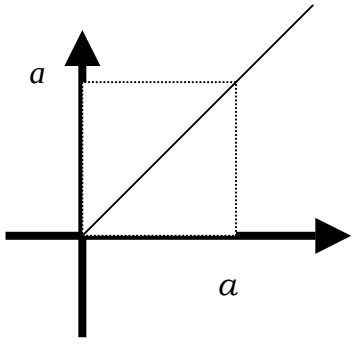
Ad esempio, se per ogni x si pone $f(x)=x$, la successione sarà:

$$1,2,3,\ldots, x,\ldots$$

Ora si può immaginare di applicare la medesima legge di assegnazione f non solo ai numeri naturali, ma anche ad altri numeri, includendo anche frazioni o numeri irrazionali, che si trovano tra due numeri interi consecutivi. In questo modo si costruisce una nuova successione, in cui la variabile assume una gamma di valori "più fitta". Ad esempio:

$$1,\ 3/2,\ \sqrt{3},\ 2,\ 7/3,\ 3,\ \ldots.$$

Se si rende la successione sempre più fitta, inserendo sempre nuovi numeri, le differenze tra due valori consecutivi della variabile x tenderanno a diminuire sempre più. Se si inseriscono tutti i numeri reali, queste differenze diventeranno tutte uguali ad una quantità *infinitamente piccola*, che Leibniz chiama ***differenziale*** e denota con dx: la lettera d è l'abbreviazione di *differenza*.
La funzione $f(x) = x$ può essere rappresentata, nel **piano cartesiano**, mediante la curva di equazione $y = x$:



L'area sottostante il grafico nel generico intervallo $[0,a]$ è l'area di un triangolo di base a ed altezza a, quindi è pari a $a^2/2$.D'altra parte, il triangolo è composto da infiniti rettangolini. Ognuno di essi è posto in un diverso punto x dell'asse delle ascisse, ha base infinitesima dx ed altezza $y = x$. Pertanto l'area in questione è pari alla somma di infinite aree di valore xdx. Nel 1675 Leibniz introduce, per questa somma di infiniti termini, un simbolo a noi familiare:

$$a^2/2 = \int_0^a x\,dx\,.$$

L'espressione a secondo membro è un **integrale**.
Leibniz estende questo metodo per il calcolo dell'area a tutte le funzioni $y = f(x)$ che oggi chiameremmo **continue**.

Data una funzione siffatta, ed un punto (x,y) del suo grafico, Leibniz denota con dy la variazione infinitesima subita dall'ordinata y quando la variabile x subisce la variazione infinitesima dx. Questi sono, rispettivamente, il cateto verticale ed il cateto orizzontale di un **triangolo rettangolo** avente l'ipotenusa sulla tangente al grafico nel punto considerato. In altri termini, dx/dy è la pendenza di quella retta tangente. Ma, d'altro canto, quel quoziente coincide con la derivata definita da Newton nel ***metodo delle flussioni*** come limite del rapporto incrementale.

Le quantità infinitesime studiate da Leibniz si possono identificare con gli **indivisibili** di **Torricelli** e **Cavalieri**. Esse sono perfettamente coerenti con la filosofia leibniziana delle *monadi*. Newton, invece, finì per negarne la consistenza matematica, se non come limiti ultimi ideali verso cui tendono grandezze che diminuiscono indefinitamente.

Leibniz estese il calcolo integrale, inizialmente definito per la determinazione di aree di figure piane, al calcolo di lunghezze d'arco (**integrale di linea**) e di volumi di solidi (**integrale doppio**). Seppe, inoltre, calcolare le derivate delle funzioni logaritmiche ed esponenziali, che Newton, con il suo ***metodo delle serie infinite***, non era riuscito a determinare. Fu il primo a concepire le derivate di ordine superiore, e a trovare la regola di derivazione del prodotto di funzioni. E fu lui a coniare, nel 1692, il termine *funzione*.

La disputa tra Leibniz e Newton

Mentre **Leibniz** e **Newton** erano ancora in vita, nacque nella comunità matematica una disputa destinata a protrarsi per decenni. Oggetto del contendere era la paternità del **calcolo differenziale**, la cui origine poteva essere fatta risalire sia al ***metodo delle differenze*** di Leibniz, sia al ***metodo delle flussioni*** di Newton. La controversia, documentata da numerose lettere ed articoli, imperversò in tutta Europa, coinvolgendo, in un arco di più di quarant'anni, molti personaggi di spicco, tra cui **Huyghens**, **Wallis** e **Jakob Bernoulli**; essa culminò, per Leibniz e Newton, con la reciproca accusa di plagio. Nessuno seppe dirimere la contesa.

A quell'epoca, a cavallo tra il Seicento ed il Settecento, i problemi di maggior interesse erano la determinazione delle aree di figure rettilinee, ossia la loro *quadratura* – come, ad esempio, **il calcolo dell'area sottesa alla cicloide** – e la ricerca delle tangenti ad una curva data. Secondo la formulazione di Newton i due problemi equivalevano a:

- determinare la velocità di variazione del valore di una funzione mediante un'operazione, che veniva chiamata ***metodo delle tangenti***, e successivamente avrebbe preso il nome di *derivazione;*

- risalire, viceversa, alla variazione della quantità, a partire da un'equazione che leghi quest'ultima alla velocità di variazione: quella che oggi chiamiamo *equazione differenziale.* Per questo secondo problema Newton e Leibniz suggerivano di invertire l'operazione di derivazione, applicando il cosiddetto ***metodo delle quadrature*** o anche ***metodo inverso delle tangenti***, che è, poi, l'*integrazione*.

Esistevano soluzioni in casi particolari, alcune delle quali risalivano addirittura all'Antica Grecia: già **Archimede** sapeva quadrare la parabola, ed **Apollonio** aveva mostrato la costruzione delle **tangenti ad una conica**. Il problema era però irrisolto in generale. I primi decisivi tentativi di affrontarlo nella sua globalità furono compiuti da Leibniz e Newton, che, a loro volta, sfruttarono le idee con cui **Fermat** aveva cercato di superare le limitazioni del metodo geometrico-analitico di **Descartes**, valido solo per le curve definite da polinomi.

A distanza di tempo potremmo dividere equamente il merito tra i due contendenti. Probabilmente essi ebbero le stesse intuizioni allo stesso

tempo, ed in maniera indipendente. Il fatto che Leibniz abbia pubblicato per primo le sue idee, non gli attribuisce necessariamente la priorità sulla scoperta: alcuni critici, come Rouse Ball, sono portati a credere che Leibniz abbia tratto l'ispirazione dalla lettura di alcuni appunti di Newton. Quest'ultimo era piuttosto riluttante a diffondere i propri risultati, non si preoccupò mai troppo di preparare i suoi manoscritti per la stampa. Volendo proprio mettere a confronto le loro capacità, si potrebbe affermare, come fa Howard Eves, che Newton dimostrò forse un intuito più penetrante, mentre Leibniz prevalse nell'elaborazione formale dei nuovi concetti, aprendo la strada ad importanti sviluppi della teoria. Forse il calcolo infinitesimale non avrebbe avuto un avvio così interessante senza la felice interazione tra i due. Per avere un esempio semplice ma illuminante, basta ricordare che fu Newton a trovare le formule dei coefficienti dello sviluppo del binomio

$$(a+b)^n,$$

ma fu Leibniz a generalizzarle per il *multinomio*

$$(a + b + \cdots + n)^r.$$

Vero è che l'analisi matematica che oggi si impara nei licei scientifici reca, sia nei contenuti, sia nel linguaggio, le tracce inconfondibili dei contributi di entrambi i matematici. I loro punti di vista erano, in fondo, piuttosto diversi: più geometrico ed aritmetico quello di Leibniz, più meccanico ed astratto quello di Newton. Essi rispecchiano due aspetti distinti dello studio delle funzioni - quello basato sul calcolo algebrico e quello incentrato sul significato fisico - che coesistono tuttora nell'insegnamento e nella ricerca matematica avanzata.

La disputa tra Leibniz e Newton è testimoniata da un ricco carteggio; esso assume, qua e là, i toni della provocazione e della sfida matematica che ci riportano alla **controversia tra Ferrari e Tartaglia** di due secoli prima. Riportiamo alcuni brani significativi delle lettere.

Postilla di una lettera di Leibniz all'abate Conti, dicembre 1715

Ecco, Signore, la lettera di cui potrete fare l'uso che vorrete. Vengo subito alla questione che ci riguarda. Sono ben felice di sapervi in Inghilterra, dove potrete trarre gran vantaggio dal vostro soggiorno. Si

deve pur riconoscere che in codesto paese si trovano espertissime persone; esse però vorranno attribuire a sé tutte, o quasi, le scoperte, ma probabilmente non riusciranno nell'intento. Non risulta affatto, come ha giustamente dichiarato ***Bernoulli****, che* ***Newton*** *abbia scoperto prima di me la* ***caratteristica*** *e l'algoritmo infinitesimale, quantunque gli sarebbe stato facile pervenirvi se vi avesse pensato; come, d'altronde, se vi avesse pensato, sarebbe stato facilissimo ad* ***Apollonio*** *pervenire all'analisi di* ***Cartesio*** *sulle curve. Coloro che hanno scritto contro di me, attaccando senza ritegno la mia buona fede con interpretazioni forzate e infondate, non avranno il piacere di vedermi rispondere alle loro piccole ragioni di persone incapaci persino di servirsene bene, e che per di più si scostano dal fatto. La questione verte sul calcolo delle differenze, ed essi invece puntano tutto sulle* ***serie****, dove Newton indubbiamente mi ha preceduto. Ma anche io riuscii a trovare un metodo generale per le serie, che mi permise di non dover più ricorrere alle sue* ***estrazioni****. Avrebbero fatto meglio a dare le lettere per intero, come già fece, con il mio consenso,* ***Wallis****, che non ha avuto con me il minimo dissenso, contrariamente a ciò che quelle persone vorrebbero far credere al pubblico. Del Commercium epistolicum di Collins i miei avversari hanno pubblicato solo quello che credevano adatto alle loro maligne interpretazioni. Conobbi Collins nel mio secondo viaggio in Inghilterra; infatti nel primo (durato pochissimo perché ero venuto al seguito di un pubblico ministro) non avevo ancora la minima conoscenza di geometria superiore; e non avevo visto né sentito parlare del carteggio intercorso fra Collins e i signori Gregory e Newton, come lo dimostrano le mie lettere scambiate a quell'epoca con Oldenburg. Ma nel mio secondo viaggio Collins mi mostrò una parte del suo carteggio, e vi notai che Newton confessava la sua ignoranza su diverse cose, dichiarando fra l'altro di non essere ancora riuscito a trovare nulla sulla dimensione delle più famose curve, eccezion fatta per la* ***cissoide****. Ma si è soppresso tutto ciò, e sono addolorato che un uomo esperto come Newton si sia attirato il biasimo delle persone competenti, lasciandosi trascinare troppo dalle suggestioni di pochi adulatori, che volevano inimicarmelo. […]*

Per tastare un po' il polso ai nostri analisti inglesi, abbiate la bontà, Signore, di proporre loro questo problema: ***Trovare una linea curva BCD, che intersechi ad angoli retti tutte le curve di una stessa famiglia: per esempio tutte le iperboli AB, AC, AD aventi lo stesso vertice e lo stesso centro; e questo con un procedimento generale.***

Risposta dell'abate Conti a Leibniz, marzo 1716

Ho tanto tardato a rispondervi perché ho voluto unire alla mia lettera la risposta che Newton ha dato alla vostra postilla. Non voglio entrare in nessun particolare riguardo alla vostra disputa con Keill, o meglio con Newton. Posso dire solo ciò che ho visto con i miei occhi, ciò che ho letto e ciò che mi resta ancora da vedere e da leggere per poterne giudicare come si deve.

Ho letto con molta attenzione e senza la minima prevenzione il Commercium epistolicum, e l'opuscolo che ne contiene l'estratto. Alla Società Reale ho potuto vedere gli originali delle lettere pubblicate nel Commercium, una breve lettera scritta di vostro pugno a Newton, e il vecchio manoscritto che Newton inviò al dottor ***Barrow****, e che Jones ha da poco pubblicato.*

Da tutto questo ho tratto la conclusione che, togliendo alla disputa tutti gli elementi estranei, la questione si riduce a stabilire se sia stato Newton a trovare prima di voi il ***calcolo delle flussioni*** *o* ***infinitesimale****, o se siate stato voi a trovarlo prima di lui. Siete stato voi a pubblicarlo per primo, questo è vero; ma avete ammesso che Newton ve ne ha lasciato intravedere alcunché nelle lettere che ha scritto a Oldenburg e ad altri, come è diffusamente provato nel Commercium e nell'estratto che ne è stato fatto. Quale sarà la vostra risposta? Ecco ciò che manca ancora al pubblico per giudicare esattamente la questione.*

I vostri amici attendono con molta impazienza la vostra risposta, e sembra loro che non possiate dispensarvi dal rispondere se non a Keill almeno a Newton, che vi sfida espressamente come vedrete nella sua lettera.

Vorrei vedervi rappacificati. Il pubblico non trae nessun vantaggio da simili dispute e perde senza rimedio per molti secoli tutti i lumi che così gli vengono sottratti.

Sua Maestà ha voluto che l'informassi di ciò che è intercorso fra Newton e voi. Ho fatto del mio meglio, e vorrei con successo, in favore dell'uno come dell'altro.

Il vostro problema è stato risolto senza nessuna difficoltà in brevissimo tempo. Molti geometri a Londra e a Oxford ne hanno dato la soluzione, che è generale, estendendosi a ogni genere di curve, sia geometriche sia meccaniche*. Il problema è proposto un po' equivocamente, ma credo che Moivre non sbagli dicendo che si deve stabilire l'idea di una stessa famiglia di curve; supporre, per esempio, che* ***esse abbiano la stessa sottotangente nei punti aventi la stessa ascissa****; cosa che converrà non solo per le sezioni coniche, ma*

anche per infinite curve sia geometriche che meccaniche. Si potrebbero formulare altre supposizioni per stabilire questa idea…

(cit. da *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, a cura di G. Cantelli, Boringhieri, Torino 1958, pagg. 200-202 e 206-207)

La distinzione tra curve geometriche (costruibili per punti con riga e compasso) e meccaniche risale all'Antica Grecia. La sottotangente in un certo punto di una curva nel **piano cartesiano** è il segmento sull'asse delle ascisse delimitato dal punto di intersezione con la tangente e dal piede della perpendicolare condotta dal punto stesso.

Le annotazioni di Newton all'opera di Wallis

Nel brano che riportiamo, **Newton** riprende le osservazioni di **John Wallis** sui presunti limiti dell'algebra, che, secondo le sue testuali parole, *"presenta una cosa come possibile quando non lo è"*. Due sono gli esempi a supporto di questo giudizio. Il primo è dato dalla **formula di Cardano** per la **risoluzione delle equazioni di terzo grado** nel **caso irriducibile**, che tanto diede da pensare ai matematici fino al decisivo intervento di **Bombelli**. In questo caso l'equazione ha tre radici reali distinte, ma la formula richiede di estrarre la radice quadrata da numeri negativi, operazione impossibile nel campo dei numeri reali.

Il secondo esempio è la risoluzione di un problema, nel quale sono dati i numeri $ab=1$, $bc=2$ e $ac=4$ come lunghezze dei lati di un triangolo e si cerca la proiezione $x=dc$ del lato bc su ac. Applicando il **teorema di Pitagora** ai triangoli rettangoli adb e bdc, si trova che

$$bc^2 - dc^2 = ab^2 - ad^2,$$

essendo entrambi i membri uguali a bd^2. Dunque il quesito si traduce algebricamente nell'equazione

$$4 - x^2 = 1 - (4-x)^2,$$

che fornisce la soluzione $x=19/8$. L'algebra non sembra accorgersi che il problema è completamente mal posto: infatti non esiste un triangolo avente i lati assegnati, essendo $ac>ab+bc$, in palese violazione della disuguaglianza triangolare.

[5] *The resolution of cubick equations out of Dr Wallis in his dedication before Meibomius confuted.*(117)

suppose $x = \mathcal{8}\, a \,\mathcal{8}\, e$. yn $x^3 = \mathcal{8}\, a^3 \,\mathcal{8}\, 3aae \,\mathcal{8}\, 3aee \,\mathcal{8}\, e^3$. or $x^3 = +3aex \,\mathcal{8}\, a^3 \,\mathcal{8}\, e^3$. that is making $a^3+e^3=q$. $+3ae=p$. yn $x^3=+px \,\mathcal{8}\, q$.

Againe suppose $x=a-e$.(118) yn $x^3=a^3-3aae+3aee-e^3$. yt is making $a^3-e^3= \mathcal{8}\, q$. & $3ae=p$, yn $x^3=-px \,\mathcal{8}\, q$.(119)

Then in the first of these $p=3ae$. or $\frac{p}{3e}=a$. or $\frac{p^3}{27e^3}=a^3=q-e^3$. Therefore $e^6=qe^3-\frac{p^3}{27}$. & $e^3=\frac{1}{2}q \,\mathcal{8}\, \sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{p^3}{27}}$. & by ye same reason $a^3=\frac{1}{2}q \,\mathcal{8}\, \sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{p^3}{27}}$. where ye irrationall quantitys have divers signes otherwise $a^3+e^3=q$ would bee false. Soe that

$$x= \mathcal{8}\, a \,\mathcal{8}\, e= \mathcal{8}\, \sqrt{c: \frac{1}{2}q \,\mathcal{8}\, \sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}} \,\mathcal{8}\, \sqrt{c: \frac{1}{2}q \,\mathcal{8}\, \sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

is a rule for resolving ye equation $x^3 * -p[x] \,\mathcal{8}\, q=0$, when it hath but one

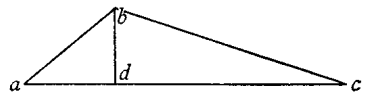
roote y^t is when it may be generated according to the supposition $x = \text{♉}\, a \,\text{♉}\, e$. &c. By y^e same reason $x^{3*} + px \,\text{♌}\, q\,[=0]$ may be resolved by this rule

$$x = a - e = \sqrt{c : \frac{1}{2} q \,\text{♉}\, \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \sqrt{c : \frac{1}{2} q \,\text{♌}\, \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}.$$ (120)

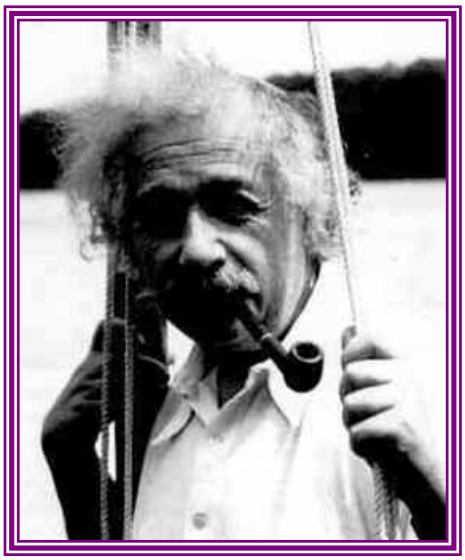
But here observe y^t Dr Wallis would Argue y^t since in the first of these two cases sometimes (viz when y^e equation hath 3 reall rootes) y^e rule faileth(121) as if it were impossible for y^e equation to have rootes when yet it hath, therefore y^e fault is in Algebra. & therefore when Analysis leads us to an impossibility wee ought not to conclude y^e thing absolutely impossible, untill wee have tryed all y^e ways y^t may bee.(122)

But let me answer y^t y^e fault is not in y^e Analysis in this example, but in his opperation. for when y^e equation $x^3 * + px \,\text{♉}\, q = 0$. hath 3 roots hee supposeth it to have but one roote viz[:] $x = \text{♉}\, a \,\text{♉}\, e$. but since y^e equation cannot be then generated according to y^t supposition it is impossible it should be re[s]olved(123) by it.(124)

In like manner hee sayeth(125) y^t Algebra representeth a thing possible when tis not so as in this example,(126) in y^e $\triangle abc$, make $ab = 1$. $bc = 2$. $ac = 4$. Then to find $dc = x$, worke thus, $ad = 4 - x$. $bd \times bd = 1 - 16 + 8x - x^2 = 4 - x^2$. therefore $8x = 19$. or $x = \frac{19}{8}$.(127) In wch opperacon all things proceede as possible though they are not soe for ac is greater y^n $ab + bc$.(128)



Albert Einstein (Ulm, Germania, 1879 – Princeton, USA, 1955)



Nato da una famiglia di ebrei tedeschi, divenne cittadino svizzero, e successivamente, assunse anche la nazionalità americana.
Gli inizi della sua carriera furono stentati, ma nel 1905 riuscì a conseguire il dottorato grazie a studi compiuti autonomamente: a quell'epoca Einstein era impiegato presso l'ufficio brevetti di Berna, ma vantava già una serie di pubblicazioni di fisica teorica, scritte durante il tempo libero. Il 1905 fu un anno particolarmente fruttuoso per Einstein, che diede alle stampe importantissimi risultati relativi a diverse branche della fisica. In meccanica statistica le sue osservazioni sul moto disordinato delle molecole in un fluido **(moto browniano)** fornirono la prima prova dell'esistenza degli atomi. Egli formulò, inoltre, la **teoria della relatività speciale**, che sarebbe confluita, nel 1916, nella **teoria della relatività generale**, e pubblicò un lavoro sull'**effetto fotoelettrico**, che conteneva l'idea dell'**equivalenza massa-energia** e confermava la natura corpuscolare della luce. Fu quest'ultimo studio a valergli il Premio Nobel per la Fisica, conferitogli nel 1921.

Einstein insegnò alle Università di Berna, di Praga, di Berlino e di Princeton, dove si stabilì definitivamente in seguito all'avvento al potere di Hitler.

La sua vita fu ricca di viaggi e di importanti riconoscimenti internazionali. A conferma della grande popolarità raggiunta, nel 1952 gli venne persino offerta la presidenza dello stato d'Israele.

Il suo impegno politico conobbe due importanti momenti, apparentemente di segno opposto. Nel 1943 fu tra i firmatari di una lettera che invitava il presidente Roosevelt a promuovere le ricerche nucleari. Nel 1955, poco prima di morire, fece pervenire a **Bertrand Russell** la sua adesione al manifesto per la messa al bando delle armi atomiche. Il suo pacifismo di fondo si era, del resto, già rivelato durante la Prima Guerra Mondiale.

Einstein fece uso di strumenti matematici avanzati: mentre la meccanica classica si avvale della **geometria euclidea**, la teoria della relatività è basata sulla **geometria riemanniana**.

Egli fu anche autore di opere destinate ad un pubblico di non specialisti. Ne ricordiamo due: *Relatività, esposizione divulgativa* (1917) e *Pensieri degli anni difficili* (1955).

Einstein scrive di Newton

Einstein commemora Emmy Noether

La teoria della relatività

Le origini

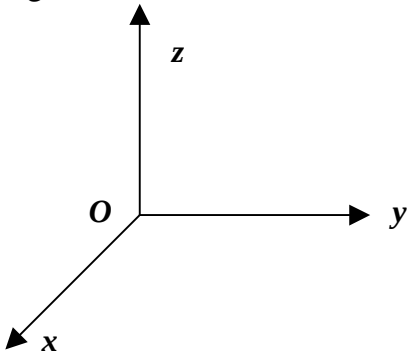
Il concetto di relatività in fisica comincia ad assumere contorni distinti nel Seicento, con **Galilei**, che per primo intuisce l'equivalenza tra sistemi di riferimento che siano, l'uno rispetto all'altro, in moto rettilineo uniforme oppure in quiete. I fenomeni fisici che hanno luogo all'interno della stiva di una nave, che scivoli sul mare con velocità costante e senza beccheggiare, sarebbero soggetti alle stesse leggi di quelli che avvengono sulla terraferma: l'osservatore non potrebbe decidere, sulla base di quello che gli accade intorno, se la nave stia ferma oppure si muova.

Tra tutti i sistemi di riferimento si distinguono quelli in cui vale il ***principio d'inerzia***: un corpo su cui agisca una forza nulla, resta in quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme. Galileo diceva:

"A principiare il moto è ben necessario il movente, ma a continuarlo basta a non haver contrasto."

La nostra formulazione è invece ripresa dalla ***prima legge del moto***, enunciata da **Newton** nel Libro I dei suoi ***Principia***. L'esperienza suggerì ai primi fisici dell'epoca moderna che sistemi di riferimento siffatti - detti *sistemi inerziali* - dovessero esistere: erano tutti quelli *solidali* con il cielo delle stelle fisse. In tutti questi valgono le stesse leggi meccaniche. Il moto di un corpo apparirà però in maniera diversa in due sistemi di riferimento che si muovano l'uno rispetto all'altro. Un topolino che il capostazione vede fermo sulla banchina di una stazione ferroviaria sfilerà, invece, con una certa velocità non nulla davanti agli occhi di un passeggero di un treno in transito.

Il moto di un corpo nello spazio può essere descritto con formule matematiche. Un osservatore che veda l'evoluzione di un punto materiale nello spazio può descriverla fissando un **sistema di coordinate cartesiane** *x,y,z,*



ed una misura del tempo, che chiameremo *coordinata temporale t.* Quest'ultima individua ogni istante indicando il tempo che è passato da un certo istante di riferimento $t_0=0$, fissato per convenzione. La posizione in cui si trova il punto materiale ad ogni istante *t*, è individuata dai valori - variabili ad ogni istante - *x,y,z* delle sue tre coordinate spaziali: essi sono legati al valore di *t* da una funzione

$$f: t \rightarrow (x(t), y(t), z(t)).$$

Il moto del corpo è quindi completamente descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

Queste equazioni saranno, in generale, diverse per un qualunque altro osservatore: anzitutto questo sceglierà un sistema di coordinate cartesiane differente, che sia in quiete rispetto a lui, e sarà libero di fissare in maniera diversa l'origine dell'ascissa temporale. Nell'esempio della stazione immaginiamo che il sistema di coordinate del capostazione abbia origine nel punto in cui si trova il topolino e che l'asse delle ascisse sia parallela al binario, e concorde al movimento del treno. Possiamo supporre che l'asse delle ascisse del passeggero abbia la stessa direzione e lo stesso verso. Inoltre assumiamo che entrambi gli osservatori abbiano scelto come istante iniziale quello in cui il topolino transita per l'origine del sistema di coordinate del passeggero. Sia v la velocità del treno. Da quell'istante in poi, e fintantoché il topolino starà fermo, le equazioni del moto del topolino per il capostazione saranno

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

e per il passeggero

$$\begin{aligned} x' &= -vt \\ y' &= 0 \\ z' &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Dunque la relazione tra le coordinate spazio-temporali *x, y, z, t* del capostazione e quelle *x', y', z', t'* del passeggero è data dalle equazioni:

(a) $x' = x - vt$
(b) $y' = y$
(c) $z' = z$
(d) $t' = t$

Queste vengono dette *equazioni del cambiamento di sistema di riferimento.* Esse rimangono valide anche nel momento in cui il topolino comincia a muoversi: allora cambieranno le (1) e le (2), ma esse continueranno ad essere legate dalle identità (a)-(d). Queste ultime esprimono, infatti, il legame esistente tra i due sistemi di riferimento, e sono, quindi, indipendenti dal particolare moto osservato. Pertanto esse possono essere utilizzate per determinare le equazioni del moto rispetto all'osservatore-passeggero a partire da quelle valide per l'osservatore-capostazione. Se, ad esempio, il topolino, anziché stare fermo, si muovesse lungo l'asse delle ascisse con velocità w nel verso in cui avanza il treno, a partire dall'istante zero le equazioni del moto per il capostazione sarebbero

$$x = wt$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$

Le equazioni per il passeggero si ricavano allora per sostituzione dalle (a)-(d):

$$x' = (w-v)t$$
$$y' = 0$$
$$z' = 0$$

Esse ci dicono che il topolino, per il passeggero, si muove con velocità $w-v$: e ciò non ci stupisce. Il topolino, agli occhi del passeggero, appare più lento o pare addirittura indietreggiare, se la sua velocità è minore di quella del treno: in quest'ultimo caso $w-v<0$ indica una velocità parallela al treno, ma diretta in senso opposto. Abbiamo appena visto una facile applicazione del principio di composizione delle velocità, che è il vero fulcro della relatività galileiana-newtoniana.

La **meccanica classica**, di cui abbiamo appena visto i principali aspetti della trattazione matematica, è fondata su tre presupposti, che fino all'Ottocento erano considerati naturali e irrinunciabili:

1. Lo spazio in cui avvengono i fenomeni fisici è quello della **geometria euclidea**.

2. Le distanze sono le stesse per tutti gli osservatori (**principio dello spazio assoluto**).

3. La misura del tempo è la stessa per tutti gli osservatori (**principio del tempo assoluto**).

Il punto 3 corrisponde all'identità (d), il punto 2 si deduce, nel nostro esempio, con semplici passaggi algebrici. Immaginiamo che sulla banchina sia collocato un righello, lungo l'asse delle ascisse del sistema di coordinate del capostazione. Siano x_1 e x_2 (ove x_1 è minore di x_2) le ascisse degli estremi del righello. La lunghezza del righello per il capostazione è allora $d = x_2 - x_1$. Se il passeggero calcola la lunghezza del righello in un generico istante t, in virtù della (a) trova ugualmente:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - vt) - (x_1 - vt) = x_2 - x_1 = d.$$

La relatività ristretta

Nella *teoria della relatività* sviluppata da **Einstein** agli inizi del Novecento, i principi 2 e 3 furono i primi a cadere. Nella teoria della ***relatività ristretta*** spazio e tempo cessano di essere assoluti: essi variano da un osservatore all'altro e le coordinate spazio-temporali cambiano secondo la cosiddetta ***trasformazione di Lorentz***, una particolare **isometria** dello spazio-tempo. Le isometrie dello spazio-tempo formano un gruppo di trasformazioni, detto ***gruppo di Poincaré***.

Le identità (a)-(d) vanno sostituite dalle seguenti, in cui c è la velocità della luce.

(a)' $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(b)' $$y' = \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(c)' $$z' = \frac{z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(d)' $$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Da queste è possibile ottenere le equazioni inverse, che esprimono *x, y, z, t* in funzione di *x′, y′, z′, t′.*

(a)" $$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(c)" $$z = \frac{z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(b)" $$y = \frac{y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(d)" $$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Supponiamo che il passeggero osservi il righello all'istante *t′=0.* Le ascisse degli estremi del righello nel sistema di riferimento del passeggero si ricavano dalla (a)"e dalla (d)". Si trova che

$$x'_2 - x'_1 = (x_1 - x_2)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Il moto del passeggero provocherebbe dunque una ***contrazione delle lunghezze***. Come si può facilmente verificare, un'altra conseguenza è la ***dilatazione dei tempi***: due eventi che hanno luogo sulla banchina saranno separati, per il passeggero, da un lasso di tempo maggiore che per il capostazione. In particolare, il passeggero vedrà le lancette dell'orologio della stazione girare più lentamente di quelle del suo orologio da polso.

Ricordiamo, però, che *c = 300.000 km/s*. Nei fenomeni macroscopici che possiamo osservare sulla Terra, la velocità *v* è, naturalmente, una

piccolissima frazione di *c*. Dunque il valore di v/c è molto vicino allo zero, e lo sono, ancor di più, i valori di v/c^2 e v^2/c^2. Essi si possono allora trascurare: nessuna misurazione compiuta sul moto di un topolino, di un corridore, di un'auto è in grado di rivelare la minuscola differenza. Se omettiamo quei termini dalle (a)'-(d)' riotteniamo le (a)-(d): la meccanica classica non risulta dunque inficiata dalla teoria di Einstein. Quest'ultima dà, al contrario, una conferma della fondatezza della prima, sia pure con ottima approssimazione: allo stesso tempo, però, ne limita il campo di validità ai fenomeni terrestri che coinvolgano velocità molto inferiori a quelle della luce.

Le trasformazioni di Lorentz suggeriscono, indirettamente, un importante corollario della teoria della relatività ristretta: la presenza del radicando $1 - v^2/c^2$ a denominatore presuppone che questa differenza non possa mai divenire negativa o nulla. Ciò significa che, nei fenomeni meccanici, la velocità v è sempre inferiore a quella della luce. Resta da chiedersi cosa succeda applicando la trasformazione di Lorentz alla propagazione della luce, cioè per $v=c$. Tornando all'esempio, immaginiamo che il capostazione accenda un torcia elettrica e la diriga lungo l'asse delle ascisse, nel verso in cui procede il treno. In questo caso la prima delle equazioni (1) diventa

$$x = ct.$$

Sostituendo questa espressione nella (a)' e nella (d)' si ottengono le identità:

$$x' = \frac{(c-v)t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{(1-\frac{v}{c})t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

da cui, infine:

$$x' = ct'$$

Abbiamo appena dimostrato che, contrariamente a quanto avveniva per il topolino, la velocità della luce è uguale a *c* anche per il secondo osservatore. In altri termini: alla luce non si applica il principio di composizione delle velocità.

La relatività generale

La relatività ristretta, come quella galileiana-newtoniana, riguarda solo i riferimenti inerziali, o comunque, solo coppie di riferimenti che si muovano, l'uno rispetto, all'altro, di moto rettilineo uniforme. Nessuna delle due costituisce dunque una teoria fisica soddisfacente. Per formulare una teoria che abbracci tutti i possibili sistemi di riferimento, Einstein si vede costretto a rinunciare anche al caposaldo 1: in un sistema di riferimento qualunque le coordinate non saranno necessariamente quelle dello spazio euclideo *(x,y,z)* con l'aggiunta dell'ascissa temporale *t*. Lo saranno solo localmente, in piccole regioni, in cui il campo gravitazionale può essere considerato uniforme. In generale esse verranno sostituite dalle ***coordinate gaussiane*** x_1, x_2, x_3, x_4 di una **varietà Riemanniana** di dimensione 4. Questa rappresenta l'intero universo, e la sua forma è determinata dalla distribuzione di materia. Due osservatori diversi adotteranno, su questa varietà, due diversi sistemi di coordinate gaussiane: le equazioni che esprimono le leggi fisiche rispetto alle coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 rimarranno valide se a queste ultime si sostituiranno le coordinate x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 di un altro osservatore. Viene a cadere la distinzione tra coordinate spaziali e temporali, la quaterna delle coordinate non è che un'espressione matematica per indicare un evento, le singole coordinate perdono ogni valenza fisica oggettiva e possono essere liberamente scambiate. Inoltre, i valori che esse assumono non sono necessariamente numeri reali: possono variare in tutto il campo dei **numeri complessi**.

Una proprietà delle coordinate gaussiane è la seguente: dati due eventi (x_1, x_2, x_3, x_4) e $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3, x_4+dx_4)$, ove i valori di dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 sono molto piccoli ("infinitesimi"), la loro *distanza*

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^3 + dx_4^2$$

anch'essa infinitesima, è costante in ogni sistema di riferimento. Se (x, y, z, t) e (x', y', z', t') sono le coordinate spazio temporali di due sistemi di riferimento inerziali della teoria della relatività ristretta, allora la proprietà è verificata dalle quaterne di coordinate

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \boldsymbol{i}ct$$
$$x'_1 = x, \quad x'_2 = y, \quad x'_3 = z, \quad x'_4 = \boldsymbol{i}ct',$$

dove $\boldsymbol{i}$ è l'unità immaginaria. Ecco allora che, nel modello matematico della relatività generale, l'ascissa temporale della relatività ristretta viene ad assumere tutti valori immaginari.


= i

Le serie numeriche

Quasi tutti coloro che hanno avuto modo di dare un'occhiata ad un testo matematico avanzato conoscono il significato del simbolo

$$\sum_{i=1}^{8} a_i$$

che è una scrittura abbreviata per indicare la somma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

Se il numero degli addendi è indeterminato, lo si indica con una lettera, ad esempio *n*, e si scrive

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Nei testi compare, però, anche una scrittura più misteriosa, che fa pensare che gli addendi siano infiniti:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

L'aritmetica non consente di effettuare questo tipo di operazione. Il significato del simbolo, in effetti, è un altro, e proviene dal **calcolo infinitesimale**, e più precisamente, dal **concetto di limite**. Si definisce, infatti,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

dove la somma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

prende il nome di ***n-esima somma parziale***.
Il limite si dice ***somma della serie***, e può anche non esistere, come nel caso della serie

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}$$

ossia

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots.$$

In effetti le somme parziali valgono, alternatamente, *1* e *0*. Una serie siffatta si dice ***indeterminata***.
I primi analisti, come **Eulero** e **Jakob Bernoulli**, avevano però tutt'altra convinzione: non credendo possibile che una serie non avesse somma, addussero vari argomenti a favore della tesi che la somma fosse uguale ad ½.
Bernoulli non ebbe remore ad applicare la proprietà associativa della somma alla serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots.$$

Chiamando *S* la somma di questa serie, sul cui valore i matematici dell'epoca avevano pareri discordanti, Bernoulli osservò che da un lato

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots.,$$

dall'altro

$$1 - S = 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 1 + 1 - 1 - \ldots..$$

Ne dedusse che

$$S = 1 - S,$$

cioè $S = 1/2$. Ciò concordava perfettamente col fatto che le somme parziali di indice pari sono uguali a *0*, quelle di indice dispari sono uguali a *1*, e $1/2$ è la media aritmetica dei due numeri.

Il matematico italiano Guido Grandi si sbizzarrì invece con la serie

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots..$$

Questa espressione della funzione razionale fratta a primo membro era stata ottenuta per i valori di x strettamente compresi fra -1 e 1.

Estendendo il principio di identità dei polinomi a serie infinite di potenze, egli concluse che due funzioni algebriche coincidenti su di un intervallo dovevano coincidere ovunque, e, con molta disinvoltura, sostituì alla x i valori -2 e -1, trovando, rispettivamente:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots.$$

e

$$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

Sostituendo valori maggiori di -1 la somma è invece sempre maggiore di zero.
Eulero arrivò a giustificare questa contraddizione asserendo che l'infinito, di cui ancora non era stata determinata la natura, potesse essere visto come una sorta di separatore tra i numeri negativi e quelli positivi. In effetti, sostituendo valori maggiori di -1 la somma della serie è sempre maggiore di zero.

Bernoulli ed Eulero condividevano una certezza di fondo, che è il tacito presupposto delle loro argomentazioni: le somme infinite, al pari di quelle finite, sono sempre uguali ad un numero, eventualmente infinito. Eulero, in particolare, non ammetteva che una serie potesse divergere, o essere indeterminata. Egli le considerava oggetti naturali, in quanto parti di problemi fisici, e perciò credeva fermamente, come dice E. T. Bell, che esse non potessero "fare alcun male". Questa posizione è, curiosamente, antitetica rispetto a quella di **Zenone di Elea**: la contraddittorietà del **paradosso di Achille e della tartaruga** nasce proprio dalla convinzione che la somma di infiniti addendi non possa essere uguale ad una grandezza finita.

La somma di una serie può anche esistere, ma non essere uguale a nessun numero reale. In tal caso è uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$, come negli esempi seguenti:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots. = +\infty$$

$$-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \ldots. = -\infty$$

Una serie di questo tipo si chiama ***divergente***. È divergente – pur se questo fatto non è altrettanto evidente - anche la ***serie armonica***, studiata da **Leibniz**:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

Infine, quando la somma di una serie esiste ed è pari ad un numero reale, la serie si dice ***convergente***:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} = \frac{\pi}{4}$$

Il secondo di questi esempi è ottenuto a partire dalla **serie logaritmica**, che fu scoperta da **Newton**. Il terzo è una delle tante serie notevoli nella cui somma compare π. Un'altra di queste è dovuta a **Leibniz**:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots$$

Un'altra serie di questo tipo fu invece trovata da Eulero.

Leibniz e **Cauchy** introdussero importanti criteri di convergenza per le serie.

Il matematico tedesco dell'Ottocento **Leopold Kronecker**, grande avversario di **Cantor** e del **concetto d'infinito**, rifiutava l'uso delle serie, giustificandosi così:

"Il concetto generale di serie infinita in sé, per esempio quello di serie di potenze, è, a mio giudizio, ammissibile solo con la riserva che in ogni caso particolare la regola aritmetica con la quale i termini sono dati soddisfi condizioni che rendano possibile trattare le serie come se fossero finite, in modo che non sia necessario, in senso stretto, andare al di là della nozione di serie finita."

In realtà alle serie non si applicano, in generale, le stesse regole valide per le operazioni aritmetiche tra numeri. Estendere queste ultime alle serie produce plateali contraddizioni, come mostrano certe **osservazioni** di Eulero e Bernoulli. Ciò spinse il giovane matematico norvegese **Abel** a dichiarare:

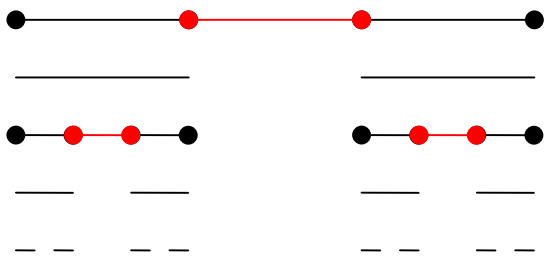
“Le serie divergenti sono un’invenzione del demonio, ed è una vergogna basare su di esse una qualunque dimostrazione. Usandole, si può giungere a qualsiasi conclusione si voglia, e per questo hanno prodotto tante fallacie e paradossi…”

I frattali

Il termine ***frattale*** compare per la prima volta nella tesi di dottorato discussa da **Benoît Mandelbrot** a Parigi nel 1952.

Il frattale è solitamente costruito tramite un processo iterativo applicato indefinitamente.

Un semplice esempio è dato dall'***insieme di Cantor***. Dato un segmento, lo si divide in tre parti uguali, e si elimina quella centrale. Si ottengono quindi due segmenti: a ciascuno di essi si applica il procedimento appena descritto, ripetendolo su ogni nuovo segmento ottenuto.



L'insieme di Cantor è il limite di questo procedimento.

Altri esempi sono il ***fiocco di neve*** e il ***crivello di Sierpinski***, entrambi ottenuti da un triangolo.

La particolarità di questi insiemi, di cui possiamo solo vagamente intuire la forma, riguarda la loro dimensione. Sappiamo che un arco di curva è un oggetto di dimensione *1*, una porzione di piano delimitata da una curva è un oggetto di dimensione *2*, mentre un solido, come una sfera piena, è un oggetto di dimensione *3*. La dimensione è, intuitivamente, il numero di misure che determinano l'estensione dell'oggetto: la sola lunghezza nel caso di una linea, lunghezza e larghezza nel caso di una figura piana, lunghezza, larghezza e profondità per una figura solida. Ci ricordiamo di questo numero quando, ad esempio, ci viene chiesto di determinare l'estensione di un oggetto dopo aver modificato le sue misure di un dato fattore *c*. Se la lunghezza di un segmento va semplicemente moltiplicata per *c*, l'area di un quadrato va moltiplicata per c^2, il volume di un cubo per c^3. Il discorso si estende a linee, figure e corpi di qualsiasi forma. Prendiamo ad esempio una figura piana dai contorni quanto si voglia irregolari. Immaginiamo di ricoprirla tutta con *N* quadratini. Immaginiamo ora di dimezzare il lato dei quadratini. La loro area sarà dunque divisa per *4*. Per ricoprire la

figura saranno ora necessari $4N$ quadratini. In generale, se c è un numero maggiore di 1, e dividiamo il lato dei quadratini di partenza per c, saranno necessari circa c^2N nuovi quadratini per ricoprire la figura (la parola "circa" è d'obbligo, visto che c^2N, in generale, non sarà un numero intero). L'esponente 2 corrisponde alla dimensione della figura considerata: troveremmo rispettivamente gli esponenti 1 e 3 se l'oggetto in esame avesse dimensione 1 o 3.

Applichiamo ora lo stesso ragionamento all'insieme di Cantor. Questo è formato da segmenti di una retta, quindi lo si direbbe un oggetto di dimensione 1. Immaginiamolo inizialmente coperto da N segmentini. Dividiamo quindi per c le loro lunghezze. I calcoli – che non riportiamo per brevità - ci mostrano che saranno necessari circa

$$Nc^{\log 2/\log 3}$$

nuovi segmentini per coprire l'insieme! Quest'ultimo, quindi, non può avere dimensione 1, né tantomeno 2 o 3. Per coerenza con quanto osservato sopra, bisogna invece assumere l'esponente $\log 2/\log 3$ (un numero irrazionale!) come dimensione dell'insieme di Cantor.

Il fatto che l'insieme di Cantor non possa avere dimensione 1 emerge, però, anche da altre considerazioni. Un oggetto di dimensione 1 contenuto in un segmento ha sempre lunghezza pari ad un numero positivo, minore o uguale alla lunghezza del segmento che lo contiene. Come tra poco vedremo, ciò non avviene, invece, nel caso dell'insieme di Cantor. L'insieme costruito al generico passo k-esimo è formato da 2^k segmenti di lunghezza $1/3^k$, quindi ha una lunghezza complessiva pari a

$$L_k = 2^k/3^k.$$

La lunghezza dell'insieme di Cantor è il limite di queste lunghezze per k tendente ad infinito, ma:

$$\lim_{k\to\infty} L_k = 0$$

Quindi l'insieme di Cantor ha lunghezza nulla. Ciò suggerisce che la sua dimensione debba essere minore di 1. D'altra parte essa non può essere zero: gli unici oggetti di dimensione zero sono gli insiemi di punti "distanti", mentre l'insieme di Cantor è costituito da segmenti. Appare dunque naturale assegnare a questo insieme una dimensione compresa fra 0 ed 1, come, appunto $\log 2/\log 3$.

Il fiocco di neve ha dimensione compresa fra *1* e *2*, come anche il crivello di Sierpinski. Ciò è perfettamente compatibile col fatto che entrambi gli oggetti hanno contorni di lunghezza infinita, ma area nulla.

Gli insiemi di Mandelbrot e di Julia

Esistono tipi di frattali nel piano particolarmente suggestivi dal punto di vista estetico e dal significato matematico illuminante e profondo. Sono interessanti anche perché si prestano ad essere realizzati al computer con programmi molto semplici.

Il procedimento si svolge nel **piano di Gauss**, i cui punti corrispondono alla totalità dei numeri complessi. Fissato un numero complesso c, si consideri la funzione di una variabile complessa

$$F_c(x) = x^2 + c.$$

Si scelga un numero complesso x_0, e si calcolino i valori

$$F_c(x_0),\ F_c(F_c(x_0)),\ F_c(F_c(F_c(x_0))),\ \ldots.\ F_c^n(x_0),\ldots \qquad (*)$$

dove $F_c^n(x)$ indica la funzione ottenuta applicando n volte la funzione $F_c(x)$, per ogni intero positivo n. La successione (*), a seconda del valore di x_0, può tendere ad infinito, oppure rimanere limitata: questo secondo caso si verifica se essa rimane costante, o assume ciclicamente gli stessi valori, oppure converge verso un determinato numero complesso x_1. Ogni punto x_1 siffatto si dice un attrattore. L'insieme dei valori di x_0 per i quali la (*) converge verso x_1 si dice *bacino di attrazione* di x_1. L'insieme dei punti per i quali (*) diverge è detto il bacino di attrazione di ∞, che chiameremo $A(\infty)$. Per ogni valore di c sia J_c la frontiera di $A(\infty)$, ossia l'insieme dei punti che delimitano questa regione del piano. ***L'insieme di Mandelbrot*** è definito come l'insieme dei numeri c per i quali l'insieme J_c è *connesso*: questa è una proprietà topologica, che potremmo descrivere, intuitivamente, dicendo che essa corrisponde, grosso modo, al fatto che un insieme occupa una regione continua del piano.

Le frontiere J_c prendono il nome di *insiemi di Julia*, dal nome del matematico francese **Gaston Julia** che, insieme a **Pierre Fatou**, li studiò, all'inizio di questo secolo, in un contesto più generale. Egli

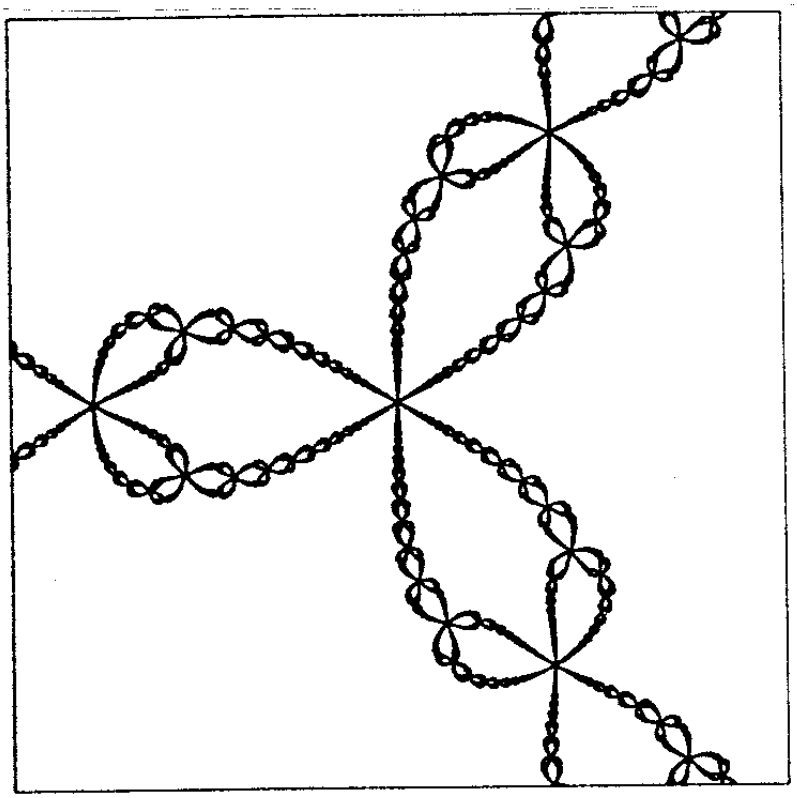
considerò la generica funzione razionale, ossia una funzione della forma

$$F(x) = P(x)/Q(x),$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi. Sia, ad esempio,

$$F(x) = (2x^3+1)/3x^2.$$

Le tre radici cubiche dell'unità sono attrattori per $F(x)$. Le frontiere dei rispettivi bacini di attrazione formano l'insieme di Julia rappresentato in figura.



La funzione $F(x)$ non è stata scelta a caso. Essa si ottiene applicando il metodo di **Newton** - Raphson, detto anche *metodo delle tangenti*, alla funzione binomia

$$N(x) = x^3 - 1.$$

Questo metodo è un algoritmo finalizzato a determinare, per approssimazioni successive, gli zeri di una funzione derivabile indefinitamente. Con le notazioni introdotte sopra, detta x_0 la prima

approssimazione di uno zero, l'approssimazione successiva è (ove definita):

$$x_1 = x_0 - N(x_0)/ N'(x_0) = F(x_0).$$

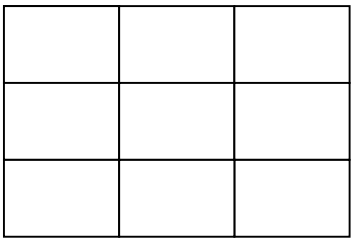
L'approssimazione k-esima sarà:

$$x_k = x_{k-1} - N(x_{k-1})/ N'(x_{k-1}) = F^k(x_0).$$

Per determinati valori di x_0 la successione x_k converge ad uno zero della funzione $N(x)$, cioè ad una radice cubica dell'unità. Questi valori sono precisamente quelli che occupano, nel piano di Gauss, le regioni delimitate dall'insieme di Julia raffigurato.

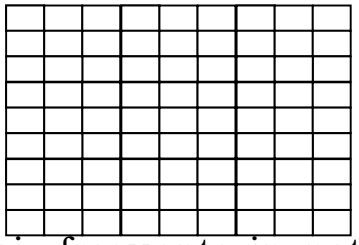
Frattali autosimili

Una figura è detta ***autosimile*** se si può decomporre in un numero finito di figure che le sono simili. Ciò è sicuramente vero per il quadrato, che può essere decomposto in quattro quadrati uguali, e più, in generale, per ogni rettangolo. La figura mostra il caso in cui $n=3$:



Non è invece autosimile il cerchio.

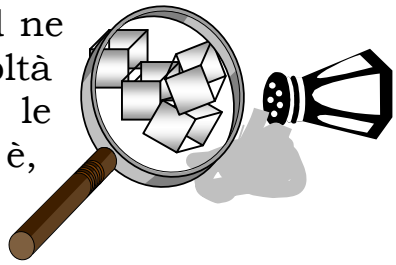
Chiaramente, le figure in cui viene decomposta una figura autosimile sono allora volta autosimili e possono essere decomposte in maniera analoga: il procedimento può essere ripetuto all'infinito. Ne scaturisce un oggetto la cui struttura "fine" riproduce esattamente la forma esterna.



È questo un fenomeno assai frequente in natura: i cristalli di certi sali hanno la stessa forma delle loro molecole, la disposizione delle

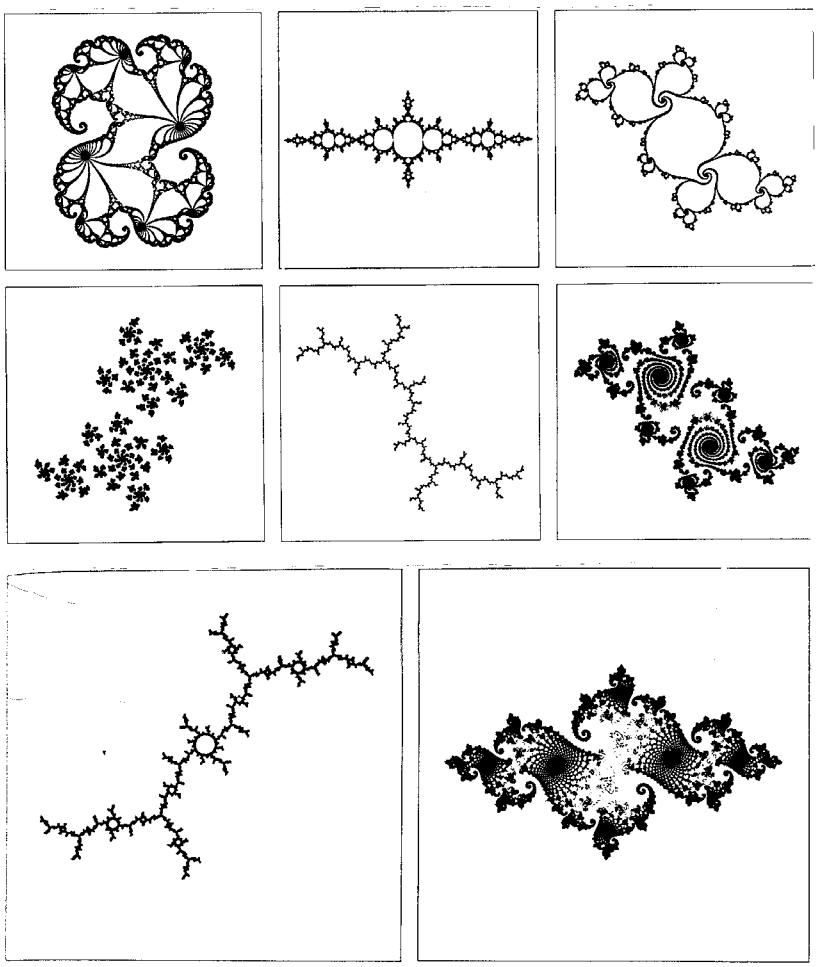
foglie lungo i rami di alcune piante imita quella dei rami lungo il fusto, e così via.



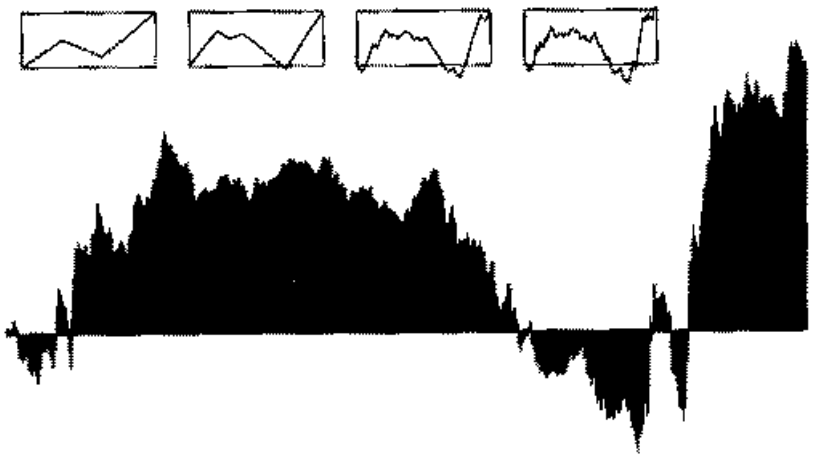


Come osserva Jacques Monod ne *Il caso e la necessità*, la facoltà di riprodurre esternamente le proprie forme interne è, incredibilmente, comune al mondo organico e a quello inanimato.

Molti frattali sono autosimili. Lo sono l'insieme di Cantor, molti **frattali poligonali** e tutti gli insiemi di Julia relativi all'insieme di Mandelbrot, di cui vediamo alcuni in figura:



L'autosimilitudine può essere espressa matematicamente come invarianza rispetto a quelle particolari trasformazioni geometriche che sono le *similitudini:* una similitudine è composta da una rotazione, una traslazione e da una omotetia (dilatazione o riduzione secondo un certo fattore).



Non tutti i frattali sono autosimili.
Ciononostante i frattali sono concepiti da Mandelbrot come oggetti la cui struttura *"è invariante per riduzione e dilatazione"*. In effetti questo principio può essere espresso da una classe di trasformazioni più generali rispetto alle similitudini: le ***affinità***. In queste la dilatazione o riduzione può avvenire, nelle diverse direzioni, secondo fattori diversi. Ad esempio, un'affinità del **piano cartesiano** è quella che dilata le figure in maniera differente nel senso dell'asse delle ascisse e in quello dell'asse delle ordinate. Dati due segmenti non paralleli agli assi coordinati è sempre possibile trovare un'affinità siffatta che trasformi uno nell'altro. Un grafico come quello raffigurato, che rappresenta le **oscillazioni del prezzo di un bene di consumo**, può essere ottenuto attraverso un processo iterativo, che sostituisce ad un segmento obliquo una linea spezzata formata da più segmenti obliqui. Le sue parti "macroscopiche" vengono dunque sostitute da parti più piccole ad esse affini. Esso gode dunque della proprietà di ***autoaffinità***, che lo identifica come un particolare frattale.

Le origini

Mandelbrot, in uno dei suoi scritti, ripercorre la nascita di questa idea innovativa:

*"Perché la geometria ereditata da **Euclide** merita spesso di essere qualificata come "fredda" ed "arida"? In parte, perché essa non saprebbe descrivere la forma di una cronaca finanziaria, di una nuvola, di una montagna, di una costa o di un albero. Le cronache finanziarie non sono né delle oscillazioni periodiche, né delle rette ascendenti o discendenti che rappresentino delle "tendenze"; le nuvole non sono sfere; le montagne non sono coni; le coste delle isole non sono cerchi; la corteccia di un albero non è un cilindro; e il fulmine non cade in linea retta.*

Solo i pittori l'hanno sempre saputo, ed ***Eugène Delacroix*** *(1798-1863) l'ha detto molto bene a proposito dell'architettura: "Tutto vi è idealizzato dall'uomo: la linea retta stessa è una sua invenzione, poiché non è da nessuna parte in natura." […]*

Più in generale, fin dall'inizio della mia carriera scientifica, sono giunto alla conclusione che numerose forme del reale sono irregolari o frammentate a tal punto, che la complessità della Natura supera in modo non quantitativo ma qualitativo tutto quanto è ammesso dalla geometria di Euclide. Un piccolo numero di lunghezze significative distinte basta per caratterizzare un intervallo oppure un cerchio, ma per gli oggetti naturali, questo numero è così grande che è praticamente infinito.

L'esistenza di tali oggetti lanciava una sfida: restava da descrivere la forma di ciò che la geometria dichiarava "informe" o "amorfo". Questa sfida non veniva raccolta.

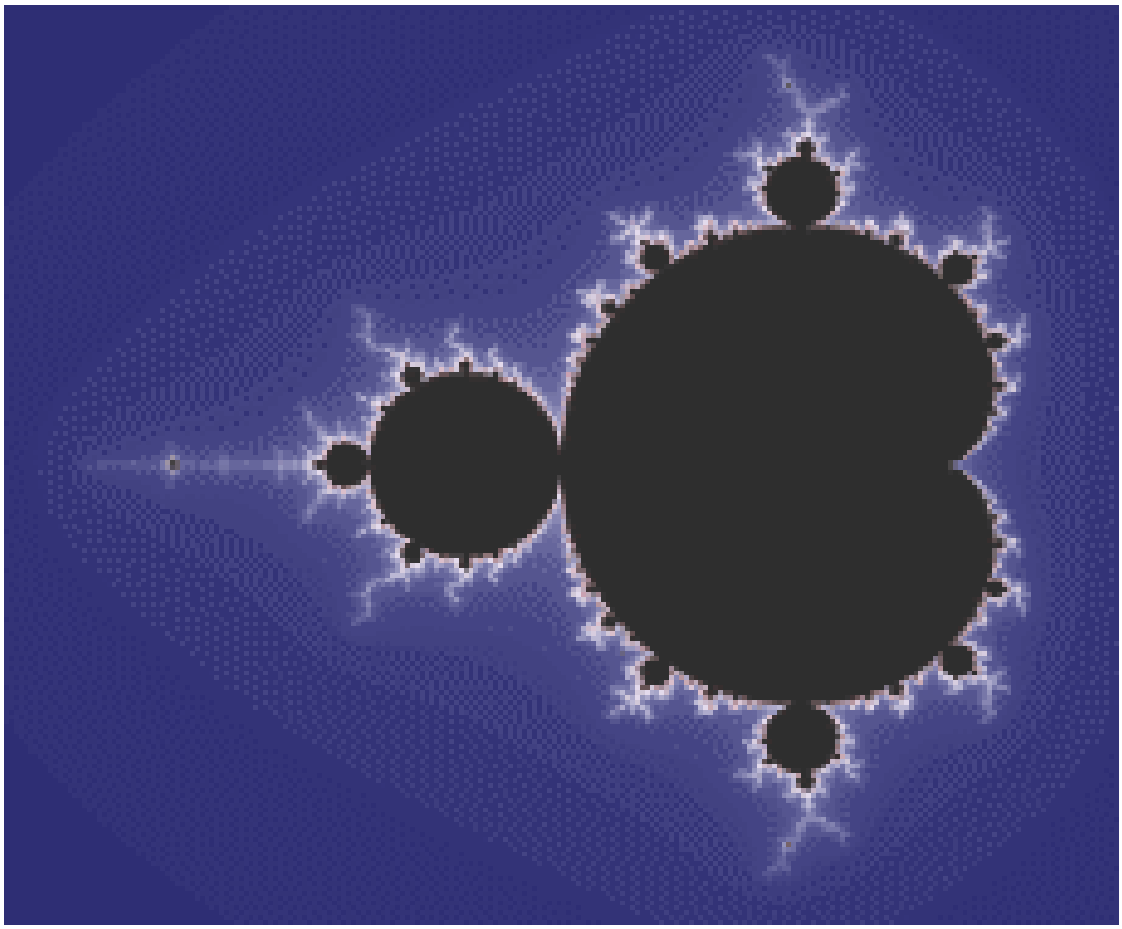
Avendo scelto di accettare la sfida, ho concepito e sviluppato una nuova geometria della natura, e l'ho utilizzata in un gran numero di diversi settori. Non dico che l'ho "applicata", perché essa si è sviluppata solo nel corso delle diverse utilizzazioni.

I frattali sono oggetti - siano essi matematici, dovuti alla natura o dovuti all'uomo - che si dicono irregolari, rugosi, porosi o frammentati e che, in più, possiedono queste proprietà nella stessa misura in ogni scala d'ingrandimento. Ciò significa che questi oggetti hanno la stessa forma, sia che li si veda da vicino sia che li si veda da lontano. […] Così, ogni piccolo lembo di un frattale contiene la chiave dell'intera costruzione."

Questo è per Mandelbrot il cosiddetto *"principio di scala"*, che si esprime nell'***autosimilitudine***, o, più in generale, nell'***autoaffinità***.

I frattali ed il calcolo delle probabilità

L’insieme di Mandelbrot



Curiosità

Giuseppe Antonio Alberti
Trattato di aritmetica pratica
nel quale oltre lo spiegarsi le regole ordinarie della medesima si discorre di varie proprietà, e curiosità numeriche.
Con aggiunta di un breve Trattato di Algebra.
Venezia: Appresso Gio: Battista Recurti, 1752

Come si può vedere dal **frontespizio**, che è particolarmente interessante, il libro a disposizione è il terzo tomo dell'opera ed è diviso in tre parti: Parte Ottava, Nona e Decima.
Nella **Parte Ottava**, come l'autore stesso spiega in una breve introduzione, vengono riportati principi o elementi algebrici che servono a "*sciorre molti di quei quesiti che con l'Aritmetica sola sviluppare non possonsi*".
Le trattazioni teoriche di somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, frazioni, radici, potenze, metodi di soluzione delle equazioni semplici e quadratiche sono seguite da quesiti che attengono per lo più alla vita pratica, all'attività di pescatori o mercanti, alla vita familiare, ed a volte riportano anche dialoghi fantastici (**quesito VI**).

Nella **Parte Nona** viene presentata una traduzione di alcuni scritti del Padre Tarquet e di Niccolò di Martino su combinazioni e permutazioni.

La **Parte Decima**, infine, è costituita da un **dizionario aritmetico** (**A-O**, **P-Z**) nel quale vengono riportate le principali voci necessarie alla comprensione dell'opera. Citiamo alcuni esempi:

"*Infilzare i rotti*" (frazioni) vuol dire sommare due rotti che non siano della stessa unità (ossia che abbiano denominatori diversi) (**pag. 88**).
"*Radice sorda*" o "*irrazionale*" di qualsivoglia numero è quella che non si può esprimere con nessun numero (razionale), come la radice quadrata di 12, la radice cubica di 9.

Particolarmente interessanti sono le **pagine da 95 a 100** per le definizioni e le raffigurazioni dei **numeri poligonali**, e **la pagina 118** per il **triangolo aritmetico**.

Il dizionario logico di G. Peano

QUESITO VI.

Un Mulo, e un Asino portavano una quantità di misure di vino: l'Asino disse al Mulo, dammi una delle tue misure, che allora ne avremo un ugual quantità ciascheduno. Il Mulo rispose, dammi più tosto una delle tue misure, che allora io avrò doppio peso, che tu non hai. Cercasi quante misure portavano ciascheduno.

Sieno le misure dell'Asino $=x$; onde presane una dal Mulo ne avrà $x+1$, ed al Mulo ne rimarrà $x-1$, nel qual caso sono ugualmente carichi, dunque alla prima ne aveva $x+2$, e se in tal stato ne prendeva una di più di quelle dell'Asino, allora ne avrebbe $x+3$, e l'Asino ne avrebbe $x-1$, e perchè in questo caso le misure del Mulo erano doppie delle misure dell'Asino, perciò ne verrà l'equazione $x+3=2x-2$, levatovi l'x comune sarà $3=x-2$, e per trasposizione $3+2=x$, dunque 5 saranno le misure dell'Asino, e il Mulo che ne averà $x+2$, ne aveva dunque 7, come cercavasi.

Se per sciorre il suddetto Quesito si fossero prese due incognite, ponendo per le misure dell'Asino $=x$, e per le misure del Mulo $=y$, sarà secondo la prescrizione $x+1=y-1$, ed ancora $y+1=2x-2$. Nella prima equazione sarà $x=y-2$, e nella seconda ponendo in luogo di x, $y-2$, sarà $y+1=2y-4-2$, cioè $1=y-6$, ovvero $7=y$, dove si vede che sempre, quando si può, dee prendersi una sola incognita, mentre l'altro valore dalla dipendenza che ha con la presa incognita facilmente ritrovasi.

Il suddetto Quesito si scioglie generalmente, ponendo che l'Asino prendi dal mulo un numero di misure $=c$, nel qual caso la ragione del peso di ciascheduno sia come 1, ad a. Nell'altro caso poi prendi il Mulo, dall'Asino un numero di misure $=e$, ed in questo caso la ragione del peso di ciascheduno sia come 1 ad f, nel qual modo procedendo sarà nel primo caso le misure dell'Asino $x+c$, e quelle del Mulo $x-c$, sarà dunque per l'ipotesi $x+c.\ y-c::1.a$, fatta la moltiplicazione degli estremi, e dei medj per averne l'equazione sarà $ax+ac=y-c$, ovvero sarà $ax+ac+c=y$. Nel secondo caso le misure dell'Asino saranno $x-e$, quelle del Mulo $x+e$, dunque secondo l'ipotesi sarà $x-e.\ y+e::1.f$, e similmente $fx-ef=y+e$, cioè $fx-ef-e=y$, cioè uguale ad $ax+ac+c$, che si trovò di sopra, onde verrà $fx-ax=ac+c+ef+e$, finalmente poi $\frac{ac+c+ef+e}{f-a}=x$. Nel Quesito si suppose a, c, e, uguali ciascheduno ad 1, ed $f=2$; onde $f-a=1$, ed $ac+c+ef+e=1+1+2+1=5$, come di sopra; di quì si vede che variata la suppositione si troveranno dalla suddetta equazione gli altri valori.

TRATTATO
DI
ARITMETICA PRATICA
NEL QUALE

Oltre lo ſpiegarſi le Regole ordinarie della medeſima, ſi diſcorre di varie proprietà, e curioſità Numeriche,

Con alcuni faciliſſimi metodi, per riſolvere molti intricati Problemi,

AGGIUNTOVI

Un breve Trattato d' Algebra,

Con le Traduzioni di quanto hanno ſcritto delle Permutazioni, e Combinazioni

IL P. TACQUET, ED IL SIG. NICCOLO' DI MARTINO

OPERA

DIVISA IN TRE TOMI,

E DATA IN LUCE

DA

GIUSEPPE ANTONIO ALBERTI

BOLOGNESE.

TOMO TERZO.

IN VENEZIA,
MDCCLII.

APPRESSO GIO: BATTISTA RECURTI
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

DELL' ARITMETICA
DI GIUSEPPE ALBERTI
PARTE DECIMA.
DIZIONARIO ARITMETICO.

SO, che alcuni forſe diranno, che mi ſarei potuta avanzare queſta fatica, avendo ciò fatto Monſieur Ozanam nel ſuo Dizionario Mattematico. Egli è vero, che Monſieur Ozanam ciò ha fatto: ma quando altro fatto non aveſſi, che ridir quì tutto ciò, che lo ſteſſo Ozanam ha detto nel ſuo Dizionario Mattematico, ſembrami, ſe mal non m' appongo, che non avrei mal fatto, e che diſgradevol coſa non ſarebbe ſtata l'avere in un ſol corpo poſto ciò, che ſparſo trovaſi in varj Autori, ed averlo ancora ridotto nel noſtro Italiano Idioma in grazia di quegli Italiani Aritmetici, che la lingua Franceſe non poſſedeſſero. Di ciò ſolo però non mi ſon contentato. Mi ſon ben ſervito del ſuddetto Dizionario, ma non ho però mancato d' abbreviar molte coſe non neceſſarie al ſolo Aritmetico, ed altre ancora aggiungervene, particolarmenti attinenti alla pratica. Ho poſto ogni coſa per ordine, ſotto le ſue riſpettive lettere dell' Alfabetto, ſecondo un vero Dizionario, come pure la ſteſſa coſa ho poſta ſotto varie lettere, ſecondo che può eſſer cercata dal Lettore, e queſto acciocchè ſenza molto faticare poſſa trovar con preſtezza ciò che brama. E perchè nello ſpiegare i termini poſti in queſto Dizionario è ſtato vopo ſervirſi di altri termini, poſti pure nello ſteſſo Dizionario, perciò queſti ſi ſono fatti ancor eſſi in Corſivo, per denotare che la ſpiegazione di eſſi trovaſi nello ſteſſo Dizionario alla ſua riſpettiva parola, acciocchè con preſtezza poſſa il noſtro Aritmetico ritrovarli; Perciò ho ſtimato che al noſtro Aritmeticoa grado ſia per eſſergli queſta mia fatica, che in di lui grazia ho fatto.

I Numeri Aritmetici, poſti in queſto Dizionario, moſtrano i numeri che ſono nel margine dell' Opera, per poter ad eſſi ricorrere, ed avere nello ſteſſo tempo più diſtinta notizia di ciò che in tal luogo parla il Dizionario. I numeri Romani I. II. III. appoſti a quei numeri, denotano i Tomi, cioè I. primo, II. ſecondo, III. terzo. Dove poi non ſono numeri, di ciò moſtraſi non averne fatta parola nell' Opera, onde tali coſe nel Dizionario più dell' altre vengon ſpiegate, nel qual modo lo ſteſſo Dizionario fa uffizio di Tavola, e ſerve alla comodità.

A

ARITMETICA è la ſcienza del *numero*. 1. I.

Aritmetica Teorica è quella che conſidera le cagioni, le qualità, e le proprietà dei *numeri*. 2. I.

Aritmetica Pratica è quella che inſegna l'Arte del Calcolare. 3. I.

Aritmetica ragione, cioè *Ragione Aritmetica* è la comparazione che ſi fa di due *nameri*, per rapporto all'eccesſo del più grande ſopra il più picciolo, ovvero a quello che manca al più picciolo per uguagliare il più grande, quando ſono inuguali, ovvero all'ugualità di due *numeri*, quando ſono uguali.

Aritmetica ragione razionale, cioè *Ragione Aritmetica razionale* è quella, dove i due *termini* ſono *razionali*, come la ragione di 2 a 3.

Aritmetica ragione irrazionale, cioè *Ragione Aritmetica irrazionale* è quella, dove li due *termini* non ſono *razionali*; come la *ragione* di 2 alla *radice* di 5, e la *ragione* della *radice* di 2, alla *radice* di 5, e così delle altre.

Aritmetica proporzione, ovvero *proporzione Aritmetica*, cioè quattro numeri *Aritmeticamente proporzionali*, ſono due *ragioni Aritmetiche ſimili*, per denotare le quali ſi ſcrivono così 6. 4. 10. : 8.

Aritmetica proporzione continua, cioè *Proporzione Aritmetica continua* è una ſimilitudine di *ragioni Aritmetiche*, come 1, 2, 3, 4 ec ovvero 1, 3, 5, 7 ec. 44. II

Aritmetica medietà, cioè *medietà Aritmetica*, s'intende di tre *termini* in *proporzione Aritmetica*, come 2, 5, 8, mentre l'eccesſo del ſecondo 5, ſopra il primo 2 è uguale all'eccesſo del terzo 8, ſopra il ſecondo 5.

Aritmetica Progreſſione, cioè *Progreſſione Aritmetica* è una ſerie o ſeguito di *numeri*, che ſono in una *continua proporzione Aritmetica*, come 1, 2, 3, 4, 5 ec. ovvero 1, 3, 5, 7, 9 ec. 44. II

Aritmetica Progreſſione naturale, cioè *Progreſſione Aritmetica naturale* è quella, che principia dall'*unità*, colla differenza di un *unità*, come queſta 1, 2, 3, 4, 5 ec. 46. II

Aritmetica Progreſſione naturale pari, ovvero *Progreſſione Aritmetica naturale pari* è quella, che principia dal 2 colla differenza 2, cos. 2, 4, 6, 8 ec. 47. II.

Aritmetica Progreſſione naturale impari, ovvero *Progreſſione Aritmetica naturale impari* è quella, che principia dall'*unità*, colla differenza 2 così 1, 3, 5, 7 ec. 48. II.

Aritmetica Progreſſione creſcente, o aſcendente, cioè *Progreſſione Aritmetica creſcente, o aſcendente* è quella che nel continnarla ſempre creſce, come queſta 1, 4, 7, 11, 15 ec 50. II.

Aritmetica Progreſſione decreſcente, o diſcendente, cioè *Progreſſione Aritmetica decreſcente, o diſcendente* è quella che nel continuarla ſempre ſi diminuiſce, come queſta 15, 13, 11, 9 ec. 51. II.

Arit-

Aritmetiche ragioni uguali, o ſimili, cioè *Ragioni Aritmetiche uguali, o ſimili* ſono quelle, ove la differenza dei più piccioli *termini* è uguale alla differenza dei più grandi; come la *ragione* di 2 a 5 è uguale, o ſimile a quella di 6 a 9, perchè la differenza 3 dei più piccioli *termini* 2, e 5, è uguale alla differenza dei più grandi 6, e 9.

ARITMETICO chiamaſi quello, il quale poſſiede l'arte dei *numeri*.

Aritmetico Teorico è quello che poſſiede le cagioni, proprietà, e qualità dei *numeri*.

Aritmetico Pratico è quello che ha la pratica del Calcolare.

Aritmetico numero, cioe *Numero Aritmetico* è un *numero razionale* qualunque conſiderato in ſe indipendentemente da tutti gli altri *numeri*, come 2, 4, 5, ec.

Abaco, ovvero Tavola Pittagorica è una Tavoletta che contiene la *Moltiplicazione* dei *numeri ſemplici*. 46. I.

Aggregato intendeſi l'unione di più *numeri*, o di più unità. 35. I.

ANALOGIA è una ſimilitudine di *ragioni Geometriche*.

ARTE CALCULATORIA è propriamente il modo di contare con dei ſegni, o piccioli ſaſſi, mentre queſta parola deriva dal Latino *Calculus* che ſignifica ſaſſo.

ARMONICA PROPORZIONE, cioè *Proporzione Armonica* ſono tre numeri, il primo dei quali ha la medeſima *proporzione* al terzo, che ha la differenza tra il primo, e il ſecondo, alla differenza tra il ſecondo, e il terzo. 67. II.

Armonica ragione, ovvero Ragione Armonica è la comparazione di due *numeri razionali*, in tanto che eglino ſono applicati a miſurare l'armonia del ſuono nella Muſica.

Armonica medietà, ovvero *Medietà Armonica*, s'intende di tre *termini* in *proporzione Armonica*, come 3, 4, 6.

Antecedente di una *ragione*, o *proporzione* è il *termine* della ragione, il quale ſi paragona, o comparà all'altro. 21. I.

Aliquota, cioè *Parte aliquota* di un *numero* è un numero più picciolo, che è compreſo in un più grande un certo numero di volte, ſenza alcuno avanzo. 15. I.

Aliquanta, cioè *Parte aliquanta* di un *numero* è un numero più picciolo, il quale è contenuto nel più grande un certo numero di volte non eſattamente, ma vi rimane qualche coſa. 16. I.

Amicabili, cioè *Numeri Amicabili*, ſono due *numeri* intieri, cadauno dei quali è uguale a tutte le *parti aliquote* dell'altro preſe inſieme. 63. II.

Abbondante, cioè *Numero abbondante* è quello che è maggiore di tutte le ſue *parti aliquote* preſe inſieme, come 24 che è maggiore della *ſomma* 36 di tutte le ſue parti aliquote 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, e così di molti altri.

ALLIGAZIONE, cioè *REGOLA D'ALLIGAZIONE* è quella, che insegna ad alligare, o mescolare insieme più cose di diverso valore, e di trovare quanto ne bisogna prendere di ciascuna, secondo il *numero* della dimanda. 22. II.

Alligazione in ugualità, cioè *Regola di Alligazione in ugualità* è allora quando le cose da alligarsi sono uguali di *numero*. 24. II.

Alligazione in inegualità, cioè *Regola di alligazione in inegualità*, è allora quando le cose da alligarsi, sono ineguali di *numero*. 25. II.

Avanzo di una radice è quello chè v'è di più della *potestà razionale*, che viene espressa dalla *radice*. 118. I.

Abbreviare le Moltiplicazioni, vuol dire usare un modo più breve dell'ordinario. 52. 65. I.

Abbreviare le divisioni, vuol dire operare in più breve maniera dell'ordinaria. 78. I.

Abbassare, *Schisare*, *ridurre a minori termini*, o *denominazione* una *frazione*, vuol dire *dividere* il *numeratore*, e il *denominatore* di essa per una *comune misura*. 99. I.

Algoritmo, ovvero *Logistica numerosa*, s'intende per le operazioni d'*Aritmetica*, cioè *Sommare*, *Sottrarre*, *Moltiplicare*, *Partire*, ed *Estraere le radici*.

Altezza di un Triangolo rettangolo in numeri è uno dei due minori *numeri* dei tre numeri del *Triangolo rettangolo in numeri*, nel qual caso l'altro numero di detti due, chiamasi la *base del Triangolo rettangolo in numeri*.

Aria di un Triangolo rettangolo in numeri è un *numero* uguale alla metà del prodotto dei due più piccioli lati, onde si conosce, che l'aria del Triangolo rettangolo in numeri 6, 8, 10, e 24; e quello di questo 10, 24, 26, e 240.

B

Base di un Triangolo rettangolo in numeri è uno dei due minori numeri, dei tre numeri del Triangolo rettangolo in numeri, nel qual caso l'altro numero dei detti due chiamasi *l'altezza del Triangolo rettangolo in numeri*.

Barlungo numero, ovvero *Numero Barlungo* è un *numero piano* provenuto dalla *Moltiplicazione* di due numeri differenti, l'uno dall'altro dell'*unità*, come 6, che proviene da 2, e 3 ec.

C

Contare, ovvero *numerare* non è altra cosa che unire più unità in una sola idea.

CUBO, cioè *Numero Cubo* vuol dire qualunque *numero* provenuto da un *numero quadrato* moltiplicato nella sua *radice*. 30. I.

Cuba, cioè *Radice Cuba* è la stessa *radice* del *numero quadrato*, che ha moltiplicato lo stesso numero quadrato, acciocchè ne provenga il *numero Cubo*. 31. I.

Co-

Comune misura, ovvero *Misura comune* di due, o più *numeri*, è un numero più picciolo fuori dell'*unità*, che li *divide*, o *misura* tutti esattamente. Così 4 è la misura comune di questi tre numeri 12, 20, 24, perchè li misura esattamente per questi 3. 5. 7.

Conseguente di una ragione, o proporzione, è il *termine* della ragione che vien paragonato al tuo *antecedente*. 21. I.

Commensurabili fra di loro, cioè *Numeri commensurabili fra di loro* sono quelli la di cui *ragione Geometrica* è *razionale*; onde questi due numeri $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, sono commensurabili fra loro, perchè la loro ragione è razionale, essendo uguale a quella di 3 a 5.

Continui proporzionali, o *Numeri proporzionali continui* sono i *numeri in proporzione continua*, come 2, 4, 8, 16.

Caratteri, o *Figure Aritmetiche* sono quelle che esprimono le *unità*, come 1 vale un'unità, 2 due, 3 tre, 4 quattro, 5 cinque, 6 sei, 7 sette, 8 otto, 9 nove. 6. I.

Commisurazione di un numero rispettivamente a un altro, vuol dire quante volte il dato numero *misura* l'altro 36. I.

Conoscere i numeri quadrati, e Cubi per pratica, vuol dire conoscere, se un dato numero sia *quadrato*, o *Cubo* senza far computi. 117. 125. I.

CONTO IN PRATICA è il modo di fare la *Regola del tre* con brevità, come usano i Mercanti. 9. II.

Conto in Pratica alla lunga è una maniera di sciorre la *Regola del tre*, con un *Conto in Pratica*, non usando quella brevità che si può. 10. II.

Conto in Pratica della figura tagliata è una maniera di *Conto in Pratica*, che si fa tagliando una *figura*. 11. II.

Conto in Pratica alla Fiorentina è la maniera di fare il Conto in Pratica all'indietro. 12. II.

CENSO vuol dire pigliare denari, o Mercanzie col patto di pagare un tanto per lira per cento ec., l'anno per tutto il tempo che si avrà tai denari, o Mercanzie. 30. II.

Censo a scaletta, o *scontare a scaletta* è pagare un tanto all'anno, mese ec., per un *Censo* computando in tal pagamento *i frutti*, e il rimanente per estinzione del *Capitale*. 32. II.

Censo a capo d'anno detto ancora *Frutto dei frutti*, *Profitto dei Profitti*, o *Usura*, s'intende che non pagando i frutti di un *Censo* questi si convertino in *Capitale*. 34. II.

Capitale, vuol dire quel tanto che si pone in un Negozio, o che si dà a *Censo*.

Compensazione dei tempi, per saldare i pagamenti fra i Mercanti è lo stesso che ridurre più pagamenti che dovevansi fare in varj tempi, ad un sol tempo, o termine. 37. II.

Compensazione dei tempi, per saldare i pagamenti a capo d'anno è lo stesso che considerare il frutto a ragione di *Censo a capo d'anno*, per poi dedurne il termine del pagamento. 38. II.

Compenſazione de i pagamenti fra i Mercanti, *o ſaldare le ragioni fra i Mercanti*, è il modo di ſaldare i debiti, riguardo al tempo che deve compenſare il pagamento. 39. II.

Compenſazione dei pagamenti a capo d' anno, è il modo di ſaldare i debiti, riguardo al tempo, che compenſa il pagamento, intendendo però il *Cenſo a capo d' anno*. 40. II.

CAMBIO, vuol dire trovare quanto alcune date monete di una Città ſieno di altre monete di un' altra Città. 42. II.

COMBINAZIONE, *o Combinare*, vuol dire trovare il numero di più coſe a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec. 1. 4. III.

Combinare, *ſecondo tutti gli eſponenti*, vuol dire *combinare* inſieme più coſe per tutti gli *eſponenti* poſſibili. 4. III.

Combinare ſecondo ciaſcheduno eſponente, vuol dire *combinare* inſieme più coſe per tutti gli eſponenti ſeparatamente. 6. III.

D

DIVISIONE, *dividere*, *o partire un numero per un altro*, vuol dire trovare un *numero*, che moſtri quanto uno di due dati numeri capiſce, o entra nell' altro. 66. I.

Diviſione ſemplice è il modo di dividere i numeri ſemplici.

Diviſione compoſta, *o di diverſe ſpecie*, è il modo di dividere i numeri di diverſa ſpecie. 70. I.

Diviſore, vuol dire quel *numero* che divide un altro. 66. I.

Dividendo intendeſi nella *diviſione* quel numero che viene diviſo da un altro. 66. I.

Dividere un numero per più numeri, vuol dire dividere un *numero* per il *prodotto* di tutti gli altri. Come dividere queſto numero 360 per queſti tre, 2, 3, 5, vuol dire dividere il 360, per 30, e il *quoziente* ſarà 12.

Dividere, *o Partire per colonna*, *o per teſta*, è quella *diviſione* che ſi può fare in una ſol riga. 66 $\frac{1}{2}$. I.

Dividere, *o Partire per danda alla lunga*, vuol dire la *diviſione* di quei *numeri*, che non ſi poſſono dividere in una ſol riga. 67. I.

Dividere, *o Partire per danda alla corta*, vuol dire dividere un numero che non ſi può dividere in una ſol riga, con maggior brevità della *Danda alla lunga*. 68. I.

Dividere, *o Partire di diverſa ſpecie*, vuol dire dividere delle quantità che ſieno di diverſa ſpecie, come lire, ſoldi, e denari; piedi, oncie, e punti ec. 70. I.

Dividere, *o Partire*, *mediante la Tavola Pittagorica*, vuol dire nel fare la diviſione ſervirſi della *Tavola Pittagorica*. 72. I.

Dividere, *o Partire*, *mediante i Logaritmi*, vuol dire nel fare la diviſione, ſervirſi dei *Logaritmi*. 73. I.

Dividere, *o Partire all' uſo Oltramontano*, vuol dire dividere nel modo che uſano i Popoli di là dai Monti. 74. I.

Di-

Dividere, o Partire per Battello, vuol dire fare la *diviſione* in forma di Battello. 75. I.

Dividere, o Partire per Galea, vuol dire fare la *diviſione* in forma di Galea. 76. I.

Dividere, o Partire per ripiego, vuol dire partire in più pezzi. 77. I.

Denaro intendeſi nei *Cenſi* quella parte del 100, per rapporto all' *unità* del frutto del 100. 35. II.

DIACTILONOMIA è il modo di *numerare* colle dita, dando 1 al pollice della man dritta, 2 all' indice, 3 al medio, e così di ſeguito, ſeguendo poi alla man manca, principiando dall' auricolare, o dito picciolo.

Dimenſioni, o Potenze ſono tutti quei *prodotti*, che ſi poſſono da qualſivoglia *numero*, moltiplicandolo continuamente per lo ſteſſo numero, onde ſe ſi ſarà moltiplicato due volte, come 2 via 2, che fa 4, queſto numero che è *quadrato* chiamaſi ſeconda *potenza*, il detto 4 moltiplicato per lo ſteſſo 2, che fa 8, ed è *numero Cubo*, chiamaſi *terza potenza*, ſe queſto 8 ſi moltiplica per lo ſteſſo 2, il 16 che ne proviene ſarà la *quarta potenza*, e così di ſeguito. 112. I.

Diametro di un numero diametrale è *l' hipotenuſa* di quel *Triangolo rettangolo in numeri*, il doppio della di cui *ſuperficie* è il *numero diametrale*: dove ſi vede che nel *Triangolo rettangolo in numeri* 3, 4, 5, ha 5 per ſuo *numero diametrale*, e 12 è il doppio di tutto il *triangolo in numeri*, cioè il *numero diametrale*.

Denominatore di un rotto, o frazione è un *numero* che eſprime la qualità, ovvero la ſpecie; oppure eſprime il *numero intiero*, in cui è diviſa l' unità. 95. I.

Denominatore di una ragione geometrica, è il *quoziente*, che naſce dividendo l' *antecedente* della *ragione* pel ſuo *conſeguente*, dove ſi vede, che il denominatore di queſta ragione 2 a 3 è $\frac{2}{3}$. Così pure quella di 3 a 2, ha il denominatore $\frac{3}{2}$, e così degli altri. 58. II.

Decima medietà moderna, ovvero *medietà decima moderna* è quella, ove il terzo eccesſo ſtà al ſecondo, come il ſecondo *termine* al terzo: Così 7, 6, 4.

E

ESTraere *qualſivoglia radice da un numero*, vuol dire trovare un altro numero, il quale moltiplicato tante volte in ſe ſteſſo, quante ſono le unità dell' eſponente, della poteſtà del dato numero: cioè moltiplicato due volte, ſe del dato nnmero vuolſi la *ſeconda poteſtà*, tre volte ſe la terza, quattro volte ſe la quarta, e così di ſeguito produca lo ſteſſo dato numero. 114. 130, I.

Eſtraere la radice quadrata da un numero, è trovarne un altro, il quale eſſendo moltiplicato per ſe ſteſſo produca il dato numero, 114. I.

Eſtra-

Eſtraere la radice Cuba da un numero, è trovarne un altro, il quale moltiplicato tre volte in ſe ſteſſo produca il dato numero. 124. I.

Eſtraere la radice quadrata, e cuba, mediante i Logaritmi, vuol dire ſervirſi dei *Logaritmi*, per trovare la *radice quadrata* di un dato numero. 119. 126. I.

Eſtraere la radice quadrata, colla ſomma, o colla ſottrazione, vuol dire ſervirſi della *ſomma*, o della *ſottrazione*, per eſtraere la radice quadrata. 120. I.

Eſtraere la radice quadrata, e cuba, mediante la Tavola Pitagorica, vuol dire ſervirſi della ſuddetta Tavola, per l'eſtrazioni delle radici quadrate, e cube. 122. 127. I.

Eſtraere le Radici per approſſimazione, vuol dire trovare la *Radice* più proſſima al vero di quei numeri che hanno la *Radice irrazionale*. 123. 129. 131. I.

Eſtraere le Radici quadrate, e cube, colla Tavola dei Quadrati, e dei cubi è il modo di adoperare la detta Tavola, nella eſtrazione delle ſuddette Radici. 133. I.

Eſponenti di una Progreſſione, ſono i numeri che indicano i luoghi dei termini. 59. II.

Eſponente di una Combinazione è quel numero, che moſtra quante delle date cose deonſi unire aſſieme. 5. III.

Eſponente, o Indice di una data poteſtà, è quel numero che moſtra quante volte ſi moltiplicò un dato numero, onde poi ne è provenuta la data poteſta, perciò il 2 ſarà l'eſponente del *numero quadrato, o ſeconda poteſtà*, il 3 del *numero Cubo, o terza poteſtà*, e così delle altre. 113. I.

Eccesſo, Eſponente, o Indice di una Progreſſione Aritmetica è la differenza che trovaſi fra un *termine* all'altro della Progreſſione. 49. II.

Equimultipli ſono *numeri*, che ſi contengono ugualmente, cioè a dire tante volte gli uni, che gli altri loro *ſumultipli*, dove ſi conoſce che li due numeri 12, 6, ſono *equimultipli* di loro *ſumultipli* 4, e 2, perchè ciaſcuno contiene il ſuo *ſumultiplo* tre volte.

Evalvazione d'una ſrazione è il valore della ſteſſa frazione in lire, ſoldi, e denari.

Egualità di ragione, o ragione di egualità è quella che ſi trova fra due *numeri* uguali, come 2 a 2, 3 a 3 ec.

F

FRazione, *o numero rotto* è quello che rappreſenta la parte di un'*unità*. 93. I.

Frazione impropria, ovvero *numero rotto improprio* è quello che è maggiore dell'unità, come $\frac{4}{9}$, ec. $96\frac{1}{2}$. I.

Frazioni, o rotti della medeſima denominazione, ovvero *della medeſi-*

deſima ſpecie ſono quelli, che hanno i *denominatori* uguali, come $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ec. 103. I.

Frazioni, o rotti di diverſa denominazione, ovvero *di diverſa ſpecie* ſono quelli, che hanno i loro *denominatori* inuguali, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ ec. 104. I.

Frazioni, o rotti primi ſono quelli che hanno i loro *numeratori*, e *denominatori*, che ſono *numeri primi*, come $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{11}$ ec.

Frazioni, o rotti ſimili, o equivalenti ſono quelli, i di cui *numeratori ſono ſimili parti aliquote, o aliquante*, dei loro *denominatori*, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ ec.

Frazione di Frazione, rotto di rotto, o frazioni ſeconde è una parte di una *frazione*. 107. I.

Frazioni, o rotti decimali ſono quelli che hanno il *denominatore*, che è l'unità accompagnata con dei zeri, come $\frac{2}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{15}{10000}$ ec. 110. I.

Frazioni, o rotti decimali primi, ſecondi, terzi ec. s'intendono così: ſe nel *denominatore* v'è un ſol *zero*, come $\frac{3}{10}$, queſta è una *frazione decimale prima*. Se due come $\frac{7}{100}$ è *ſeconda*, ſe tre *terza*, e così delle altre. 110. I.

Frazione di frazione di una frazione, ovvero *Rotto di rotto di un rotto*, oppure *frazioni terze, o rotti terzi* s'intende per una parte di rotto di rotto, e per *frazioni, o rotti quarti*, s'intende per una parte di Rotto, o frazioni terze, e così di ſeguito. 108. I.

Figure, o Caratteri Aritmetici ſono quelli, che eſprimono le *unità*, come 1, vale un'unità, 2 due, 3 tre, 4 quattro, 5 cinque, 6 ſei, 7 ſette, 8 otto, 9 nove. 6. I.

Frutto, intereſſe, merito, o profitto è quel tanto, che ſi paga per cento l'anno, per le Mercanzie, o denari che ſi prendono *a Cenſo*. 31. II.

Frutto dei frutti è lo ſteſſo che *Cenſo a capo d'anno*. 34. II.

G

GEOMETRICA RAGIONE, o *Ragione Geometrica* è la comparazione che ſi fa di due *numeri* per rapporto al numero delle volte, che l'uno contiene una delle *parti aliquote* dell'altro.

Geometrica proporzione, ovvero *Proporzione Geometrica* è una ſimilitudine di *ragioni Geometriche*, dal che ſi vede, che queſti quattro numeri 2, 3, 4, 6, ſono in Geometrica proporzione, perchè la Geometrica ragione di 2 a 3, è ſimile di quella di 4 a 6, come pure queſti quattro numeri $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{27}$, ſono in Geometrica proporzione, perchè la ragione della $\sqrt{2}$ alla $\sqrt{3}$ è uguale a quella della $\sqrt{18}$, alla $\sqrt{27}$.

Geometrica medietà, ovvero *Medietà Geometrica* s'intende tre numeri in *proporzione Geometrica*, come 2, 4, 8.

GEOMETRICA PROGRESSIONE, ovvero *Progreſſione Geometrica* è una ſerie di numeri, che ſono in una *continua proporzione*

Geo-

Geometrica, come 1. 2. 4. 8. 16. ec. 55. II.

Geometriche ragioni uguali, o ſimili, ovvero *Ragioni Geometriche uguali, o ſimili*, oppure *ſimili, o uguali ragioni Geometriche*, o ancora *uguali, o ſimili ragioni Geometriche*, ſono quelle dove i più piccioli *termini* ſono *ſimili parti aliquote, o aliquante* dei più grandi, come queſta di 3 a 6 è uguale a queſt' altra di 4 a 8.

Gnomoni ſono quei *numeri intieri*, con ugual eccesſo che ſi vanno continuamente ſommando per averne i *numeri Poligoni*, mentre ſe ſaranno queſti numeri ugualmente differenti l'uno dall'altro, come 1. 2. 3. 4. 5., il primo 1, ſi dice il *primo Gnomone*, il 2, il *ſecondo*, il 3, il *terzo* ec.

H

Homologi termini, o *Termini homologi di una ragione*, ſono gli *antecedenti* agli *antecedenti*, e i *conſeguenti* ai *conſeguenti*, dal che ſi vede che nelle ragioni di 2 a 3, di 4 a 6, di 10 a 15 ec. i termini Homologi ſono i conſeguenti 3, 6, 15, e gli antecedenti 2, 4, 10.

Hypotenuſa, o *Ipotenuſa* è il maggiore dei tre numeri d'un *Triangolo rettangolo in numeri*.

I

Inugualità di ragione, o Ragione di inugualità è quella, che ſi ritrova fra due numeri inuguali, come la ragione di 5 a 6, ovvero di 6 a 5.

Incommenſurabili fra loro, ovvero *Numeri incommenſurabili fra loro* ſono quelli, la di cui *ragione Geometrica è irrazionale*, come ſono i due numeri $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, e ancorn 4, $\sqrt{7}$, ed infiniti altri.

Impreſtare, vuol dire aggiungere le decine, centinaja ec. nella *ſomma*, e nella *ſottrazione* ai numeri ſuſſeguenti. 40. I.

INFILZARE i rotti, vuol dire *ſommare* inſieme due *rotti* che non ſieno d'una ſteſſa unità. 106. I.

Indice, o eſponente di una poteſtà è quel numero, che moſtra quante volte ſi moltiplicò un dato numero, onde poi ne provene la data poteſtà, onde il 2, ſarà l'indice del *numero quadrato*, o *ſeconda poteſtà*, il 3 del *Cubo*, o *terza poteſtà*, e così delle altre. 113. I.

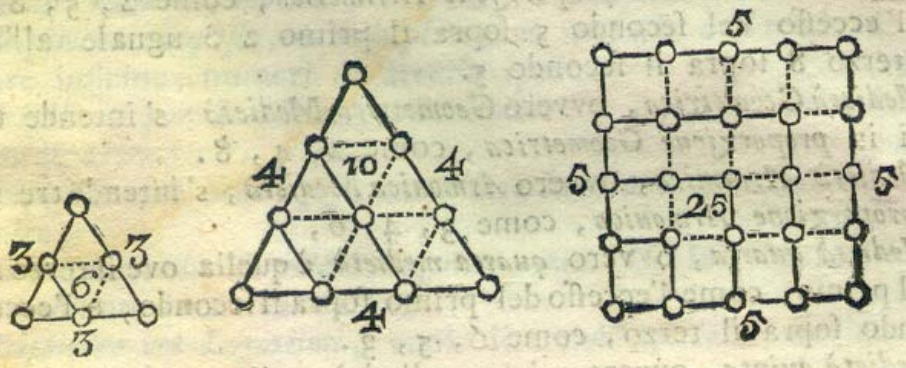
Intereſſe, *Merito*, *Profitto*, o *Frutto* è quel tanto che ſi paga per cento l'anno, per le Mercanzie, o denari, che ſi prendono a *Cenſo*. 31. II.

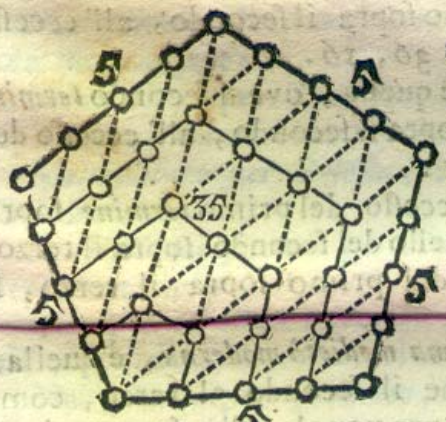
Ipotenuſa, o *Hypotenuſa* è il maggiore dei tre numeri di un *Triangolo rettangolo in numeri*.

L

Lato di un numero figurato è quel numero, che moſtra, o eſprime le unità che ſi diſporrebbero, o ſono diſpoſte nel lato

to del poligono, come ſi vede quì ſotto, che 3 è il lato del *numero triangolare* 6; 4 è il lato del *numero triangolare* 10, e così degli altri.





Lati di un triangolo rettangolo in numeri, ſono i due numeri più piccioli che lo compongono, come 3, e 4 ſono i lati del triangolo rettangolo in numeri 3, 4, 5, e così degli altri.

Lati di un numero diametrale, ſono i due più piccioli numeri, cioè gli altri due, fuori del *diametro del numero diametrale*.

Lati di un numero piano, ſono quei due numeri, che lo producono; come 2, e 3 ſono i lati del *numero piano* 6 ec.

Lati di un numero ſolido, ſono quei tre numeri che lo producono, come 2, 3, 5, ſono i lati del *numero ſolido* 30 ec.

LOGARITMI, ſono numeri di una *progreſſione Aritmetica Naturale*, poſti dirimpetto ad altri numeri d'una *progreſſione Geometrica*, dei quali eſſi ſono chiamati ſuoi Logaritmi, dove ſi conoſce, che i numeri di queſta progreſſione Aritmetica, 0, 1, 2, 3, 4 ec. ſono i Logaritmi dei numeri di queſta progreſſione Geometrica 1, 10, 100, 1000, 10000 ec.

Logiſtica numeroſa, ovvero *Algoritmo* s'intende per le operazioni di *Aritmetica*, cioè *Sommare*, *Sottrarre*, *Moltiplicare*, *Partire*, *ed eſtraer le Radici*.

Libretto è lo ſteſſo che la *Tavola Pitagorica*.

Leggere un numero, vuol dire enunciare colle parole il ſuo valore. 10. I.

Lamina dei quadrati, *o quadratica* è una colonna della *Tavola Pitagorica*, in cui ſono notati i *quadrati* dei *numeri ſemplici*. 121. I.

Lamina de' Cubi, *o Cubica* è una colonna della *Tavola Pitagorica*, in cui ſono notati *i Cubi* dei *numeri ſemplici*. 128. I.

M

Medietà Aritmetica, ovvero *Aritmetica medietà*, s' intende tre numeri in *proporzione Aritmetica*, come 2, 5, 8, mentre l'eccesso del secondo 5 sopra il primo 2 è uguale all' eccesso del terzo 8 sopra il secondo 5.

Medietà Geometrica, ovvero *Geometrica Medietà*, s' intende tre numeri in *proporzione Geometrica*, come 2, 4, 8.

Medietà Armonica, ovvero *Armonica Medietà*, s' intende tre numeri in *proporzione Armonica*, come 3, 4, 6,

Medietà quarta, ovvero *quarta medietà* è quella ove il terzo *termine* sta al primo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, e l'eccesso del secondo sopra il terzo, come 6, 5, 3.

Medietà quinta, ovvero *quinta medietà* è quella, ove il terzo *termine* sta al secondo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, all' eccesso del secondo sopra il terzo, come 41, 36, 16.

Medietà sesta, ovvero *sesta medietà* è quella, ove il secondo *termine* sta al primo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, all' eccesso del secondo sopra il terzo, come 6, 4, 1.

Medietà moderna, è quella, dove l' eccesso del primo *termine* sopra il secondo, si chiama *primo termine*, quello del secondo sopra il terzo, si chiama *secondo termine*, e l' eccesso del primo sopra il terzo, si chiama *terzo termine*.

Medietà moderna settima, ovvero *settima medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il secondo al terzo, come 7, 6, 1, ovvero il *primo termine* è sempre uguale alla somma degli altri due.

Medietà moderna ottava, ovvero *ottava medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il *primo termine* al *secondo*, come 6, 4, 3.

Medietà moderna nona, ovvero *Nona medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il *primo termine* al terzo, come 9, 7, 3.

Medietà decima moderna, ovvero *Decima medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al secondo, come il *secondo termine* al *terzo*, come 7, 6, 4.

MOLTIPLICARE un numero per un altro, vuol dire trovare un terzo numero che contenga tante volte uno dei due numeri, che si moltiplicano, quante sono le unità che contiene l'altro. 41. I.

Moltiplicando, chiamasi quel numero, che si prende tante volte, quante sono le unità dell' altro, che si moltiplica. 42. I.

Moltiplicante, chiamasi quel numero, secondo le unità del quale si prende tante volte l'altro numero che si moltiplica. 43. I.

Moltiplicare, più numeri insieme, vuol dire moltiplicarne prima due di essi insieme, e poi il *prodotto* moltiplicarlo con un altro dei da-

dati; e queſt'ultimo *prodotto* con un altro pure dei detti, e così finchè ve ne ſono.

Moltiplicazione ſemplice, o *moltiplicare ſemplice* è il modo di moltiplicare un *numero ſemplice* per un altro ſemplice.

Moltiplicare compoſto, o *moltiplicazione compoſta* è il modo di moltiplicare inſieme, numeri di diverſa ſpecie. 71. I.

Moltiplicare per Scacchiero, o *Baricocolo*, è il moltiplicare ſecondo l'uſo ordinario. 47. I.

Moltiplicare per Scavezzo, vuol dire fare una moltiplicazione in più volte. 48. I.

Moltiplicare colla Tavola Pitagorica, vuol dire fare le moltiplicazioni mediante la detta Tavola. 49. I.

Moltiplicare coi Logoritmi, vuol dire moltiplicare mediante eſſi Logaritmi. 50. I.

Moltiplicare colla ſola ſomma, vuol dire fare le moltiplicazioni colla ſola *ſommazione*. 52. I.

Moltiplicare per Crocetta, o per decuſazione è una maniera di moltiplicare i numeri in Croce. 53. I.

Moltiplicare per Geloſia, è un modo di moltiplicare in forma di Geloſia. 54. I.

Moltiplicare ſecondo gli Antichi, è un modo di moltiplicare all'uſo degli Antichi. 55. I.

Moltiplicare alla Fiorentina, o *all'indietro*, è un modo di moltiplicare all'uſo ordinario, ma principiando all'indietro. 58. I.

Moltiplicare per quadrato, vuol dire moltiplicare in forma di quadrato. 59. I.

Moltiplicare per Circolo, vuol dire moltiplicare in foma di Circolo. 60. I.

Moltiplicare per piramide, o *Triangolo*, vuol dire moltiplicare in forma di piramide, o di triangolo. 61. I.

Moltiplicare per Rombo, vuol dire moltiplicare in forma di Rombo. 62. I.

Moltiplicare per Calice, vuol dire moltiplicare in forma di Calice. 63. I.

Moltiplicare per ripiego, vuol dire moltiplicare in più pezzi. 64. I.

Multiplo di un numero, o *multiplice di un numero*, è un numero più grande, che contiene il più picciolo un certo numero di volte preciſamente ſenza alcuno avanzo. 12. I.

Miſura di un numero, è un numero più picciolo, che divide eſattamente un altro numero, ſenza alcun'avanzo; ovvero è un *numero ſumultuplo*. 11. I.

Miſura comune, ovvero *Comune miſura di due*, *o più numeri*, è un numero più picciolo, fuori dell'unità, che li divide, o miſura tutti eſattamente. Così il 4, è la comune miſura di queſti

tre numeri 12, 20, 28, perchè li misura esattamente per questi tre 3, 5, 7.

Mezzo proporzionale Aritmetico, è il secondo *termine* di una *proporzione Aritmetica*, quando è composta di soli tre numeri, come 2, 5, 8, dove il 5 è il mezzo proporzionale Aritmetico tra il 2, e l'8.

Mezzi proporzionali Aritmetici, sono quelli posti tra mezzo ai due *termini* estremi di una *progressione Aritmetica*, come questa 1, 2, 3, 4, 5, dove il 2, 3, 4, sono i mezzi proporzionali Aritmetici fra 1, e 5. 54. II.

Mezzo proporzionale Geometrico, è il secondo *termine* di una *proporzione Geometrica*, quando essa proporzione è *continua*, come 2, 4, 8, dove 4 è il mezzo proporzionale Geometrico fra 2, e 8.

Mezzi proporzionali Geometrici sono quelli posti fra mezzo ai due *termini* estremi di una progressione Geometrica, come di questa 2, 4, 8, 16, 32, 64, dove 4, 8, 16, 32, sono i mezzi proporzionali Geometrici fra 2, e 64. 60. II.

Mezzo proporzionale Armonico, è il secondo termine di una *proporzione Armonica*, come di questa 3, 4, 6, il 4 è il mezzo proporzionale Armonico fra 3, e 6.

Massimo schisatore, è il numero più grande, che esattamente può dividere il *numeratore*, e il *denominatore* di un rotto per *abbassarlo*, *o schisarlo*. 101. I.

Merito, *Profitto*, *Interesse*, *o Frutto*, è quel tanto che si paga per cento l'anno, per le Mercanzie, o denari, che si prendono a Censo. 31. II.

N

NUmero *Aritmetico*, ovvero *Aritmetico numero*, è un *numero razionale* qualunque considerato in se indipendentemente da tutti gli altri numeri, come 2, 4, 5 ec.

NUMERO è l'unione di più cose del medesimo genere. 5. I.

Numero intiero, è quello, che significa una, o più cose del medesimo genere, senza subdivisione alcuna, come 25 braccia di Panno, senza alcuna divisione di un'altra.

Numero abbondante, ovvero *abbondante numero*, è quello, che è maggiore di tutte le sue *parti aliquote* prese insieme, come 24, che è maggiore della *somma* 36 di tutte le sue *parti aliquote*, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, e così di molti altri.

Numero rotto, ovvero *Frazione*, è quella, che rappresenta la parte di una unità. 93. I.

Numero rotto improprio, o *Frazione impropria*, è quella, che è più dell'unità, come $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{3}$ ec. 96 $\frac{1}{2}$ I.

Nu-

Numero quadrato, vuol dire il *prodotto* di un *numero* moltiplicato in ſe ſteſſo. 28. I.

Numero Cubo, ovvero *Cubo numero*, vuol dire qualunque *numero* provenuto da un *numero quadrato* moltiplicato nella ſua radice. 30. I.

Numero quadrato-quadrato, diceſi quello, che proviene dal *numero Cubo*, moltiplicato nella ſua radice. 112. I.

Numero irrazionale, è quello, che non ſi può eſprimere in numeri, come la *Radice quadra* di 18, che è più grande di 4, e meno di 5, la quale non ſi può eſprimere preciſamente per qualſivoglia numero mezzano fra i ſuddetti due.

Numero ſordo, è lo ſteſſo che *numero irrazionale*.

Numero incommenſurabile, è lo ſteſſo che *numero irrazionale*, o *numero ſordo*.

Numero razionale, è quello, che ſi può eſprimere in numeri, come 2, 3, 5, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ ec.

Numero commenſurabile, è lo ſteſſo che *numero razionale*.

Numero multiplo, è un *numero* più grande, che contiene il più picciolo un certo numero di volte preciſamente ſenza alcun avanzo: dalla qual coſa ſi conoſce, che 12 è un numero multiplo del 3, perchè lo contiene eſattamente quattro volte.

Numero ſubmultiplo, è un *numero* più picciolo, che ſi trova compreſo un certo numero di volte eſattamente nel più grande: dove ſi conoſce, che il 3 è numero ſubmultiplo del 12 perchè reſta contenuto dal 12 preciſamente quattro volte.

Numero perfetto, è quello, che è uguale a tutte le ſue *parti aliquote* preſe inſieme. 62. II.

Numero mancante, è quello, che è più grande di tutte le ſue *parti aliquote* preſe inſieme: come 15, che è più grande della *ſomma* 9 di tutte le ſue parti aliquote 1, 3, 5.

Numero primo, è quello che non è *miſurato* da alcun *numero*, che dalla ſola unità, come 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19 ec. 26. I.

Numero lineare, è lo ſteſſo, che *numero primo*.

Numero compoſto è quello, che è *miſurato* per qualche altro numero fuori dell'*unità*, come 10, che è miſurato per 2, e per 5.

Numero incompoſto, è lo ſteſſo che *numero piano*, o *numero lineare*.

Numero Geometrico, è lo ſteſſo, che *numero compoſto*.

Numero pari, è quello, che diviſo per 2 non vi reſta alcun avanzo, cioè vien diviſo preciſamente, come 4, 6, 10 ec. 24. I.

Numero parimente pari, è quello che è diviſibile per 4, ſenza alcun avanzo, come, 8, 12, 16 ec.

Numero imparimente pari, è quello che un *numero impari miſura* per un *numero pari*, come 42 che reſta miſurato dal 7, che è numero impari per 6, che è numero pari.

Nu-

Numero impari, è quello, che non può eſſere diviſo per 2, ſenza avanzo, come 3, 9, 15 ec. 25. I.

Numero parimente impari, è quello, che un *numero impari* miſura per un *numero pari*: come 10, che è miſurato dal 5, che è numero impari per 2 che è numero pari.

Numero imparimente impari, è quello, che è miſurato da un *numero impari* per un *numero pari*, come 15, che è miſurato dal numero impari 3, per il numero impari 5.

Numero ugualmente eguale, è quello, che vien prodotto moltiplicando un *numero* in ſe ſteſſo, che è lo ſteſſo, che *numero quadrato*.

Numero ugualmente uguale inegualmente, è quello che reſta prodotto dalla *moltiplicazione* continua di tre numeri uguali, che è lo ſteſſo che *numero cubo*.

Numero inegualmente ineguale, è un *numero piano* provenuto dalla *moltiplicazione* di due numeri diſuguali, come 18, che proviene da , e 6, ovvero da 2, e 9 ec.

Numero barlungo, ovvero *Barlungo numero*, è un *numero piano* provenuto dalla *moltiplicazione*: di due numeri differenti l'uno dall'altro dell'*unità*, come, 6, che proviene da 2, e 3.

Numero parallelogrammo, è un *numero piano* provenuto dalla *moltiplicazione* di due *numeri*, differenti l'uno dall'altro di un numero più grande dell'*unità*, come 48 provenuto da 6, e 8 differenti di 2, ovvero da 2, e 24 differenti di 22, oppure di 4 e 12, differenti di 8.

Numero Oblongo, è lo ſteſſo che *numero inegualmente inuguale*.

Numero piano, è qualunque numero provenuto dalla *moltiplicazione* di due altri qualunque, perciò il *numero quadrato* è ancora *numero piano*.

Numero ſolido, è qualſivoglia *numero* provenuto dalla *moltiplicazione* di tre altri qualunque, onde il *numero cubo* è ancora *numero ſolido*.

Numero inegualmente ineguale inegualmente, è un *numero ſolido* provenuto dalla continua *moltiplicazione* di tre numeri inuguali, come 30, che proviene da 2, 3, 5, che ſono inuguali.

Numero egualmente uguale mancante, è un *numero ſolido* provenuto dalla *moltiplicazione* di due numeri uguali, e da un altro più picciolo di ciaſcuno degli altri due, come 48 provenuto da 4, 4, 3 li di cui due primi ſono uguali fra loro, e il terzo è più picciolo di ciaſcuno di queſti due.

Numero egualmente uguale abbondante, è un *numero ſolido* provenuto dalla *moltiplicazione* di tre numeri, due uguali e l'altro più grande di ciaſcuno degli altri due, come 45, che proviene da 3,

3, 5, dove li due primi ſono eguali fra loro, e il terzo è più grande di ciaſcheduno di loro.

Numero Circolare, o Sferico, è quello le di cui *potenze* finiſcono per uno ſteſſo numero, come è il 5, il di cui *quadrato* è 25, il *Cubo* è 125, e tutte le altre ſue potenze finiſcono per lo ſteſſo numero 5: tale è ancora il *6*, come ſi può vedere.

Numero Poligono è quello, che proviene da una continua raccolta di altri numeri. 9. III.

Ovvero il numero poligono è un numero di una tal quantità di *unità*, le quali ſi poſſono diſporre in un piano di un poligono regolare (coſa ſia queſto Poligono regolare vedaſi nella Geometria) paralellamente ai lati, e al raggio, o al ſolo lato del medeſimo poligono. 7. III.

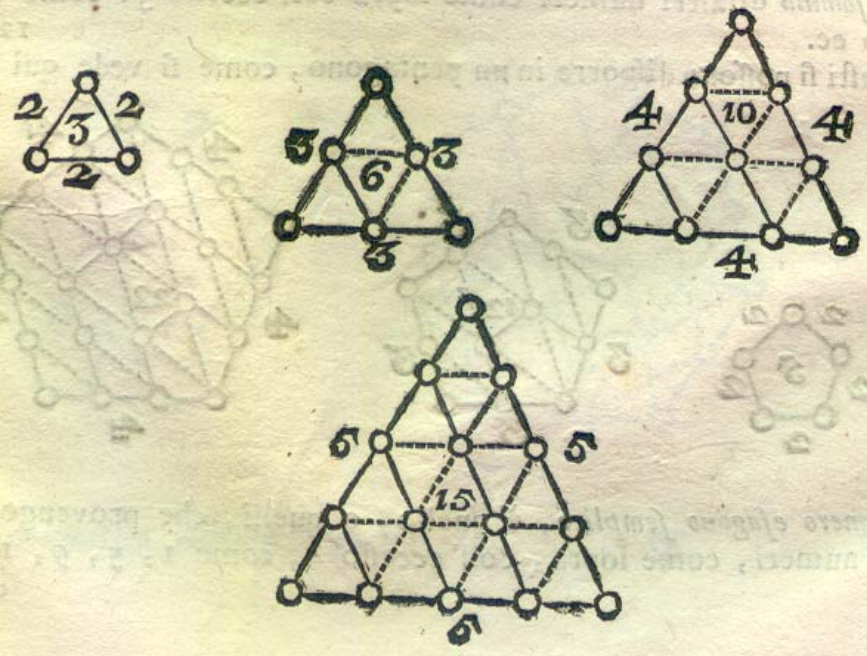
Numero multangolo, è lo ſteſſo che *numero poligono*. 7. III.

Numero figurato, è lo ſteſſo che *numero poligono*, o *numero multangolo*. 11. III.

Numero poligono ſemplice, è la *ſomma* di tanti numeri intieri, quanti ſi vuole, il primo dei quali è l' *unità*, e creſcono in infinito con un uguale eccesſo.

Numero triangolare ſemplice, è quello, o quelli, che provengono dalla continua *ſomma* di numeri, il di cui eccesſo è l'*unità*, e principiano pure dall' unità, come 1, 2, 3, 4, 5 ec., dove il primo triangolo ſemplice è 1, il ſecondo è 3, ſomma dei due numeri 1, e 2, il terzo è *6*, e così degli altri. 10. III.

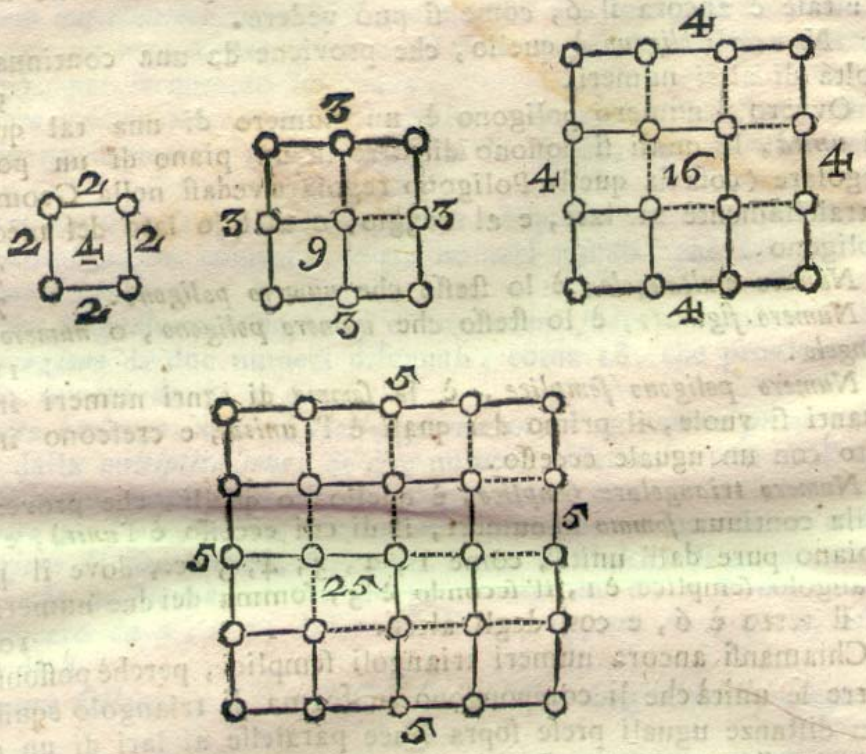
Chiamanſi ancora numeri triangoli ſemplici, perchè poſſonſi diſporre le unità che li compongono in forma di triangolo equilatere con diſtanze uguali preſe ſopra linee paralelle ai lati di un triangolo equilatero, come ſi vede eſpreſſo per maggior chiarezza quì ſotto. 8. III.



N.

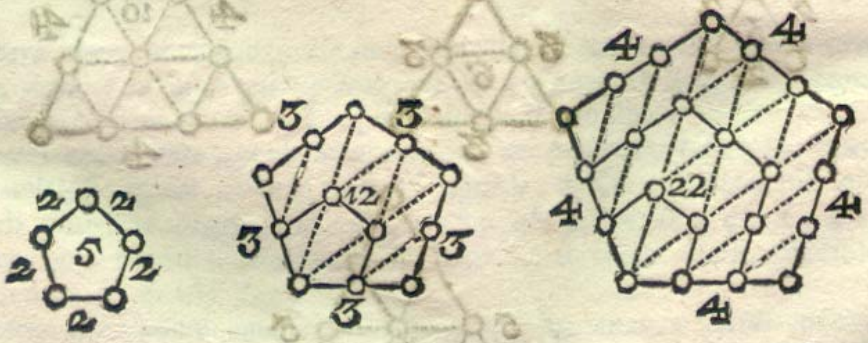
Numero quadrato ſemplice, è quello, o quelli, che provengono dalla continua *ſomma* di numeri principianti dall' unità colla differenza 2, come 1, 3, 5, 7, 9 ec. II. III.

Queſti ſi poſſono diſporre in un quadrato, come ſi vede quì ſotto.



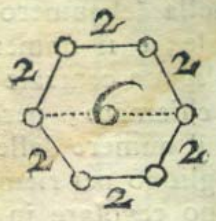
Numero Pentagono ſemplice, è quello, o quelli che provengono dalla *ſomma* di altri numeri come ſopra coll' eccesſo 3: come 1, 4, 7, 10 ec. 12. III.

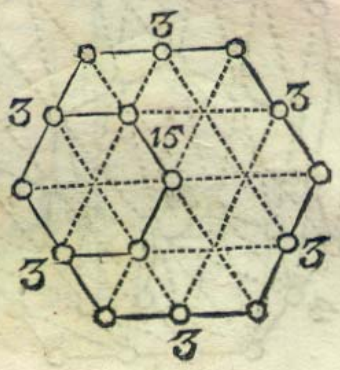
Queſti ſi poſſono diſporre in un pentagono, come ſi vede quì ſotto.

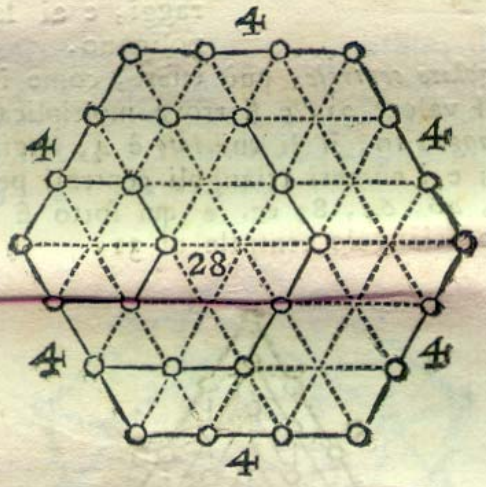


Numero eſagono ſemplice, è quello, o quelli, che provengono da altri numeri, come ſopra, coll' eccesſo 4, come 1, 5, 9, 13 ec., e co-

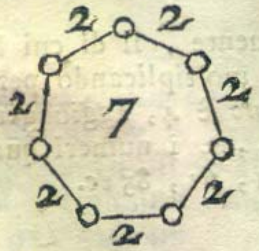
e così degli altri *numeri poligoni*, come si vede espresso quì sotto; che si è fatto l'esagono, e il settagono, e così in infinito.

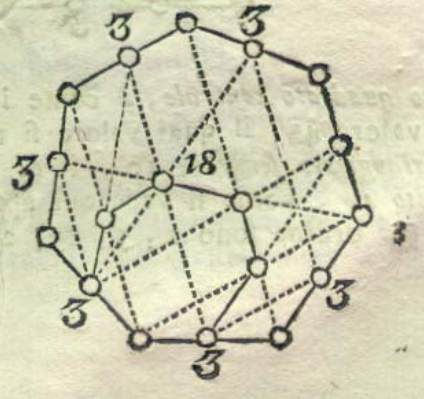


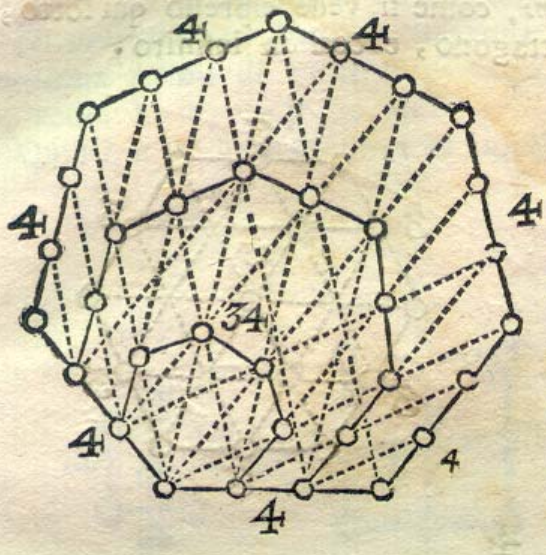




Numeri Settagoni.

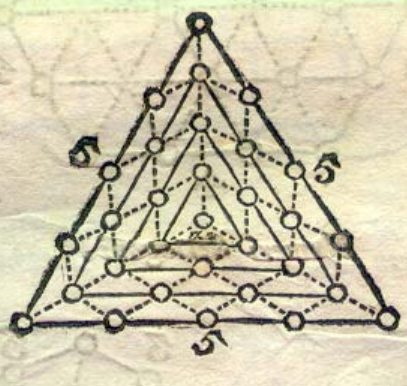






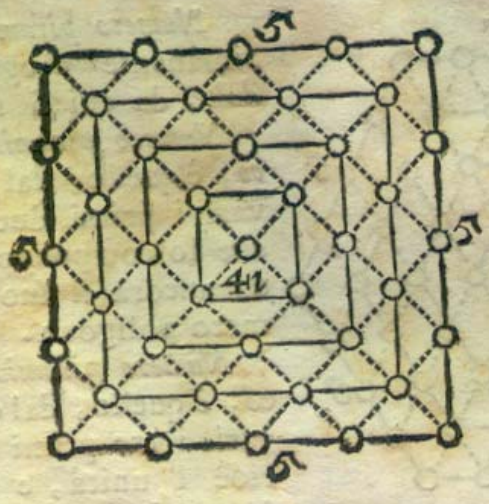
Numero poligono centrale, è un numero uguale alla *ſomma* dell'*unità*, e del *prodotto* del *numero triangolare ſemplice*, il di cui *lato* è minore dell'unità, che quella del numero poligono centrale, e il numero dei *lati* del poligono centrale; il quale è così chiamato, perchè rappreſenta il numero delle unità, che vi vogliono per riempiere un poligono regolare in diſtanze uguali preſe nei raggi del poligono, e nelle linee paralelle ai raggi, e ai lati del medeſimo poligono.

Numero triangolare centrale, può eſſere, come il ſeguente, dove il *lato* è 5, e il valore 31, e ſi trova moltiplicando per 3 il ſemplice *numero triangolo* 10, il di cui *lato* è 4, aggiungendo un'unità al prodotto 30; e i numeri triangoli centrali per ordine ſono 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85 ec. e quì ſotto ſi vede diſpoſto in figura il numero triangolo centrale di 31.

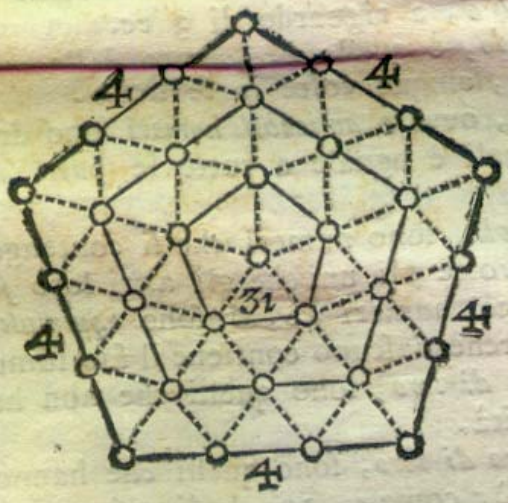


Numero quadrato centrale, è come il ſeguente, il di cui lato è 5, e il valore 41, il qual valore ſi trova moltiplicando per 4, il *numero triangolare ſemplice* 10, il di cui *lato* è 4, aggiungendo 1 al *prodotto* 40, come ſi vede quì appreſſo, e i numeri quadrati centrali per ordine ſono 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85 ec.

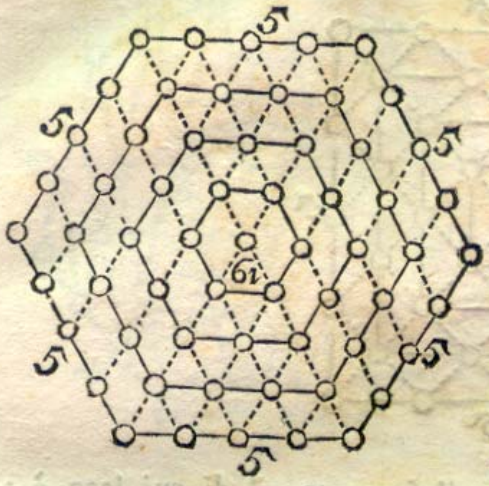
Nu-



Numero pentagono centrale, è come il ſeguente, il di cui lato è 4, e il ſuo valore 31, che ſi trova moltiplicando per 5 il *numero triangolo ſemplice* 6, il di cui *lato* è 3 aggiungendo 1. al *prodotto* 30, come queſto quì ſotto, e i numeri pentagoni centrali per ordine ſono 1. 6. 16. 31. 51. 76. 106 ec.



Numero eſagono centrale, è come il ſeguente, il di cui lato è 5, e il ſuo valore è 61, che ſi trova moltiplicando per 6 il *numero triangolare* 10, il di cui *lato* è 4, aggiungendo al prodotto 60 un' unità: i numeri eſagoni centrali per ordine ſono 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127 ec.



Numero piramidale tronco, è il rimanente d'ogni *numero piramidale*, da cui ſi ſia levata l'unità.

Numero piramidale due volte tronco, è quello, dal quale ſi ſono levati i primi due *numeri poligoni* che lo compongono, cioè l'unità, ed ancora il ſuo ſuſſeguente numero poligono.

Numero piramidale tre volte tronco, è quello, dal quale ſi ſono levati i tre primi *numeri poligoni*, cioè l' unità, e i due altri ſuſſeguenti, nel qual modo deeſi intendere degli altri di ſeguito.

Numero diametrale, è un *numero piano* uguale al doppio dell' *Aria di un triangolo rettangolo in numeri*, dove ſi vede, che 12 è numero diametrale del *triangolo rettangolo in numeri* 3, 4, 5.

Numero doppio in potenza d' un altro, è un *numero irrazionale*, il di cui *quadrato* è doppio dell'altro numero come $\sqrt{8}$, a riguardo di 4, ovvero la $\sqrt{6}$, a riguardo di 3 ec.

Numero ſuperſolido, è quello provenuto dalla *moltiplicazione* di un numero qualunque, cinque volte in ſe ſteſſo. 112. I.

Numeri amicabili, ovvero *amicabili numeri* ſono due numeri intieri, ciaſcheduno dei quali è uguale a tutte le *parti aliquote* dell'altro preſe inſieme 63. II.

Numeri equimultipli, ſono numeri che ſi contengono ugualmente, cioè a dire tante volte gli uni che gli altri loro *ſumultipli*, dove ſi conoſce, che li due numeri 12, 6 ſono *equimultipli* dei loro *ſumultipli* 4, e 2, perchè ciaſcuno contiene il ſuo ſumultiplo tre volte.

Numeri primi tra di loro, ſono quelli che non hanno altra *comune miſura* che l'unità. 27. I.

Numeri compoſti tra di loro, ſono quelli che hanno una *comune miſura*, oltre dell'*unità*, come 4, 10, la di cui comune miſura, è 2, e così 2, 6, 8, la di cui comune miſura è pure 2, e così degli altri.

Numeri piramidali, ſono quelli, dove conſiderati i *numeri poligoni* per ordine, come tanti *Gnomoni*, ponendo ſempre l'unità per primo, aggiungendo inſieme li due primi, poi i tre primi, i quattro primi, e così di ſeguito, ne provengono i numeri piramidali.

Numeri piramidali triangolari, ſono quelli che ſi formano dalla continua *ſomma* dei *numeri triangoli*, *ſemplici* per ordine: così per mezzo di queſti numeri triangolari ſemplici, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 ec. ne provengono queſti numeri piramidali trian-

triangolari 1, 4, 10, 20, 35, 44, 56, 120, 165, 220, 286 ec.

Numeri piramidali quadrati, ſono quelli formati dalla continua *ſomma* dei *numeri quadrati ſemplici* per ordine: Così con queſti numeri quadrati ſemplici 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ec. ſi hanno queſti numeri piramidali quadrati 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385 ec.

Numeri piramidali pentagoni, ſono quelli formati dalla continua *ſomma* dei *numeri pentagoni ſemplici* per ordine: così con queſti numeri pentagoni ſemplici 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 ec. ſi trovano queſti numeri piramidali pentagoni 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405 ec.

Numeri piramidali eſagoni, ſono quelli formati dalla continua *ſomma* dei *numeri eſagoni ſemplici* per ordine: onde con queſti numeri eſagoni ſemplici 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 ec., ſi trovano queſti numeri piramidali eſagoni 1, 7, 22, 50, 95, 161, 257, 372 ec., nel qual modo deeſi intendere di qualſivoglia altro numero piramidale.

Numeri piramido-piramidali, ſono quelli dove conſiderati i *numeri piramidali* per ordine, come tanti *gnomoni* ponendo ſempre l'unità per primo, aggiungendo inſieme i due primi, i tre primi, i quattro primi ec. ne vengono i numeri piramido--piramidali.

Numeri piramido--piramidali triangolari, ſono quelli che reſtano formati dalla continua ſomma dei *numeri piramidali triangolari* preſi per ordine: onde queſti numeri piramidali triangolari 1, 4, 10, 20, 35 ec. danno queſti numeri piramido--piramidali triangolari 1, 5, 15, 35, 70 ec.

Numeri piramido--piramidali quadrati ſono quelli formati dalla continua *ſomma* dei *nnmeri piramidali quadrati* per ordine, onde queſti 1, 5, 14, 30, 35, 91, che ſono numeri piramidali quadrati, danno queſti numeri piramido--piramidali quadrati 1, 6, 20, 50, 105, 196 ec.

Numeri generatori dei *numeri poligoni*, *o figurati*, *o piramidali*, *o piramido--piramidali* ec. ſono quelli preſi nel principio per fare i detti numeri, che ordinariamente è l'unità, benchè ſi poſſa prendere per principio un altro numero, nel qual caſo quello ſarà il genitore. 12. III.

Numeri generatori di un triangolo, rettangolo in numeri, poſſono eſſere quattro numeri, che trovanſi levando le *radici quadrate* dalla metà della *ſomma*, e dalla metà della differenza dell'*ipotenuſa*, e di uno dei due lati del *triangolo rettangolo in numeri*: dove ſi conoſce, che i numeri generatori di queſto trriangolo rettangolo in numeri 28, 45, 53, ſono 7, 2, ovvero $\sqrt{\frac{81}{2}}$, $\sqrt{\frac{25}{2}}$.

Numeri piani ſimili, ſono quelli, che hanno i loro lati proporzionali, onde queſti due numeri 6, 54, ſono ſimili, perchè i due la-

ti

ti 2, e 3, del primo ſono proporzionali ai due lati 6, e 9 del ſecondo.

Numeri ſolidi ſimili, ſono quelli, che hanno i loro lati proporzionali, onde queſti due 30, 240, ſono ſimili, perchè i tre lati 2, 3, 5, del primo 30, ſono proporzionali ai tre lati 4, 6, 10 del ſecondo 240.

Numeri commenſurabili in potenza, ſono quelli, i di cui *quadrati* ſono *commenſurabili* fra di loro, come $2\sqrt{3}$, perchè i loro quadrati 4, e 3 ſono commenſurabili fra loro: e così $\sqrt{\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt{50}}$, perchè i loro quadrati $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$, ſono commenſurabili fra loro, eſſendo nella ragione dei due numeri razionali 2, e 5.

Numeri incommenſurabili in potenza, ſono due *numeri irrazionali*, i di cui quadrati non ſono *commenſurabili* fra loro, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{5}}$ e così $2\sqrt{\sqrt{6}}$ ec.

Numeri proporzionali, ſono quelli, che compongono una proporzione qualunque.

Numeri proporzionali Aritmetici, o numeri *Aritmeticamente proporzionali*, ſono quelli che ſono in proporzione Aritmetica, e ſcrivonſi così 2.5.:6.3.

Numeri proporzionali Geometrici, *o numeri Geometricamente proporzionali*, ſono quelli che ſono in *proporzione Geometrica*, come 3.7:: 6.14. 20. I.

Numeri proporzionali Armonici, *o numeri Armonicamente proporzionali*, ſono quelli che ſono *in proporzione Armonica*, come 8.6.5.4.

Numeri Romani, ſono quelli che ſi fanno colle lettere majuſcole nelle memorie, e monumenti pubblici. 33. I.

Numerare, *ovvero contare*, non è altra coſa che unire più uni:à in una ſola idea.

Numerazione è l'eſpreſſione di un numero propoſto per le figure, o caratteri che gli ſono propri. 32. I.

Nona medietà moderna, ovvero *medietà nona moderna* è quella, ove il terzo eccesſo ſtà al primo, come il primo *termine* al terzo: come 9. 7. 3.

O

Oblongo numero, *o Numero oblongo*, è lo ſteſſo che *Numero inegualmente ineguale*.

Ottava medietà moderna, ovvero *Medietà ottava moderna*, è quella, ove il terzo eccesſo ſta al primo, come il *primo termine* al ſecondo; come 6. 4. 3.

PROPORZIONE ARITMETICA, ovvero *Aritmetica proporzione*, cioè quattro *numeri Aritmeticamente proporzionali* ſono due *ragioni Aritmetiche ſimili*, per denotare le quali ſi ſcrivono così 6.4.: 10. 8.

Proporzione Aritmetica continua, ovvero *Aritmetica proporzione continua*, è una ſimilitudine di ragioni Aritmetiche, come 1, 2, 3, 4 ec. ovvero 1, 3, 5, 7 ec. 44. II.

PROPORZIONE ARMONICA, ovvero *Armonica proporzione*, ſono tre numeri, in tal maniera, che il primo ha la medeſima *proporzione Geometrica* al terzo, che ha la differenza tra il primo e il ſecondo, alla differenza tra il ſecondo, e il terzo. 67. II.

PROPORZIONE GEOMETRICA, ovvero *Geometrica proporzione* è una ſimilitudine di ragioni Geometriche, dal che ſi vede, che queſti quattro numeri 2. 3:: 4. 6, ſono in Proporzione Geometrica, perchè la *ragione Geometrica* di 2 a 3 è ſimile di quella di 4 a 6, come pure queſti quattro numeri $\sqrt{2}.\sqrt{3}::\sqrt{18}.\sqrt{27}$, ſono in proporzione Geometrica, peechè la ragione della $\sqrt{2}$, alla $\sqrt{3}$ è uguale a quella della $\sqrt{18}$, alla $\sqrt{27}$, che è la ſteſſa che quella di $3\sqrt{2}$ a $3\sqrt{3}$.

Proporzione razionale, è quella, ove l'una delle due ragioni uguali è *razionale*, come 2. 3 :: 4. 6, ovvero queſta $\sqrt{2}.\sqrt{8}::\sqrt{3}.\sqrt{12}$.

Proporzione irrazionale, è quella, ove l'una delle due ragioni uguali è *irrazionale*, come $2.\sqrt{6}::\sqrt{12}.\sqrt{18}$, oppure queſta $\sqrt{2}.\sqrt{6}::\sqrt{5}.\sqrt{15}$.

Proporzione di ugualità ben ſituata, è quando vi ſono più di due *termini* in un luogo, ed altrettanti *proporzionali* in un altro, e che ſi comparano nel medeſimo ordine, quelli poſti in un luogo, e quelli poſti nell'altro. Come ſe in un luogo foſſero queſti tre termini 2, 3, 9, e nell'altro queſti tre 4, 6, 18 proporzionali ai precedenti, di modo che ſia 2 a 3, come 4 a 6, e 3 a 9, come 6 a 18.

Proporzione di egualità mal ſituata, è quando vi ſono più di due numeri in un luogo, ed altrettanti proporzionali ai precedenti in un altro, e che ſi comparino con ordine differente. Come ſe in un luogo foſſero queſti tre numeri 2, 3, 9, e nell'altro queſti tre altri 8, 24, 36, proporzionali ai tre precedenti 2, 3, 9 con un ordine differente, di modo, che ſia 2 a 3, come 24 a 36, e 3 a 9, come 8 a 24.

Proporzione per ragione alterna, detta *permutando*, è quando ſi paragonano gli *antecedenti* di due ragioni uguali l'uno con l'altro, come di queſta proporzione 2. 3:: 4. 6, ſi dirà 2. 4:: 3. 6. Queſto modo tien luogo ancora nelle *proporzioni Aritmetiche*.

Proporzione per ragione converſa detta *invertendo* è una comparazione dei *conſeguenti* di due ragioni uguali ai ſuoi *antecedenti*. Come ſe ſarà 2. 3:: 4. 6, ſi dirà 3. 2:: 6. 4; e queſto modo ancor eſſo tien luogo nelle *proporzioni Aritmetiche*.

Proporzione per compoſizion di ragione detta *Componendo* è una comparazione dell'*antecedente*, e del *conſeguente* inſieme uniti al

ſo-

ſolo *conſeguente* di due *ragioni uguali*, come 2. 3 :: 4. 6, ſi dirà 5. 3:: 10. 6.

Proporzione per diviſion di ragione, detta *dividendo*, è una comparazione dell'eccesſo dell'*antecedente* ſopra il *conſeguente* al medeſimo conſeguente in due *ragioni uguali*: come 3. 2:: 12. 8, che ſarà 1. 2:: 4. 8.

Proporzione per converſion di ragione, è la comparazione dell'*antecedente* alla differenza dell'antecedente, e del *conſeguente* di due ragioni uguali: come 2. 3:: 8. 12 ſarà 2. 1:: 8. 4.

Proporzioni continue, ſono quelle, i di cui *termini medii* fanno uffizio di *antecedenti*, e di *conſeguenti*: come ∴ 2, 6, 18, 54, perchè non ſolamente, come ſta 2 a 6, così ſta 18 a 54, ma come 2 a 6, così 6 a 18, e come 6 a 18, così 18 a 54. 22. I.

Proporzioni diſcontinue, *o diſcrette*, ſono quelle, ove i termini medj non ſi poſſono prendere, come *antecedenti*, *e conſeguenti*, dal che ſi conoſce, che queſta *proporzione Geometrica* è diſcretta 2. 4:: 3. 6, mentre benchè 2 ſtia a 4, come 3, a 6, niente di meno 2 non ſtà a 4, come lo ſteſſo 4 a 3. Ciò s'intende ancora della proporzione Aritmetica. 23. I.

Proporzionali continui, *o continui proporzionali*, ſono i numeri in proporzione continua Aritmetica, e Geometrica, come queſti ∴ 2, 4, 8, 16 ec. che ſono in proporzione continua Geometrica, ovvero 2, 4, 6, 8 ec. che ſono in proporzione continua Aritmetica.

Proporzionalità, è la proporzione che ſi trova fra due *ragioni Geometriche*, e i loro *denominatori*, ovvero fra quattro ragioni Geometriche proporzionali, dalla qual coſa è chiaro eſſervi proporzionalità fra queſte due ragioni 2 a 3, e 4 a 5, e i loro denominatori $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$, ovvero 5, 6.

Progreſſione è una ſerie di quantità, che hanno fra di loro qualche ſorta di rapporto, o ragione ſimile.

PROGRESSIONE ARITMETICA, ovvero *Aritmetica progreſſione*, è una ſerie, o ſeguito di numeri che ſono in una *continua proporzione Aritmetica*, come 1, 2, 3, 4, 5 ec. ovvero 1, 3, 5, 7, 9 ec. 44. II.

Progreſſione Aritmetica naturale, ovvero *Aritmetica progreſſione naturale*, è quella, che principia dall'unità, colla differenza di una unità, così 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ec. 46. II.

Progreſſione Aritmetica naturale pari, ovvero *Aritmetica progreſſione naturale pari*, è quella, che principia da 2 colla differenza 2, così 2, 4, 6, 8 ec. 47. II.

Progreſſione Aritmetica naturale impari, ovvero *Aritmetica progreſſione naturale impari*, è quella, che principia dall'unità, colla differenza 2, così 1, 3, 5, 7 ec. 48. II.

Pro-

Progreſſione Aritmetica creſcente, o aſcendente, ovvero *Aritmetica progreſſione creſcente, o aſcendente*, è quella, che nel continuarla ſempre creſce, come queſta 1, 4, 7, 10, 13 ec. 50. II.

Progreſſione Aritmetica decreſcente, o deſcendente, ovvero *Aritmetica progreſſione decreſcente, o deſcendente*, è quella, che nel continuarla ſempre ſi diminuiſce, come queſta 15, 13, 11, 9 ec. 51. II.

PROGRESSIONE GEOMETRICA, o Geometrica progreſſione, è una ſerie di numeri, che ſono in una continua *proporzione Geometrica*, come 1, 2, 4, 8, 16, 32 ec. 55. II.

Progreſſione Geometrica creſcente, o aſcendente, è quella, che ſempre va creſcendo, come 2, 4, 8, 16, 32, 64 ec. 56. II.

Progreſſione Geometrica decreſcente, o diſcendente, è quella che va diminuendo, come 32, 16, 8, 4, 2 ec. 57. II.

Parte di un numero è un *numero* qualunque più piccolo; onde ſi conoſce che 3, 4, 5 ſono parti di 7.

Parte aliquota, ovvero *aliquota parte* d'un *numero*, è un numero più picciolo, che è compreſo in un più grande un certo numero di volte, ſenza avanzo. 15. I.

Parti aliquote ſimili, ovvero *ſimili parti aliquote*, ſono quelle, che ſono ugualmente contenute dai loro *multipli*: onde ſi conoſce che queſti due numeri 3, e 5 ſono parti aliquote ſimili di queſti due 18, 30, perchè 3 è contenuto 6 volte nel ſuo multiplo 18, come parimente 5 è contenuto 6 volte nel ſuo multiplo 30.

Parte aliquanta, ovvero *aliquanta parte* di un *numero*, è un numero più picciolo, il quale è contenuto nel più grande un certo numero di volte non eſattamente, ma vi rimane qualche coſa. 16. I.

Parti aliquante ſimili, ovvero *ſimili parti aliquante*, ſono numeri che contengono ugualmente delle ſimili parti aliquote del loro *Tutto*; così ſi conoſce, che queſti due numeri 9, 18 ſono *parti ſimili aliquante* di queſti due 12, 24, perchè 9 contiene tre volte il quarto di 12 che è 3, e parimente 18 contiene tre volte il quarto di 24 che è 6.

Primo termine di qualſivoglia *medietà* fuori delle tre medietà, cioè Aritmetica, Geometrica, e Armonica, è quello; che è il più grande degli altri due.

Primo termine di una medietà moderna, è l'eccesſo del primo termine ſopra il ſecondo.

Prima figura di un numero compoſto di molte figure, è l'ultima poſta a deſtra. 7. I.

PARTIRE, DIVIDERE, o DIVISIONE, è il modo di trovare quanto un *numero* capiſce in un altro. 66. I.

Partire, o dividere per colonna, o per teſta, è quella diviſione che ſi può fare in una ſol riga. 66 $\frac{1}{2}$, I.

Partire, o dividere per danda alla lunga, vuol dire la diviſione di quei *numeri*, che non ſi poſſono dividere in una ſol riga. 67. I.

Partire, o dividere per danda alla coſta, vuol dire dividere un *numero* con maggior brevità della danda alla lunga. 68. I.

Partire, o dividere di diverſa ſpecie, vuol dire dividere delle quantità che ſieno di diverſa ſpecie. 70. I.

Partire, o dividere mediante la Tavola Pitagorica, vuol dire nel far la diviſione ſervirſi della Tavola Pitagorica. 72. I.

Partire, o dividere mediante i Logaritmi, vuol dire nel fare la diviſione ſervirſi dei Logaritmi. 73. I.

Partire, o dividere all'uſo Oltramontano, vuol dire dividere nel modo che uſano i Popoli poſti di là dai Monti. 74. I.

Partire, o dividere per Battello, vuol dire fare la diviſione in forma di Battello. 75. I.

Partire, o dividere per Galea, vuol dire fare la diviſione in forma di Galea. 76. I.

Partire, o dividere per ripiego, vuol dire partire in più volte. 77. I.

Prova del 7, 9 ec. vuol dire eſaminare ſe una operazione Aritmetica fu ben fatta mediante i numeri 7, 9 ec. 83. I.

Prova del ſommare, vuol dire, conoſcere ſe la ſomma fu ben fatta. 79. I.

Prova del ſottrarre, vuol dire conoſcere ſe la ſottrazione fu ben fatta. 84. I.

Prova del moltiplicare, vuol dire conoſcere ſe la *moltiplicazione* fu fatta a dovere. 87. I.

Prova del partire, o dividere, vuol dire conoſcere ſe la diviſione fu ben fatta. 90. I.

Provare ſe le operazioni Aritmetiche ſieno fatte a dovere, vuol dire far l'eſame ſopra dette operazioni per conoſcere ſe furono ben fatte. 111. fino 112 ec. I.

Provare la ſomma colla ſteſſa ſomma, vuol dire mediante la ſomma conoſcere ſe la ſomma fu ben fatta. 80, 81. I.

Provare la ſomma colla moltiplicazione, vuol dire mediante la moltiplicazione conoſcere, ſe la ſteſſa ſomma fu ben fatta. 82. I.

Provare la ſomma colle prove del 7, 9 ec., vuol dire conoſcere, mediante il 7, 9 ec. ſe la ſomma fu fatta a dovere. 83. I.

Provare la ſottrazione, mediante la ſteſſa ſottrazione, vuol dire col mezzo della ſottrazione conoſcere ſe la ſottrazione fu ben fatta. 85. I.

Provare la ſottrazione, colle prove del 7, 9 ec. vuol dire conoſcere, mediante il 7, 9 ec. ſe la ſottrazione fu ben fatta. 86. I.

Provare le moltiplicazioni, mediante la ſottrazione, e la moltiplicazione, vuol dire coll'ajuto della *ſomma*, e della *moltiplicazione*, co-

conoſcere ſe la moltiplicazione fu ben fatta. 88. I.

Provare la moltiplicazione, colle prove del 7, 9 ec., vuol dire conoſcere, mediante il 7, 9 ec. ſe la *moltiplicazione* fu ben fatta. 89. I.

Provare la diviſione, colla ſteſſa diviſione, vuol dire conoſcere ſe la diviſione fu ben fatta, coll'ajuto della ſteſſa diviſione. 91. I.

Provare la diviſione, colle prove del 7, 9 ec. vuol dire conoſcere mediante il 7, 9 ec. ſe la diviſione fu ben fatta. 92. I.

Profitto, intereſſe, merito, o frutto, è quel tanto che ſi paga per cento l'anno, per le mercanzie, o denari che ſi prendono a cenſo. 31. II.

Profitto dei profitti, è lo ſteſſo, che *Cenſo a capo d'anno*. 34. II.

Pratica Aritmetica, ovvero *Aritmetica pratica*, è quella che inſegna l'*Arte* di computare. 3. I.

Prodotto, vuol dire il *numero* che proviene dalla *moltiplicazione* di due altri numeri. 44. I.

Poteſtà, Potenze, o Dimenſioni, ſono tutti quei *prodotti*, che ſi poſſono avere da qualſivoglia *numero* moltiplicandolo continuamente per lo ſteſſo numero; onde ſe ſi ſarà moltiplicato due volte, come 2 via 2, che fa 4, queſto 4, che è il *quadrato* chiamaſi *ſeconda poteſtà*, il detto 4 moltiplicato per lo ſteſſo 2 fa 8, che è *numero cubo*, chiamaſi *terza poteſtà*, ſe queſto 8 ſi moltiplica per 2, il 16, che ne proviene, ſarà la *quarta poteſtà*, e così di ſeguito. 112. I.

Prezzo medio nelle *alligazioni*, è il valor mezzano, col quale ſi vogliono pagare le Merci. 23. II.

Permutazione, vuol dire, di più coſe ſapere, quante volte poſſonſi mutare di luogo, in modo che ſempre ne naſca diverſo ordine. 2.3. III.

Q

QUarta *medietà*, ovvero *medietà quarta*, è quella, ove il terzo *termine* ſta al primo, come l'eccesſo del primo, ſopra il ſecondò, all'eccesſo del ſecondo ſopra il terzo, come 6, 5, 3.

Quinta medietà, ovvero *medietà quinta*, è quella, ove il terzo *termine* ſta al ſecondo, come l'eccesſo del primo ſopra il ſecondo, all'eccesſo del ſecondo ſopra il terzo, come 41, 36, 16.

Quadrato, o numero quadrato, vuol dire il *prodotto* di qualunque numero moltiplicato in ſe ſteſſo. 28. I.

Quadrata radice, cioè *Radice quadrata*, vuol dire quel *numero* che ſi è moltiplicato in ſe ſteſſo per averne un *numero quadrato*. 29. I.

Quadrati Magici, ſono certi quadrati con alcune Caſelle piene di numeri diſpoſti in modo, che le loro *ſomme, e moltiplicazioni* preſe per ogni lato del quadrato, come ancora per le diagonali ſono uguali. 64. II.

Quadrati Magici pari, ſono quelli che hanno una quantità di Caſelle in numero pari. 55. II.

Quadrati Magici impari, ſono quelli, che hanno una quantità di Caſelle in numeri impari. 65. II.

Quadrati Magici in progreſſione Aritmetica, ſono quelli che hanno i loro numeri in *proporzione Aritmetica*. 64. II.

Quadrati Magici in progreſſione Geometrica, ſono quelli che hanno i loro numeri in *proporzione Geometrica*, 66. II.

Quadrati Magici in progreſſione Armonica, ſono quelli che hanno i loro numeri in *proporzione Armonica*. 68. II.

Quoziente, vuol dire quel numero che moſtra quanto di due dati numeri uno capiſce nell'altro. 66. I.

R

Ragione in numeri, è la comparazione che ſi fa di due numeri fra di loro per rapporto alla loro quantità. 17. I.

Ragione Aritmetica, ovvero *Aritmetica ragione* è la comparazione che ſi fa di due numeri per rapporto all'eccesſo del più grande ſopra il più picciolo, ovvero è quello che manca al più picciolo per uguagliare il più grande, quando ſono inuguali, ovvero all'egualità dei due numeri quando ſono uguali.

Ragione Aritmetica razionale, ovvero *Aritmetica ragione razionale*, è quella, dove li due *termini* ſono *razionali*, come la ragione di 2 a 3.

Ragiooe Aritmetica irrazionale, ovvero *Aritmetica ragione irrazionale*, è quella, dove li due *termini* non ſono razionali, come la ragione di 2 alla $\sqrt{5}$, e la ragione della $\sqrt{2}$, alla $\sqrt{5}$, e così delle altre.

Ragione Geometrica, o *Geometrica ragione*, è la comparazione che ſi fa di due numeri per rapporto al numero delle volte che l'uno contiene una delle *parti aliquote dell' altro*.

Ragione di egualità, o *egualità di ragione*, è quella, che ſi trova fra due numeri uguali, come la ragione di 2 a 3, di 3 a 3 ec. 18. I.

Ragione d' inugualità, o *inugualità di ragione*, è quella, che ſi trova fra due numeri inuguali, come la ragione di 5 a 6, ovvero di 6 a 5 ec.

Ragione Geometrica più grande di un' altra, è quella, dove l'*antecedente* contiene più di *parti aliquote* del ſuo *conſeguente*, che l'antecedente dell' altre non ne contiene di *parti aliquote ſimili* del ſuo conſeguente; onde ſi conoſce che la ragione di 10 a 4 è più grande che quella di 3 a 2, perchè l'antecedente 10 contiene cinque metà del ſuo conſeguente 4, e che l'antecedente 3 non contiene che tre metà del ſuo conſeguente 2.

Ragione Geometrica più picciola di un' altra, è quella, dove l'*antecedente* contiene meno di *parti aliquote* del ſuo *conſeguente*, che l'antecedente dell' altra ne contiene delle *parti aliquote ſimili* del ſuo con-

conſeguente, come la ragione di 3 a 2 è più picciola di quella di 7 a 4, perchè l'antecedente 3 contiene tre metà del ſuo conſeguente 2, e l'antecedente 7 contiene più di tre metà del conſeguente 4.

Ragione di più grande inegualità è quella, ove l'*antecedente* è più grande che il *conſeguente*, dove ſi conoſce che la ragione di 3 a 2, è una ragione di più grande inegualità, perchè l'antecedente 3, è più grande del conſeguente 2.

Ragione di più picciola inegualità, è quella, ove l'*antecedente* è più picciolo che il *conſeguente* : così ſi conoſce che la ragione di 2 a 3, è una ragione di più picciola inegualità, perchè l'antecedente 2, è più picciolo del ſuo conſeguente 3.

Ragione ſuperparticolare, o *Superparticolare ragione*, è quella, ove l'*antecedente* contiene una volta il *conſeguente*, e di più una *parte aliquota* del medeſimo conſeguente. 61. II.

Ragione ſeſquialtera, o *Seſquialtera ragione*, è una ragione *ſuperparticolare*, dove l'*antecedente* contiene il *conſeguente* una volta e mezza, come la ragione di 3 a 2 ec.

Ragione ſeſquiterza, o *ſeſquiterza ragione* è quella, dove l'*antecedente* contiene il *conſeguente* una volta, e un terzo, come la ragione di 8 a 6 ec.

Ragione ſeſquiquarta, o *Seſquiquarta ragione*, è quella, dove l'*antecedente* contiene il *conſeguente* una volta, e un quarto, come la ragione di 15 a 12, e così delle altre, cioè *Seſquiquinta*, *Seſquiſeſta* ec.

Ragione multipla è quella, ove l'*antecedente* contiene il *conſeguente* più di una volta eſattamente.

Ragione dupla, è quella, dove l'*antecedente* contiene due volte il *conſeguente*.

Ragione tripla, è quella, dove l'*antecedente* contiene tre volte il *conſeguente quadrupla*; quando lo contiene quattro volte, e così delle altre.

Ragione ſurparciente, o *ſurparciente ragione*, è quella, ove l'*antecedente* contiene una volta il *conſeguente*, e di più una *parte aliquanta* del medeſimo conſeguente.

Ragione Surbiparciente terza, o *Surbiparciente terza ragione*, è quando l'*antecedente* contiene il ſuo *conſeguente* una volta, e due terzi, come quella di 20 a 12 ec. ſe una volta e tre quarti, chiamaſi *ſurbiparciente quarta*, come 21 a 12, ſe una volta, e quattro quinti *ſurbiparciente quinta*, come quella di 9 a 5, e così delle altre.

Ragione multipla ſurparticolare, è quella, ove l'*antecedente* contiene più volte il *conſeguente*, e di più una *parte aliquota* del medeſimo conſeguente.

Ragione dupla ſeſquialtera, è quella, ove l'*antecedente* contiene

due

due volte il *conſeguente* con di più la metà del medeſimo conſeguente come 15 a 6, ſe l'antecedente contiene tre volte il conſeguente, e ancora la terza parte del medeſimo conſeguente, la ragione ſi chiama *tripla ſeſquialtera*, come quella di 20 a 6. Se l'antecedente contiene quattro volte il conſeguente, e ancora una quarta parte del medeſimo conſeguente, la ragione chiamaſi *quadrupla ſeſquialtera*, come quella di 17 a 4, e così delle altre.

Ragione multipla ſurparciente, è quella, ove l'*antecedente* contiene più volte il *conſeguente*, e di più una *parte aliquanta* del medeſimo conſeguente. Se l'antecedente contiene due volte il conſeguente, e ancora i due terzi del medeſimo conſeguente, queſta ragione ſi chiama *dupla ſurbiparciente terza*, come la ragione di 8 a 3. Se l'antecedente contiene tre volte il conſeguente, e ancora tre quarti del medeſimo conſeguente, la ragione chiamaſi *tripla ſurtriparziente quarta*, come quella di 15 a 4. Se poi l'antecedente contiene quattro volte il conſeguente, e ancora quattro quinti del medeſimo conſeguente, la ragione ſi chiama *quadrupla ſurquadruparziente quinta*, come quella di 24 a 5, e così delle altre.

Ragione ſumultipla, è quella, ove l'*antecedente* è contenuto eſattamente nel *conſeguente* più di una volta: e ſe è contenuto due volte, la ragione chiamaſi *ſudupla*, come 3 a 6, e ſe è contenuto tre volte *ſutripla*, come 2 a 6. Se quattro volte ſuquadrupla, come 3 a 12, e così delle altre.

Ragione ſuſurparticolare, è quella, ove il *conſeguente* contiene una volta l'*antecedente*, e di più una *parte aliquota* del medeſimo antecedente: e ſe queſta parte aliquota è una metà, allora la ragione ſi chiama *ſuſeſquialtera*, come 2 a 3. Se la detta parte aliquota è un terzo, allora ſi chiama *ſuſeſquiterza*, come 6 a 8. Se poi la parte aliquota è un quarto, la ragione chiamaſi *ſuſeſquiquarta*, come la ragione di 12 a 15, e così delle altre.

Ragione ſuſurparciente, è quella, ove il *conſeguente* contiene una volta l'*antecedente*, e di più una *parte aliquanta* del medeſimo antecedente. Se queſta parte aliquanta è due terzi, allora la ragione chiamaſi *Suſurbiparciente terza*, come 3 a 5. Se è tre quarti, chiamaſi *ſuſurtriparciente quarta*, come 4 a 7. Se poi è quattro quinti, chiamaſi *ſuſurquadurparciente quinta*, come 5 a 9, e così delle altre.

Ragione ſumultipla ſurparticolare, è quella, ove il *conſeguente* contiene più volte l'*antecedente*, e di più una *parte aliquota* del medeſimo antecedente. Se il conſeguente contiene due volte l'antecedente, e ancora la metà del medeſimo antecedente, allora queſta ragione chiamaſi *ſudupla ſeſquialtera*, come 2 a 5. Se il conſeguente contiene tre volte l'antecedente, e ancora la terza parte del medeſimo antecedente, la ragione chiamaſi *ſutripla ſeſquiterza*,

co-

come 3 a 10; ma ſe l'antecedente contiene quattro volte il conſeguente, e ancora una quarta parte del medeſimo antecedente, chiamaſi *ſuquadrupla ſeſquiquarta*, come 14 a 17, e così delle altre.

Ragione ſumultipla ſurparciente, è quella, ove il *conſeguente* contiene più volte l'*antecedente*, e di più una *parte aliquanta* del medeſimo antecedente: e ſe il conſeguente contiene due volte l'antecedente, ed ancora i due terzi del medeſimo antecedente, allora queſta ragione ſi chiama *ſudupla ſurbiparciente terza*, come la ragione di 3 a 8: e ſe il conſeguente contiene tre volte l'antecedente, e ancora tre quarti del medeſimo antecedente, la ragione ſi dice *ſutripla ſutriparciente quarta*, come 4 a 15: ma ſe il conſeguente contiene quattro volte l'antecedente, e ancora quattro quinti del medeſimo antecedente, la ragione diceſi *ſuquadrupla ſurquadruparciente quinta*, come la ragione di 5 a 24, e così delle altre.

Ragione Geometrica razionale, è quella, alla quale ſe ne può dare un'altra ſimile in numeri noti, come la ragione di 6 a 9, la quale è uguale a quella di due *numeri razionali*, così la ragione di 2 alla $\sqrt{8}$, che è uguale a quella dei due numeri razionali 1, e 2.

Ragione Geometrica irrazionale, è quella, alla quale non ſe ne può dare un'altra uguale in *numeri razionali*: tale è la ragione di 2 alla $\sqrt{5}$, e così la ragione della $\sqrt{5}$, alla $\sqrt{6}$, ma la ragione della $\sqrt{27}$, alla $\sqrt{12}$ è razionale, perchè è uguale a quella di 3 a 2.

Ragione dura è quella, alla quale ſe ne può dare un'altra uguale.

Ragione Armonica, o *Armonica ragione*, è la comparazione di due *numeri razionali*, in tanto che eglino ſono applicati a miſurare l'armonia del ſuono nella Muſica.

Ragione ſenza alcun'altra ſpecificazione deeſi ſempre intendere per la *ragione Geometrica*.

Ragione dupla di due ragioni, s'intende quella fra tre *numeri* in *proporzione continua*, come 2, 4, 8 dove la ragione di 2 a 8, ſi dice dupla delle due ragioni di 2 a 4, e di 4 a 8.

Ragione tripla di tre ragioni, s'intende quella fra quattro numeri in *proporzione continua*, come 2, 4, 8, 16, dove la ragione di 2 a 16, ſi dice tripla delle tre ragioni di 2 a 4, di 4 a 8, e di 8 a 16.

Ragione compoſta, è quella, dove l'*antecedente* è uguale al *prodotto* degli antecedenti di più *ragioni Geometriche*, e i *conſeguenti* uguali al prodotto dei conſeguenti delle medeſime ragioni. Così ſi conoſcerà che la ragione compoſta delle ragioni di 2 a 3, di 4 a 5, e di 6 a 11, è uguale a quella di 48 a 165.

Ragione di due ragioni Geometriche, è la *ragione Geometrica* dei loro *denominatori*, ove ſi conoſce, che la ragione di 2 a 3 ſta alla ragione di 5 a 6, come $\frac{2}{3}$ a $\frac{5}{6}$, ovvero come 4 a 5.

Ra-

Ragioni Aritmetiche uguali, o ſimili, ovvero *Aritmetiche ragioni uguali, o ſimili*, o pure *ſimili, o uguali ragioni Aritmetiche*, ovvero *uguali, o ſimili ragioni Aritmetiche*, ſono quelle, ove la differenza dei più piccioli termini è uguale alla differenza dei più grandi, come la ragione di 2 a 5 è uguale, o ſimile a quella di 6 a 9 perchè la differenza 3 delli più piccioli *termini* 2, e 5 è uguale alla differenza dei più grandi 6, e 9.

Ragioni Geometriche uguali, o ſimili, ovvero *Geometriche ragioni uguali, o ſimili*, o pure *ſimili, o eguali ragioni Geometriche*, o ancora *uguali, o ſimili ragioni Geometriche*, ſono quelle, i di cui più piccioli *termini* ſono *ſimili parti aliquote*, o *aliquante* dei più grandi, come queſta di 3 a 6, è uguale, o ſimile a queſt' altra di 4 a 8 ec. 19. I.

Ragioni inuguali, ſono quelle, ove l' *antecedente* non ha in ciaſcheduno lo ſteſſo rapporto al ſuo *conſeguente*; queſto però s'intende nelle ſole *ragioni Geometriche*.

Ragioni Geometriche proporzionali, ſono quelle, che hanno i loro *denominatori Geometricamente proporzionali*, come ſono le ragioni di 2 a 3, di 4 a 7, e di 24 a 49 ec.

RABDOLOGIA, è il modo di contare colle colonne, o verghette della *Tavola Pitagorica*. 49. 72. I.

Rotto, Numero rotto, o frazione, è quello che rappreſenta la parte di un' unità, come $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ ec. 93. I.

Rotto improprio, ovvero *numero rotto improprio*, è quello che è maggiore dell' unità, come, $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{5}$ ec. 96 $\frac{1}{2}$. I.

Rotto di rotto, ovvero *frazione di frazione*, o *frazioni ſeconde*, è una parte di una frazione. 107. I.

Rotto di rotto di un rotto, ovvero *frazioni di frazioni di una frazione*, *oppure frazioni terze, o rotti terzi*, s' intende per una parte *di rotto di rotto*, e così s' intende per le *frazioni, o rotti quarti*, cioè una parte *dei rotti, o frazioni terze*, e così di ſeguito. 108. I.

Rotti, o frazioni della medeſima denominazione, ovvero *della medeſima ſpecie*, ſono quelli, che hanno i ſuoi *denominatori* uguali, come $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{7}$ ec. 103. I.

Rotti, o frazioni di diverſe denominazioni, ovvero *di diverſa ſpecie*, ſono quelli che hanno i loro *denominatori* inuguali, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ ec. 104. I.

Rotti, o frazioni prime, ſono quelle, che hanno i loro *numeratori*, e *denominatori*, che ſono *numeri primi*, come $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ ec.

Rotti, o frazioni ſimili, o equivalenti ſono quelli, i di cui *numeratori* ſono *ſimili parti aliquote* dei loro *denominatori*, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ ec.

Rotti, o frazioni decimali, ſono quelle che hanno il *denominatore*, che è l'unità accompagnata con dei *zeri*, come $\frac{2}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{15}{10000}$ ec. 96. II.

Rot-

Rotti, *o frazioni decimali prime*, *ſeconde*, *terze* ec. s'intendono nel ſeguente modo, ſe nel *denominatore* v'è un ſol *zero*, queſta è *frazione decimale prima*, come $\frac{4}{10}$, ſe due, come $\frac{7}{100}$ è *frazione decimale ſeconda*, ſe tre, *terza*, e così deeſi intendere delle altre. 110. I.

RADICE QUADRATA, vuol dire quel *numero*, che ſi è moltiplicato in ſe ſteſſo per averne un *numero quadrato*. 29. I.

RADICE CUBA, ovvero *Cuba Radice*, è quel *numero*, che ſi moltiplica tre volte in ſe ſteſſo, per averne il *numero* Cubo. 31. I.

Radice quadrato-quadrata, è quel *numero* provenuto dalla *moltiplicazione* di un *numero cubo*, come 2 è la radice quadrato-quadrata di 16, che è un numero provenuto dalle moltiplicazioni del numero cubo 8, per la ſua radice cuba 2.

Radice di qualſivoglia potenza, *o dimenſione*, è quel *numero*, che fu *moltiplicato* tante volte in ſe, che produce la data *potenza*.

Radice ſorda, *o irrazionale* di qualſivoglia *numero*, è quella che non ſi può eſprimere per neſſun numero, come la *radice quadrata di* 18, la *Cuba* di 9 ec., e così delle altre. 115. I.

Radice incommenſurabile, è lo ſteſſo che *radice ſorda*, *o irrazionale*. 115. I.

Radice razionale, *o commenſurabile*, è quella, che ſi può eſprimere preciſamente; come la *radice quadrata* di 4, che è preciſamente 2, la *radice Cuba* di 27, che è preciſamenre 3, e così delle altre.

Radice quadrata eccedente, è quella *radice quadrata irrazionale*, che è più del vero. 116. I.

Radice quadrata ſcarſa, è quella *radice quadrata irrazionale*, che è minore del vero. 116. I.

REGOLA DEL TRE, *REGOLA DI PROPORZIONE*, o *REGOLA AUREA*, è quella, che inſegna la maniera di trovare a tre numeri dati un quarto *numero Geometricamente proporzionale*. 1. II.

Regola del tre dritta, è quella, dove il *primo termine* ha la medeſima ragione a uno degli altri due, che deve avere il terzo al quarto, che ſi cerca. 2. II.

Regola del tre roveſcia, è quella, il di cui *terzo termine* ha la medeſima ragione a uno degli altri due, come la deve avere l'altro, cioè l'ultimo al quarto, che ſi cerca. 13. II.

Regola del tre in decimali, vuol dire, che i *termini* ſieno *numeri decimali*. 8. II.

REGOLA COMPOSTA, *O MOLTIPLICE*, è quella, che inſegna la maniera di trovare a molti *termini* dati un altro *proporzionale*. 14. II.

Regola del cinque, è quella *regola compoſta*, che ha cinque *termini*, la quale inſegna il modo di trovare il ſeſto proporzionale. 14. II.

Regola del ſette, è una *regola compoſta*, che ha ſette *termini*, e inſegna di trovare l'ottavo *proporzionale*. 14. II.

Regola del nove è una *regola compoſta*, che ha nove *termini*, e

insegna di trovare il decimo *proporzionale*. 14. II.

Regola Congionta, è una *regola composta*, colla quale si congiunge, e riduce in una sola più *regole del tre*. 14. 15. II.

Regole composte, *o moltiplici rovescie* del 5, 7, 9 ec., e congionte sono quelle, nelle quali operando all' uso delle dritte danno un *numero* minore di quello che deve essere. 16. 17. II.

REGOLA DELLE COMPAGNIE, o *SOCIETA'*, è quella, per la quale si divide un *numero* dato *poporzionalmente* a più altri. 18. II.

Regola delle Compagnie semplice, è quella per la quale si *divide* semplicemente un numero dato *proporzionalmente* a più altri dati, senza mutarli. 18. II.

Regola delle Compagnie composte, è quella, per la quale si *divide* un numero dato *proporzionalmente* a più altri, con delle condizioni, che mutano questi numeri. 19. II.

REGOLA TESTAMENTARIA, è lo stesso, che *la regola delle Compagnie*, solo che serve *a dividere* un numero dato *proporzionalmente* a più altri nelle distribuzioni fatte per testamenti. 20 II.

REGOLA DELLE ALLIGAZIONI, ovvero *Alligazioni*, *o equivalenze*, è quella, che insegna a alligare, o meschiare insieme più cose di diverso valore, e di trovare quanto ne bisogna prendere di ciascuna, secondo il numero della dimanda. 22. II.

Regola delle Alligazioni in egualità, ovvero *Alligazione in egualità*. è allora quando le cose da alligarsi sono uguali di numero. 24. II.

Regola delle Alligazioni in inegualità, ovvero *Alligazione in inegualità*, è allora che le cose da alligarsi, sono inuguali di numero. 25. II.

REGOLA DELLE FALSE POSIZIONI, detta del *Cataino*, è una regola, che insegna di sciorre alcune dimande con de' falsi supposti. 26. II.

Regola delle false posizioni semplice, è quella, che insegna a risolvere una dimanda con una sola posizione, o supposto falso. 27. II.

Regola delle false posizioni doppia, è quella, che insegna di sciorre una dimanda con due posizioni, o supposti falsi. 28. II.

Regola dei Baratti, insegna il modo di barattare le merci con altre, il di cui prezzo sia stato alterato. 29. II.

Regola degli Affitti, è quella, che insegna a sciorre le dimande attinenti agli Affitti di Case, Possessioni ec. 41. II.

Regola della estimazione della forza della quantità, *del numero ec.* *insegna* il modo di trovare quanto operano alcuni lavoranti rispettivamente alla loro quantità di operazione, di tempo ec., ed altre simili. 43. II.

Regola del cento, è quella *regola del tre*, il di cui primo *termine* è sempre 100.

Re-

Regola d'intereſſe, o di frutti, è una *regola del tre*, che inſegna a trovare il guadagno d'una quantità di denari, poſta a *cenſo* a un tanto per cento, per lira, o altramente in un determinato tempo. 30. II.

Ridurre a minori termini, o denominazione, ovvero *abbaſſare, o ſchiſare una frazione*, vuol dire trovarne un'altra uguale alla data, ma compoſta di numeri minori. 99. I.

Ridurre qualſivoglia quantità nelle ſue minime ſpecie, vuol dire ſe ſono verbigrazia lire ridurle in ſoldi, o in denari. Se ſono pertiche, in piedi, oncie, o punti ec. 69. I.

Ridurre gl'intieri, o intieri, e rotti in rotto, vuol dire, ridurre i dati numeri in *numeri rotti*. 96. I.

Ridurre rotti in intieri, vuol dire, ridurre un *rotto improprio* in intieri. 98. I.

Ridurre le quantità allo ſteſſo rotto, vuol dire, ridurre due quantità in *rotto di una medeſima denominazione*. 97. I.

Ridurre un rotto, o un intiero, e rotto a rotto di una data denominazione, vuol dire, ridurre i dati numeri in rotti, che abbiano tutti il dato denominatore. 105. I.

Ridurre i rotti di rotti, o frazioni ſeconde, terze ec., *a rotti comuni*, vuol dire, trovare che parte il dato *rotto* è della ſua unità. 109. I.

Ridurre i Termini di una regola del tre a minor denominazione, vuol dire, ridurli in numeri minori, e che ſerbino la prima proporzione fra di loro. 5. II.

S

SOMMA, *o ſommare più numeri inſieme*, vuol dire, trovare un *numero*, che equivaglia ai numeri che ſi ſommano. 34. I.

Somma delle ragioni, vuol dire come ſiegue, ſieno queſte ragioni 2 a 3, 4 a 5, 6 a 11, ſarà 48 a 165, la ſomma di eſſe, che è lo ſteſſo che la loro ragione compoſta, cioè la *moltiplicazione* degli *antecedenti*, che fa 48 e quella dei *conſeguenti*, che fa 165.

Somma ſemplice, è il modo di porre inſieme più coſe di una ſola ſpecie.

Somma compoſta, o di diverſe ſpecie, è il modo di porre inſieme più coſe di differenti ſpecie.

SOTTRARRE un numero da un altro, vuol dire levare da un *numero* un altro più picciolo, cioè trovare la loro differenza. 37. 38. 39. I.

Sottrarre più numeri da un altro, o da più altri numeri, vuol dire levare la *ſomma* degli uni dalla ſomma maggiore degli altri; cioè trovare un altro numero, che ſia l'eccesſo delle ſuddette due ſomme.

Sottrarre ſemplice, è la maniera di levare un *numero*, o più numeri da un altro, o più numeri della medeſima ſpecie. Vedaſi il Queſito. 3. I.

Sottrarre compoſto, *o Sottracione compoſta*, *o di diverſe ſpecie*, è il modo di levare un *numero*, o più numeri di diverſa ſpecie, da un altro, o più numeri di diverſa ſpecie.

Sciorre la regola del tre, *mediante i Logaritmi*, vuol dire adoperare i *Logaritmi* nella ſoluzione della regola del tre. 6. II.

Sciorre la regola del tre aumentando, *o diminuendo i termini*, vuol dire far divenir più grandi, o più piccioli i numeri, che formano i *termini* della regola, e in tal modo riſolverla. 7. II.

Simili parti aliquote, ovvero *parti aliquote ſimili*, ſono quelle, che ſono ugualmente contenute dai loro *multipli*; onde ſi conoſce, che queſti due numeri 3 e 5, ſono *ſimili* parti aliquote di queſti due 18, e 30, perchè 3, è contenuto 6 volte nel ſuo multiplo 18, come parimenti 5 è contenuto 6 volte nel ſuo multiplo 30.

Simili parti aliquante, ovvero *parti aliquante ſimili*, ſono dei numeri, che contengono ugualmente delle *ſimili parti aliquote* del loro *Tutto*: così ſi conoſce, che queſti due numeri 9, 18, ſono ſimili parti aliquante di queſti due 12, 24, perchè 9 contiene tre volte il quarto di 12, che è 3, e parimente 18 contiene tre volte il quarto di 24, che è 6.

Simili, o uguali ragioni Geometriche, ovvero *ragioni Geometriche uguali, o ſimili*, oppure *Geometriche ragioni uguali, o ſimili*, ſono quelle dove i più piccioli *termini* ſono *ſimili parti aliquote*, *o aliquante* dei più grandi, come queſta di 3 a 6 è uguale, o ſimile a quell' altra di 4 a 8.

Simili, o uguali ragioni Aritmetiche, ovvero *Ragioni Aritmetiche uguali, o ſimili* ec. ſono quelle, ove la differenza dei più piccioli *termini*, è uguale alla differenza dei più grandi, come la ragione di 2 a 5, è uguale, o ſimile a quella di 6 a 9, perchè la differenza 3 dei più piccioli termini 2, e 5 è uguale alla differenza dei più grandi 6, e 9.

Secondo termine di qualſivoglia *medietà* fuori delle tre medietà, cioè *Aritmetica*, *Geometrica*, *e Armonica*, è quello, che è il mezzano fra gli altri due.

Secondo termine d' una medietà moderna, è l' eceſſo del ſecondo ſopra il terzo.

Scontare a ſcaletta, *o cenſo a ſcaletta*, è il pagare un tanto l' anno per un *Cenſo* tra il pagamento de frutti, e l' eſtinzione del *Capitale*. 32. II.

Scontare ſemplice, vuol dire diminuire il *Capitale* un tanto per cento. 33. II.

Scontare a capo d' anno, è un' operazione contraria ai *cenſi a Capo d' anno*. 36. II.

Schiſare, *Abbaſſare*, *o ridurre a minori termini*, *o denominazione* una frazione, vuol dire, trovare un' altra frazione compoſta di numeri minori, e che ſia uguale alla data. 99. I.

Schi-

Schiſatore, chiamaſi quel *numero* che *divide* il *numeratore*, e il *denominatore* di un *rotto* per *abbaſſarlo*, o *ridurlo a minori numeri*. 100. I.

Soccide, o Compagnie ruſticali, è la *regola delle Compagnie* applicata alla Gente di Villa, come per Pecore, od altri Animali dati a qualche Paſtore, con certi patti. 21. II.

Saldare le ragioni fra i Mercanti, ovvero *Conpenſazione dei pagamenti fra i Mercanti*, è il modo di ſaldare i debiti, riguardo al tempo che compenſa il pagamento. 39. II.

Submultiple, o ſumultiplice di un numero, è un altro numero più picciolo, che ſi trova compreſo un certo numero di volte eſattamente nel più grande; dove ſi conoſce, che il 3 è ſubmultiplo del numero 12, perchè trovaſi nel 12 quattro volte preciſamente. 13. 14. I.

Superparticolare ragione, o ragione ſuperparticolare, è quella, ove *l'antecedente* contiene una volta il *conſeguente*, e di più una *parte aliquota* del medeſimo conſeguente. 61. II.

Seſquialtera ragione, o *ragione ſeſquialtera*, è una *ragione ſuperparticolare*, dove l'*antecedente* contiene il *conſeguente* una volta, e mezza, come la ragione di 3 a 2.

Seſquiterza ragione, o ragione ſeſquiterza, è quella, dove *l'antecedente* contiene il *conſeguente* una volta e un terzo, come la ragione di 8 a 6.

Seſquiquarta ragione, ovvero *ragione ſeſquiquarta*, è quella, dove *l'antecedente* contiene il *conſeguente* una volta, e un quarto, come la ragione di 15 a 12, e così delle altre, cioè *ſeſquiſquinta*, *ſeſquiſeſta ec.*

Surparciente ragione, ovvero *ragione ſurparciente*, è quella, ove *l'antecedente* contiene una volta il *conſeguente*, e di più una *parte aliquanta* del medeſimo conſeguente.

Surbiparziente terza, o *ragione ſurbiparziente terza*, è quando l'*antecedente* contiene il ſuo *conſeguente* una volta, e due terzi, come quella di 20 a 12 ec. ſe lo contiene una volta, e tre quarti, chiamaſi *ſurbiparziente quarta*, come 21 a 12, ſe una volta, e quattro quinti *ſurbiparciente quinta*, come 9 a 5, e così delle altre.

Seſta medietà, ovvero *Medietà ſeſta* è quella, ove il terzo *termine* ſta al primo, come l'eccesſo del primo ſopra il ſecondo, all'eccesſo del ſecondo ſopra il terzo, come 6, 4, 1.

Settima medietà moderna, ovvero *Medietà ſettima moderna*, è quella, ove il terzo eccesſo ſta al primo, come il ſecondo al terzo, come 7, 6, 1, ovvero il primo *termine* è ſempre uguale alla *ſomma* degli altri due.

Trian-

T

Triangolo rettangolo in numeri, ſono tre *numeri razionali i quadrati* dei due più piccioli, dei quali ſono uguali al quadrato del più grande, onde queſti tre numeri 3, 4, 5 rappreſentano un triangolo rettangolo in numeri, perchè i due quadrati 9, e 16 dei due numeri 3, e 4 più piccioli ſono uguali al 25, quadrato del numero più grande 5, e così di molti altri.

TRIANGOLO ARITMETICO, è una Tavola Triangolare, o un triangolo compoſto di più Caſelle ripiene di numeri, il quale è di molto uſo nelle *combinazioni*, e nell' Algebra per formare le *potenze ec.* come ſi può vedere nel Trattato del Triangolo Aritmetico di *Monſieur Paſcal*; e queſto è lo ſteſſo che la Tavola poſta nell' antecedente Parte, cioè al Capitolo III. dell' Opuſcolo delle Combinazioni, e Permutazioni del Sig. Niccolò di Martino, inteſa però diſpoſta in Triangolo, nel modo che ſi vede quì ſotto

Triangolo Aritmetico.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
II	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
III	1	3	6	10	15	21	28	36		
IV	1	4	10	20	35	56	84			
V	1	5	15	35	70	126				
VI	1	6	21	56	126					
VII	1	7	28	84						
VIII	1	8	36							
IX	1	9								
X	1									

Triangoli rettangoli in numeri della medeſima ſpecie, ſono quelli che hanno i *lati proporzionali*, come ſono i ſeguenti 3, 4, 5, 6, 8, 10 ec.

Trian-

Triangoli rettangoli in numeri di diverſa ſpecie, ſono quelli, li di cui *lati* non ſono *proporzionali*, come 9, 12, 15, 7, 24, 25.

Termini di una ragione, ſono i due *numeri* che la formano, cioè *l' antecedente*, *e il conſeguente*.

Termini omologhi, ſono nelle ragioni gli *antecedenti* agli *antecedenti*, e i *conſeguenti* ai *conſeguenti*, dal che ſi vede, che nelle ragioni di 2 a 3, di 4 a 6, di 10 a 15 ec. i termini omologhi ſono gli antecedenti 2, 4, 10, come pure lo ſono i conſeguenti 3, 6, 15. 4. II.

Termini di una Progreſſione, ſono quella ſerie di *numeri* che la compongono. 45. II.

Termini della regola del tre, ſono i tre *numeri* che la formano. 3. II.

Termine minimo delle Progreſſioni, è il termine minore degli altri. 52. II.

Termine maſſimo delle progreſſioni, è il maggiore degli altri 53. II.

Terzo termine di qualſivoglia medietà, fuori delle tre medietà, cioè *Aritmetica*, *Geometrica*, *e Armonica*, è quello, che è più picciolo degli altri due.

Terzo termine d' una medietà moderna, è l' eccesso del *primo* ſopra il *terzo*.

Tavola dei quadrati, e dei cubi, è una Tavola, dove ſono notati i *quadrati* [illegible] di molti *numeri*, principiando dall'*unità*, e proſeguendo ad arbitrio, e ſerve per l' eſtrazione delle *radici quadrate*, *e cube*. 132. I.

Tavola Pittagorica, *o Libretto*, è una Tavola dove trovanſi le *moltiplicazioni* dei numeri, fino al 9 incluſive. 45. I.

Tavola, *o Canone Logaritmico*, ſono due ſerie di *numeri*, una in *Progreſſione Aritmetica*, e l' altra in *Progreſſione Geometrica*. 51. I.

Teorica Aritmetica, cioè *Aritmetica Teorica*, è quella, che conſidera le cagioni, le qualità, e le proprietà dei *numeri*. 2. I.

Tutto, è un *numero* qualunque per rapporto alle ſue *parti aliquote*, ovvero *aliquante*: così 12 è un Tutto, a riguardo delle ſue parti aliquote 2, 3 ec. ovvero delle ſue aliquante 5, 7 ec.

Tariffa, è una Tavola, o Libretto, in cui trovanſi le *moltiplicazioni* di molti *numeri*, per molti altri numeri, e queſta ſerve per abbreviare le moltiplicazioni.

Trovare tutte le parti aliquote di un numero intiero, vuol dire trovare i numeri intieri, che aliquotamente poſſono dividere un daro numero. 102. I.

Tarra, è quel calo, che fa qualunque Mercanzia eſpurgata dalle ſue parti eterogenee. $12\frac{1}{2}$. II.

Ugua-

U

Uguali, o ſimili ragioni Geometriche, ovvero *ſimili, o uguali ragioni Geometriche*, oppure *Ragioni Geometriche ſimili, o uguali*, o ancora *Geometriche Ragioni ſimili, o uguali*, ſono quelle, dove i più piccioli *termini* ſono *ſimili parti aliquote, o aliquante* dei più grandi, come queſta di 3 a 6, è uguale, o ſimile a queſt'altra di 4 a 8.

Uguali, o ſimili ragioni Aritmetiche, ovvero *ſimili, o uguali ragioni Aritmetiche*, oppure *Ragioni Aritmetiche ſimili, o uguali*, o ancora *Aritmetiche ragioni ſimili, o uguali*, ſono quelle, ove la differenza dei più piccioli *termini*, è uguale alla differenza dei più grandi, coma la ragione di 2 a 5, è uguale, o ſimile a quella di 6 a 9, perchè la differenza 3 dei più piccioli termini 2, e 5, è uguale alla differenza dei più grandi 6, e 9.

Unità, è tutto ciò che vien denominato uno, o una, l'aggregato delle quali forma il numero. 4. II.

Ultima figura di un numero compoſto di molte figure, è l'ultima che trovaſi a ſiniſtra. 8. I.

Uſura, è lo ſteſſo, che *Cenſo a capo d'anno*. 34. II.

Z

Zero, o nulla, è un ſegno, che poſto a deſtra di qualſivoglia *figura* la fa divenire dieci volte di più di quello era. 9. I.

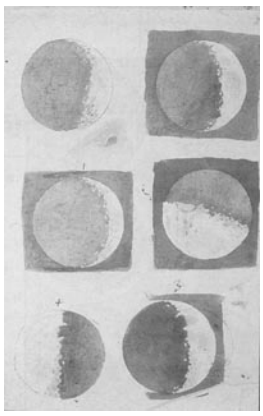
IL FINE DEL TERZO, ED ULTIMO TOMO.

Galileo Galilei (Pisa, 1563 – Arcetri, 1642)



Primogenito del gentiluomo fiorentino Vincenzo Galilei e della moglie Giulia Ammannati di Pescia, durante l'infanzia e l'adolescenza imparò la teoria e pratica musicale dal padre, che era anche compositore e suonatore di liuto, ed apprese il greco, il latino e la letteratura classica sotto la guida di un precettore. La sua vita, secondo il racconto che ne fa il suo allievo **Vincenzio Viviani**, inizia come quella del classico bambino prodigio. Pare che il piccolo Galileo possedesse un ingegno vivace e precoce, accompagnato da una non comune sensibilità. Abile nel disegno, come nella progettazione e realizzazione di piccoli strumenti meccanici, cominciò ben presto a distinguersi anche per il gusto e la competenza in materia d'arti figurative. Negli anni successivi avrebbe frequentato molti celebri pittori, tra cui il Cigoli[1], al quale avrebbe fornito i principi matematici per la sua *Prospettiva pratica.*





A sinistra: La Madonna dipinta dal Cigoli nella chiesa di Santa Maria Maggiore a Roma: la Luna, ai piedi della Vergine, è fedele alla raffigurazione galileiana (a destra), esposta alla Biblioteca Nazionale di Firenze.

[1] Ludovico Cardi, detto il Cigoli, dal suo luogo d'origine (1559-1613). Pittore ed architetto toscano, progettò, tra l'altro, palazzo Madama a Roma, la sede del Senato.

A diciassette anni Galileo fu mandato dal padre a studiare medicina a Pisa. Qui, nel 1583, avrebbe scoperto la **legge del pendolo**[2] osservando le oscillazioni di un lampadario del Duomo. Egli pensò subito di applicarla per la misura del tempo, più precisamente, per la misura della frequenza del polso. Sarebbe stato **Huyghens**, alcuni decenni dopo, a perfezionare l'idea di Galileo e a costruire il primo orologio a pendolo.

Nonostante la contrarietà del padre, presto Galileo avrebbe abbandonato la medicina, per dedicarsi interamente alle scienze matematiche. Scoprì il proprio interesse per la geometria tramite un amico di famiglia, Messer Ostilio Ricci di Fermo, allievo del **Tartaglia**, che gli procurò una copia degli ***Elementi*** di **Euclide**: proprio in quegli anni ne era apparsa la prima versione latina, ad opera di Commandino. All'epoca non erano molte le opere matematiche classiche circolanti in Italia: una delle poche era il trattato *Galleggianti* di **Archimede**, che era stato anch'esso tradotto da Commandino[3]. Molti anni dopo Galilei avrebbe a sua volta scritto un trattato sullo stesso argomento, ***Discorso sopra le cose che stanno in acqua e che in quella si muovono*** (1612). Narra il Viviani che dopo aver letto l'opera archimedea, Galileo approntò una bilancetta idrostatica in grado di determinare i pesi specifici dei vari materiali. Il Nostro volle approfondire lo studio dei baricentri: i risultati delle sue ricerche costituirono il suo primo scritto scientifico, intitolato ***Theoremata circa centrum gravitatis solidorum*** (1585), che attirò l'attenzione del Marchese Guidobaldo dal Monte e gli valse il favore del Granduca di Toscana. Questi lo chiamò, nel 1589, a coprire la cattedra di matematica all'Università di Pisa. Per sopraggiunti attriti con i Medici, dopo tre anni si trasferì a Padova, dove, sempre per intercessione del Marchese, aveva ottenuto un posto di docente. Questo gli venne rinnovato più volte, grazie alle numerose invenzioni di utilità pratica - tra cui il noto ***compasso geometrico e militare*** - con le quali si guadagnò la stima del governo della Serenissima. Quando, nel 1609, Galileo costruì, perfezionando un progetto olandese, un **cannocchiale** e lo regalò al Doge, l'incarico

---

[2] Secondo questa legge, la durata delle piccole oscillazioni del pendolo (*periodo*) è indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione.

[3] Alla meritoria opera del Commandino si aggiunse quella di Francesco Maurolico. All'epoca la matematica era identificata con Euclide ed Archimede. Lo testimoniano anche alcuni brani letterari. Tommaso Campanella, nel descrivere la sua ideale *Città del Sole,* colloca, all'interno delle mura del tempio *"tutte le figure matematiche, più che non scrisse Euclide ed Archimede, con la lor proposizione significante".* Il poeta satirico rinascimentale Francesco Berni, in un suo sonetto contro la città di Verona, così dice: *"Appresso ha anche drento/ come hanno l'altre terre, piazze e vie/ stalle, stufe, spedali et osterie/ fatte in geometrie/ da fare ad Euclide ed Archimede/ passar gli architettori con un spiede."*



Il monumento a Galileo davanti all'Università di Padova

d'insegnamento gli venne prorogato a vita. Gli venne concesso un vitalizio pari a 1200 fiorini l'anno, una cifra record per un matematico. Il nuovo strumento ottico permise a Galileo di scoprire che la Via Lattea è un ammasso stellare, di individuare macchie sulla superficie del Sole (***Istoria e Demostrazioni delle Macchie Solari e loro accidenti***, 1613), di vedere gli anelli di Saturno (che egli, in realtà, scambiò per due satelliti), di osservare le irregolarità della superficie lunare ed i movimenti di quattro satelliti di Giove[4], che egli battezzò *Pianeti Medicei* (***Sidereus Nuncius***, 1610). Il 10 luglio del 1610 Cosimo de' Medici lo richiamò in Toscana, offrendogli un ricco vitalizio ed i titoli di *"Primario e Sopraordinario Matematico dello Studio di Pisa"* e *"Primario Filosofo e Matematico della sua Serenissima Altezza"*. Rientrato a Firenze, nel novembre dello stesso anno Galileo osservò per primo le fasi di Venere, per altro previste dalla **teoria copernicana**, e ne concluse che Venere è un pianeta che ruota intorno al Sole, e non una stella, come si era sempre creduto.

La fama delle straordinarie scoperte astronomiche di Galileo si era, nel frattempo, diffusa in tutta Europa. Viviani si compiace di riferirci della sua convocazione in Vaticano del 1611, dove fu accolto con grandi onori, dell'invito del re di Spagna, che nel 1615 lo avrebbe voluto a corte a risolvere l'annoso **problema della longitudine**, e della visita che, nel 1618, l'Arciduca d'Austria tributò al capezzale del suo maestro. Proprio in quegli anni, però, iniziarono i guai di Galileo con la Chiesa. Egli aveva spiegato la variabilità delle macchie solari supponendo che il Sole ruotasse. Ne aveva poi dedotto che i pianeti, trascinati da questo moto, dovevano a loro volta ruotare intorno al Sole. Questa sua adesione alla teoria eliocentrica di **Copernico**, contraria alla Bibbia, provocò la reazione del padre domenicano Niccolò Lorini, che nel 1615 denunciò Galileo al Sant'Uffizio. Poco dopo il domenicano Tommaso Caccini rafforzò l'accusa testimoniando

[4] Essi portano oggi i nomi di Io, Europa, Ganimede e Callisto. Giove ha in realtà altri otto satelliti, che possono essere visti solo con potenti telescopi.

spontaneamente contro di lui. Il 26 febbraio 1616 il cardinale Roberto Bellarmino, su ordine di papa Paolo V, diffidò ufficialmente Galilei dal sostenere oltre l'ipotesi del moto della Terra. Lo scienziato promise obbedienza. Il suo ***Discorso sulle Comete*** gli procurò, in seguito, l'ostilità dei Gesuiti: in questa lezione accademica, presentata a Firenze nel 1619, Galileo avversava le tesi sostenute da padre Grassi[5], matematico del Collegio Romano, l'università vaticana. La contesa proseguì nel ***Saggiatore*** (1623), trattato di fisica redatto da Galileo sotto forma di disputa tra lui stesso e il Grassi. La situazione precipitò con la pubblicazione, nel 1632, del ***Dialogo de' due Massimi Sistemi Tolemaico e Copernicano***. Il Sant'Uffizio volle vedere nell'opera, sicuramente non a torto, un'eccessiva propensione verso l'ipotesi del moto terrestre, che veniva giustificata con il fenomeno delle maree: in effetti il titolo, secondo gli iniziali intendimenti dell'autore, avrebbe dovuto essere *Dialogo sopra il flusso e il reflusso del mare.* Galilei fu processato dal Sant'Uffizio con l'accusa di eresia, e condannato al carcere a vita il 22 giugno del 1633, sotto il pontificato di Urbano VIII, al secolo Maffeo Barberini. Alla lettura della **sentenza** l'imputato rispose con la **ritrattazione** delle sue teorie astronomiche, compiendo un formale atto di sottomissione. La pena fu commutata in confino, e Galileo ottenne di scontare la prima parte della pena a Siena, presso l'arcivescovo Ascanio Piccolomini, nell'attesa di poter rientrare a Firenze, dove allora imperversava la peste. Il divieto di pubblicazione per le opere di stampo copernicano fu revocato in due tempi, nel 1757 dalla Santa Congregazione dell'Indice e nel 1822 dal Sant'Uffizio. Galileo fu ufficialmente riabilitato dalla Chiesa nel novembre 1979, nello spirito del Concilio Vaticano II, con un discorso pronunciato da papa Giovanni Paolo II in occasione del centenario della nascita di **Einstein**.

A seguito della condanna subita, le opere di Galileo non poterono più essere pubblicate nei Paesi a prevalenza cattolica. Così il suo ***Trattato delle Meccaniche*** vide la luce a Parigi, nel 1634, nella traduzione di padre **Mersenne**. L'edizione italiana seguì postuma.

Galileo trascorse gli ultimi anni della sua vita recluso nella sua villa di Arcetri, senza nemmeno il conforto della figlia Virginia, Suor Maria Celeste, che gli era stata vicina nel difficile periodo del processo, scrivendogli molte lettere, e che era morta pochi mesi dopo il suo ritorno a casa. Provvide alla stesura dei ***Discorsi e dimostrazioni***

[5] Orazio Grassi (1583-1654), architetto e astronomo. Progettò la chiesa di Sant'Ignazio a Roma.

matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali (1638). Ormai completamente cieco e malato, Galileo raccolse le ultime forze per preparare una seconda edizione ampliata, che, però, rimase incompiuta.

L'eredità di Galileo fu raccolta da illustri allievi, fra cui **Bonaventura Cavalieri** ed **Evangelista Torricelli**, suo assistente dell'ultima ora, che gli succedette nella carica di matematico e filosofo del Granduca di Toscana.

Alla morte di Galileo il Vaticano impedì che gli venisse eretto un mausoleo. Solo in un secondo tempo le sue spoglie vennero tumulate nella Chiesa di Santa Croce, a Firenze, dove ancor oggi riposano.



Curiosità

- Nel 1588 Galilei tenne all'Accademia fiorentina del Disegno due lezioni intitolate *Circa la figura, sito e grandezza dell'Inferno di Dante,* contenenti i risultati di un suo accurato studio geometrico delle forme, dimensioni e disposizioni dei gironi danteschi. Galileo era, d'altronde, un fine intenditore di letteratura, come testimoniano, fra l'altro, le sue recensioni al Tasso e all'Ariosto. Galileo criticò aspramente *La Gerusalemme Liberata,* mentre ebbe parole di apprezzamento per l'*Orlando Furioso.* Questo dichiarato amore gli si ritorse contro, quando sia **Cavalieri**, sia **Cartesio**, commentando il ***Dialogo***, lo accusarono di aver trasceso troppo,

in ossequio alla poetica ariostesca, ai voli pindarici da un argomento all'altro.

- Già nel 1610 Galilei aveva intuito il pericolo - non ultimo quello del plagio scientifico - cui si sarebbe esposto divulgando i risultati delle proprie osservazioni astronomiche. E così la notizia della scoperta delle fasi di Venere venne inizialmente diffusa all'interno della comunità scientifica sotto forma di frase latina in codice:

Haec immatura a me iam frustra leguntur o, y.

Più tardi Galileo rivelò il vero significato, ottenuto anagrammando la frase precedente:

Cynthiae figuras aemulatur mater amorum.

La traduzione in italiano è: *La madre degli amori* (cioè Venere) *imita le figure di Cinzia* (cioè la Luna: *cinzia* era l'attributo della dea greca Artemide, nata sull'isola di Delo, ai piedi del monte Cinto, ed associata alla Luna[6]). Un altro anagramma galileiano riguarda Saturno:

smaismrmilmepoetaleumibunenugttaurias

la cui soluzione è:

Altissimum planetam tergeminum observavi,

ossia: *Ho osservato che il più alto* (il più lontano) *dei pianeti è trigemino* (formato di tre parti: ha due satelliti). L'anagramma funziona solo se si conserva l'antica equivalenza tra la u e la v. All'epoca non era possibile vedere oltre Saturno: Urano fu avvistato per la prima volta nel 1690, e venne qualificato come pianeta solo nel 1785.

Il destinatario degli anagrammi era **Keplero**: Galileo gli aveva spedito i messaggi nel 1610, tramite Giuliano de' Medici, che allora era ambasciatore di Toscana a Praga. Il secondo anagramma era stato così risolto dal matematico tedesco: *Salve umbustineum geminatum*

---

[6] Pare che il nome latino di Artemide, *Diana*, derivi da *Iana,* femminile di *Ianus*, appellativo del Sole. Secondo molti letterati antichi, tra cui Aristotele, la Luna era da considerare come un piccolo sole.

martia proles (Salve o gemello infuocato figlio di Marte). Gli deve essere sembrata una frase davvero sibillina.

Huyghens, a sua volta, celò la scoperta degli anelli di Saturno dietro la misteriosa sequenza di lettere

Aaaaaaaccccdeeeeeiiiiiiighllllmmnnnnnnnnnnoooopppqrrsttttttuuuu

La soluzione dell'anagramma era: *Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato* (Lo cinge un anello sottile e piatto che non lo tocca mai ed è inclinato rispetto all'eclittica).

- Nel 1611 Galileo fu chiamato a far parte dell'**Accademia dei Lincei**, fondata nel 1603 dal naturalista romano Federico Cesi: negli intendimenti di quest'ultimo, l'associazione doveva riunire tutti coloro che, nella ricerca scientifica, avessero dimostrato di possedere una vista acuta, come quella di una lince. Il riferimento è agli strumenti ottici, soprattutto ai primi, rudimentali microscopi, di cui in quegli anni cominciava a diffondersi l'uso. Galileo, una volta persa la vista, prese a firmarsi come "Linceo cieco".

- L'allievo di Galilei Vincenzio Viviani è noto per aver scritto, nel 1659, una *Divinazione del quinto libro delle **sezioni coniche** di **Apollonio***, un trattato in cui egli cercava di ricostruire il contenuto dell'opera scomparsa. Quando l'originale fu ritrovato, molte delle supposizioni di Viviani si rivelarono esatte. Nel 1690 egli pubblicò una traduzione italiana degli *Elementi* di Euclide, che fu utilizzata per molti anni come testo scolastico. Betti e Brioschi ne curarono un'edizione nel 1867.
- Il poeta ottocentesco **Vincenzo Monti**, nel **poema** dedicato alla morte del matematico **Lorenzo Mascheroni**, ricorda e celebra la figura di Galilei tra i grandi del passato che accoglieranno l'anima dell'amico in cielo.

Il pensiero galileiano e la sua epoca

Nell'opposizione di Galilei alla Chiesa molti hanno voluto vedere i connotati di una ribellione politica o di una contestazione teologica. Queste interpretazioni, tuttavia, sono sicuramente corrette solo se riferite alla potenziale carica dirompente delle tesi galileiane nel contesto storico dell'epoca. Se mai Galilei volle davvero suscitare

"scandalo", questa intenzione riguardava esclusivamente la metodologia di ricerca: tant'è vero che Galilei incontrò all'interno della comunità scientifica le prime ostilità al suo pensiero. Viviani, nel suo *Racconto Istorico della vita di Galileo,* così descrive il rapporto tra il suo maestro ed il mondo accademico del tempo: *"Ma il Galileo, che dalla natura fu eletto per disvelare al mondo parte di que' segreti che già per tanti secoli restavano sepolti in una densissima oscurità delle menti umane, fatte schiave del parere e de gl'assertori d'un solo*[7]*, non poté mai, secondo'l consueto degl'altri, darsele in preda così alla cieca, come che, essendo egli d'ingegno libero, non gli pareva di dover così facilmente assentire a' soli detti e opinioni delli antichi o moderni scrittori, mentre potevasi col* ***discorso*** *e con* ***sensate esperienze*** *appagar sé medesimo. E perciò nelle dispute di conclusioni naturali fu sempre contrario alli più acerrimi difensori d'ogni detto Aristotelico, acquistandosi nome tra quelli di spirito della contradizione, e in premio delle scoperte verità provocandosi l'odio loro; non potendo soffrire che da un giovanetto studente, e che per ancora, secondo un lor detto volgare, non avea fatto il corso delle scienze, quelle dottrine da lor imbevute, si può dir, con il latte gl'avesser ad esser con* ***nuovi modi*** *e con tanta evidenza rigettate e convinte: averando in ciò quel detto di Orazio*[8]*:*

Stimano infamia il confessar da vecchi
Per falso quel che da giovini apprendero."

Al corpo docente dell'ateneo pisano il Galileo aveva dedicato la poesia canzonatoria ***Contro il portar la toga***, in cui ne sbeffeggiava i costumi e i pregiudizi.

Lo spirito battagliero e indipendente di Galileo si scontra con la tradizione, che vuole cogliere la verità nei libri antichi. Poiché all'epoca il potere temporale della Chiesa era indissolubilmente legato alla sua autorità nel campo del sapere, e d'altra parte, la separazione tra teologia e filosofia non era ancora compiuta, le affermazioni di Galileo, contrarie alla scienza tramandata, avevano pesanti implicazioni politiche: ecco il motivo del processo, e la necessità della ritrattazione. Galileo non è un eretico, né un martire: è solo un ricercatore, che non può fare a meno di credere ai propri occhi e alla propria capacità di raziocinio, ma è costretto a constatare che i tempi

[7] L'allusione è ad Aristotele.
[8] Quinto Orazio Falacco, poeta latino di Venosa (65 – 8 a.C.) Galileo aveva una profonda conoscenza della letteratura classica, in particolare di Orazio, Ovidio e Virgilio.

non sono maturi. Grazie ad un nuovo, potente strumento, il cannocchiale, egli, tutto d'un tratto, vede più in là di ogni uomo che l'abbia preceduto: non c'è da meravigliarsi se le sue scoperte appaiono sconvolgenti. Il coraggio di Galileo sta nel proseguire, coerentemente, lungo la strada apertagli dalle osservazioni astronomiche, avvalendosi del rigore matematico. A proposito dell'incontro di Galilei con la geometria euclidea, Viviani ci riferisce:

"Cominciò dunque il Ricci ad introdurre il Galileo (che già aveva compliti diciannove anni) nelle solite esplicazioni delle definizioni, assiomi e postulati del primo delli Elementi; ma questi sentendo preporsi principii tanto chiari e indubitati, e considerando le domande d'Euclide così oneste e concedibili, fece immediatamente concetto che se la fabbrica della geometria veniva alzata sopra tali fondamenti, non poteva esser che fortissima e stabilissima. Ma non sì tosto gustò la maniera del dimostrare, e vedde aperta l'unica strada di pervenire alla cognizione del vero, che si pentì di non essersi molto prima incamminato per quella".

Alla cieca lettura dei libri Galileo contrappone l'osservazione diretta della natura, alla passiva memorizzazione l'attività dell'intelletto. Quest'ultima non si esplica soltanto nel percorso chiuso di una dimostrazione matematica, ma anche e soprattutto nel dibattito, nello scambio di argomentazioni, nello scontro di tesi ed antitesi, secondo gli schemi della dialettica platonica, su cui si basano le sue opere principali. La sua apertura al dubbio e alla discussione appare più come un'impostazione metodologica che come una naturale inclinazione del suo carattere, di per sé molto determinato, e combattivo, e non privo di un energico spirito polemico, che emerge soprattutto nel ***Saggiatore***. A proposito degli scopi dell'indagine sulle macchie solari, lo scrittore tedesco Bertolt Brecht (1898 – 1956), in un suo famoso dramma teatrale, mette in bocca a Galileo le seguenti parole:

" Non m'importa di mostrare di aver avuto ragione, ma di stabilire se *l'ho avuta. E vi dico: lasciate ogni speranza, o voi che vi accingete a osservare! Forse sono vapori, forse sono macchie; ma prima di affermare che sono macchie, cerchiamo di accertare se per caso sono pesci fritti. Sì, rimetteremo tutto, tutto in dubbio. E non procederemo con gli stivali delle sette leghe, ma a passo di lumaca. E quello che troviamo oggi, domani lo cancelleremo dalla lavagna e non lo riscriveremo più, a meno che posdomani lo ritroviamo un'altra volta. Se qualche scoperta seconderà le nostre previsioni, la considereremo con*

speciale diffidenza. E dunque, prepariamoci ad osservare il sole con l'inflessibile determinazione di dimostrare che la terra è immobile! E solo quando avremo fallito, quando, battuti senza speranza, saremo ridotti a leccarci le ferite, allora con la morte nell'anima cominceremo a domandarci se per caso non avevamo ragione, se davvero è la terra che gira! Ma se tutte le altre ipotesi, all'infuori di questa, ci si dovessero squagliare fra le dita, allora nessuna pietà per coloro che, senza aver cercato, vorranno parlare! Andrea, togli il panno dal cannocchiale e volgilo verso il sole!"

(cit. da B. Brecht, *Vita di Galileo,* in: *Teatro,* Vol. II, trad. di F. Federici ed E. Castellani, Einaudi, Torino 1963, pagg. 1488-1489)

La prima testimonianza dell'adesione di Galilei al copernicanesimo è una lettera a Keplero del 1597, che egli scrive dopo aver letto il ***Mysterium Cosmographicum***. La prima dichiarazione pubblica in tal senso è, invece, contenuta nelle opere sulle macchie solari del 1613.

Galilei non nutrì mai avversione nei confronti della dottrina aristotelica, né della fede cristiana. Alla prima si era dedicato con grande passione durante i suoi studi di medicina a Pisa. Del filosofo greco ammirava l'impostazione scientifica, improntata all'aderenza alla realtà, alla rielaborazione razionale del dato empirico (*nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu*), e indirizzata alla ricerca delle cause e dei principi dei fenomeni naturali. In effetti, l'aristotelismo aveva avuto, tra i suoi esponenti, sia empiristi, sia sostenitori del metodo matematico. Come dimostra un brano del ***Dialogo***, Galileo era sicuro che, se Aristotele fosse stato suo contemporaneo, questi avrebbe sicuramente dato ragione a lui, contro l'inflessibilità dei suoi sedicenti seguaci (*"la turba peripatetica"*), ottusamente ciechi di fronte all'evidenza e sordi al buon senso. In una lettera del 1640 all'astronomo Fortunio Liceti, Galilei dice che essi andavano *"espiscando da i suoi testi concetti che mai non li sariano caduti in mente."* D'altronde la teoria astronomica di Galileo non è poi del tutto disgiunta dalla visione cosmologica di Aristotele: entrambe sono basate sul moto circolare dei pianeti, che sarebbe indotto da un *Primo Motore* (che Galileo colloca nel Sole, mentre Aristotele lo immagina nella sfera più esterna del Cielo). Secondo alcuni commentatori, Galileo avrebbe addirittura aderito, in gioventù, alla filosofia aristotelico-tolemaica sostenuta dal suo amico padovano Cesare Cremonini. Presso l'ateneo veneto Galileo aveva tenuto lezioni sul ***Trattato della Sfera*** di **Sacrobosco**.

Se pure Galileo respinge fermamente l'uso della **logica** aristotelica come fonte di conoscenza, è pur vero che egli, in quanto matematico, non può far a meno di essa nelle sue dimostrazioni: d'altra parte, all'epoca, quella era l'unica logica possibile. Il seguente brano, tratto dalla prima giornata del ***Dialogo***, descrive i principi della dimostrazione diretta e della ***reductio ad absurdum***:

"[…] quando la conclusione è vera, servendosi del metodo risolutivo, agevolmente si incontra qualche proposizione già dimostrata, o si arriva a qualche principio per sé noto; ma se la conclusione è falsa, si può procedere in infinito senza incontrar mai verità alcuna, se già altri non incontrasse alcun impossibile o assurdo manifesto."

La polemica intrapresa da Galileo nel ***Saggiatore*** e nel ***Dialogo*** è diretta contro i sofismi dialettici, fonti di equivoci e coartazioni: è nella dimostrazione matematica, che egli chiama *"pura geometrica, perfetta e necessaria"* che Galileo vede la più adeguata applicazione del *"fior di logica naturale"*. Questa, che è priva di ambiguità linguistiche ed artifici retorici, è l'unico mezzo per distinguere con chiarezza il vero dal falso.

Galileo non assunse mai atteggiamenti di sfida anticlericale; d'altronde molti dei suoi amici e discepoli erano frati, sacerdoti e prelati (anche gesuiti), ed egli non era privo di appoggi in Vaticano, dove era stato spesso accolto con grande favore. Nel 1611 una solenne conferenza del Collegio Romano aveva confermato ufficialmente le scoperte contenute nel *Sidereus Nuncius.* Galileo dedicò il ***Saggiatore*** a papa Urbano VIII, che ne tessé le lodi in una lettera al Granduca di Toscana; lo scienziato si impegnò in tutti modi per ottenere dalla Chiesa l'*imprimatur* per il suo ***Dialogo***, accettando, tra l'altro, le censure impostegli dal pontefice. Va ricordato che Galileo era credente, e, in quanto tale, si preoccupava del fatto che i risultati delle sue ricerche potessero apparire in contrasto con la Parola di Dio. Perciò compì ogni sforzo per trovare, nelle Sacre Scritture, conferme alle sue teorie; lo dimostrano soprattutto le sue ***lettere copernicane***, che egli volle rendere pubbliche. Le scrisse tra il 1613 e il 1615, e le indirizzò a don Benedetto Castelli, suo amico e discepolo, a Monsignor Piero Dini e a Madama Cristina di Lorena. Al fine di conciliare la sua astronomia con i passi biblici che parevano smentirla, egli propose una nuova esegesi del testo: questo non era da intendere alla lettera come una descrizione della realtà naturale, ma piuttosto come una trascrizione metaforica di verità inerenti la fede.

Il verso del Salmo 18 secondo il quale *"Gesù pose nel Sole il suo tabernacolo",* potrebbe avvalorare l'ipotesi del Sole come origine del moto del cosmo, le parole pronunciate da Giosué nell'omonimo libro *"Sole, non ti muovere di sopra Gabaon, e tu luna dalle valle di Aialon"* (X, 12) sarebbero giustificate se riferite al moto *relativo* del Sole rispetto ad un osservatore terrestre. In questa impresa Galilei non fu solo. Godette dell'appoggio del filosofo domenicano Tommaso Campanella - egli stesso condannato, per altri motivi, dalle autorità religiose napoletane - che nel 1616 scrisse, dal carcere, l'***Apologia pro Galileo***, e successivamente, dopo essere stato liberato e chiamato a Roma da Urbano VIII, seguì le trattative per il nullaosta alla pubblicazione del ***Dialogo***. Nel 1615 era uscita a Napoli un'epistola scritta da un frate carmelitano al Generale del suo ordine, la ***lettera del R.P.M. Paolo Antonio Foscarini Carmelitano sopra l'opinione de' Pitagorici e del Copernico, nella quale si accordano ed appaciono i luoghi della Sacra Scrittura e le proposizioni teologiche, che giammai potessero addursi contro tale opinione***, un estremo tentativo di giustificare l'eliocentrismo ed il moto della Terra alla luce della Bibbia, alla vigilia della messa all'indice delle opere copernicane.

Negli sforzi compiuti da Galileo il Geymonat vuole vedere, oltre che il tentativo di dirimere un personale dilemma di coscienza, il desiderio di preservarsi il favore della Chiesa, affinché questa non ostacolasse l'evoluzione della scienza. Secondo Michael Segre, dopo gli onori tributati al suo *Sidereus Nuncius,* Galilei avrebbe smesso i panni dell'accademico per indossare quelli dell'uomo di corte. Avrebbe abbandonato la ricerca per difendere le sue scoperte con la tattica politica. La condanna del 1633 segnerebbe il fallimento del suo ambizioso programma. D'altronde molte sue iniziative fanno ritenere che gli premesse molto l'appoggio dei potenti, tra cui i Medici.

Secondo alcune testimonianze storiche, la condanna del 1633 sarebbe stata frutto di una trama ordita da alcune componenti della Chiesa per rappresaglia contro la polemica scatenata da Galilei nei confronti dei gesuiti. Pare che all'epoca circolassero insistenti voci in tal senso. In una lettera, scritta dal Campanella a Galilei il 21 agosto 1632, leggiamo: *"Con gran disgusto mio ho sentito che si fa Congregazione di teologi irati a proibire i Dialoghi di Vossignoria; e non ci entra persona che sappia matematica né cose recondite.[…] Dubito di violenza di gente che non sa.[…] sì come mettono Domenicani, Gesuini e Theatini e preti secolari in questa Congregazione contra i vostri libri, ammettano anche il padre Castelli e me: e si vinceranno."*

(cit. da F. Flora, *Il processo di Galileo,* Rizzoli, Milano 1954, pag. 119)

Pare che comunque Galileo abbia avuto nei domenicani i suoi peggiori nemici, estremamente conservatori, inflessibilmente fedeli all'aristotelismo di Tommaso d'Aquino. I gesuiti avevano complessivamente dimostrato di essere aperti al progresso della scienza, molti di loro avevano inizialmente appoggiato le teorie galileiane, ed avevano poi finito per aderire all'astronomia proposta da **Tycho Brahe**, vedendo in essa un valido compromesso tra sapere antico e nuove scoperte.

In effetti l'impressione che si ricava leggendo la storia del processo è quella di un percorso tortuoso, non privo di ripensamenti ed ambiguità. Non troviamo il racconto di un'istituzione compatta che fronteggia e con determinazione schiaccia l'individuo che ha osato sfidarla, ma piuttosto una vicenda che ruota intorno a singole persone. Poche sono le figure chiave, tra cui, certamente, il cardinale Bellarmino, che pur era morto molti anni prima del secondo processo a Galileo, ma era stato il principale promotore della censura del 1616. Secondo il Geymonat, il corso degli eventi sarebbe stato determinato dal gioco di due opposti schieramenti all'interno della Chiesa, l'uno progressista e disposto al dialogo, l'altro arroccato sulla tradizione in posizione difensiva.

In una lettera del 1634, indirizzata a Elia Diodati, Galileo attribuisce al gesuita Cristoforo Grienberger, appartenente al collegio Romano, ed amico di Galilei, la seguente pesante affermazione: *"Se il Galileo si avesse saputo mantenere l'affetto dei Padri di questo Collegio, vivrebbe glorioso al mondo e non sarebbe stato nulla delle sue disgrazie, e avrebbe potuto scrivere ad arbitrio suo d'ogni materia, dico anco moti di Terra."* (ibidem, pag. 100)

È comunque difficile stabilire in quale misura l'epilogo della storia sia veramente riconducibile alla mancanza di tatto con cui Galilei si era mosso nei riguardi di padre Grassi. Vero è che nel 1616 le opere copernicane erano state proibite, e pochi anni prima il filosofo Giordano Bruno era finito sul rogo. Ed ancora più difficile è dire se le ripercussioni storiche delle opere galileiane sarebbero state minori senza la condanna da parte della Chiesa. Sicuramente questa ebbe evidenti effetti immediati: **Cartesio**, ricevuta la notizia, si allarmò al punto da rinunciare a pubblicare la sua opera ***Il Mondo***, già pronta per la stampa. Keplero accusò Galileo di aver compromesso la libertà

della scienza, facendola uscire dalla stretta cerchia degli esperti, ed esponendola alla censura della Chiesa: egli sarebbe stato corresponsabile della messa all'indice delle opere di Copernico. In effetti, secondo M. Segre, la scienza italiana subì, nella seconda metà del Seicento, un declino forse in parte imputabile alla vicenda galileiana.

Indubbiamente il processo a Galileo è emblematico di un'epoca in cui l'Inquisizione era ancora potente. Tuttavia, è meglio non cedere alla tentazione di strumentalizzare eventi che, almeno per quanto riguarda strettamente la persona di Galileo, si svolsero più sul piano del dramma di coscienza, anche religiosa, che su quello della battaglia ideologica. Nonostante le numerose e varie classificazioni proposte in passato, riteniamo che Galileo non possa essere ascritto a nessuna corrente di pensiero, filosofica o politica che sia. È peraltro difficile tentare di inquadrare una figura culturalmente eclettica che, già presso i suoi contemporanei, appariva molto controversa, piena di luci ed ombre. Fu al centro di varie questioni di plagio, di cui una riguardante la paternità del cannocchiale, che lo oppose a Keplero. Tradì la sua scelta di rigore scientifico diffondendo, con intenti meramente polemici, tesi superficiali ed affrettate sulla natura delle comete. Nel corso dei secoli fu demonizzato e mitizzato, alla sua biografia si sovrapposero molti giudizi personali ed aneddoti inventati. Per questa mancanza di chiarezza, la sua figura è ancor oggi un interessante oggetto di studio.

Altre opere di Galileo:
Considerazione sopra il giuoco de' dadi
*(**calcolo delle probabilità**)*
Problemi vari *(**fisica**)*

Curiosità

Galileo Galilei
Opere
Firenze, 1718

Questa pregevole raccolta in tre volumi dell'opera di **Galilei** comprende, oltre ai principali trattati matematici e fisici (***Sidereus Nuncius***, ***Dialogo de' due Massimi Sistemi Tolemaico e Copernicano,*** ***Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze***), il suo carteggio scientifico, e molti suoi brevi scritti di vario contenuto scientifico, tra cui una ***Considerazione sul giuoco de' dadi*** contenente alcune nozioni di base di **calcolo delle probabilità** ed una serie di ***Problemi vari*** di argomento fisico con risposta.

Apprezzabile il **frontespizio** con **ritratto** di Galileo.

OPERE
DI GALILEO
GALILEI
NOBILE FIORENTINO
Primario Filoſofo, e Mattematico
DEL SERENISSIMO
GRAN DUCA
DI TOSCANA.



IN FIRENZE. MDCCXVIII.

BIBLIOTECA
UNIVERSITÀ
UNIVERSITA' DEGLI
ISTITUTO
di


GALILEVS GALILEI FLORENTINVS ANNVM AGENS LXXVIII

PROBLEMI VARJ
DI
GALILEO GALILEI

PROBLEMA I.

Perchè cauſa volendo un nuotatore ſtar fermo, e a galla nell'acqua, ſia neceſſario, che ei ſtia ſupino, colle gambe aperte, colle braccia diſteſe ſopra il capo, e intirizito.

La cauſa del problema è queſta. Volendo il nuotatore ſtar a galla, e fermo, biſogna, che ei cerchi di farſi nell'acqua più leggiero, che può, e queſto gli ſuccederà ogni volta, che ei ſi accomoderà in tal modo, che del ſuo corpo ne reſti ſommerſo più, che ſia poſſibile, perchè un peſo di tanto divien più leggiero nell'acqua, di quanto peſa tant'acqua eguale in mole alla parte demerſa di eſſo peſo. Ora il nuotatore ſtando nell'acqua ſupino, viene a farſi in eſſa leggieriſſimo, perchè dalla bocca, e picciola parte del viſo in fuori, tutto il reſto del ſuo corpo reſta ſommerſo, che ſe in altra poſitura ei ſi accomodaſſe v. gr. bocconi, o per lato non gli riuſcirebbe lo ſtare a galla, ſenza muoverſi, perchè tanto ſi ſommergerebbe, che cacciando la bocca ſott'acqua, per non poter reſpirare, anderebbe a riſico di affogarſi. Inoltre egli è neceſſario, che ei tenga le gambe aperte aſſai, perchè eſſendo il noſtro petto, per l'aria, che in eſſo ſi racchiude, mercè de i polmoni grandi aſſai, molto più leggiero nell'acqua, che le coſce, e le gambe, che ſono maſſiccie, e piene, non biſogna, che il nuotatore le tenga ſtrette, ed unite, perchè così il lor centro della gravità, caſcherebbe aſſai lontano dal petto, onde ſarebbe sforzato il nuotatore, per la lieva delle gambe, e coſcie a dirizzarſi, ne potrebbe ſtare a diacere; dove che, ſe le terrà aperte, e ſeparate, il lor centro della gravità verrà più vicino al petto, e così gli faranno manco lieva. Biſogna ancora, che ei tenga le braccia diſteſe ſopra il capo, perchè tenendole così, viene a contrappeſare il peſo delle gambe, e delle coſcie, che ſe le teneſſe accoſto a i fianchi, aiuterebbe col peſo delle braccia le gambe, e le coſcie, a farlo rizzare, e tirarlo giù. Ed in ultimo gli convien ſtare colla vita intirizzata, attalchè e' venga a fare del ſuo corpo un compoſto ſolo, perchè ſe ſi abbandonaſſe, e ſi laſciaſſe andare, le braccia, e le coſcie, e le gambe, eſſendo più gravi del petto, anderebbero al fondo, e ſeco tirerebbero il nuotatore.

PROBLEMA II.

SI domanda la cauſa onde avvenga, che il nuotare, arrechi grandiſſimo affanno a i nuotatori, non oſtante, che e' ſieno leggieriſſimi nell'acqua, onde con ogni picciola forza, facilmente per eſſa ſi muovono.

Si riſponde, che non è la forza, che ſi fa per nuotare quella, che arreca l'affanno grande a chi nuota, ma l'avere a tirar ſott'acqua buona quantità d'aria, mediante la neceſſità del reſpirare; il che ſi dichiara così. Io ho un pallone, e lo voglio col mio fiato gonfiare; piglio un cannellino di canna, lo metto nell'animella, e comincio per quello a ſoffiar nel pallone, certo, che ſe detto pallone non ſarà circondato da altro, che dall'aria, aſſai facilmente mi riuſcirà il gonfiarlo; ma ſe piglierò poi il medeſimo pallone ſgonfio, e lo metterò in un vaſo grande pieno di acqua, e vorrò poi gonfiarlo tenendolo in eſſa ſommerſo, chiara coſa è, che durerò una gran fatica, perchè mi converrà alzare tant'acqua col fiato, quanta è l'aria, che io caccio nel pallone. Ora colui, che nuota non attrae col reſpirare l'aria nel petto, ſtando circondato da aria, dove prima con poca fatica il noſtro petto ſi gonfia, ma dee reſpirare, e tirar l'aria ſott'acqua, della quale tanta mole ne viene ad alzare, ogni volta, che ei reſpira, quanta è l'aria, che reſpirando ei manda nel petto, i muſcoli del quale non eſſendo uſi a un eſercizio tanto laborioſo grandemente ſi affaticano, e di qui procede l'affanno grande del nuotatore. A queſto ſi può aggiugnere ancora, che eſſendo per avventura i medeſimi muſcoli quelli, che aiutano a muover le braccia nel nuotare, ſi viene loro a raddoppiar la fatica, onde e per queſta, e per quella dell'avere a tirar l'aria ſott'acqua, ſi cagiona a chi nuota l'affanno, che abbiamo detto.

PROBLEMA III.

I Funambuli, tenendo un aſta lunga in mano, facilmente camminano, e ballano ſulla corda, e ſenz'eſſa, con gran difficultà, e appena ci poſſono camminare. Si domanda ora, che aiuto gli porga la detta aſta.

La riſoluzione del preſente problema dipende da tre veriſſime propoſizioni la prima è tale. Io ho un pezzo di trave, e lo drizzo a perpendicolo ſopra terra, drizzato, che io l'ho, vedo, che non vuol ſtare altrimenti in piede, ma che comincia a inclinare, per caderſene diſteſo in terra, allora ſe io, che lo vedo cadere lo ſoccorro ſubito, con ogni picciola forza, e lo terrò, e lo tornerò a drizzare, che non vadia giù, coſa, che non così facilmente farei, ſe lo ſoccorreſſi, quando ei fuſſe vicino a diſtenderſi in terra. Da queſta prima propoſizione ſe ne cava la ſeconda, che è queſta. Uno per paſſare un foſſo è neceſſitato di camminare ſopra un ponte ſtrettiſſimo, qual ſarebbe un tronco di un albero, o un pezzo di tavola larga un quarto di braccio: ora ſe coſtui averà qualche ritegno, o appoggio benchè minimo, ſul quale ſi poſſa reggere, quando ſi ſente barcollare, facilmente paſſerà il foſſo, perchè come abbiamo detto nell'eſempio della trave, baſta ogni picciola forza, e reſiſtenza per tener in piede una coſa, che accenni di voler caſcare. La terza propoſizione è, che con aſſai maggiore preſtezza, e velocità ſi vibra, e ſi ſcuote un pezzo di legno corto colla mano, che non ſi fa un aſta molto lunga. Ora il Funambulo, a guiſa di quello, che ha da paſ-

paſſare il foſſo pel ponte ſtretto, ha da camminare ſopra una corda, ſicchè ſe non aveſſe qualche appoggio, quando e'ſi ſente vacillare, caſcherebbe faciliſſimamente in terra; ma egli ha l'appoggio, e queſto glie lo porge l'aſta lunga, che porta in mano; perchè quando ei ſi ſente piegare, e andar giù da una banda, egli ſi appoggia, e ſi aggrava dalla medeſima ſull'aſta la quale per eſſer molto lunga con gran lentezza ſi muove alla forza, che gli vien fatta; ſicchè non così toſto ella comincia a muoverſi, che il Funambolo, al quale baſta ogni minimo appoggio per riaverſi, ſi è già riavuto, e raddrizzato.

PROBLEMA IV.

IO ho due lance del medeſimo peſo, e della medeſima lunghezza, cioè, che tanto legno è in una, che nell'altra, ma una di eſſe è piena, e maſſiccia, e l'altra, è incavata, e vota a guiſa di una canna, ſi domanda adeſſo qual di queſte due lance difficilmente ſi ſcavezzerà, o troncherà.

Si riſponde, che la vota farà maggior reſiſtenza nel troncarſi, che non farà la maſſiccia, e tanto maggiore, quanto è maggiore il diametro ſuo di quello della piena, la qual coſa quindi è, che la provida natura dovendo far gli uccelli molto leggieri acciò più facilmente ſi moveſſero per aria, ma colle penne gagliarde acciò poteſſero durare a volare, dette loro le penne dell'ali, che ſon quelle, che più dell'altre ſi affaticano di materia leggieriſſima, ma col calamo voto, acciò fuſſero gagliarde, e reſiſtenti al troncarſi, che ſe colla medeſima quantità di materia gliele aveſſe fatte piene, aſſai più facilmente ſi potrebbono ſpezzare, e l'iſteſſa induſtria ha oſſervato ancora in farli alcuni oſſi, come quelli delli ſtinchi, e delle coſcie, i quali ſi vedono molto ſottili, e queſto per leggerezza dell'uccello, ma voti dentro perchè e' ſieno più gagliardi. Ma quì potrebbe domandare uno perchè la natura non ha fatto a i quadrupedi, e agli altri animali, che camminano ſopra la terra, l'oſſa delle gambe vote come quelle degli uccelli ma molto groſſe, e piene di midollo, come ſi vedono, per queſto ſi riſponderà, che e'quadrupedi, ed altri animali, che vanno ſopra terra, andando ſempre a pericolo di urtare le gambe in ſaſſi, o altri intoppi con pericolo di frangerſi, o ſchiacciarſi li ſtinchi era neceſſario, che la natura glie li faceſſe pieni, e maſſicci, acciò non così facilmente ſi poteſſero ſchiacciare, perchè pigliando l'eſempio dalle due lance con più facilità ſi può ſchiacciare quella, che è vota, che la piena, ma gli uccelli, che vanno per aria, dove non hanno a temere intoppo alcuno, ma debbono eſsere principalmente leggieri hanno gli ſtinchi, e le penne dell'ali vote, e per leggerezza, e perchè nel moto, che fanno nel volare facciano più reſiſtenza a ſpezzarſi.

PROBLEMA V.

ONde avviene, che le ſtelle ci appariſcano al ſenſo immobili con tutto, che camminino con ſomma velocità, ſicchè in breviſſimo tempo, camminano grandiſſimo ſpazio del Cielo.

A tal queſito ſi riſponderà così, che le ſtelle ci appariſcono immobili, nel medeſimo modo, che immobile ci ſi dimoſtra la lancetta dell' Oriuolo, perchè ſe noi piglieremo un oriuolo, e lo accomoderemo in tal maniera, che prodotto il ſuo indice vadia a ferire in una ſtella poſta in Oriente, e

dall'altra parte del detto indice, che riguarda l'Occidente porremo l'occhio, vedremo, che ſecondo, che l'indice ſi verrà inalzando, la ſtella lo ſeguiterà, mantenendoſi ſempre nell' iſteſsa linea retta dell' indice, ne mai accaderà, che noi la vediamo, o ſotto o ſopra di eſso, ſicchè ci parrà, che ella ſi muova al moto dell'indice, il qual moto eſsendo a noi inſenſibile, inſenſibile ancora ci viene a eſsere quello della ſtella, ec.

PROBLEMA VI.

ONde avviene, che in tempo, che ſia nebbia, e la mattina a buon ora ſi vede intorno alle ſiepi grandiſſima quantità di ragnateli, dove, che quando, il tempo è ſereno, e nel mezzo giorno non ſe ne vede più uno. Si vedono aſsaiſſimi ragnateli quando è nebbia, perchè i fili di eſſi, che ſono per la loro ſomma ſottigliezza inviſibili, vengono a eſsere ingroſsati da un grandiſſimo numero di ſtelle minutiſſime di acqua componenti la nebbia, che ci ſi poſano ſu, onde ſi fanno viſibili, e ci appariſcano come tante filze piccoliſſime di perle, e per queſt'iſteſsa ragione ſe ne vedono ancora in gran quantità la mattina a buon ora, perchè l'iſteſso effetto, che cagionano in eſſi le minute ſtelle della nebbia, lo cagionano anco le ſtelle della rugiada, la quale gli cade ſopra la notte, onde poi la mattina ſi vedono quei carichi delle dette ſtelle, le quali inſino, che il Sole non le conſuma ſon cauſa, che noi vediamo tanta gran quantità di ragnateli.

PROBLEMA VII.

ONde accade, che alcune volte dopo una nebbia ſcoprendoſi il Sole le foglie di vite, ed altre frondi, divengono aride, e ſi ſeccano affatto. La cagione di tale effetto è queſta. Si poſa (mentre dura la nebbia) ſulle foglie delle viti una grandiſſima quantità di ſtelle minutiſſime di quelle iſteſse, che ci fanno vedere i ragnateli, e queſte ſono di figura rotonda, e sferica perfettiſſima, ſi diſsolve poi la nebbia, e ſi ſcopre il Sole, i raggi del quale paſsando per qnelle piccoliſſime sferette percuotono per refrazione, la foglia, che ad eſse ſoggiace, ſicchè nel medeſimo modo, che gli ſteſſi raggi paſsando per una palla di criſtallo, o per una caraffa piena di acqua, e percotendo ſull'eſca, e ſul panno, o altra coſa ſimile la riſcaldano, ed accendono, così anco paſſando per quei piccioli globetti vengono a riſcaldare talmente la foglia, che l'inaridiſcono, e ſeccano affatto. Ma è da notarſi, che non ſempre accade queſto, perchè ſe la nebbia duraſſe molto tempo, ſi verrebbono a ragunare ſu le foglie tante di quelle minute goccioline, che ſi rammonterebbono una ſopra l'altra, ſi confonderebbono inſieme, e finalmente perdendo affatto la figura sferica ſi ſchiaccerebbono, onde altro non apparirebbe ſulla foglia, che un ſottil velo di acqua, ed in queſto caſo il Sole non fa in eſſe quell'effetto, che fa mentre quelle goccioline vi ſono ſopra intatte, e intere.

CONSIDERAZIONE
DI
GALILEO GALILEI
SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.

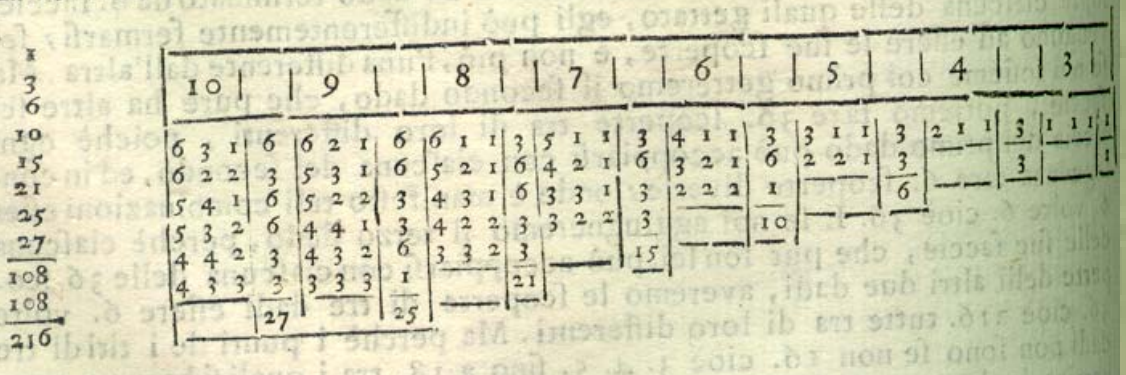


Che nel giuoco de i dadi, alcuni punti ſieno più vantaggioſi di altri, vi ha la ſua ragione aſſai manifeſta, la quale è, il poter quelli più facilmente, e più frequentemente ſcoprirſi, che queſti, il che depende dal poterſi formare con più ſorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un ſol modo ſi poſſon con tre numeri comporre, cioè queſti con 6. 6. 6. e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili ſono a ſcoprirſi, che v. g. il 6. o il 7. li quali in più maniere ſi compongono, cioè il 6. con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5., 1. 2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorche il 9. e il 12. in altrettante maniere ſi compongano in quante il 10 e l'11. perlochè d'egual uſo duvriano eſſer reputati; ſi vede nondimeno, che la lunga oſſervazione ha fatto da i giuocatori ſtimarſi più vantaggioſi il 10. e l'11. che il 9, e il 12.

E che il 9. e il 10. ſi formino (e quel che di queſti ſi dice intendaſi de' lor ſoſſopri 12. e 11.) ſi formino dico con pari diverſità di numeri, è manifeſto; imperocchè il 9. ſi compone con 1. 2. 6., 1. 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4., 3. 3. 3. che ſono ſei triplicità, ed il 10. con 1. 3. 6., 1. 4. 5. 2. 2. 6., 2. 3. 5., 2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur ſon 6. combinazioni. Ora io per ſervire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che ſopra tal difficoltà mi ſovviene, eſporrò il mio penſiero, con ſperanza, non ſolamente di ſciorre queſto dubbio, ma di aprire la ſtrada a poter puntualiſſimamente ſcorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco ſono ſtate con grande avvedimento, e giudizio compartite, ed aggiuſtate. E per condurmi colla maggior chiarezza, che io poſſa al mio fine, comincio a conſiderare, come eſſendo un dado terminato da 6. faccie, ſopra ciaſcuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarſi; ſei vengono ad eſſere le ſue ſcoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma ſe noi inſieme col primo getteremo il ſecondo dado, che pure ha altre ſei faccie, potremo fare 36. ſcoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarſi con ciaſcuna del ſecondo, ed in conſeguenza fare 6. ſcoperte diverſe; onde è manifeſto tali combinazioni eſſer 6. volte 6. cioè 36. E ſe noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciaſcuna delle ſue faccie, che pur ſon ſei, può accoppiarſi con ciaſcuna delle 36. ſcoperte delli altri due dadi, averemo le ſcoperte di tre dadi eſſere 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti de i tiri di tre dadi non ſono ſe non 16. cioè 3. 4. 5. ſino a 18. tra i quali ſi hanno a compartire le dette 216. ſcoperte, è neceſſario, che ad alcuni di eſſi ne toc-

chino molte; e ſe noi ritroveremo quante ne toccano per ciaſcheduno, averemo aperta la ſtrada di ſcoprire quanto cerchiamo, e baſterà fare tale inveſtigazione dal 3. ſino al 10. perchè quello, che converrà a uno di queſti numeri, converrà ancora al ſuo ſoſſopra.

Tre particolarità ſi debbon notare per chiara intelligenza di quello, che reſta: la prima è, che quel punto de i tre dadi, la cui compoſizione riſulta da tre numeri eguali non ſi può produrre, ſe non da una ſola ſcoperta, ovvero tiro di dadi, e così il 3. non ſi può formare ſe non dalle tre faccie dell'aſſo, ed il 6. quando ſi doveſſe comporre con tre dui, non ſi farebbe ſe non da una ſola ſcoperta. Seconda: il punto, che ſi compone da i tre numeri, due de' quali ſieno i medeſimi, e il terzo diverſo, ſi può produrre da tre ſcoperte, come v. g. il 4. che naſce dal 2. e dalli due aſſi, può farſi con tre cadute diverſe, cioè quando il primo dado ſcuopra 2. e il ſecondo, e terzo, ſcuoprano aſſo. E così v. g. l'8. in quanto reſulta da 3. 3. 2. può produrſi parimente in tre modi; cioè ſcuoprendo il primo dado 2. e li altri 3. per uno, o ſcuoprendo il ſecondo dado 2. ed il primo, e terzo 3. o finalmente ſcuoprendo il terzo dado 2. ed il primo, e ſecondo 3. Terza: quel numero di punti, che ſi compone di tre numeri differenti può produrſi in 6. maniere, come per eſempio, l'8. mentre ſi compone da 1. 3. 4. ſi può fare con 6. ſcoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. il ſecondo 3. e il terzo 4. ſeconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il ſecondo 4. e il terzo 3. terza, quando il ſecondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4. quarta, facendo il ſecondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3. quinta, quando facendo il terzo dado 1. il primo faccia 3. e il ſecondo 4. ſeſta, quando ſopra l'1. del terzo dado, il primo farà 4. e il ſecondo 3. Abbiamo dunque ſin qui dichiarati queſti tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle ſcoperte de i tre dadi, che ſi compongono da tre numeri eguali, non ſi producono ſe non in un modo ſolo; ſecondo, che le triplicità, che naſcono da due numeri eguali, e dal terzo differente, ſi producono in tre maniere; terzo, che quelle, che naſcono da tre numeri tutti differenti ſi formano in ſei maniere. Da queſti fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante ſcoperte differenti ſi poſſon formare tutti i numeri de i tre dadi, il che per la ſeguente tavola facilmente ſi comprende, in fronte della quale ſono notati i punti de i tiri dal 10. in giù ſino al 3. e ſotto eſſi le triplicità differenti, dalle quali ciaſcuno di eſſi può reſultare, accanto alle quali ſon poſti i numeri, ſecondo i quali ciaſcuna triplicità ſi può diverſificare, ſotto i quali è finalmente raccolta la ſomma di tutti i modi poſſibili a produrre eſſi tiri, come per eſempio



nella

nella prima caſella abbiamo il punto 10. e ſotto di eſſo 6. triplicità di numeri, con i quali egli ſi può comporre, che ſono 6. 3. 1., 6. 2. 2., 5. 4. 1., 5. 3. 2., 4. 4. 2., 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità 6. 3. 1. è compoſta di tre numeri diverſi, può (come ſopra ſi è dichiarato) eſſer fatta da 6. ſcoperte di dadi differenti; però accanto ad eſſa triplicità 6. 3. 1. ſi nota 6. ed eſſendo la ſeconda 6. 2. 2. compoſta di due numeri eguali, e di un altro diverſo, non può produrſi ſe non in 3. differenti ſcoperte, però ſe gli nota accanto 3. la terza triplicità 5. 4. 1. compoſta di tre numeri diverſi può farſi da 6. ſcoperte, onde ſi nota col numero 6. e così dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle ſcoperte è raccolta la ſomma di tutte: dove ſi vede, come il punto 10. può farſi da 27. ſcoperte di dadi differenti, ma il punto 9. da 25. ſolamente, e l' 8. da 21. il 7. da 15. il 6. da 10. il 5. da 6. il 4. da 3. e finalmente il 3. da 1. le quali tutte ſommate inſieme aſcendono al numero di 108. Ed eſſendo altrettante le ſcoperte de i ſoſſopri, cioè de i punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. ſi raccoglie la ſomma di tutte le ſcoperte poſſibili a farſi colle faccie de i tre dadi, che ſono 216. E da queſta tavola potrà ognuno ch'intenda il giuoco, andar puntualiſſimamente miſurando tutti i vantaggi per minimi, che ſieno de le zare, degl'incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in eſſo giuoco ſi oſſerva.

Galileo Galilei
Le operazioni del compasso geometrico e militare

Quest'opera, composta nel 1606, quando Galileo insegnava a Padova, descrive uno strumento con il quale è possibile compiere misurazioni, disegni e costruzioni geometriche. La paternità dell'invenzione fu inizialmente rivendicata da Baldassarre Capra, che, ingiustamente, accusò Galileo di plagio.

Il compasso è formato da due regoli, incernierati ad un'estremità, sui quali sono riportate diverse linee, suddivise secondo vari tipi di proporzione (aritmetica, geometrica, ecc.) Esso permette di risolvere i principali problemi contenuti negli ***Elementi*** di **Euclide**, come dividere un segmento in un dato numero di parti uguali, o **estrarre graficamente la radice quadrata di un numero**. Esso consente anche di effettuare alcune costruzioni impossibili con riga e compasso, come la **costruzione di un poligono regolare** con un numero di lati qualunque, oppure la **quadratura del cerchio**. Inoltre può essere utilizzato per diverse applicazioni pratiche, come il calcolo degli interessi, il confronto dei pesi specifici dei metalli, o anche la determinazione dell'altezza di un edificio, da cui risulta la sua utilità in campo balistico e militare.



Il frontespizio dell'opera

Matematica e Astronomia

Galileo Galilei
Sidereus Nuncius
Venetii, 1610

(*Annunzio Sidereo*
Venezia, 1610)

Ed. bilingue Firenze, 1948

Citiamo dalla prefazione di Maria Timpanaro Cardini: *"Tra le opere letterarie brevi e perfette, di carattere artistico o scientifico, uno dei primi posti spetta al* ***Sidereus Nuncius*** *di Galileo Galilei. È una comunicazione scientifica, fatta al mondo dei dotti, di un'invenzione:* ***il cannocchiale****; di una scoperta: i Pianeti Medicei; della giusta interpretazione di fenomeni variamente discussi:* ***macchie lunari****, luce secondaria della luna,* ***[galassie e] nebulose****. Ma la comunicazione assume la forma del messaggio, e suona come una viva sollecitazione a scienziati e studiosi perché liberino la mente dalle angustie di vecchie formule e guardino finalmente il mondo coi loro occhi, resi più acuti e perspicaci dall'occhiale mirabile da lui escogitato."*

Il primo ad intuire che la luna ha una natura terrestre, con "*pianure e burroni*", e che le macchie lunari altro non sono che ombre fu il filosofo presocratico Anassagora, vissuto nel sec. V a.C..

Frontespizio dell'opera: versione italiana
versione latina

Osservazione delle reciproche posizioni di quattro astri dal nel gennaio 1610:
- Pagina manoscritta del giorno 7
- Annotazioni del giorno 22: versione italiana
versione latina

Opere di Galileo

SIDEREVS NVNCIVS

MAGNA, LONGEQVE ADMIRABILIA Spectacula pandens, ſuſpiciendaque proponens vnicuique, præſertim verò

PHILOSOPHIS, atq; ASTRONOMIS, quæ à

GALILEO GALILEO

PATRITIO FLORENTINO

Patauini Gymnaſij Publico Mathematico

PERSPICILLI

Nuper à ſe reperti beneficio ſunt obſeruata in LVNÆ FACIE, FIXIS INNVMERIS, LACTEO CIRCVLO, STELLIS NEBVLOSIS,

Apprime verò in

QVATVOR PLANETIS

Circa IOVIS Stellam diſparibus interuallis, atque periodis, celeritate mirabili circumuolutis; quos, nemini in hanc vſque diem cognitos, nouiſſimè Author deprehendit primus; atque

MEDICEA SIDERA

NVNCVPANDOS DECREVIT.



VENETIIS, Apud Thomam Baglionum. M DC X.

Superiorum Permiſſu, & Priuilegio.

ANNUNZIO
SIDEREO

CHE GRANDI, E OLTREMODO MIRABILI
Spettacoli apre, ed espone allo sguardo
d'ognuno e in special modo
di FILOSOFI e ASTRONOMI, da

GALILEO GALILEI

PATRIZIO FIORENTINO
dello Studio Padovano Pubblico Matematico
col CANNOCCHIALE
da lui da poco inventato, osservati nella FACCIA della LUNA, in INNUMEREVOLI FISSE, nella VIA LATTEA, nelle STELLE NEBULOSE, e in primo luogo in

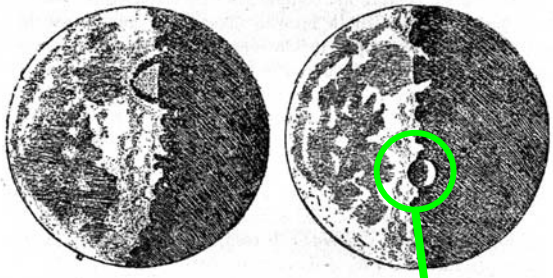
QUATTRO PIANETI

intorno alla Stella di GIOVE, a diversi intervalli e periodi,
con celerità mirabile rotanti; da nessuno finora
conosciuti, primo l'autore di recente li
scorse, e assegnò loro il nome di

ASTRI MEDICEI

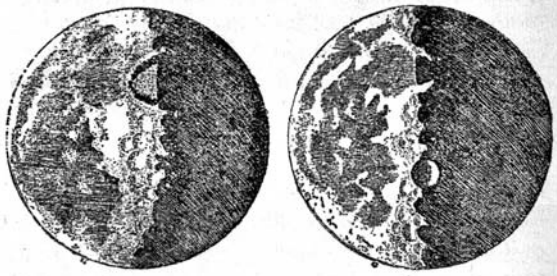
VENEZIA, presso Tommaso Baglioni. MDCX.

Haec eadem macula ante secundam quadraturam nigrioribus quibusdam terminis circumvallata conspicitur; qui, tanquam altissima montium iuga, ex parte Soli aversa obscuriores apparent, qua vero Solem respiciunt lucidiores extant: cuius oppositum in cavitatibus accidit; quarum pars Soli aversa splendens apparet, obscura vero ac umbrosa quæ ex parte Solis sita est. Imminuta deinde luminosa superficie, cum primum tota ferme dicta macula tenebris est obducta, clariora montium dorsa eminenter tenebras scandunt. Hanc duplicem apparentiam sequentes figuræ commonstrant.



Unum quoque oblivioni minime tradam, quod non nisi aliqua cum admiratione adnotavi: medium quasi Lunæ locum a cavitate quadam occupatum esse reliquis omnibus maiori, ac figura perfectæ rotunditatis; hanc prope quadraturas ambas conspexi, eandemque in secundis supra positis figuris quantum licuit imitatus sum: eundem, quo ad obumbrationem et illuminationem, facit aspectum, ac faceret in terris regio consimilis Bohemiæ, si montibus altissimis, inque peripheriam perfecti circuli dispositis, occluderetur undique; in Luna enim

Questa medesima macchia prima della seconda quadratura si scorge circonvallata da certi contorni più neri; i quali, sì come le altissime cime dei monti, appaiono più oscuri dalla parte opposta al Sole, mentre là dove guardano al Sole si presentano più luminosi; che è il contrario di quanto accade nelle cavità, delle quali la parte opposta al Sole appare splendente, oscura invece ed ombrosa quella situata dalla parte del Sole. Diminuita poi la superficie luminosa, mentre prima quasi tutta la detta macchia era ricoperta di tenebre, sporgono a grado a grado dalle tenebre più luminosi i dorsi dei monti. Questo duplice aspetto è rappresentato dalle seguenti figure:



E un'altra cosa non voglio tralasciare, che non senza una certa meraviglia ho notato: esser cioè il luogo quasi centrale della Luna occupato da una cavità maggiore di tutte le altre, e di figura perfettamente rotonda; la scorsi in prossimità delle due quadrature, e cercai di riprodurla per quanto era possibile nelle seconde su riportate figure; essa offre, quanto all'adombramento e all'illuminazione, il medesimo aspetto che offrirebbe sulla terra la regione consimile della Boemia, se tutt'intorno fosse chiusa da monti

Qui compare un cratere che, nella realtà, non esiste. Esso è invece assente nei **disegni originali** di Galileo: si tratterebbe dunque, con ogni probabilità, di un errore del tipografo.

NEBULOSA ORIONIS.



a)

NEBULOSA PRAESEPE.



b)

Adi 7. di Genaio 1610 Giove si vedeva co'l Cannone ꝯ
3. stelle fisse così ✻ ✻ ✻ della quali retta il cannone
minor si vedeva. ori: ✻ à di. d. affaritta così ✻ ✻ ✻ era dirᵗᵒ
diretto et nō retrogrado come sogliono i calculatori.
Adi. 9. fu nuvolo. à dì 10. si vedeva così ——— ✻ ✻ ✻ cioè ēd.
giūto ꝯ la più occidentale si che la vecchia aggiūto si puo credere.

Adi 11. era in questa guisa ✻ ✻ ✻ et la stella più vicina
à Giove era la metà minore dell'altra, et vicinissima all'altra
dove che le altre tre erano le dette stelle affarite tutte tre
di egual grandezza et trà di loro egualm. lontane; dal che
appare intorno à Giove esser 3. altre stelle erratiche invisibili ad
ogn'occhio sino à questo tēpo.

Adi 12. si vedde in tale costituzione ori ✻ ✻ ✻ oc: era la stella
occidentale poco minor della orientale, et giove era in mezo lontano
da l'una et dall'altra quāto il suo diametro ē circa: et forse era
una terza piccolissima et vicinissima à ♃ verso oriēte; anzi pur vi era
veramente benēdio ꝯ più diligēza osservato, et vedo più imperfettam.
notte.

Adi 13. benēdio bellissimo fermato lo strum.to si vedevano vicinissime à Giove
4. stelle in questa costituzione ✻ ✻ ✻ ✻ ò meglio così ✻ ✻ ✻ ✻
e tutte affaritano della med.ma grandezza, lo spazio delle 3. occidētali
nō era maggiore del diametro di ♃. et erano trà di loro notabilm.
più vicine che le altre sere; ne erano in linea retta esquisitam. come
et avēbi ma la media delle 3 occidētali era ū poco elevata, ò vero la
più occidētale alquāto depressa; sono queste stelle tutte molto lucide bēch
piccolissime et altre fisse et affaritano della med.ma grandezza nō sono
così splendēti.

Adi 14. fu nuvolo. Adi 15. era così . ✻ ✻ ✻ ✻ oc: la prossᵃ à
♃. era la minore et le altre di meno ē meno maggiori: gl'intervallij
tra ♃ et la 3. seguēti erano, quāto il diametro di ♃. ma la 4ª era di-
stante dalla 3ª il doppio ē circa: nō fece
vedere 3 stelle. Mei: 2.30 1.17 1.17 erano ēteram.te linea retta, ma come mostra
l'esempio, erano al solito lucidiss.me bēche picco
le, ed insieme scintillavano come fā gl'ātri

Le annotazioni di Galileo sulla posizione dei satelliti di Giove nel gennaio 1610

Die vigesima secunda, hora 2, consimilis fuit Stellarum dispositio:

Ori. ✳ ○ ✳✳ ✳ Occ.

a Stella orientali ad Iovem minutorum primorum 5 fuit intervallum, a Iove ad occidentaliorem pr. 7. Duæ vero occidentales intermediæ distabant ad invicem min. 0, sec. 40; propinquior vero Iovi aberat ab illo m. p. 1. Ipsæ mediæ Stellulæ minores erant extremis: fuerunt vero secundum eandem rectam lineam iuxta Zodiaci longitudinem extensæ, nisi quod trium occidentalium media paululum in austrum deflectebat. Sed, hora noctis sexta, in hac constitutione visae sunt:

Ori. * ○ * * * Occ.

orientalis admodum exigua erat, distans a Iove, ut antea, min. pr. 5. Tres vero occidentales, et a Iove et ad invicem, æqualiter dirimebantur, erantque intercapedines singulæ min. 1, sec. 20 proxime: et Stella Iovi vicinior, reliquis duabus sequentibus minor apparebat: omnesque in eadem recta exquisite dispositæ videbantur.

Die vigesima tertia, hora 0, min. 40 ab occasu, in hunc ferme modum Stellarum constitutio se habuit:

Ori. ✳ ✳ ○ ✳ Occ.

erant tres Stellæ cum Iove in recta linea secundum Zodiaci longitudinem, veluti semper fuerunt: orientales erant duæ, una vero occidentalis. Orientalior aberat a sequenti min. pr. 7, hæc vero a Iove min. 2, sec. 40, Iuppiter ab occidentali min. 3, sec. 20: erantque omnes magnitudine fere æquales. Sed, hora quinta, duæ Stellæ, quæ prius Iovi erant proximæ, amplius non cernebantur, sub Iove, ut arbitror, latitantes; fuitque talis aspectus:

Ori. ✳ ○ Occ.

Orientalior distabat a sequenti min. 3, hæc vero a Iove aberat min. 0, sec. 40, Iuppiter a proxima occidentali min. 4, hæc ab occidentaliori min. 6. Magnitudine erant fere æquales; proximior Iovi reliquis paulo minor apparebat. Hora autem septima, orientales Stellæ distabant tantum min. 0, sec. 30.

Ori. ✳✳ ○ ✳ ✳ Occ.

Iuppiter ab orientali viciniori aberat min. 2, ab occidentali vero sequente min. 4, hæc vero ab occidentaliori distabat min. 3: erantque æquales omnes, et in eadem recta secundum Eclipticam extensa.

Die quinta, Cœlum fuit nubilosum.

Die sexta, duæ solummodo apparuerunt Stellæ, medium Iovem intercipientes, ut in figura apposita spectatur:

Ori. ✳ ○ ✳ Occ.

orientalis a Iove distabat min. 2, occidentalis vero min. 3: erant in eadem recta cum Iove, et magnitudine pares.

Die septima, duæ adstabant Stellæ, a Iove orientales ambæ, in hunc dispositæ modum:

Ori. ✳✳○ Occ.

intercapedines inter ipsas et Iovem erant æquales, unius nempe minuti primi; ac per ipsas et centrum Iovis recta linea incedebat.

Die octava, hora prima, aderant tres Stellæ orientales omnes, ut in descriptione:

Ori. *✳ ✳ ○ Occ.

Iovi proxima, exigua satis, distabat ab eo min. 1, sec. 20; media vero ab hac min. 4, eratque satis magna; orientalior, admodum exigua, ab hac distabat min. 0, sec. 20. Anceps eram, nunquid Iovi proxima una tantum, an duæ forent Stellulæ; videbatur enim interdum huic alia adesse versus ortum, mirum in modum exigua, et ab illa seiuncta per min. 0, sec. 10

Versione italiana

Le annotazioni di Galileo sulla posizione dei satelliti di Giove nel gennaio 1610

Il giorno 22, all'ora 2, la disposizione delle Stelle era tale:

Ori. ✳ ○ ✳✳ ✳ Occ.

dalla Stella orientale a Giove c'era un intervallo di min. pr. 5, da Giove alla più occidentale di min. pr. 7. Le due occidentali intermedie poi distavano fra loro min. 0, sec. 40; la più vicina a Giove distava da esso min. pr. 1. Le stesse Stelline intermedie erano più piccole delle estreme: e tutte si estendevano sulla medesima retta secondo la linea dello Zodiaco, se non che la media delle tre occidentali deviava un pochino verso austro. Ma all'ora sesta di notte apparvero in questa disposizione:

Ori. * ○ * * * Occ.

la orientale era piccolissima, e distava da Giove, come prima, min. pr. 5. Le tre occidentali poi egualmente si distanziavano tra loro e da Giove e ciascun intervallo era press'a poco di min. 1, sec. 20; la Stella più vicina a Giove appariva minore delle due altre seguenti, e tutte apparivano disposte esattamente sulla medesima retta.

Il giorno 23, a ore 0, m. 40 dal tramonto, la collocazione delle Stelle era all'incirca in questo modo:

Ori. ✳ ✳ ○ ✳ Occ.

erano tre Stelle in linea retta con Giove secondo la linea dello Zodiaco, come sempre furono: due erano orientali, una occidentale. La più orientale distava dalla seguente min. pr. 7, questa poi da Giove min. 2, sec. 40, e Giove dalla occidentale min. 3, sec. 20; ed erano tutte quasi uguali di grandezza. Ma, all'ora quinta, le due Stelle che prima erano le più vicine a Giove, non si vedevano più, perché nascoste, credo, sotto Giove; e l'aspetto era tale:

Ori. ✳ ○ Occ.

La più orientale distava dalla seguente min. 3, questa da Giove min. 0, sec. 40, Giove dalla più vicina occidentale min. 4, questa dalla più occidentale min. 6. Di grandezza erano quasi uguali; la più vicina a Giove appariva un po' minore delle altre. Poi all'ora settima, le Stelle orientali distavano soltanto di min. 0, sec. 30.

Ori. ✳✳ ○ ✳ ✳ Occ.

Giove dalla orientale più vicina distava min. 2, dalla occidentale seguente min. 4, e questa poi dalla più occidentale distava min. 3; erano tutte uguali e sulla medesima retta stesa secondo l'Eclittica.

Il giorno 5 il Cielo fu nuvoloso.

Il giorno 6, apparvero soltanto due Stelle, con in mezzo Giove, come si vede nella presente figura:

Ori. ✳ ○ ✳ Occ.

la orientale distava da Giove min. 2, la occidentale min. 3; erano sulla medesima retta con Giove, e pari di grandezza.

Il giorno 7, c'erano due Stelle, ambedue orientali da Giove, disposte in questo modo:

Ori. ✳✳ ○ Occ.

gl'intervalli tra esse e Giove erano uguali, cioè di un minuto primo; e per esse e il centro di Giove passava una linea retta.

Il giorno 8, a un'ora, c'erano tre Stelle tutte orientali, come in questo disegno:

Ori. * ✳ * ○ Occ.

la più vicina a Giove, piuttosto piccola, distava da esso min. 1, sec. 20; la media da questa min. 4, ed era abbastanza grande; la più orientale, molto piccola, distava dalla media min. 0, sec. 20. Ero in dubbio, se la più vicina a Giove fosse una soltanto o due Stelline; pareva infatti a momenti che ad essa un'altra ne apparisse accanto verso oriente, straordinariamente piccola, e separata per min. 0, sec. 10 sol-

Galileo Galilei
Il Saggiatore

L'antefatto di quest'opera, stampata a Roma nel 1623, a cura dell'Accademia dei Lincei, inizia nel 1618, con l'apparizione di tre comete. Nel 1619 Matteo Guiducci, allievo di Galileo, presentò all'Accademia fiorentina il *Discorso sulle Comete,* una lezione scritta da Galileo in netto contrasto col padre gesuita Orazio Grassi, che l'anno prima aveva pubblicato una *Disputatio Astronomica de tribus cometis anni MDCXVIII.* In quest'opera Grassi aderiva alle teorie di **Tycho Brahe**, secondo il quale le comete erano veri e propri corpi celesti. Galileo, invece, ne negava l'esistenza, riducendole a semplici illusioni ottiche: nel suo sistema astronomico, basato sul moto circolare uniforme, non c'era spazio per oggetti aventi moti irregolari. Il Grassi reagì pubblicando, con lo pseudonimo di Lotario Tarsi Sigensano (anagramma di Oratio Grassi Salonensi), lo scritto polemico *Libra astronomica ac philosophica*. L'autore spiegava il titolo dicendo che, essendo la maggiore delle tre comete apparsa nella costellazione della Bilancia (*libra* in latino), si poteva vedere in ciò un invito al suo avversario a soppesare accuratamente le sue affermazioni. Il Grassi commise qui un errore: la costellazione in questione era quella dello Scorpione, il che permise al Galilei di beffarsi del gesuita proponendogli di correggere il titolo in *Astronomico Scorpione,* che, peraltro, secondo lui ben si addiceva ad un'opera così intrisa di veleno.

Il *Saggiatore* è per Galilei il "saggiatore d'oro", colui che pesa il prezioso metallo servendosi di una bilancia precisa e sensibile (*esquisita*): è quella che egli intende usare nella risposta al Grassi. L'opera, considerata il capolavoro polemico di Galilei, prende spunto dalla *Libra,* per attaccarne le tesi una ad una, per rivoltarne le argomentazioni con ironia e grande abilità dialettica. In quest'opera, organizzata sotto forma di disputa scientifica tra lui stesso ed il Grassi, Galileo realizza un'abile impresa: riesce a coprire di ridicolo certe tesi sostenute dal suo avversario con giustificazioni erudite e "libresche", col riferimento ad oscure autorità del mondo antico, mentre riserva a se stesso la difesa, basata su sagaci ed arditi ragionamenti, di affermazioni contrarie. Il gesuita interpreta la caricatura del dotto aristotelico, che crede solo a quello che legge negli scritti del passato, mentre Galileo impersona, in veste ironica, lo scienziato puro, armato solo dei propri sensi e dell'intelletto, che si basa sull'osservazione diretta della natura.

Dalle pagine del *Saggiatore,* frammezzo a tante curiose speculazioni, e teorie errate, come quella sulle comete, emergono comunque due importanti capisaldi della fisica galileiana. Il primo consiste nel vedere il moto delle particelle dei corpi (*minimi ignei*) all'origine del calore: è quanto emerge dal dialogo in cui Grassi ricorda, tra l'altro, che, secondo un lessicografo bizantino vissuto intorno all'anno Mille, il Suida, i Babilonesi cuocevano le uova facendole roteare con una fionda… A dimostrare come, con l'arguzia, si possa clamorosamente smontare la retorica, ecco la risposta di Galileo:

"Se il discorrere circa un problema difficile fusse come il portar pesi, dove molti cavalli porteranno più sacca di grano che un caval solo, io acconsentirei che i molti discorsi facesser più che un solo; ma il discorrere è come il correre, e non come il portare, ed un caval barbero solo correrà più di cento frisoni… Se il Sarsi vuol ch'io creda a Suida che i Babilonii cocesser l'uova col girarle velocemente nella fionda, io la crederò; ma dirò bene, la cagione di tal effetto esser lontanissima da quella che gli viene attribuita […] Se a noi non succede un effetto che ad altri altra volta è riuscito, è necessario che noi nel nostro operare manchiamo di quello che fu causa della riuscita d'esso effetto, e che non mancando a noi altro che una cosa sola, questa cosa sola sia la vera causa: ora, a noi non mancano uova, né fionde, né uomini robusti che le girino, e pur non si cuociono; e perché non ci manca altro che l'esser di Babilonia, adunque l'esser Babiloni è causa dell'indurirsi delle uova."

Il secondo caposaldo della fisica galileiana riguarda la struttura geometrica del mondo: *"la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intender se prima non s'impara a intender la lingua, e conosce i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto".*

Galilei riconosce carattere oggettivo soltanto alle proprietà *quantitative* (come la forma, la grandezza, la posizione nello spazio, lo stato di moto o di quiete) che sono intrinseche dei corpi e possono essere misurate, e quindi trattate con gli strumenti matematici. Altre sono le proprietà *qualitative* (come il colore, il suono, il sapore, l'odore) che sono invece semplici, temporanee affezioni dei sensi, dovute all'incidentale interazione tra l'essere senziente e gli oggetti, e che

esistono solo sotto forma di *nomi*, create dagli esseri umani per descrivere le proprie soggettive percezioni.
Una volta che il dato empirico (la *"sensata esperienza"*) è stato tradotto in numeri e formule, è possibile trarre conclusioni su possibili eventi futuri: utilizzando i calcoli ed il metodo deduttivo proprio della matematica, si formulano previsioni, che devono poi essere confermate sperimentalmente. Questa è la via che, secondo Galileo, conduce alla formulazione di leggi fisiche. Il metodo, che concilia l'empirismo di Bacone con il razionalismo di **Cartesio**, comincia e finisce con l'osservazione diretta della natura, in un percorso circolare rigorosamente condotto e controllato dalla ragione umana. Geymonat vuole vedere in Galileo un precursore dell'Illuminismo.

Dunque l'esperienza fa intuire le leggi della fisica: queste si affacciano alla mente dello scienziato come congetture, che egli deve poi dimostrare. Per Galileo, allo stesso modo nascono i teoremi della geometria: nei ***Discorsi*** dirà, a proposito del **Teorema di Pitagora**:

*"E mai non abbiate dubbio che **Pitagora**, gran tempo avanti che e' ritrovasse la dimostrazione per la quale fece l'ecatumbe, si era assicurato che 'l quadrato del lato opposto all'angolo retto del triangolo era uguale a i quadrati de gli altri due lati; e la certezza della conclusione aiuta non poco al ritrovamento della dimostrazione, intendendo sempre nelle scienze dimostrative."*

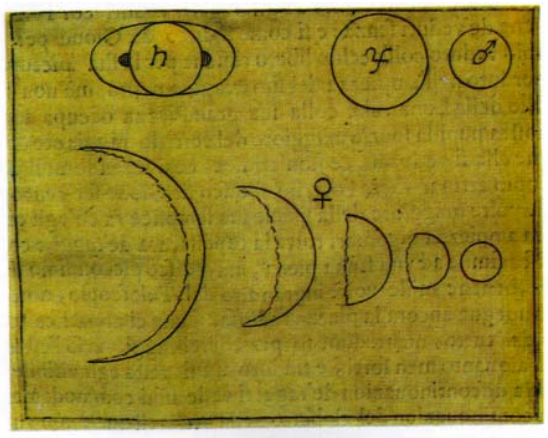
Nella matematizzazione del mondo fisico operata da Galileo si potrebbe vedere un atteggiamento di stampo pitagorico: ma, se la **numerologia** della scuola di Crotone voleva vedere nei numeri le componenti ultime delle cose concrete, Galileo li considera astrazioni mentali, strumenti di codificazione del reale. La matematica non ha per lui alcuna relazione metafisica con il cosmo, è solo un metodo di ricerca di cui l'esperienza ha rivelato l'efficacia. I rapporti numerici non sono l'essenza delle cose, bensì la loro traduzione intelligibile, come sottolinea il Banfi: *"La ricerca di questi rapporti è l'atto stesso originario dell'intelligenza, che si manifesta come istintiva curiosità delle cause."* Galileo, per altro, condannerà esplicitamente il misticismo dei numeri nel suo *Dialogo.*

Curiosità

La famosa frase di Galileo secondo cui l'universo sarebbe scritto nell'alfabeto della matematica viene ripresa con ironia dallo scrittore inglese Jonathan Swift (1667-1745) nella sua storia fantastica ***I viaggi di Gulliver***: egli la usa per introdurre la descrizione del mondo di Laputa, l'Isola Volante, che pare tutto intriso di matematica. Il protagonista dice: "*Le mie conoscenze matematiche m'aiutarono moltissimo ad imparare la fraseologia laputiana, la quale, in gran parte, dipende dalla matematica e dalla musica; arte quest'ultima di cui non ero del tutto digiuno. Le loro idee si aggirano sempre fra linee e figure. Volendo lodare, ad esempio, la bellezza d'una donna, o di qualunque altro vivente, essi la descrivono con rombi, circoli, parallelogrammi, **ellissi**, ed altri termini tolti in prestito dalla geometria, o con vocaboli dell'arte musicale, dei quali faccio grazia al lettore. Osservai nella cucina del re ogni specie di strumenti matematici e musicali: essi servono di modello per tagliare in determinate figure la carne che s'imbandisce alla tavola di Sua Maestà.*"

In un altro punto del libro leggiamo, sempre a proposito di Laputa:

"*Fu servito il pranzo, e quattro personaggi di grado elevato, che ricordo di aver visto prossimi all'augusta persona, mi fecero l'onore di tenermi compagnia a tavola. Avemmo due portate, ciascuna di tre pietanze. Nella prima ci fu una spalla d'agnello tagliata in forma di triangolo equilatero, un pezzo di manzo in forma d'un rombo, ed un bodino arieggiante una **cicloide**. La seconda portata consistette in due anatre legate insieme in modo da raffigurare un violino; salsicce e bodini che si sarebbero detti flauti e oboe, e del petto di vitello che pareva proprio un'arpa. I domestici ci tagliarono il pane in tanti coni, cilindri, parallelogrammi, ed altre figure geometriche.*"



La rappresentazione di Saturno ne *Il Saggiatore*

Il frontespizio dell'opera


IL SAGGIATORE
Nel quale
Con bilancia esquisita e giusta
si ponderano le cose contenute
nella
LIBRA ASTRONOMICA E FILOSOFICA
DI LOTARIO SARSI SIGENSANO
Scritto in forma di lettera
All'Ill.re e Rever.mo Mons.r D.
VIRGINIO CESARINI
Acc.o Linceo M.o di Camera di N.S
Dal Sig.r
GALILEO GALILEI
Acc.o Linceo Nobile Fiorentino
Filosofo e Matematico Primario
del
Ser.mo Gran Duca di Toscana
IN ROMA M.D.C.XXIII
Appresso Giacomo Mascardi

Galileo Galilei
Dialogo de' due Massimi Sistemi Tolemaico e Copernicano

Quest'opera fu stampata il 21 febbraio 1632, a Firenze, presso il tipografo Landini. Essa vide la luce molti anni dopo la composizione del trattatello galileiano del 1616, intitolato *Dialogo sopra il flusso e il reflusso del mare,* che ne costituiva il nucleo, e ne conteneva la principale tesi, ossia quella secondo cui il fenomeno delle maree fornirebbe la prova del moto della Terra. Il completamento dell'opera fu ritardato in parte per la titubanza del Galilei a pubblicare scritti che sostenessero la teoria copernicana, condannata dal Sant'Uffizio nel 1616, in parte a causa dei suoi problemi di salute, per *"l'età, ch'è molta, e la sanità ch'è poca"*, come egli stesso aveva detto in una lettera del 1625. Galilei aveva deciso di rimettere mano al *Dialogo* solo dopo che la sua opera precedente, il ***Saggiatore***, del 1623, era stata favorevolmente accolta dal neoeletto papa Urbano VIII. Questi, a seguito della visita dello scienziato in Vaticano, aveva indirizzato al Granduca Ferdinando II di Toscana una missiva piena di lodi e d'amore per *"il diletto figlio Galileo*", di cui così diceva: *"Un tanto uomo, la cui fama splende in cielo e corre la terra […] noi da tempo cingemmo col nostro paterno affetto, poiché riconoscemmo in lui non soltanto la gloria delle lettere, ma anche il fervore religioso".* Galileo si era recato a Roma nel tentativo di ottenere la revoca del divieto del 1616, quel *"salutifero editto"* che gli aveva proibito di parlare dell'ipotesi del moto della Terra se non come mera "supposizione" accademica. I protagonisti della vicenda non c'erano più: era cambiato il pontefice, ed il cardinale Bellarmino era morto nel 1621.
Galilei non riuscì nella missione, ma ritenne comunque - pur conservando qualche legittima riserva - che il clima gli potesse essere favorevole, confortato in ciò anche dalle benevole parole del papa, che qualche tempo prima, quando era ancora cardinale, gli aveva addirittura dedicato una poesia. Forse egli confidava anche nell'autorità che, in tanti anni, egli aveva indubbiamente acquisito, anche al di fuori del campo scientifico. E, d'altra parte, era difficile per uno scienziato del suo calibro, dal carattere impulsivo, trattenere per sé le nuove, fondamentali conoscenze conseguite. Da una sua lettera emerge anche quanto egli si sentisse in dovere di agire in difesa di coloro che, da quasi un secolo, avevano sostenuto la teoria copernicana.

Gli eventi gli avrebbero dato torto: il *Dialogo* subì vari interventi censori, e Galileo faticò molto per ottenere dal papa la licenza di

stampa: questa, infine, venne revocata, con un procedimento che sfociò nel processo per eresia e nella **condanna** a vita per Galileo.

Le principali modifiche richieste dal revisore riguardarono il titolo, in cui fu fatto scomparire il riferimento alle maree, ed il proemio, in cui Galileo dovette precisare che il sistema copernicano era da considerarsi una semplice ipotesi, un puro *"capriccio matematico", "senza conceder la verità assoluta"*. Il papa volle inoltre che l'autore dichiarasse esplicitamente di rinunciare alla pretesa di aver svelato il mistero della costituzione del mondo: questa non poteva che essere una *"fantasia*" umana, che vanamente credeva di potersi porre al di sopra dell'insondabile disegno di Dio. E Galileo farà in modo che, alla conclusione del dialogo, Simplicio non cambi idea, al Salviati farà dire che le teorie da lui esposte potrebbero benissimo essere una *"vanissima chimera"* ed un *"solennissimo paradosso".*

L'opera è scritta in volgare, perché Galileo voleva che essa potesse avere la massima diffusione possibile. Egli, del resto, era sempre stato sensibile al problema dell'uso didattico della lingua. Il Sant'Uffizio stigmatizzò questo fatto come un'aggravante, che aumentava grandemente la pericolosità dell'opera.

Il contenuto dell'opera è ben riassunto dal lunghissimo titolo imposto dal Vaticano: "*Dialogo di Galileo Galilei, Linceo, Matematico sopraordinario dello Studio di Pisa e Filosofo e Matematico primario del Serenissimo Gran Duca di Toscana, dove ne i congressi di quattro giornate si discorre sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano, proponendo indeterminatamente le ragioni filosofiche e naturali tanto per l'una quanto per l'altra parte."*

Il testo consiste in un immaginario dialogo (il Campanella dirà: *"Certo che non avemo a invidiar **Platone**"*), avente luogo in un palazzo sul Canal Grande, e coinvolge tre interlocutori: Simplicio, sostenitore del sistema tolemaico, e due defunti amici e discepoli di Galileo, il fiorentino Filippo Salviati, sostenitore del sistema copernicano, e il veneziano Giovanfrancesco Sagredo, che è anche il padrone di casa, e fa da moderatore tra i due contendenti. Simplicio è il nome di un filosofo greco del sec. VI d.C., commentatore di Aristotele: ma il Sant'Uffizio - sicuramente non a torto - volle vedere in esso il significato di "sempliciotto, sciocco": in effetti, anche il Campanella ravvisò in quel personaggio una figura ridicola, *"il trastullo di questa commedia filosofica"*. E poiché proprio a Simplicio Galileo aveva messo

in bocca le parole del papa, il Vaticano ebbe un comodo appiglio per provare la malafede dell'autore.

La disputa è una contrapposizione, soprattutto metodologica, tra Simplicio, che si richiama alla tradizione dei filosofi greci, e Salviati, che ragiona alla maniera di Galileo, facendo affidamento esclusivamente sui propri mezzi di ricercatore. Galileo stesso, di cui vengono discusse molte teorie fisiche, non viene mai esplicitamente nominato: ma Salviati fa spesso riferimento ad un *"Accademico Linceo"* la cui identità è più che ovvia.

A dire il vero, agli occhi del lettore moderno Simplicio non ha nulla di farsesco, è una figura più che dignitosa, anche se anacronistica. Tutt'al più può sembrare a tratti rigido e impacciato di fronte a fatti evidenti ed elementari, a tratti impegnato in tortuosi - quanto inconcludenti - giri di pensieri. Pare poco abituato a sviluppare idee proprie. Egli è infatti la personificazione della sterilità della **logica**, che niente può senza la pratica. Per dirlo con le parole del Salviati:

"[…] la logica, come benissimo sapete, è l'organo col quale si filosofa; ma, sì come può esser che un artefice sia eccellente in fabbricare organi, ma indotto nel sapergli sonare, così può esser un gran logico, ma poco esperto nel sapersi servir della logica […] Il sonar l'organo non s'impara da quelli che sanno far organi, ma da chi gli sa sonare; […] il dimostrare, dalla lettura dei libri pieni di dimostrazioni, che sono i matematici soli, e non i logici."

Salviati rimprovera ripetutamente Simplicio per la sua impostazione, controbatte duramente alle sue argomentazioni erudite: *"E perché [queste cose] non l'avete voi, senza ridurvi a dover credere all'altrui relazioni, osservate e viste da per voi con i vostri occhi propri?" "Quando si abbiano a negare i principi delle scienze e mettere in dubbio le cose manifestissime, chi non sa che si potrà provare quel che altri vuole e sostener qualsiasi paradosso?" "Mille Demosteni e mille Aristoteli resterebbero a piede contro ad ogni mediocre ingegno che abbia avuto ventura di apprendersi al vero. Però, signor Simplicio, toglietevi pur giù dal pensiero e dalla speranza che voi avete, che possano esser uomini tanto più dotti, eruditi e versati nei libri, che non siamo noi altri, che al dispetto della natura sieno per far divenir vero quello che è falso."*

Nell'opera vengono citati, sia pur indirettamente, alcuni matematici dell'epoca, tra cui Scipione Chiaramonti, autore dell'*Antiticone*: Galileo

immagina che i tre personaggi si procurino alcuni libri, di cui vengono lette e commentate le teorie, per poi confutarle.
Come rileva Federico Enriques, il *Dialogo,* più che un'opera costruttrice di una nuova teoria, è da intendere come un'opera distruttrice del secolare impianto di luoghi comuni, che ostacola l'edificazione della scienza moderna. Secondo il Koyré, il *Dialogo,* come anche il *Saggiatore,* è il manifesto di un nuovo modo di ragionare, scritto in forma discorsiva, quasi salottiera, per accrescerne l'efficacia pedagogica presso il lettore *valentuomo* borghese.

Nei ***Discorsi su due nuove scienze***, che sono, in un certo senso, la continuazione e l'approfondimento del ***Dialogo***, Simplicio dovrà ammettere:

"Veramente comincio a comprendere che la logica, benché strumento prestantissimo per regolare il nostro discorso, non arriva, quanto al destar la mente, all'acutezza della geometria."

E Sagredo, di rincalzo, dirà:

"A me pare che la logica insegni a conoscere se i discorsi e le dimostrazioni già fatte e trovate procedano concludentemente; ma che ella insegni a trovare i discorsi e le dimostrazioni concludenti, ciò veramente non credo io."

Il Viviani d'altronde ci racconta che Galileo, da giovane, *"udì i precetti della logica da un Padre Valombroso; ma però quei termini dialettici, le tante definizioni e distinzioni, la molteplicità delli scritti, l'ordine e il progresso della dottrina, tutto riusciva tedioso, e di poco frutto e di minor satisfazione al suo esquisito intelletto."*
La polemica è sempre tra l'autorità degli scritti, che è l'arma impugnata da Simplicio, e la forza dell'esperienza diretta della realtà, di cui si avvale Salviati. Se Simplicio sostiene che "*non bisogna nella scienza naturale ricercar l'esquisita evidenza matematica*", Salviati insiste sul fatto che *"i discorsi nostri hanno da essere intorno al mondo sensibile e non sopra un mondo di carta".* E Salviati non perdona a Simplicio gli errori *("esorbitanze")* relativi alla geometria.

Il principale argomento della prima giornata è la dottrina aristotelica dell'incorruttibilità dei cieli, a cui Salviati contrappone l'evidenza delle osservazioni astronomiche, che dimostrano, ad esempio, che la Terra e la Luna sono corpi simili, entrambi privi di luce propria e

disseminati di montagne e valli. Anche le fasi di Venere, l'apparizione delle comete e le macchie solari sembrano confutare l'immutabilità del *mondo celeste,* retta dalle eterne leggi dell'astrologia, e contrapposta alla corruttibilità del *mondo sublunare,* cioè della sfera terrestre, i cui mutevoli eventi sono oggetto delle osservazioni meteorologiche. La fisica galileiana, contrariamente a quella aristotelica, non ammette distinzioni tra la Terra e il Cielo, prevede le stesse leggi per tutte le parti dell'universo. Vengono contestati anche gli aspetti magici della **numerologia pitagorica** in cui crede Simplicio e che, secondo Salviati, sarebbero il frutto di distorsioni popolari. Il discorso cade anche sulle dimensioni geometriche nonché sul moto dei corpi soggetti alla gravità, quelli in caduta libera, quelli lanciati verso l'alto, quelli che scendono lungo il piano inclinato: Galileo dimostra di aver correttamente compreso l'andamento della velocità in queste tre situazioni. Partendo dalla constatazione che l'accelerazione subita da un corpo che scende lungo un piano inclinato è tanto minore quanto minore è l'inclinazione del piano stesso, Salviati presenta il caso di un corpo su di un piano orizzontale come la situazione limite, in cui l'accelerazione è necessariamente nulla. Il moto del corpo è allora uniforme, ossia avviene con velocità costante. D'altra parte, come verrà spiegato più diffusamente nella seconda giornata, quella del corpo lanciato sul piano orizzontale è la situazione intermedia tra quella di un corpo che viene lanciato lungo un piano *"declive" o "chino"* (in discesa), il cui moto è accelerato, e quella di un corpo che viene lanciato lungo un piano *"acclive"* o *"erto"* (in salita), il cui moto viene *"ritardato"* (decelerato).
La giornata si chiude, curiosamente, con un'esaltazione della scrittura, formidabile invenzione che, mediante *"vari accozzamenti di venti caratteruzzi sulla carta",* riesce a diffondere e perpetuare il pensiero umano.

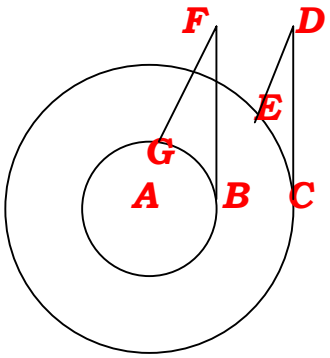
La seconda giornata è incentrata sulla questione del moto della Terra. Innanzitutto la sua immobilità appare improbabile da un punto di vista metafisico: perché mai la natura - si chiede Salviati - avrebbe deciso di mettere in movimento l'intero cosmo, tranne il nostro pianeta?
Inoltre, tutti gli argomenti sino ad allora addotti a favore dell'immobilità del nostro pianeta sarebbero fasulli. Non è vero che la rotazione della Terra - che viene chiamata *"moto diurno"* - provocherebbe un fortissimo vento da oriente, né che *"i sassi, le fabbriche e le città intere"* verrebbero sbalzati via dalla forza centrifuga, né che gli oggetti lanciati dall'alto verrebbero deviati verso occidente, né, infine, che gli uccelli e le nuvole non potrebbero tenere

il passo con il suolo. Tutte le cose presenti sulla Terra, ivi compresa l'atmosfera, si muovono insieme ad essa e sono apparentemente ferme, come lo sono, per i naviganti, gli oggetti trasportati dalla nave che si muove in assenza di rollio. In questo discorso è già presente il concetto di *sistema inerziale.* Galilei, che non usa questo termine, ha in mente un sistema che sia soggetto ad un moto *"uniforme, e non fluttuante in qua e in là".*
Un uomo fermo sulla nave, cioè un osservatore che, come diremmo in linguaggio moderno, sia *solidale* con questo sistema, non ne avverte il movimento. In tale contesto il *moto* e la *quiete* sono solo aspetti relativi di una medesima situazione fisica: è questo il principio della ***relatività galileiana***, che verrà superato solo nel Novecento dalla ***relatività einsteiniana***. Con esso viene a cadere la teoria sviluppata nella *Fisica* di Aristotele, secondo la quale il moto sarebbe causato dalla continua azione di un *motore* (cioè, una forza), e la quiete sarebbe l'effetto della cessazione di tale azione. Con Galileo nasce l'idea di *moto inerziale*, cioè di moto che avviene in assenza di forze, e per di più prosegue indefinitamente. **Cartesio** lo individuerà, correttamente, nel *moto rettilineo uniforme*. Galileo, invece, lo identifica col *moto circolare uniforme*, quello di un oggetto che scorra, senza attrito, su di una superficie sferica (per un osservatore sulla superficie terrestre, tale moto, pur essendo curvo, appare in effetti come rettilineo). D'altra parte, come viene detto nella prima giornata, egli considera contraddittoria l'idea di un moto rettilineo indefinito: esso porterebbe, infatti, il corpo in movimento verso l'infinito, dove, secondo lui, è impossibile arrivare. Inoltre esso tende a disperdere la materia, ed è quindi incompatibile con l'ordine del cosmo, che rimane invece preservato dal moto circolare. In questo tipo di argomentazioni si riscontra una decisiva differenza rispetto all'approccio aristotelico: il moto circolare uniforme viene qui giustificato per deduzione logico-matematica (la sua negazione comporterebbe un paradosso), e non per via metafisica, con la presunta perfezione delle sfere celesti. In questa parte dell'opera di Galilei compare un parziale accostamento alla cosmogonia platonica, esposta nel ***Timeo***: il Nostro immagina infatti che all'inizio nell'universo regnasse il caos, e che il moto rettilineo avrebbe potuto essere impiegato da Dio, in una fase iniziale, per ridistribuire la materia.

Nella terminologia fisica di Galileo, *vertigine* è la proprietà dei corpi che ruotano, *impeto*[1] la proprietà di un corpo che, a seguito di un *"moto violento"* (un lancio, uno sparo, un urto, ecc.) si muove in linea

[1] La teoria dell'impeto risale a Giovanni Filopono, un commentatore di Aristotele del sec. VI, e fu ripresa, nel corso del Trecento e del Quattrocento, da alcuni scienziati parigini.

retta. In una pietra che si stacchi dal bordo di una ruota la *vertigine* si tramuta in *impeto,* che la fa procedere lungo la tangente alla ruota nel punto di distacco: questo effetto, come noi sappiamo, è dovuto alla forza centrifuga, che sarà scoperta da **Cartesio**. Se ad un corpo viene impresso un *impeto* tale da staccarlo dalla superficie terrestre, al suo moto rettilineo se ne aggiunge un altro, un *"moto naturale",* che tende a farlo tornare verso il basso. Il Salviati applica il principio di composizione dei moti per spiegare come uno dei due moti possa prevalere sull'altro: è il problema della *velocità di fuga*, che, ovviamente, Salviati può affrontare solo in termini generali, senza dare valutazioni numeriche. Egli studia il moto con semplici visualizzazioni geometriche. Eccone un esempio.



Su due ruote di diverso raggio, che ruotino, in senso antiorario, intorno all'asse *A*, sono fissate due pietre identiche, rispettivamente nei punti *B* e *C*. Le due ruote hanno la stessa velocità: nell'intervallo di tempo in cui la pietra in *B* raggiunge la posizione *G,* la pietra in *C* arriva nel punto *E*, percorrendo un arco di uguale lunghezza. Si traccino le tangenti alle ruote nei punti *B* e *C,* e su queste si segnino i punti *F* e *D*, come in figura, in modo che *BF=CD.* Supponiamo che nell'istante cui si riferisce la figura, le pietre si stacchino simultaneamente dalle ruote. L'*impeto* impresso alle due pietre lungo le tangenti *BF* e *CD* è lo stesso. Nel momento in cui una pietra transiterà per il punto *F*, l'altra pietra si troverà in corrispondenza del punto *D.* Se le ruote avessero la facoltà di attrarre a sé le pietre, quale delle due dovrebbe esercitare l'azione più forte? La ruota più grande dovrebbe essere in grado di deviare la pietra solo del tratto *DE* mentre, nello stesso lasso di tempo, la ruota più piccola dovrebbe deviare l'altra pietra dell'intero tratto *FG.* È dunque la ruota più piccola quella che dovrebbe compiere il maggiore sforzo, o, se vogliamo, quella avente la velocità di fuga minore: **Huyghens** dirà che la *forza centripeta* è più forte nella ruota piccola. Il ragionamento di Galilei, se pur corretto ed efficace, è però semplificativo. Se attrazione c'è, le pietre non si muoveranno in linea retta fino a *F* od *E*, ma verranno progressivamente deviate a partire dal momento del distacco. Per seguire il moto istante per istante, il Salviati introduce il concetto di intervalli arbitrariamente piccoli, anticipando le idee fondamentali del **calcolo infinitesimale**. Un ulteriore esempio compare nella trattazione del moto di caduta dei gravi, di cui Galileo aveva trovato per primo la legge. Nei *Discorsi* egli lo chiamerà un *moto*

naturalmente accelerato, in cui la velocità cresce proporzionalmente al tempo: egli lo descrive come un moto in cui, se s_1 è lo spazio percorso nel tempo t_1, e s_2 è lo spazio percorso nel tempo t_2, vale la proporzione:

$$s_1 : s_2 = t_1^2 : t_2^2,$$

"gli spazii percorsi dal mobile, partendosi dalla quiete, hanno tra di loro proporzione duplicata di quella che hanno i tempi ne' quali tali spazii sono misurati, o vogliam dire che gli spazii passati son tra di loro come i quadrati de' tempi."

Un'altra formulazione equivalente è: *"l'accelerazione del moto retto de i gravi si fa secondo i numeri impari ab unitate, cioè che segnati quali e quanti si voglino tempi uguali, se nel primo tempo, partendosi il mobile dalla quiete, averà passato un tale spazio, come, per esempio, una canna, nel secondo tempo passerà tre canne, nel terzo cinque, nel quarto sette, e così conseguentemente secondo i succedenti numeri caffi* (=dispari)"[2].
Per convincersi della validità di questa interpretazione, basta ricordare una nota formula dei **numeri figurati**, secondo cui la somma dei primi *n* numeri naturali dispari è uguale all'*n*-esimo numero quadrato[3].
La nuova legge confuta la tesi aristotelica, secondo cui la velocità di caduta di un grave sarebbe stata proporzionale al suo peso: la verifica della scoperta di Galilei è il famoso (e leggendario, mai realmente avvenuto) esperimento della torre di Pisa.

I tre interlocutori si intrattengono poi in una curiosa divagazione: il calcolo del tempo che un oggetto, lanciato dalla superficie della Luna, impiegherebbe ad arrivare al centro della Terra. Il risultato ottenuto è: 3 ore, 22 minuti e 4 secondi. Inutile aggiungere che questo non tiene conto del variare dell'intensità della forza gravitazionale secondo la distanza dalla Terra, un **principio** che sarà scoperto da **Newton**.

---

[2] Questa descrizione della caduta dei gravi riprende il testo di una lettera, datata 16 ottobre 1604, scritta da Galileo all'amico fra' Paolo Sarpi. In questa prima versione compariva un errore, che Galileo corregge in questo brano dei *Discorsi:* all'epoca egli credeva che la velocità fosse proporzionale non al tempo trascorso, bensì allo spazio percorso.
Paolo Sarpi, letterato veneziano, frate dell'ordine dei serviti, dedicò la maggior parte dei suoi scritti alla politica ecclesiastica del tempo. Avversario del potere temporale dei papi, e consigliere politico del governo della Repubblica di Venezia, difese quest'ultima contro la scomunica di Paolo V. La sua opera principale è l'*Istoria del Concilio Tridentino.*

[3] In questo brano si ravvisa un'eco pitagorica, che, rappresenta, però, un caso pressoché isolato all'interno dell'opera galileiana. Galileo rimase piuttosto indifferente alla suggestione dei numeri tipica della scuola di Crotone, che aveva dominato il Medioevo e anche il Rinascimento.

Nelle stesse pagine viene enunciato il principio dell'**isocronismo del pendolo**. Nella quarta giornata Salviati tornerà sull'argomento, precisando che il periodo del pendolo è proporzionale alla radice quadrata della lunghezza: infatti il tempo impiegato dal pendolo a compiere mezza oscillazione è pari al tempo impiegato da un grave a cadere in linea retta lungo il filo. Inoltre si parla di attrito, e si discute la possibilità di applicare i teoremi geometrici, che si riferiscono ad oggetti ideali, agli oggetti concreti. Un piano reale toccherà una sfera reale in un solo punto? Sagredo non può aver dubbi su quello che è il principio stesso della scienza galileiana, che verrà ribadito con forza nei ***Discorsi***: la matematizzazione della fisica. E così risponde allo scettico Simplicio:

"…ben mi pare che i bottai, per trovare il semidiametro del fondo da farsi per la botte, si servono della regola in astratto de' matematici, ancorché tali fondi sien cose assai materiali e concrete. Perciò dica il signor Simplicio scusa […] e se gli pare che la fisica possa differir tanto dalla matematica."

Il problema della **misurazione delle botti**, per quanto strano possa sembrare, è una questione matematica che ha coinvolto molti studiosi attraverso i secoli.

La terza giornata è quasi interamente dedicata alle osservazioni astronomiche. Lo spunto per la discussione è offerto dall'avvistamento di una cometa nella costellazione di Cassiopea, avvenuto nel 1572, e che aveva richiamato l'attenzione di molti scienziati, fra cui **Tycho Brahe**. La determinazione della distanza di questa cometa dalla Terra era di cruciale importanza: se essa fosse risultata più lontana della Luna, la sua apparizione avrebbe introdotto un elemento provvisorio nel mondo celeste, confutando la tesi aristotelica della sua inalterabilità. Le varie fonti – Salviati ne cita una dozzina – elaborate dallo stesso anonimo autore, concordano nel collocare (erroneamente) la cometa all'interno del mondo sublunare, ma le cifre divergono. Ciò dà origine ad un'ampia e dettagliata dissertazione sugli errori di osservazione dovuti alla **parallasse**, sul corretto uso del sestante e del **quadrante astronomico**, coinvolgendo i tre interlocutori in una lunga serie di calcoli numerici: le operazioni sono eseguite sulla base della trigonometria di **Tolomeo**, espressa in termini di archi e corde. La discussione non può che culminare con l'elogio del **cannocchiale**, che ha rivoluzionato il modo di guardare al cielo, ma che, per Simplicio, potrebbe essere causa di distorsioni ottiche. Salviati rimprovera gli astronomi del passato anche per aver clamorosamente

sbagliato la misura del diametro apparente delle stelle. Anche senza cannocchiale, con mezzi molto rudimentali, avrebbero potuto eseguire stime molto più precise. Egli descrive il semplice procedimento, che illustriamo con figure:



Osservatore

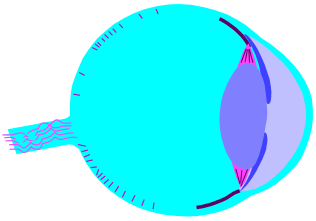


Corda appesa



Stella

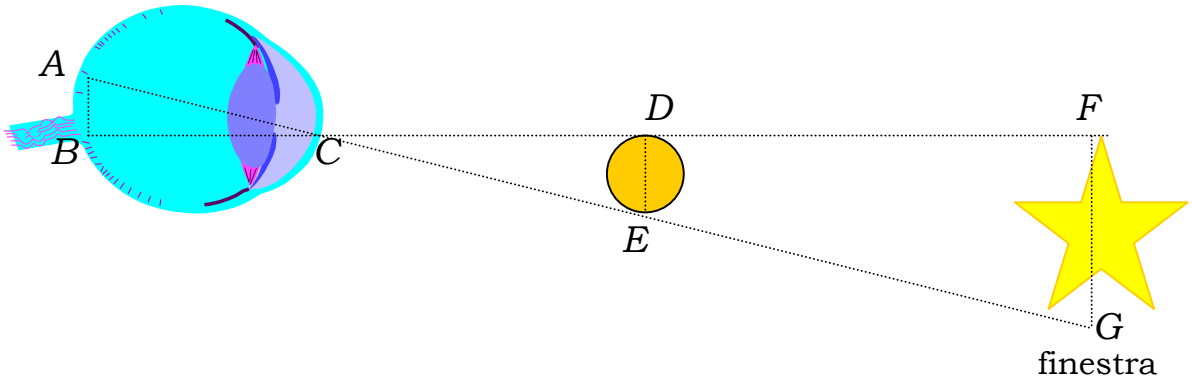
L'esperimento visto dall'alto: lo spessore della corda copre esattamente la stella all'occhio dell'osservatore:



Occhio

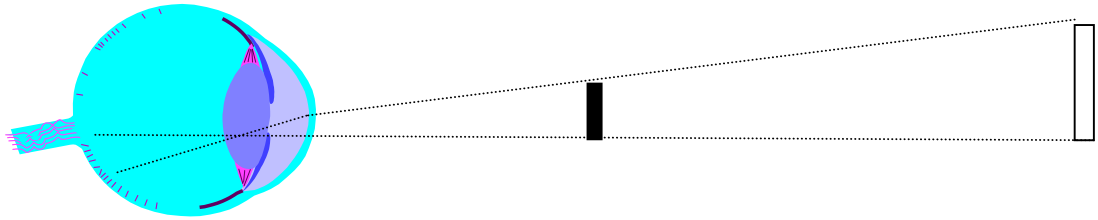


Sezione della corda



I triangoli *CED, CGF* sono simili. Le lunghezze *CD* e *DF* e lo spessore *DE* sono noti. Ciò permette di determinare l'angolo visuale *ECD* sotto il quale appare la stella. Il segmento *AB* delimita le immagini delle corda e della stessa sulla retina dell'osservatore.

La figura presenta una situazione schematizzata ideale. Nella situazione reale i raggi subiscono, all'interno dell'occhio, una serie di rifrazioni: si veda, ad esempio, ***La Dioptrique*** di Cartesio. Per misurare questo fenomeno e stabilire, quindi, di quanto i calcoli vadano corretti, Galileo suggerisce di appendere, ad una certa distanza l'una dall'altra, due strisce di carta, una bianca ed una nera larga la metà, in modo da tale che esse risultino allineate. Nella figura le strisce sono viste dall'alto:

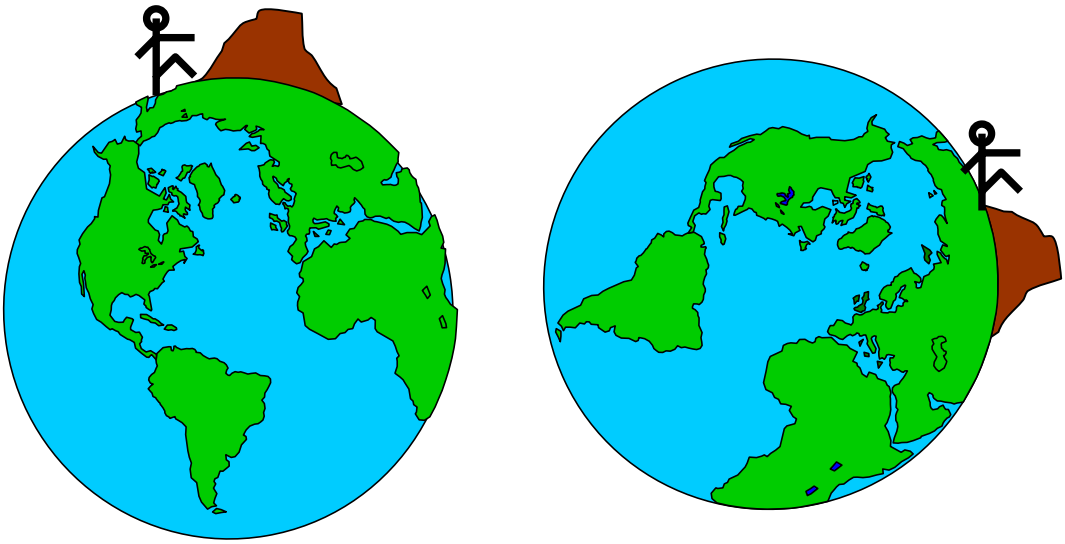


Si tratta a questo punto di trovare la distanza a cui l'osservatore vede che la striscia nera copre esattamente quella bianca.

Il dialogo prosegue toccando vari altri argomenti di astronomia, come la disposizione dei pianeti nel sistema solare e la stima delle dimensioni del cosmo. Le osservazioni di Galileo mostrano che quest'ultimo è molto più esteso rispetto a quanto credevano gli antichi. Agli occhi degli aristotelici la distanza misurata è eccessiva: il cielo delle stelle fisse sarebbe troppo lontano per poter influenzare gli eventi terrestri, come previsto dall'astrologia. Inoltre non si comprenderebbe perché Dio avrebbe creato tanto spazio vuoto tra i pianeti e le stelle. Salviati replica così, con uno sguardo al passato ed uno al futuro:

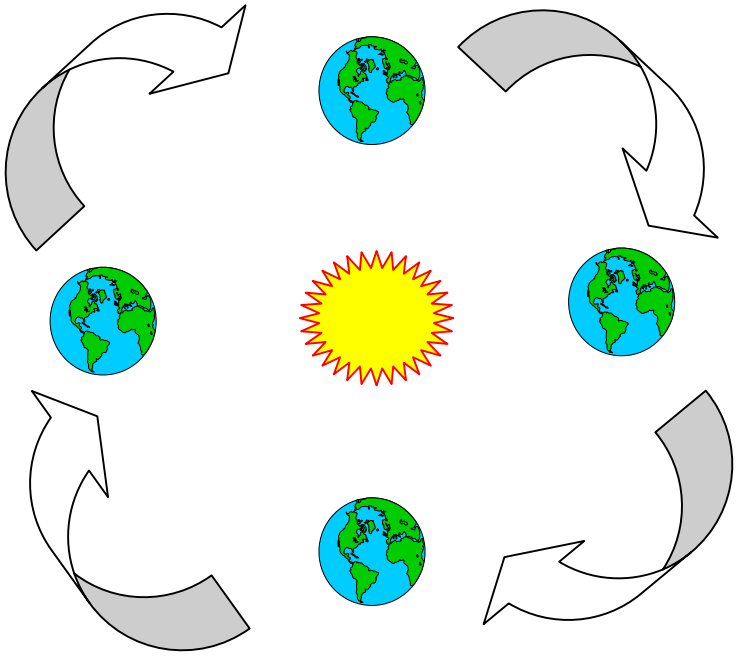
"Chi vorrà dire che lo spazio che costoro chiamano troppo vasto e inutile, tra Saturno e le stelle fisse, sia privo d'altri corpi mondani? Forse perché non gli vediamo? Adunque i ***quattro pianeti medicei*** *e i* ***compagni di Saturno*** *vennero in Cielo quando noi cominciammo a vedergli, e non prima? E così le altre innumerabili stelle fisse non vi erano avanti che gli uomini le vedessero? […] Presuntuosa, anzi temeraria, ignoranza degli uomini!"*

Il discorso non può non tornare sui moti della Terra. Nuovi argomenti vengono addotti (e puntualmente smontati) contro il moto diurno: se la Terra ruotasse, i fianchi delle montagne varierebbero la loro inclinazione, fino ad apparire in discesa:

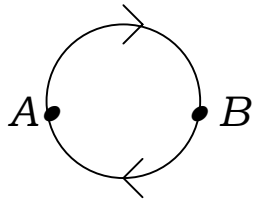


Inoltre, guardando il cielo dal fondo di un pozzo, in virtù della grande velocità di rotazione della Terra ogni stella risulterebbe visibile per un breve istante.

Contro il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole, che Galileo chiama *moto annuale,* Simplicio osserva che risulta ben difficile immaginare una forza in grado di far sì che un corpo grande e pesante come la Terra si sposti in su e in giù per il cosmo.



I tre protagonisti passano dunque ad esaminare la **teoria copernicana**. Di questa Salviati contesta gli **epicicli**, che la accomunano alla teoria tolemaica. Simplicio attacca invece il fatto che essa preveda per la Terra ben tre moti. Secondo Aristotele, ai corpi semplici del mondo sublunare spetta solo un moto semplice, cioè quello rettilineo. Solo i corpi composti del mondo celeste possiedono un moto composto: il moto circolare uniforme, che, secondo una teoria che oggi ci appare molto fantasiosa, risulterebbe dall'unione di due moti rettilinei contrapposti. In effetti, a pensarci bene, un oggetto che ruoti lungo la circonferenza illustrata in figura



alterna il moto da *A* verso *B* al moto in senso contrario, da *B* verso *A*.

A completare la serie delle ipotesi curiose, viene citata una teoria di **Giovanni di Sacrobosco**, secondo cui la forma sferica assunta dal mare che ricopre la Terra sarebbe dovuta ad una naturale inclinazione dell'acqua a disporsi in quella maniera: lo dimostrerebbe l'aspetto delle gocce.

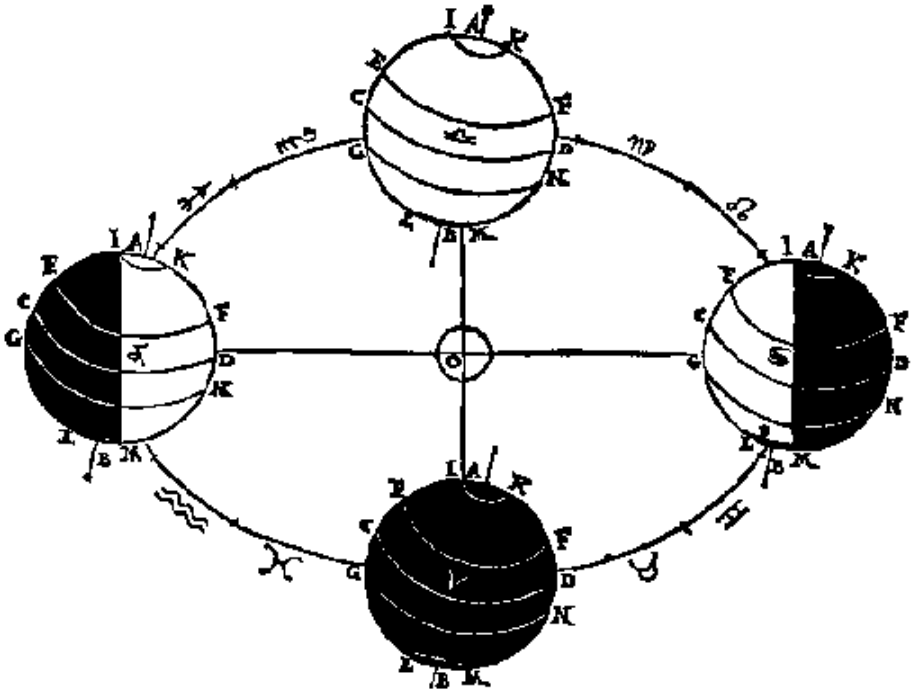
Secondo Galileo, il moto della Terra sarebbe l'effetto del suo magnetismo: secondo le tesi di Guglielmo Gilberti[4], il nostro pianeta non sarebbe altro che una grande calamita, capace di orientare l'ago della bussola. Galileo aveva compiuto vari esperimenti con le calamite, senza però poter spiegare perché esse attraessero il ferro. Il Salviati si limita a formulare teorie sulla struttura della materia, che sarebbe più fine nel ferro (costituito da *"parti più sottili più pure e costipate"*), e più rada nella calamita (*"non fissa e serrata, ma porosa o per meglio dire spugnosa"*). L'intensità dell'attrazione sarebbe determinata dal numero degli *"infiniti punti"* del ferro e della calamita che vengono a contatto. Così si spiegherebbe perché un ferro magnetizzato (ad esempio l'armatura di una calamita) sia più efficace di una calamita.

Il principale argomento della quarta giornata è il flusso e riflusso del mare. Galileo, nonostante il dilagare degli studi sul magnetismo, non

[4] Nome italianizzato di Wilhelm Gilbert (1540-1603), medico e fisico inglese, il fondatore della teoria dell'elettricità e del magnetismo. Fu lui a coniare il termine *elettricità.*

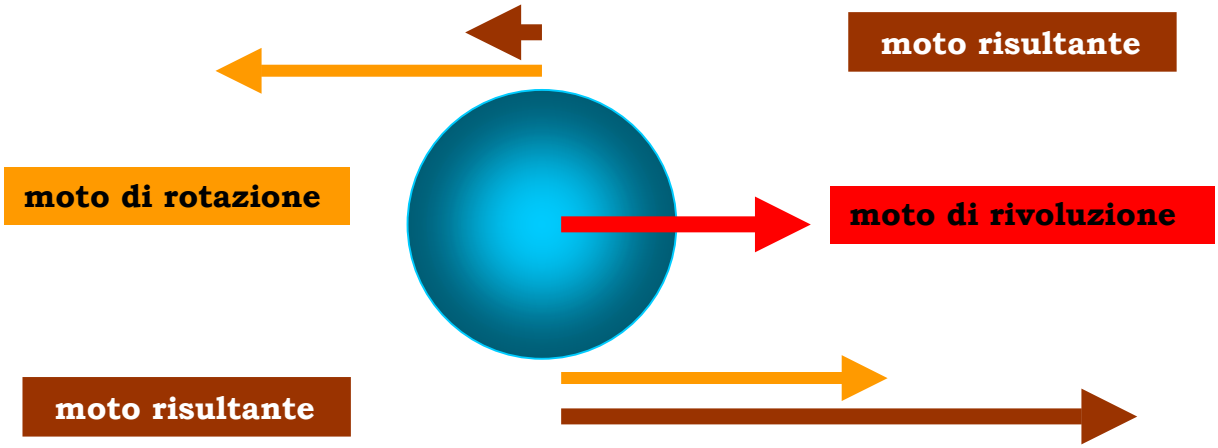
crede all'esistenza di forze che si esercitano tra corpi distanti. Per questo non può pensare di attribuire le maree all'attrazione della Luna e del Sole, come sarebbe corretto. Al tempo circolavano teorie che facevano risalire l'innalzamento del livello del mare all'azione della Luna, ma queste erano infarcite di magia (la Luna e l'opposto segno dello zodiaco avrebbero, secondo **Keplero**, il predominio sulle acque) oppure di audace immaginazione (il calore della Luna avrebbe l'effetto di rarefare l'acqua). Il Salviati le chiama *"fanciullezze"* ed *"esorbitanze"*. Un'altra ipotesi basata sulla Luna venne formulata da Cartesio ne ***Il Mondo***. La tesi aristotelica è quella di un combattimento tra le acque, che avverrebbe perché le acque più profonde, essendo più pesanti, avrebbero la tendenza a sospingere quelle soprastanti. Queste, una volta sollevatesi, tenderebbero naturalmente a ricadere, causando l'alternanza di flusso e riflusso. Molte altre teorie erano state formulate nell'antichità. La vera spiegazione verrà data da Newton. Del problema si occuperà anche **Eulero**.

Per Galilei le maree trarrebbero origine dalla combinazione del moto di rotazione e del moto di rivoluzione della Terra,



che farebbe sì che la superficie terrestre sia soggetta ad un *"moto progressivo non uniforme"* e *"cangi di velocità con accelerarsi talvolta e talaltra ritardarsi"*. Questo modo di ragionare è in palese contraddizione con la presunta inerzialità della Terra. I **principi della**

fisica di Newton, sia pur anticipati dal pensiero galileiano, sono ancora di là da venire. Accantoniamo questa considerazione, e vediamo dunque in dettaglio la spiegazione di Salviati.



L'acqua viene trascinata sia dalla rotazione, sia dalla rivoluzione della Terra. La sua velocità però è diversa nei vari punti della superficie terrestre: è minima dove i due moti sono discordi, mentre è massima dove essi sono concordi. Qui l'acqua appare accelerata rispetto al fondo del mare, il che genera un'ondata di marea. Dalla parte opposta del globo il livello del mare si abbassa: dopo che la Terra avrà compiuto un mezzo giro, ossia dopo 12 ore, la situazione si sarà invertita. La superficie del mare subisce così delle *reciprocazioni,* ossia delle oscillazioni, che Salviati paragona a quelle del pendolo. Come queste ultime sono tanto più rapide quanto minore è la lunghezza del filo, così la marea cambia più lentamente negli specchi d'acqua più estesi, essendo maggiore il tempo impiegato dall'acqua per percorrerli. Per contro, in un piccolo lago l'effetto della marea è trascurabile, in quanto la velocità dell'acqua, nel breve spazio compreso fra le due sponde, è pressoché uniforme. La marea è più accentuata lungo gli stretti, dove l'acqua subisce un'accelerazione che dà luogo a forti correnti, e sulle coste continentali - soprattutto nei golfi - dove le oscillazioni raggiungono il punto di massima estensione. Inoltre, l'impulso delle maree si trasmetterebbe nel senso della rotazione terrestre, quindi lungo i paralleli. Per questo motivo esso è nullo ai Poli. Le variazioni mensili ed annuali della marea sarebbero dovute a variazioni nel moto della Terra. Noi sappiamo che la vera ragione è la variazione nella disposizione del Sole e della Luna, le cui attrazioni si sommano o si contrastano a seconda della loro angolazione rispetto alla Terra.

Il moto della Terra sarebbe anche la causa dei venti da oriente che spirano costantemente nelle regioni desertiche tropicali, dove la velocità della superficie terrestre è maggiore, e dove, per di più, il suolo, essendo sgombro e pianeggiante, non frappone ostacoli al flusso dell'aria[5]. Lo stesso fenomeno si verifica in mare aperto, rendendo la navigazione verso oriente particolarmente difficoltosa[6].

Nei *Discorsi* le teorie copernicana e tolemaica vengono trattate con grande competenza e dovizia di particolari. Galileo aveva conosciuto ed apprezzato la cosmologia e la fisica aristotelica durante il suo soggiorno pisano da studente di medicina, frequentando le lezioni di Francesco Bonamico: ne è testimonianza una raccolta di appunti giovanili. Più tardi Galileo avrebbe esposto il sistema tolemaico nel *Trattato della Sfera,* composto a Padova nel 1597. L'esistenza di questo scritto, di per sé, non significa necessariamente che Galileo avesse inizialmente aderito alla teoria astronomica di Tolomeo. Si tratta, in effetti, di un saggio didattico, destinato agli studenti di scienze matematiche. I programmi universitari dell'epoca prescrivevano sia **Euclide** sia Tolomeo.

È bene precisare che l'intento polemico che sta alla base del *Dialogo* non è diretto contro gli insegnamenti di Aristotele, ma contro coloro che caparbiamente vi restano attaccati, opponendosi al progresso del sapere, negando le nuove evidenze scientifiche acquisite con il cannocchiale. Nella seconda giornata Salviati dice:

"Avete voi forse dubbio che quando Aristotile vedesse le novità scoperte in cielo, e' non fusse per mutar opinione e per emendar i suoi libri e per accostarsi alle più sensate dottrine, discacciando da sé quei così poveretti di cervello che troppo pusillanimamente s'inducono a voler sostenere ogni suo detto, senza intendere che quando Aristotile fusse tale quale essi se lo figurano, sarebbe un cervello indocile, una mente ostinata, un animo pieno di barbarie, un voler tirannico, che, reputando tutti gli altri come pecore stolide, volesse che i suoi decreti fussero anteposti a i sensi, alle esperienze, alla natura istessa? Sono i suoi seguaci che hanno data l'autorità ad Aristotile, e non esso che se

---

[5] Il riferimento è ai venti costanti alisei, che spirano verso sud-ovest nella fascia compresa tra il Tropico del Cancro e l'Equatore, e verso nord-ovest nella fascia compresa fra l'Equatore e il Tropico del Capricorno.

[6] Galileo anticipa la cosiddetta *legge di Ferrel*, che prende il nome dal meteorologo americano che la formulò nell'Ottocento. In base a questa legge, i venti e le correnti marine subirebbero, in conseguenza della rotazione terrestre, una deviazione verso ovest. È questo il caso degli alisei, che Cristoforo Colombo e Magellano pensarono di sfruttare per raggiungere le Indie navigando verso occidente.

la sia usurpata o presa; e perché è più facile il coprirsi sotto lo scudo d'un altro che'l comparire a faccia aperta, temono né si ardiscono d'allontanarsi un sol passo, e più tosto che mettere qualche alterazione nel cielo di Aristotile, vogliono impertinentemente negar quelle che veggono nel cielo della natura."

Frontespizio dell'edizione fiorentina del 1632
Frontespizio dell'edizione latina, pubblicata a Leida nel 1635

DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO

DELLO STVDIO DI PISA.

E Filoſofo, e Matematico primariò del

SERENISSIMO

GR. DVCA DI TOSCANA.

Doue ne i congreſſi di quattro giornate ſi diſcorre ſopra i due

MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;

Proponendo indeterminatamente le ragioni Filoſofiche, e Naturali tanto per l'vna, quanto per l'altra parte.

CON PRI  VILEGI.

IN FIORENZA, Per Gio: Batiſta Landini MDCXXXII.

CON LICENZA DE' SVPERIORI.


DIALOGVS
DE SYSTEMATE MVNDI,
Autore
GALILÆO GALILÆI LYNCEO,
SERENISSIMO
FERDINANDO II. HETRVR MAGNO-DVCI
dicatus.
PTOLEM.
N. COPERNICVS.
Augustæ Treboc.
Impensis BONAVENTVRÆ et ABRAHAMI ELZEVIR
Bibliopolar Leydens

Galileo Galilei
Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali

Il termine *meccanica* del titolo possiede, all'epoca di **Galileo**, ancora il vecchio significato di "teoria delle macchine". Solo con **Newton** e **Leibniz** la parola verrà ad indicare quella branca della fisica comprendente *statica* (scienza dell'equilibrio), *cinematica* (scienza della velocità) *e dinamica* (scienza della forza e dell'energia). Ai tempi di Galileo questa distinzione non è ancora maturata, ma già è stato compiuto un passo decisivo, che eleva la meccanica al rango di disciplina di studio, riscattandola dalla connotazione negativa che possedeva nel Medioevo: non è più la pratica manuale dei *vili artigiani*, contrapposta alla più nobile attività intellettuale, e, per di più, è la forza motrice del progresso umano. Questa convinzione è alla base della fondazione di molte **Accademie**, che, a partire dal Seicento, si pongono in alternativa all'università come veri e propri laboratori di scambio e sperimentazione. Galileo ha dimostrato forse più di ogni altro - pur non essendo il primo in tal senso - come la scienza possa coniugarsi al campo delle applicazioni tecniche, attingendovi validi strumenti (il cannocchiale) ed utili esperienze (le dimostrazioni meccaniche di **Archimede**, ispirate a principi di statica, l'esperienza degli addetti alle pompe che suggerisce l'esistenza della pressione atmosferica). La scienza può alimentare, a sua volta, la tecnica con nuove conoscenze: basti ricordare le invenzioni giovanili di Galileo, ad esempio la bilancetta dei pesi specifici, il primo rudimentale termobarometro, e gli scritti padovani, come la ***Breve instruzione all'architettura militare***, il ***Trattato delle fortificazioni***, il ***Trattato delle meccaniche*** (in cui si parla di leva, stadera, **vite** ed argano) e ***Le operazioni del compasso geometrico e militare***, oppure i suoi studi sulle tecniche di navigazione, e sulle pompe per irrigare i campi. Tutte queste opere maturano in un periodo in cui Galileo affianca allo studio ed all'insegnamento il lavoro d'officina - affidato al meccanico Marcantonio Mazzoleni - e la frequentazione dell'Arsenale di Venezia, come lui stesso ricorda nell'Introduzione ai *Discorsi.*
L'accostamento alla meccanica coincide con l'affrancamento dalla speculazione metafisica e dalla filosofia, del quale Galileo era sempre stato convinto sostenitore, in opposizione all'aristotelismo.

C'è da dire che Galileo non fece altro che raccogliere e fare propri i frutti di un processo di profonda trasformazione della società, iniziato nel Quattrocento con l'espansione urbanistica e il rifiorire delle arti,

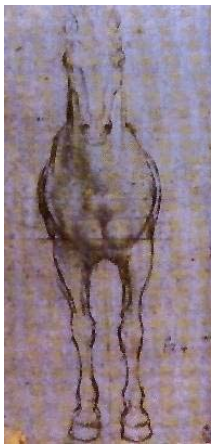
che stava creando esigenze sempre nuove. Con lo sviluppo dei commerci e della navigazione, ad esempio, era divenuta pressante la necessità di risolvere il **problema della longitudine**.

Galileo prosegue il filone che, con un neologismo, potremmo chiamare scientifico-tecnologico, iniziato con la ***Nova Scientia*** ed i ***Quesiti et Inventioni Diverse*** del **Tartaglia** e i ***Ludi Matematici*** di **Leon Battista Alberti**. D'altra parte il pensiero galileiano e la sua volontà di rottura con la tradizione a favore di una nuova, diretta e illuminata visione della realtà, sono già interamente contenuti nel **sonetto** che il Tartaglia dedica ai suoi lettori.
Il personale contributo del Galilei sta nell'aver insistito in modo particolare sull'importanza del metodo matematico, che egli, naturalmente, non manca di menzionare nel titolo dei *Discorsi.* In realtà, il primo ad applicare la matematica allo studio del moto era stato il filosofo francese Nicola Oresme, nel Trecento.

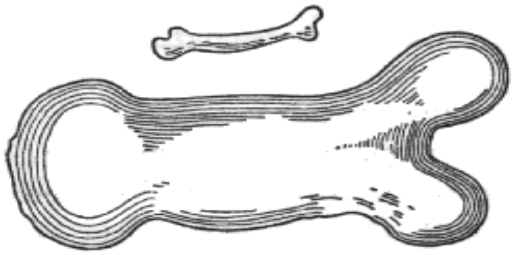
La modernità di Galileo emerge anche dalla sua scelta - condivisa dal Tartaglia - di parlare di scienza in italiano, anziché in latino, la tradizionale lingua dei dotti.
I *Discorsi* sono redatti sotto forma di disputa scientifica, come il ***Saggiatore***, e presentano la stessa struttura del ***Dialogo***, da cui Galileo riprende anche i personaggi, i suoi amici Salviati e Sagredo, e l'aristotelico Simplicio. Sono scomparsi, però i toni polemici e mordaci dell'opera precedente. Gli argomenti trattati sono simili a quelli del *Dialogo*, di cui i *Discorsi* sono un approfondimento.



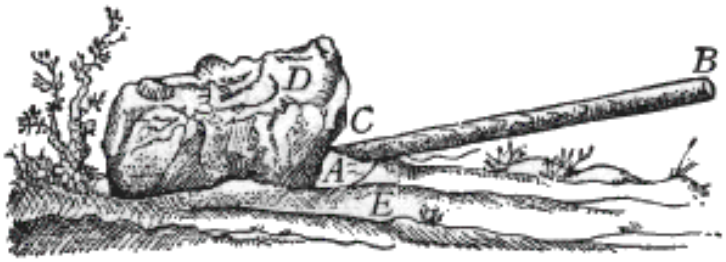
Galileo aveva iniziato la stesura dei *Discorsi* durante l'esilio senese. La prima versione fu stampata a Leida nel 1638. Essa è suddivisa in quattro giornate: le prime due trattano principalmente della resistenza dei materiali, la prima delle *nuove scienze* citate nel titolo. Secondo lo spirito annunciato nell'introduzione all'opera, Galileo trae spunto dalla pratica delle costruzioni meccaniche: due macchine simili, aventi la stessa forma e le stesse proporzioni, ma di diversa grandezza, non sono ugualmente robuste. D'altronde, pare che la stessa legge valga anche per gli esseri viventi, come osserva il Salviati: *"Chi non vede come un*



cavallo cadendo da un'altezza di tre braccia o quattro si romperà l'ossa, ma un cane da una tale, e un gatto da una di otto o dieci, non si farà mal nissuno, come né un grillo da una torre, né una formica precipitando dall'orbe lunare? I piccoli fanciulli restare illesi in caduta dove i provetti si rompono gli stinchi o la testa? E come gli animali più piccoli sono, a proporzione, più robusti, e forti de i maggiori, così le piante minori meglio si sostentano: e già credo che amendue voi apprendiate che una quercia dugento braccia alta non potrebbe sostenere i suoi rami sparsi alla similitudine di una mediocre grandezza, e che la natura non potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, né un gigante dieci volte più alto di un uomo, se non o miracolosamente o con l'alterar assai le proporzioni delle membra ed in particolare dell'ossa, ingrossandole molto sopra la simmetria dell'ossa comuni."



Gli oggetti reali possiedono dunque proprietà intrinseche che prescindono dalla forma geometrica. Esse dipendono dalla struttura della materia, che è composta di atomi: in particolare, la resistenza dei corpi ai tentativi di deformarli o romperli sarebbe in parte - come nella visione aristotelica - la reazione naturale dei corpi, che si opporrebbero alla creazione del vuoto al loro interno, in parte sarebbe l'effetto di un sistema interno di leve,



e potrebbe quindi essere studiata in termini di *momento.* Questo termine, risalente ad **Erone**, viene così definito da Galileo nel ***Trattato delle meccaniche***:

"Momento è la propensione di andare al basso, cagionata non tanto dalla gravità del mobile, quanto dalla disposizione che abbino tra di loro diversi corpi gravi; mediante il qual momento si vedrà molte volte un corpo men grave contrapesare un altro di maggior gravità: come nella stadera si vede un picciolo contrapeso alzare un altro peso grandissimo, non per eccesso di gravità, ma sì bene per la lontananza del punto donde viene sostenuta la stadera; la quale, congiunta con la gravità del minor peso, gli accresce momento ed impeto ad andare al basso, col quale può eccedere il momento dell'altro maggior grave. È dunque il momento quell'impeto di andare al basso, composto di gravità, posizione e di altro, dal che possa esser tale propensione cagionata."

Nel ***Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono***, Galileo generalizza questa definizione, applicandola ad un più ampio spettro di situazioni fisiche:

"Momento, appresso i meccanici, significa quella virtù, quella forza, quella efficacia, con la quale il motor muove e'l mobile resiste; la qual virtù depende non solo dalla semplice gravità, ma dalla velocità del moto, dalle diverse inclinazioni degli spazii sopra i quali si fa il moto, perché più fa impeto un grave discendente in uno spazio molto declive che in un meno. Ed in somma, qualunque si sia la cagione di tal virtù, ella tuttavia ritien nome di momento. Né mi pareva che questo senso dovesse giugner nuovo nella nostra favella; perché, s'io, non erro, mi par che noi assai frequentemente diciamo: "Questo è ben negozio grave, ma l'altro è di poco momento" e "Noi consideriamo le cose leggiere, e trapassiamo quelle che son di momento": metafore, stimer'io, tolte dalla meccanica."

Lo spazio *declive* è il piano inclinato, che Galileo tratta anche nel *Dialogo*.

La parola *momento* è tuttora in uso nella terminologia fisica, dove possiede ancora la valenza di potenzialità:

- il *momento* di una leva è il prodotto della distanza dal fulcro su cui viene esercitata la forza (*braccio della leva*) per la forza stessa; esso misura l'efficacia della forza applicata;
- il *momento d'inerzia* di un corpo esteso rispetto ad un asse è un numero che descrive la distribuzione "media" della massa intorno all'asse stesso, ed esprime la "capacità" del corpo di ruotare intorno a quest'ultimo. Lo si calcola con un integrale.

A proposito dell'uso del termine nel linguaggio letterario, Devoto ed Oli, nel loro vocabolario della lingua italiana, registrano il significato di "efficacia *intrinseca*" o "potere determinante", che corrisponde perfettamente alla definizione galileiana.

Il concetto di *impeto*, che non viene mai definito con precisione, è spesso accostato ad altri, che dovrebbero chiarirne l'idea: a proposito del moto di un corpo lungo un piano inclinato, Galileo parla dell'"*impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento, del descendere*", altrove si legge di "*impeto, energia, momento, propensione al moto*", che, nel caso del proiettile, è anche descritto come la "*forza*" impressa dal cannone nel momento dello sparo. Solo con la meccanica di Newton e Leibniz questi termini verranno a indicare grandezze fisiche precise e distinte.

In più punti dei *Discorsi* ricorre la parola *velocità*: ma Galileo non la definisce mai come la nozione matematica che intendiamo noi, anche se, certamente, è questa l'idea che egli ha in mente. Egli non utilizza la velocità come grandezza numerica a sé stante, ragiona invece sempre in termini relativi, confrontando due velocità, calcolandone il rapporto. Come vedremo, le sue dimostrazioni sono essenzialmente effettuate in termini di proporzioni.

Galilei considera come grandezze assolute solo le quantità che può misurare direttamente: lo spazio ed il tempo. Su queste egli basa la sua matematizzazione dei fenomeni naturali, segnando un fondamentale progresso rispetto a **Cartesio**, le cui opere fisiche mancano completamente di formule. La strada è aperta al **calcolo infinitesimale,** che sarà introdotto da Newton e Leibniz.

Nelle prime due giornate dei *Discorsi* vengono affrontati anche argomenti di natura pratica, come la compressione dei fluidi, il moto dei corpi nei vari mezzi, l'acustica applicata alla risonanza ed alla teoria degli intervalli musicali e la meccanica applicata al moto degli esseri viventi. Una delle principali osservazioni della prima giornata è quella secondo cui tutti i gravi aventi la stessa forma e lo stesso peso specifico cadono, in uno stesso mezzo, con uguale velocità: è quanto risulta dal ***principio d'Archimede***. Contraddicendo Simplicio, che sostiene, con Aristotele, che la velocità di caduta è proporzionale al peso ("*una palla di ferro di cento libbre, cadendo dall'altezza di cento braccia, arriva in terra prima che una di una libbra sia scesa un sol braccio*") Sagredo afferma: "*Ma io, Sig. Simplicio, che n'ho fatto la prova, vi assicuro che una palla d'artiglieria, che pesi cento, dugento e*

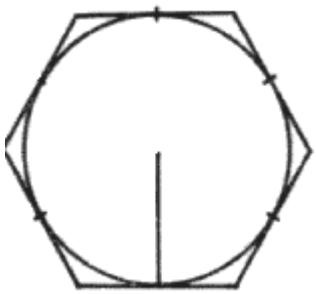
anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l'arrivo in terra della palla d'un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall'altezza di dugento braccia."
Questo principio è suffragato dalle esperienze del piano inclinato e del pendolo, presentate dal Salviati:
"In oltre, per potermi prevaler di moti quanto si possa tardi, ne i quali manco lavora la resistenza del mezzo in alterar l'effetto che depende dalla semplice gravità, sono andato pensando di fare scendere i mobili sopra un piano declive, non molto elevato sopra l'orizontale; ché sopra questo, non meno che nel perpendicolo, potrà scorgersi quello che facciano i gravi differenti di peso; e passando più avanti, ho anco voluto liberarmi da qualche impedimento che potesse nascer dal contatto di essi mobili su 'l detto piano declive: e finalmente ho preso due palle, una di piombo ed una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciascheduna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali, lunghi quattro o cinque braccia, legati ad alto; allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare, gli ho dato l'andare nell'istesso momento, ed esse, scendendo per le circonferenze de' cerchi descritti da gli spaghi eguali, lor semidiametri, passate oltre al perpendicolo, son poi per le medesime strade ritornate indietro; e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate, hanno sensatamente mostrato, come la grave va talmente sotto il tempo della leggiera, che né in ben cento vibrazioni, né in mille, anticipa il tempo d'un minimo momento, ma camminano con passo egualissimo. Scorgesi anco l'operazione del mezzo, il quale, arrecando qualche impedimento al moto, assai più diminuisce le vibrazioni del sughero che quelle del piombo, ma non però che le renda più o men frequenti; anzi quando gli archi passati dal sughero non fusser più che di cinque o sei gradi, e quei del piombo di cinquanta o sessanta, son eglin passati sotto i medesimi tempi."

Smentendo altre tesi aristoteliche con ulteriori evidenze sperimentali, Salviati convince i suoi interlocutori che il moto nel vuoto è possibile, e che anche l'aria possiede un peso. Inoltre viene messa in dubbio la credenza secondo cui la propagazione della luce è istantanea: non potrebbe essa avvenire con velocità elevatissima, ma comunque finita?

Nella prima giornata viene anche affrontato il **problema dell'infinito** in matematica, legato alla questione dell'infinitamente piccolo e della struttura atomica della materia.

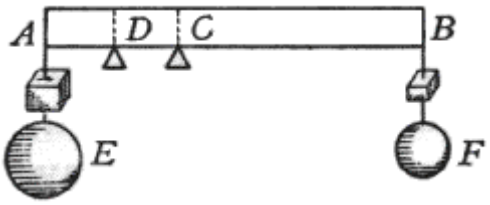
Vi compare anche un teorema sui **poligoni**, il cui enunciato è il seguente: *la media proporzionale tra l'area di un poligono circoscritto ad un cerchio e l'area di un secondo poligono, simile al primo, avente lo stesso perimetro del cerchio è pari all'area del cerchio.* In formule: dette *A, B, C* le aree del poligono circoscritto, del secondo poligono e del cerchio rispettivamente, vale la proporzione:

$$A : C = C : B.$$



Essendo, naturalmente, *A* maggiore di *C*, si deduce che *C* è maggiore di *B*. Se ne conclude che l'area di un cerchio è maggiore dell'area di un qualunque poligono avente il suo stesso perimetro (poligono *isoperimetrico*). Più in generale, Salviati dimostra che tra due poligoni regolari isoperimetrici, quello avente l'area maggiore è quello con il maggior numero di lati: ad esempio, un ettagono ha un'area maggiore di un pentagono avente lo stesso perimetro.

La seconda giornata si apre con l'enunciazione del principio della leva, che è poi quello sul quale si basa l'equilibrio di una stadera alla quale siano agganciati diversi pesi.



La terza e la quarta giornata sono dedicate al moto dei corpi, e gettano le basi della *dinamica* (la seconda delle *nuove scienze*). Salviati legge e commenta un trattato giovanile di Galilei, intitolato *De motu.* Galileo studia innanzitutto il moto inerziale, cioè il moto dei corpi in assenza di azioni esterne, che è quello uniforme (*"equabile"*) ed avviene sul piano orizzontale (ossia sulla superficie terrestre, le cui porzioni piccole - *locali* - appaiono effettivamente come regioni di piano): "*Moto eguale o uniforme intendo quello in cui gli spazi percorsi da un mobile in tempi eguali, comunque presi, risultano tra di loro*

eguali." Questa *definizione* è seguita da *assiomi:*

ASSIOMA 1

In uno stesso moto equabile, lo spazio percorso in un tempo più lungo è maggiore dello spazio percorso in un tempo più breve.

ASSIOMA 2

In uno stesso moto equabile, il tempo in cui è percorso uno spazio maggiore è più lungo del tempo impiegato a percorrere uno spazio minore.

ASSIOMA 3

Lo spazio, percorso in un dato tempo a velocità maggiore, è maggiore di quello percorso, nello stesso tempo, a velocità minore.

ASSIOMA 4

La velocità, con cui in un dato tempo viene percorso uno spazio maggiore, è maggiore di quella con cui, nello stesso tempo, viene percorso uno spazio minore.

Quindi vengono enunciati teoremi e proposizioni, come, ad esempio, il seguente:

"Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi."

Con questa suddivisione Galileo riproduce la struttura logica degli ***Elementi*** di **Euclide**.

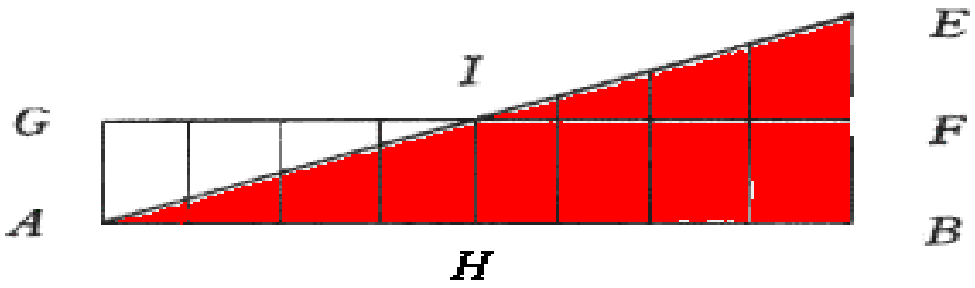
Il secondo tipo di moto trattato è quello uniformemente ("*naturalmente*") accelerato ("*moto equabilmente, ossia uniformemente accelerato, dico quello che, a partire dalla quiete, in tempi eguali acquista eguali momenti di velocità.*"), cioè quello in cui la velocità cresce proporzionalmente al tempo trascorso, e che Galileo riconosce come quello della caduta dei gravi.

TEOREMA1.

Il tempo in cui uno spazio dato è percorso da un mobile con moto uniformemente accelerato a partire dalla quiete, è eguale al tempo in cui quel medesimo spazio sarebbe percorso dal medesimo mobile mosso di moto equabile, il cui grado di velocità sia sudduplo [la metà]

del grado di velocità ultimo e massimo [raggiunto dal mobile] nel precedente moto uniformemente accelerato.

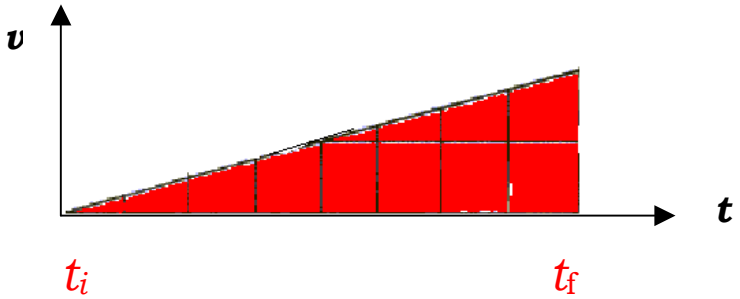
Noi sappiamo che, in generale, lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo è pari al prodotto di quest'ultimo per la velocità media. Se il moto è uniformemente accelerato, cioè l'accelerazione è costante, allora la velocità media è la media aritmetica delle velocità iniziale e finale (ossia la loro somma divisa per due): questo è, espresso in termini moderni, l'enunciato del teorema precedente.



Galileo rappresenta l'intervallo di tempo mediante il segmento *AB:* ogni suo punto corrisponde ad un istante, la sua lunghezza è pari all'ampiezza dell'intervallo, una volta fissata per entrambe un'unità di misura. I segmentini verticali rappresentano i valori della velocità nei singoli istanti. La velocità iniziale è nulla, quella finale è pari alla lunghezza del segmento *EB*. La velocità media è raggiunta all'istante *H:* essa corrisponde al segmento *IH*, che è pari alla metà di *EB*. Secondo il teorema di Galileo, lo spazio percorso è pari al prodotto

$$IH \cdot AB,$$

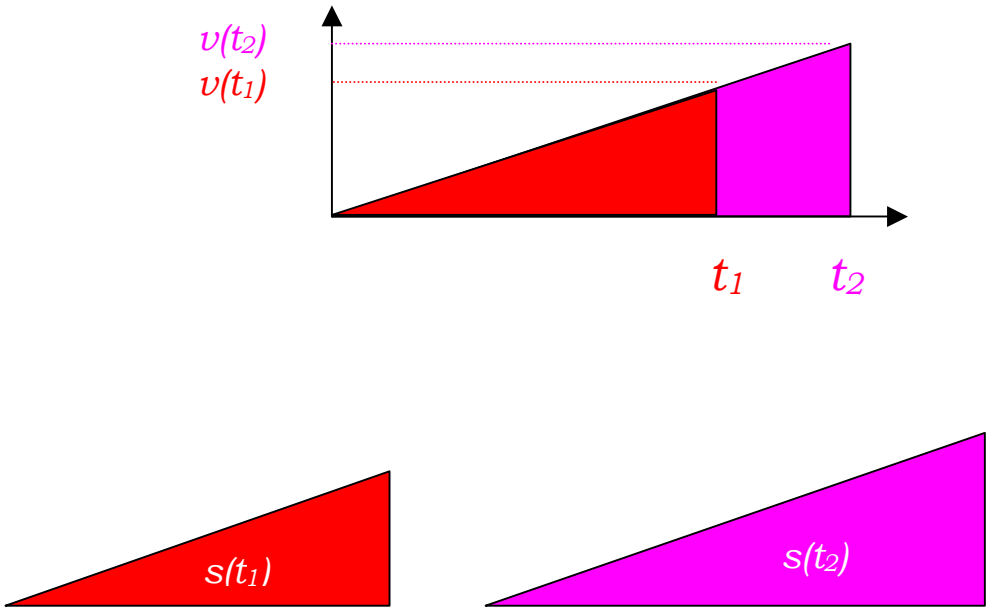
che è poi l'area del rettangolo *ABFG*. Osserviamo che questa è uguale all'area del triangolo rosso.
Interpretando, in termini moderni, il segmento *AB* come l'ascissa temporale e il segmento *AG* come l'ordinata della velocità, il segmento *AE* è il grafico della funzione $v = v(t)$ della velocità nel generico istante *t*. L'area in questione si ottiene come integrale di tale funzione nell'intervallo tra l'istante iniziale t_i e l'istante finale t_f del moto.



Vediamo così che Galilei giunge per mezzo della geometria classica allo stesso risultato che noi potremmo facilmente dedurre con gli strumenti del calcolo infinitesimale.
Nel caso del moto uniformemente accelerato sappiamo che la funzione è $v(t) = at$, dove a è il valore costante dell'accelerazione. Lo spazio percorso al tempo t è dunque $s(t) = \frac{1}{2}\, at^2$. Così, per noi è immediato concludere che, per due generici istanti t_1 e t_2, valgono le proporzioni:

$$s(t_1) : s(t_2) = t_1^2 : t_2^2 = v(t_1)^2 : v(t_2)^2.$$

Le stesse possono essere ricavate, senza ricorrere a formule analitiche, semplicemente ragionando sulle aree di triangoli simili:



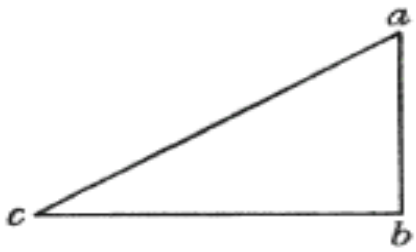
Componendo il moto equabile e quello naturalmente accelerato, Galileo determina il moto dei proiettili, lanciati con una certa velocità verso l'alto e soggetti alla sola accelerazione di gravità, il cosiddetto moto *violento* a cui è dedicata la quarta giornata. Galileo lo descrive con queste parole:

"Immagino di avere un mobile lanciato su un piano orizzontale, rimosso ogni impedimento; già sappiamo, per quello che abbiamo detto più diffusamente altrove, che il suo moto si svolgerà equabile e perpetuo sul medesimo piano, qualora questo si estenda all'infinito; se invece intendiamo [il piano] limitato e posto in alto, il mobile, che immagino dotato di gravità, giunto all'estremo del piano e continuando la sua corsa, aggiungerà al precedente movimento equabile e indelebile quella propensione all'in giù dovuta alla propria gravità: di qui vien

fuori un movimento composto di quello equabile orizzontale e di quello in giù naturalmente accelerato, il quale chiamo proiezione."

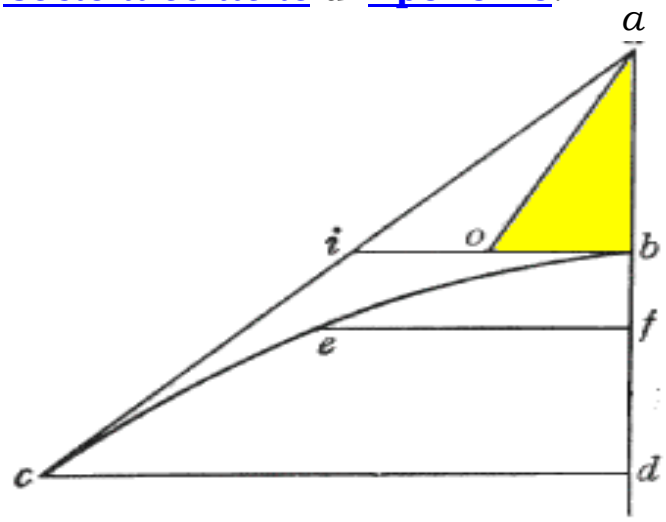
La composizione dei moti avviene secondo la seguente proposizione:

"Se un mobile si muove con moto composto di due equabili, l'uno orizzontale e l'altro perpendicolare, l'impeto o momento del movimento composto da ambedue sarà in potenza eguale ai due momenti dei primi moti"



Se i cateti del triangolo rettangolo rappresentano la velocità orizzontale e verticale, la velocità risultante (*l'impeto del moto composto*) è rappresentata dall'ipotenusa: secondo il **teorema di Pitagora**, il quadrato del suo valore è pari alla somma dei quadrati dei valori delle altre due velocità. Galileo usa il termine *potenza* per indicare il quadrato. A questo punto non è difficile riconoscere nella proposizione di Galileo quella che noi chiamiamo la *"regola del parallelogramma"*, e che utilizziamo per sommare le grandezze vettoriali, come le velocità o le forze.

La traiettoria descritta da un proiettile è un arco di **parabola**. Galileo lo dimostra per via geometrica, utilizzando i teoremi contenuti nelle ***Sezioni coniche*** di **Apollonio**.



Galileo immagina che un oggetto, a cui è stata impressa una certa velocità orizzontale (da destra a sinistra nella figura) che, per comodità chiameremo v_0, venga lasciato cadere dal punto *b*. Da quel momento in poi il moto dell'oggetto sarà composto da un moto orizzontale uniforme con velocità v_0 e da un moto verso il basso determinato dall'accelerazione di gravità. L'oggetto

percorrerà la traiettoria *bec*, un arco di parabola avente vertice in *b*, e toccherà il suolo nel punto *c*. Allora avrà percorso, orizzontalmente, un tratto di lunghezza *cd* (detta ampiezza della parabola) e, verticalmente, un tratto pari a *bd,* l'altezza della parabola. Galileo considera il punto *a*, che è quello da cui - in teoria - dovrebbe essere lasciato cadere l'oggetto affinché la velocità di caduta raggiunta nel punto *b* sia pari a v_0. Adotteremo la lunghezza *ab* come misura della velocità v_0. Supponiamo, per fissare le idee, che la lunghezza di *bd* sia pari ad *ab.*

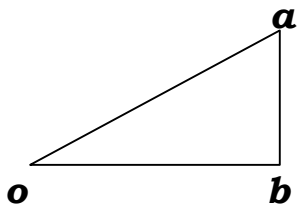
Illustriamo il modo in cui Galileo determina la velocità in un qualunque punto *e* della traiettoria. Egli conduce la perpendicolare a *bd* dal punto *e,* sia *f* il piede di questa perpendicolare. La velocità verticale *v* acquisita dal corpo nel punto *e* è quella con cui un corpo, cadendo da *b*, attraversa il punto *f*. Ora, essendo il moto uniformemente accelerato, vale la proporzione:

$$v_0^2 : v^2 = bd : bf .$$

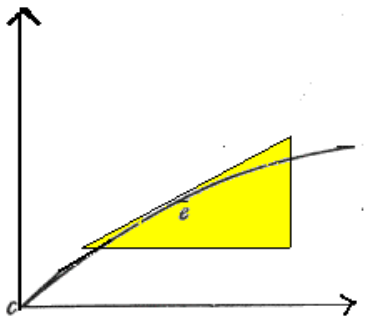
Ma, d'altra parte, $v_0 = bd$. Dunque

$$bd : v = v : bf \qquad (1)$$

ossia *v* è la media proporzionale (geometrica) di *bd* e *bf*, e, come dimostrato da Euclide, **può essere costruita con riga e compasso**. Nella figura il segmento *bo* rappresenta questa media proporzionale. La velocità dell'oggetto nel punto *e* è quindi l'ipotenusa del triangolo rettangolo *abo:*



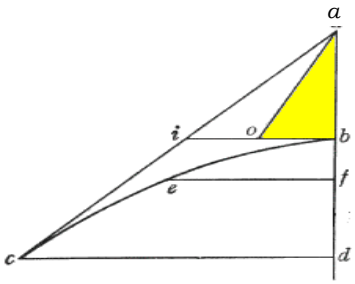
Tale ipotenusa individua la direzione tangente alla parabola nel punto *e*. In un **piano cartesiano** come quello raffigurato, la parabola è il grafico di una funzione $y = f(x)$. Il calcolo differenziale ci insegna che il rapporto tra il cateto verticale e quello orizzontale del triangolo rettangolo è pari al valore della derivata $f'(x)$ ed è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto *e*.



Noi, che abbiamo a disposizione gli strumenti analitici sviluppati da Newton e Leibniz,

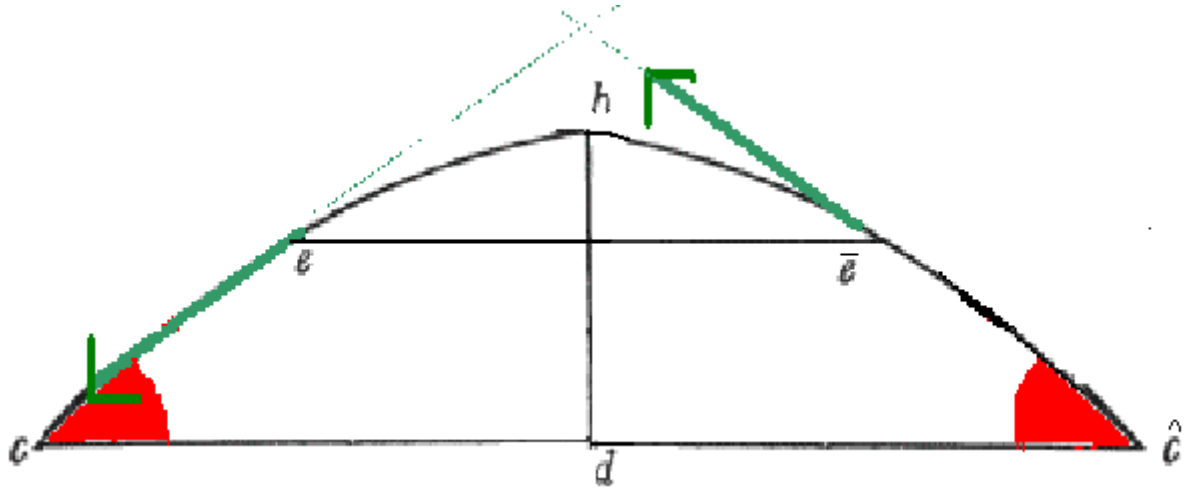
avremmo risolto il problema con la derivazione. Ma Galileo può avvalersi solo della geometria classica.

L'oggetto cade da *b* con velocità verticale inizialmente nulla, mentre la velocità verticale raggiunta al suolo è proprio v_0. Dunque l'oggetto cade lungo *bd* con velocità media $v_0/2$. Inoltre, mentre cade lungo *bd*, la sua velocità orizzontale è doppia rispetto a quella media di caduta, e dunque, al momento di toccare il suolo, l'oggetto avrà percorso un tratto di lunghezza *cd* = *2bd* = *ab*. Segue che *ab* = *bi*.



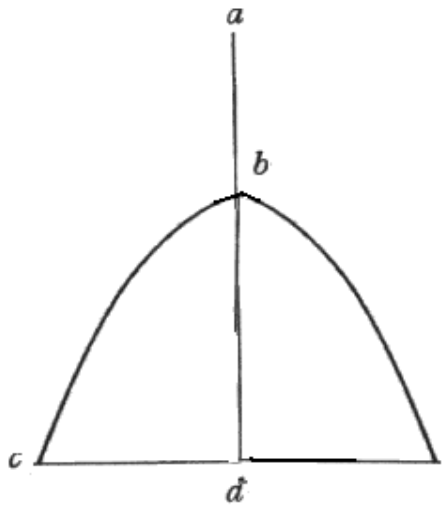
Secondo la regola del parallelogramma, la velocità risultante con cui l'oggetto colpisce il suolo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti valgono v_0. Essa è dunque rappresentata da *ai*. In particolare l'oggetto giunge a terra con un'inclinazione di 45° gradi.

Finora abbiamo parlato di corpi lasciati cadere dall'alto con una certa velocità orizzontale: cosa ha a che fare questa situazione con quella da cui siamo partiti, ossia quella di un cannone che spara? La risposta è semplice: quella che abbiamo studiato è la semiparabola discendente. Essa è simmetrica rispetto alla semiparabola ascendente:



Il punto *b* è il punto di altezza massima raggiunto dal proiettile.
Nel generico punto *ē* della semiparabola ascendente la velocità (tracciata in verde) è uguale in valore, ed ha direzione simmetrica, rispetto alla velocità nel punto simmetrico *e*. In particolare il proiettile colpisce il suolo in *c* con la stessa velocità e la stessa inclinazione con cui viene sparato dal punto ĉ. Si suppone di poter trascurare la resistenza dell'aria.

Consideriamo ora la parabola di un qualunque tiro di cannone, in cui l'ampiezza e l'altezza sono in una qualunque proporzione.



Sia v_0 la velocità orizzontale impressa al proiettile, e sia v_d la velocità verticale raggiunta dal proiettile nel momento in cui tocca il suolo. Si ha la proporzione

$$v_0^2 : v_d^2 = ab : bd.$$

Il proiettile percorre l'altezza bd con velocità media $v_d/2$. Nello stesso intervallo di tempo esso percorre in orizzontale la distanza cd, dunque:

$$cd : v_0 = 2bd : v_d.$$

Se ne deduce che

$$cd^2 = 4\ bd \cdot ab.$$

In altri termini, l'ampiezza è il doppio della media proporzionale di bd e ab.

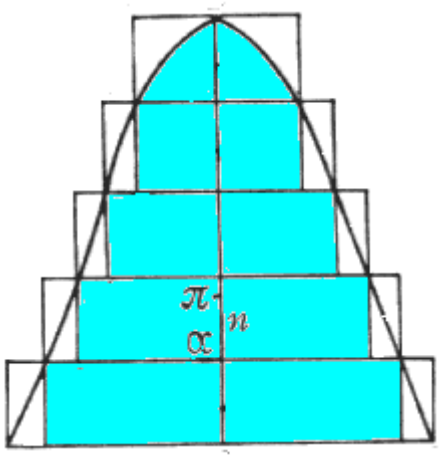
Con altri ragionamenti geometrici Galileo dimostra che la gittata massima di un cannone si ottiene inclinandolo di 45°, ciò che gli artiglieri sapevano per esperienza. Già il Tartaglia, pur non conoscendo la forma esatta della traiettoria di un proiettile, aveva tentato una giustificazione matematica di questo fatto.

La tesi sostenuta da Galileo sulla forma parabolica delle traiettorie suscitò molta perplessità nella comunità scientifica. **Keplero**, in particolare, osservò che essa poteva essere vera solo con approssimazione: la vera forma della traiettoria, in conformità alle sue **leggi** sui moti gravitazionali, doveva essere un arco di **ellisse**, avente uno dei due fuochi nel centro della Terra.

Galileo nota la somiglianza tra la traiettoria di un proiettile e la forma assunta da una corda appesa per gli estremi, e ne cerca una

giustificazione fisica. Oggi noi sappiamo che la corda assume la forma di una curva detta **catenaria**, la cui equazione coinvolge funzioni trascendenti.

In appendice ai *Discorsi* venne pubblicato uno scritto giovanile in cui Galileo studiava i baricentri di alcuni solidi, tra cui il *conoide parabolico*, (oggi chiamato *paraboloide rotondo*) il solido ottenuto facendo ruotare una parabola intorno al suo asse. Il baricentro di questo si trova sull'asse, e *"divide l'asse in modo che la parte verso il vertice è doppia della rimanente parte verso la base".*



Nel disegno il conoide è visto in sezione. Il punto *n* divide l'asse nel rapporto 1 a 2. Galileo dimostra che questo è il baricentro col **metodo di esaustione**. Egli considera una figura "a gradini" inscritta nel conoide (quella evidenziata in celeste) ed un'altra analoga figura circoscritta. I loro baricentri si trovano sull'asse del conoide, nei punti α *e* π rispettivamente. È facile vedere che il baricentro del conoide è situato sull'asse, al di sopra di α e al di sotto di π. Inoltre, come è possibile dimostrare, lo stesso vale per il punto *n.* Ora è possibile scegliere le figure inscritta e circoscritta in modo che α *e* π siano quanto si voglia vicini. Ciò dimostra che il baricentro del conoide deve coincidere col punto *n.*

Galilei avrebbe voluto pubblicare una nuova edizione dei *Discorsi*, aggiungendo altre due giornate, riguardanti rispettivamente le *proporzioni*, con particolare riferimento alla quinta ed alla settima delle Definizioni del **Libro V** degli *Elementi* di Euclide, e la *percossa* (in termini moderni: la variazione di quantità di moto causata da un urto). La vecchiaia e la progressiva cecità gli furono, però, di grande ostacolo: dovette avvalersi dell'aiuto di Viviani e di un suo nuovo allievo, il giovane **Evangelista Torricelli**, che lo assistette negli ultimi tre mesi. La morte impedì a Galileo di portare a termine il suo progetto. I frammenti delle due giornate conclusive furono pubblicati dopo molti anni, nel 1674 e nel 1718. Nella sesta giornata non compare più la figura di Simplicio, sostituita da quella di un discepolo di Galilei, Paolo Aproino di Treviso.

Dai *Discorsi* emerge la concezione galileiana della matematica come mezzo per meglio capire e sfruttare la natura, anziché come fine, come oggetto di studio interessante di per sé. Galileo non prestò mai troppa attenzione alla matematica pura (aritmetica e geometria) che pure aveva interessato anche il Tartaglia. Egli si dedicò interamente a quella che allora veniva detta "matematica mista", e che oggi chiameremmo "matematica applicata". Ciò spiega la diffidenza dimostrata nei confronti della **teoria degli indivisibili** del suo allievo **Cavalieri**, che invano aveva ripetutamente cercato di sollecitare una collaborazione sull'argomento. Le difficoltà che per Galileo sono insite nel concetto di infinito ed infinitesimo emergono chiaramente da alcuni brani dei *Discorsi.*

L'infinito per Galilei

Il frontespizio dell'opera

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze

Attenenti alla

MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.

Con vna Appendice del centro di granità d' alcuni Solidi.



IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

L'infinito nei *Discorsi* di Galileo

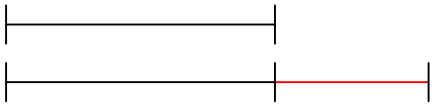
La **teoria degli indivisibili** sviluppata da **Torricelli** e **Cavalieri**, allievi di **Galilei**, ripropone, verso la metà del Seicento, con particolare vigore, la **questione dell'infinito**. Galileo affronta l'argomento nella prima giornata dei suoi ***Discorsi***, sulla scia del problema della struttura fine della materia: suddividendo questa in parti sempre più piccole, si può procedere in eterno, oppure si finisce, prima o poi, per incontrare le sue componenti ultime (atomi)? La materia è un tutto continuo, oppure è formata da particelle separate da piccoli spazi vuoti? Secondo Galileo, i frammenti ottenuti sminuzzando la materia solida sarebbero sempre, per quanto piccoli, sempre *divisibili* per via meccanica. Solo il calore sarebbe in grado di decomporre i corpi nei *"lor primi altissimi componenti infiniti, indivisibili"*, che contrariamente ai granelli di un cumulo di sabbia, sarebbero in continuo movimento e riempirebbero lo spazio senza interstizi.

Per Galileo non v'è dubbio che gli enti geometrici estesi (linee, superficie, ecc.) siano indefinitamente suddivisibili. Ma egli incontra qualche difficoltà nell'immaginarli composti da un'infinità di parti infinitesime, dai cosiddetti *indivisibili*. Un'infinità è una quantità che non può essere contata. Come confrontare due infinità, ad esempio le infinità dei punti che formano due segmenti di lunghezze diverse, oppure l'infinità degli interi positivi e l'infinità dei numeri interi che sono quadrati perfetti?

"SALVIATI: Avrò qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel che poco fa dissi, cioè che l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile. Le cose che in più volte mi son passate per la mente in tal proposito, son molte, parte delle quali, e forse le più considerabili, potrebb'esser che, così improvvisamente, non mi sovvenissero; ma nel progresso del ragionamento potrà accadere che, destando io a voi, ed in particolare al Sig. Simplicio, obiezzioni e difficoltà, essi all'incontro mi facessero ricordar di quello che senza tale eccitamento restasse dormendo nella fantasia: e però con la solita libertà sia lecito produrre in mezzo i nostri humani capricci, ché tali meritamente possiamo nominargli in comparazione delle dottrine sopranaturali, sole vere e sicure determinatrici delle nostre controversie, e scorte inerranti ne i nostri oscuri e dubbii sentieri o più tosto labirinti. Tra le prime instanze

che si sogliono produrre contro a quelli che compongono il continuo d'indivisibili, suol essere quella che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile, perché, se ciò fusse, ne seguirebbe che anco l'indivisibile fusse divisibile; perché quando due indivisibili, come, per esempio, due punti, congionti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre, di cinque, di sette e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo poi segabili in due parti uguali, rendon segabile quell'indivisibile che nel mezzo era collocato. In questa ed altre obbiezzioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte con dirgli, che non solamente due indivisibili, ma né dieci, né cento, né mille non compongono una grandezza divisibile e quanta, ma sì bene infiniti.

SIMPLICIO: Qui nasce il dubbio, che mi pare insolubile: ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tutta volta che amendue contenghino punti infiniti bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggiore dell'infinito, perché la infinità de i punti della linea maggiore eccederà l'infinità de i punti della minore.



Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter essere capito in verun modo.

SALVIATI: Queste son quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio, che ha mossa la difficoltà.
Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.

SIMPLICIO: So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in sé medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal due, e questo dal tre, in sé medesimi moltiplicati.

SALVIATI: Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in sé stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

SIMPLICIO: Non si può dir altrimenti.

SALVIATI: Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, lor esser tanti quante son le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice più d'un quadrato solo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

SIMPLICIO: Così sia.

SALVIATI: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le loro radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.

1 2 3 **4** 5 6 7 8 **9** 10 11 12 13 14 15 **16** 17 18

E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggiore proporzione diminuendo, quanto a maggiori numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto a dire la decima parte essere quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un milione solo la millesima, e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

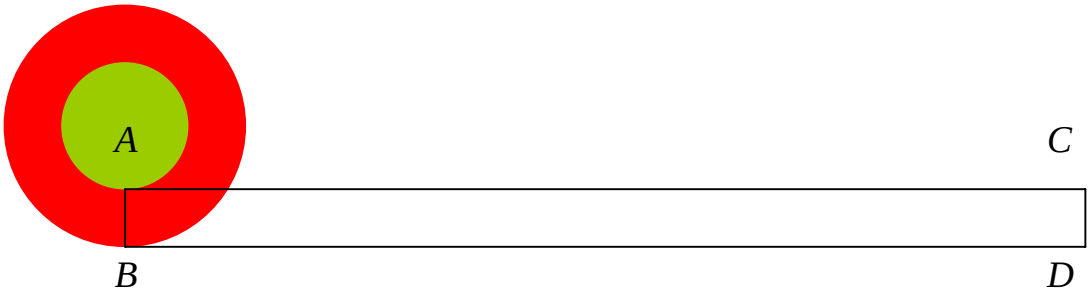
SAGREDO: Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

SALVIATI: Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né

la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate."

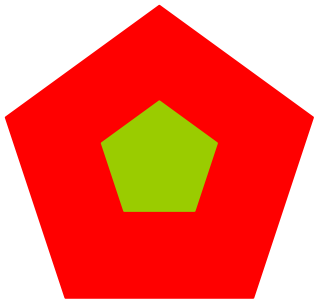
La possibilità di estendere la nozione di disuguaglianza alle quantità infinite sarà il caposaldo della teoria dei ***numeri transfiniti*** introdotta, nell'Ottocento, da **Georg Cantor**.

Certe considerazioni geometriche pongono sotto gli occhi di Galileo la sorprendente equivalenza tra oggetti di diversa estensione.



Il cerchio rosso, sul quale è fissato il cerchio verde, concentrico, rotola senza strisciare lungo il segmento *BD*, compiendo un giro completo. Alla fine il punto *B* si trova in *D*, ed il punto *A* in *C*. Il punto *A* ha quindi percorso una distanza pari al perimetro del cerchio rosso. D'altra parte, però, il cerchio verde ha compiuto esattamente un giro completo. Dunque, nel corso del moto, il perimetro del cerchio verde si è *steso* lungo il segmento *AC*, che ha lunghezza maggiore.

Galileo spiega questo apparente paradosso nel modo seguente: se al posto dei due cerchi avessimo due poligoni regolari simili, diciamo due pentagoni,



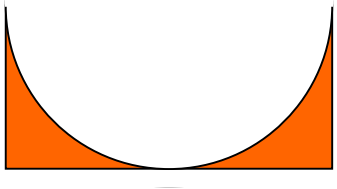
il perimetro del pentagono verde si stenderebbe lungo *AC* "per salti": durante il moto non vi aderirebbe, infatti, con continuità, ed i lati andrebbero a coprire, uno alla volta, cinque segmentini di *AC*

separati da spazi vuoti. Questi spazi vuoti costituiscono la differenza tra il perimetro del pentagono rosso e quello del pentagono verde. Aumentando il numero dei lati dei due poligoni, gli spazi vuoti divengono sempre più numerosi e, al contempo, sempre più piccoli: al limite, i due poligoni diventano due cerchi, gli spazi divengono infinitesimi, ed in numero infinito. La somma delle lunghezze di questi spazi è una quantità finita, precisamente uguale alla differenza tra i perimetri dei due cerchi. In altri termini: il perimetro del cerchio verde copre quello del cerchio rosso purché si inserisca un'infinità di spazi vuoti infinitamente piccoli.

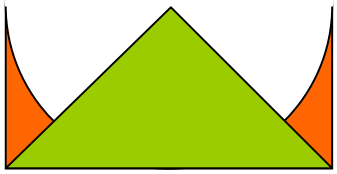
Ritroviamo questo concetto nelle parole del Salviati, che denota con l'aggettivo "quanti" gli enti geometrici di estensione finita: *"E qui voglio che notiate, come, risolvendo e dividendo una linea in parti quante, e per conseguenza numerate, non è possibile disporle in una estensione maggiore di quella che occupavan mentre stavano continuate e congiunte senza l'interposizione d'altrettanti spazii vacui; ma imaginandola risoluta in parti non quante, cioè ne' suoi infiniti indivisibili, la possiamo concepire distratta in immenso senza l'interposizione di spazii quanti vacui, ma sì bene d'infiniti indivisibili vacui. E questo, che si dice delle semplici linee, s'intenderà detto delle superficie e de' corpi solidi, considerandogli composti di infiniti atomi non quanti […] ed in questa guisa non ripugna distrarsi, v.g., un piccolo globetto d'oro in uno spazio grandissimo senza ammettere spazii quanti vacui; tutta volta però che ammettiamo, l'oro esser composto di infiniti indivisibili."*

L'indivisibile di un segmento può essere ottenuto, ad esempio, immaginando di ridurre la lunghezza del segmento a metà, poi ad un quarto, poi ad un ottavo, ed immaginando di protrarre indefinitamente questo processo di successivi dimezzamenti. Al passo *n*-esimo la lunghezza del segmento ottenuto sarà pari a $1/2^n$ della lunghezza iniziale. Al passo "infinito" sarà infinitamente piccola. Esprimendoci in questi termini realizziamo l'idea moderna di ***infinito attuale***, di cui parla Cantor: si tratta dell'infinito che viene effettivamente raggiunto, e dà luogo ad un "caso limite". Al passo "infinito" di un processo come quello dei dimezzamenti successivi spetterebbe il numero ordinale che Cantor chiama ***ω***, il primo ordinale infinito. C'è da dire che l'infinito può anche essere immaginato come l'approdo ideale di un processo *continuo,* che non sia possibile suddividere in singoli passi. Ad esempio, possiamo pensare di ottenere l'indivisibile di un segmento contraendo

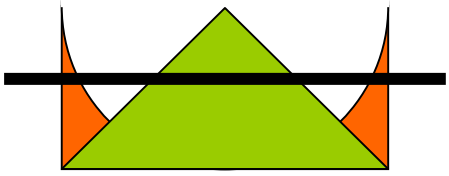
quest'ultimo come una fisarmonica, immaginando di spingere uno degli estremi verso l'altro con un movimento continuo.
Galileo dimostra di provare disagio di fronte a questa idea d'infinito attuale, e presenta, nei ***Discorsi***, due esempi di applicazione che sembrano portare a conclusioni contraddittorie.
Uno di questi è il cosiddetto *paradosso della scodella*, basato su di un teorema di geometria solida dimostrato dal matematico **Luca Valerio** (e dimostrabile col **principio di Cavalieri**) Scodella si dice la figura solida ottenuta da un cilindro circolare pieno estraendone la semisfera costruita sulla sua base superiore. In sezione la figura è:



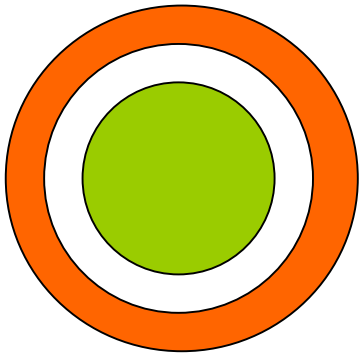
Aggiungiamo ora un cono circolare retto avente la stessa altezza e la stessa base del cilindro.



Immaginiamo di tagliare la figura con un piano parallelo alla base del cilindro:



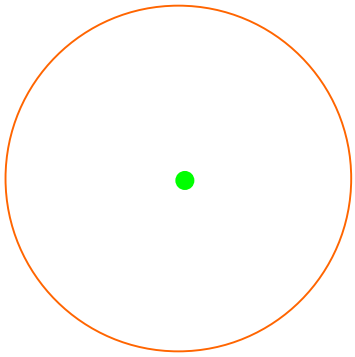
Il piano interseca il cono in un cerchio e la scodella in una corona circolare:



Il teorema di Valerio ci dice che il cerchio e la corona circolare hanno la stessa area, indipendentemente dall'altezza alla quale collochiamo il piano d'intersezione. Un analogo discorso vale per la parte del cono e la parte della scodella che si trovano al disopra del piano: esse hanno lo stesso volume.

Immaginiamo di traslare il piano verso l'alto, lungo l'asse del cono.

Il caso limite - sia per le aree sia per i volumi - è quello in cui il piano attraversa il vertice del cono. Allora la figura d'intersezione è formata da un punto e da una circonferenza:



Estendendo il teorema al caso limite, dovremmo concludere che un punto è equivalente ad una circonferenza. Salviati così commenta:

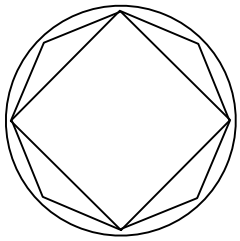
"par dunque che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale ad un sol punto. E questo che accade nei solidi, accade parimenti nelle superficie, basi loro, che esse ancora, conservando nella comune diminuzione sempre la egualità, vanno infine ad incontrare, nel momento della loro ultima diminuzione, quella per suo termine la circonferenza di un cerchio, e questa un sol punto; ***li quali perché non si devon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie e vestigie lasciate da grandezze uguali?****"*

Qui Galileo esprime l'idea intuitiva che le proprietà possedute da un oggetto in ogni istante di un processo dovrebbero essere conservate fino all'infinito. Ma l'evidenza della scodella di Valerio smentisce questa convinzione, come anche il secondo esempio: aumentando progressivamente il raggio di un cerchio, si ottengono cerchi che al limite diventano una retta.

In effetti la teoria del ***calcolo infinitesimale***, che dalla teoria degli indivisibili ha tratto origine, mostra che l'infinito è una nozione

molto delicata, per cui è imprudente cercare di accostarvisi troppo disinvoltamente, armati della sola intuizione. Oggi noi sappiamo che la pretesa di trasportare all'infinito ciò che è vero al finito è del tutto vana: basti pensare, ad esempio, al numero $\sqrt{2}$, che **è irrazionale**, ma può essere ottenuto, per approssimazioni successive, mediante una successione di numeri tutti razionali, ad esempio utilizzando le **frazioni continue**.

Quanto quella pretesa, con cui Galileo si scontra, sia radicata nella mente umana è dimostrato da un antico tentativo di **quadrare il cerchio**. Partendo da un quadrato inscritto in una circonferenza, ed raddoppiando successivamente il numero di lati si ottengono un ottagono regolare, un esadecagono regolare, e così via. Si costruiscono, passo dopo passo, poligoni regolari la cui area è sempre più vicina a quella del cerchio. Da ciò un filosofo greco di molti secoli fa, il sofista Antifonte, trasse la conclusione che al limite si dovesse ottenere un *poligono* che avesse la stessa area del cerchio: ed ogni poligono, come insegna **Euclide** negli ***Elementi***, può essere quadrato con riga e compasso. Purtroppo, come sappiamo, la successione dei poligoni inscritti non produce, al limite, un poligono, ma il cerchio stesso, il che fa cadere il ragionamento.



L'impossibilità per l'uomo di conoscere sia l'infinitamente grande che l'infinitamente piccolo sarà al centro del pensiero di **Pascal**, che la giustificherà in chiave religiosa: nei suoi ***Pensieri*** egli parlerà dei *due infiniti* come di due estremi che "*si toccano e si congiungono a forza di allontanarsi, e si ritrovano in Dio, e in Dio soltanto.*"

Pascal accosta il processo di suddivisione indefinita, che porta agli *indivisibili*, al processo di regressione logica tipico di certa filosofia, che pretende di arrivare ai principi ultimi. Ma questi sono irraggiungibili per la nostra mente, possiamo solo illuderci di trovarli, esattamente come i nostri sensi non possono vedere gli indivisibili, che noi crediamo di poter identificare con punti molto piccoli, che, però, sono comunque figure estese.

La sentenza contro Galileo

"Diciamo, pronunciamo, sentenziamo e dichiariamo che tu, Galileo sudetto, per le cose dedotte in processo e da te confessate come sopra, ti sei reso a questo Santo Officio veementemente sospetto d'eresia, cioè d'aver tenuto e creduto dottrina falsa e contraria alle Sacre Scritture, ch'il Sole sia centro della Terra e che non si muova da oriente ad occidente, e che la Terra si muova e non sia centro del mondo, e che si possa tenere e difendere per probabile un'opinione dopo essere stata dichiarata e diffinita per contraria alla Sacra Scrittura; e conseguentemente sei incorso in tutte le censure e pene dai sacri canoni e altre constituzioni generali e particolari contro simili delinquenti imposte e promulgate. Dalle quali siamo contenti sii assoluto, pur che prima, con cuor sincero e fede non finta, maledichi e detesti li sudetti errori e eresie, e qualunque altro errore e eresia contraria alla Cattolica e apostolica Chiesa mel modo e forma che da noi ti sarà data.
E acciocché questo tuo grave e pernicioso errore e transgressione non resti del tutto impunito, e sii più cauto nell'avvenire e essempio all'altri che si astenghino da simili delitti, ordiniamo che per pubblico editto sia proibito il libro de' Dialoghi di Galileo Galilei.
Ti condaniamo al carcere formale in questo S.° Off.° ad arbitrio nostro; e per penitenze salutari t'imponiamo che per tre anni a venire dichi una volta la settimana li sette Salmi penitenziali: riservando a noi facoltà di moderare, mutare, o levar in tutto o parte, le sodette pene e penitenze.
E così diciamo, pronunziamo, sentenziamo, dichiariamo, ordiniamo e reservamo in questo e in ogni altro meglior modo e forma che di ragione potemo e dovemo."

(cit. da F.Flora, *Il processo di Galileo*, Rizzoli, Milano 1954, pag. 158)

La ritrattazione di Galileo

"Io, Galileo, figlio del q. Vinc.° Galileo di Fiorenza, dell'età mia d'anni 70, costituito personalmente in giudizio, e inginocchiato avanti di voi Emin.mi e Rev.mi Cardinali, in tutta la repubblica Cristiana contro l'eretica pravità generali Inquisitori; avendo davanti gl'occhi miei li sacrosanti Vangeli, quali tocco con le proprie mani, giuro che sempre ho creduto, credo adesso, e con l'aiuto di Dio crederò per l'avvenire, tutto quello che tiene, predica e insegna la S.ª Cattolica e Apostolica Chiesa.
Ma perché da questo S. Off.°, per aver io, dopo d'essermi stato con precetto dall'istesso giuridicamente intimato che omninamente dovessi lasciar la falsa opinione che il Sole sia il centro del mondo e che non si muova, e che la Terra non sia centro del mondo e che si muova, e che non potessi tenere, difendere, né insegnare in qualsivoglia modo, né in voce né in scritto, la detta falsa dottrina, e dopo d'essermi notificato che detta dottrina è contraria alla Sacra Scrittura, scritto e dato alle stampe un libro nel quale tratto l'istessa dottrina già dannata e apporto ragioni con molta efficacia a favor di essa, senza apportar alcuna soluzione, sono stato giudicato veementemente sospetto d'eresia, cioè d'aver tenuto e creduto che il Sole sia il centro del mondo e immobile e che la Terra non sia centro e che si muova.
Pertanto volendo io levar dalla mente delle eminenze Vostre e d'ogni fedel cristiano questa veemente sospizione, giustamente di me conceputa, con cuor sincero e fede non finta abiuro, maledico e detesto li sudetti errori e eresie, e generalmente ogni e qualunque altro errore, eresia e setta contraria alla Santa Chiesa; e giuro che per l'avvenire non dirò mai più né asserirò, in voce o in scritto, cose tali per le quali si possa aver di me simil sospizione; ma se conoscerò alcun eretico o che sia sospetto di eresia lo denonziarò a questo S. Offizio, o vero all'Inquisitore o Ordinario del luogo, dove mi trovarò.
Giuro anco e prometto d'adempire e osservare intieramente tutte le penitenze che mi sono state o mi saranno da questo S. Off.° imposte; e contravenendo ad alcuna delle dette mie promesse e giuramenti, il che Dio non voglia, mi sottometto a tutte le pene e castighi che sono da' sacri canoni e altre constituzioni generali e particolari contro simili delinquenti imposte e promulgate. Dio così m'aiuti e questi suoi santi Vangeli, che tocco con le proprie mani.
Io Galileo Galilei sodetto ho abiurato, giurato, promesso e mi sono obligato come sopra; e in fede del vero, di mia propria mano ho sottoscritta la presente cedola di mia abiurazione e recitatala di parola in parola, in Roma, nel convento della Minerva, questo di 22 giugno 1633."

(cit. da F.Flora, *Il processo di Galileo,* Rizzoli, Milano 1954, pagg. 158-160)

Il processo e la conseguente abiura furono per Galileo una pesante umiliazione, tanto più grave in quanto gli venne inflitta in età avanzata. Un'efficace rappresentazione scenica dell'evento è stata realizzata dalla regista Liliana Cavani, nel film biografico *Galileo* del 1968.

L'Accademia dei Lincei



Questa associazione, tuttora esistente, fu fondata nel 1603 dal nobile romano Federico Cesi, allora appena diciottenne, ed acquisì uno statuto definitivo solo nel 1624, anno in cui venne coniato il suo nome. Essa nacque dal desiderio di sostenere, con ogni mezzo, l'avanzamento della scienza, anche quella applicata. L'Accademia doveva consentire, in un ambiente di pacifica collegialità e serena contemplazione, la continua pratica dello studio e della sperimentazione da parte dei dotti. Il Cesi, nel discorso di istituzione dell'Accademia, la definisce *"una congregatione, un seminario, un ridotto o vero ritirata di professori, scrittori e sperimentatori",* il luogo ideale in cui tenere *"conferenze et amichevoli cimenti de' pensieri e ragioni"*. La possibilità di scambiare frequentemente idee ed esperienze, anche tramite apposite pubblicazioni, doveva favorire il progresso delle conoscenze, coinvolgendo nell'attività di ricerca un numero sempre crescente di persone.

Dice ancora il Cesi:

"moltiplicati i soggetti e maestri e discepoli, seguirà felice e feconda la propagation delle scienze e con la voce e con l'opre di questi. Goderà il publico di molti più libri e compositioni, dico dotte et utili, e doppiamente, poiché molte che, secondo il solito, o per trascuragine o per disgratia o per malignità perirebbono, restano così assicurate; e molte, che non si sarebbono prodotte, in questa maniera ne verranno fuori, venendo così communicate a ciascuno le longhe fatiche d'anni et anni dell'osservationi, sperimenti e contemplationi di tutti questi soggetti.

Goderà similmente dell'utile, dell'inventioni e grandi e mirabili che verranno dall'acutezza di tali ingegni, mentre nel continuo ricercare, sperimentare e contemplare, discoprono le proprietà delle cose e ne notano sempre l'effetti e le cagioni. ***Così nascono l'instrumenti***

ammirandi, si trovano i più rari medicamenti, i fuochi, l'armi, le diffese, le machine, le evasioni d'acque, tanti secreti per facilità dell'arti necessarie al vitto humano, per i commodi, per la sanità, per il vitto stesso, come puol vedersi presso i naturalisti essere fatto sin hora, e particolarmente nella nostra Filosofica panurgia mostraremo*. Ma molto più anco potrà con tali ordini sperarsene per l'avvenire."*

Non a caso, in questo stesso discorso, vengono esaltate le qualità del **cannocchiale** costruito pochi anni prima da **Galileo**. Questi fu membro dell'Accademia a partire dal 1611. Ai Lincei apparteneva anche Della Porta, che contese a Galileo la paternità dell'invenzione.

Il Cesi intendeva rimediare all'isolamento dei "filosofi e mathematici", che all'epoca non trovavano, presso le strutture universitarie, adeguate sedi di ricerca e discussione.

"Di modo che, mancando un'ordinata institutione, una militia filosofica per impresa sì degna, sì grande e sì propria dell'huomo qual è l'acquisto della sapienza, e particolarmente con i mezzi delle principali discipline, è stata a questo fine et intento eretta l'Academia o vero consesso de' Lincei, quale con proportionata unione de' soggetti atti e preparati a tal opra, procuri, ben regolata, supplire a tutti li sopradetti difetti e mancamenti, rimuovere tutti li ostacoli et impedimenti et adempire questo buon desiderio, ***propostasi l'oculatissima lince per continuo sprone e ricordo di procacciarsi quell'acutezza e penetratione dell'occhio della mente che è necessaria alla notitia delle cose, e di risguardar minuta e diligentemente, e fuori e dentro, per quanto lece, gli oggetti tutti che si presentano in questo gran theatro della natura.***

Questa, coltivando particolarmente questi due gran campi delle filosofiche e mathematiche dottrine et ornandosi delle filologiche e poetiche eruditioni, haverà appunto abbracciate le parti più abandonate, più bisognose e più atte a satiar il natural appetito e darci la cognitione della natura, e professarà quelle che d'altri o niente o solamente per passaggio sogliono esser tocche, mentre le altre, per fine molto diverso dallo stesso sapere che in queste schiettamente si pretende, hanno pur qualche seguito.
In questo proponimento vigorosamente unita premerà con tutte le forze e mezzi e con ogni buon ordine e reggimento, non omettendo aiuto, non diligenza alcuna che o sia necessaria o possa giovare a tanta opra."

L'Accademia dei Lincei conobbe, nel corso dei secoli, una storia piuttosto travagliata: più volte venne sciolta e poi ricostituita. Dal 1946, per volere di Benedetto Croce, è attiva in Italia col nome di *Accademia Nazionale dei Lincei.*

L'iniziativa di Cesi non fu un caso isolato: il Seicento vide il sorgere di numerose accademie, sparse in tutta l'Europa. La maggior parte di queste ebbe vita breve, mentre alcune si affermarono fino a diventare importanti istituzioni, finanziate dai governi dei rispettivi paesi. In Francia il frate **Marin Mersenne** raccolse attorno a sé un nucleo di matematici, posando la prima pietra di quella che, nel 1666, sotto Luigi XIV, sarebbe diventata l'*Académie des Sciences*, in Inghilterra **John Wallis** creò la famosa *Royal Society of London*, in Germania **Leibniz** fu il primo presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino.

Non altrettanta fortuna ebbero, a Napoli, l'*Academia Secretorum Naturae,* la prima nel suo genere, fondata nel 1560, e, a Firenze, l'*Accademia del Cimento,* di ispirazione galileiana ed impostazione empirista, voluta dai Medici: essa durò solo una decina d'anni. Tra i soci fondatori v'era Vincenzio Viviani.

Caratteristiche comuni a queste comunità di studiosi erano, da un lato, l'attenzione per le necessità della vita pratica e l'apertura verso gli artigiani, dall'altro l'impegno verso una sistemazione organica della scienza, finalizzata alla creazione di una fonte di riferimento universale, che agevolasse l'utilizzo su larga scala del sapere acquisito. Vanno in questa direzione i primi tentativi di classificare il mondo biologico e di compilare un'enciclopedia, che preludono, rispettivamente, alle opere compiute, nel secolo successivo, da Linneo e da Diderot e D'Alembert.

Il cannocchiale

All'inizio del Seicento si diffonde l'uso degli strumenti ottici, sia dei microscopi, sia dei telescopi. Entrambi verranno perfezionati nel corso dei decenni: i primi passeranno da dieci a cento ingrandimenti, consentendo la pubblicazione di libri con dettagliate illustrazioni delle parti minute di piante ed animali. Il nome dell'**Accademia dei Lincei**, fondata nel 1603 da Federico Cesi, contiene non a caso il riferimento alla vista acuta della lince. Il Cesi pubblicherà, nel 1625, un trattato zoologico ricco di tavole raffiguranti i dettagli ingranditi del corpo dell'ape.

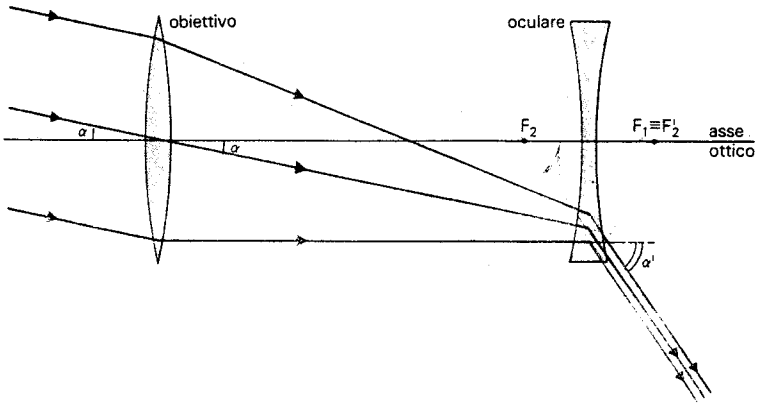
L'uso del telescopio fu lanciato da **Galilei** nel 1609: questi ne realizzò uno a 15 ingrandimenti che presentò al Doge Leonardo Donato come strumento di grande utilità in campo militare. Nella lettera di presentazione egli descrive l'oggetto con queste parole: *"un nuovo artifizio di un occhiale cavato dalle più recondite speculazioni di prospettiva, il quale conduce gl'oggetti visibili così vicini all'occhio, et così grandi e distinti gli rappresenta, che quello che è distante, v.g. nove miglia, ci apparisce come se fusse lontano un miglio solo: cosa che per ogni negozio et impresa marittima o terrestre può essere di giovamento inestimabile; potendosi in mare in assai maggior lontananza del consueto scoprire legni et vele dell'inimico, sì che per due hore et più tempo possiamo prima scoprir lui che egli scuopra noi, et distinguendo il numero et la qualità de i vasselli, giudicare le sue forze, per allestirsi alla caccia, al combattimento o alla fuga; et parimenti potendosi in terra scoprire dentro alle piazze, alloggiamenti et ripari dell'inimico da qualche eminenza benché lontana, o pure anco nella campagna aperta vedere et particolarmente distinguere, con nostro grandissimo vantaggio, ogni suo moto et preparamento; oltre a molte altre utilità, chiaramente note ad ogni persona giudiziosa."*

In seguito lo scienziato impiegò il cannocchiale soprattutto per le osservazioni astronomiche, che condussero a rivoluzionarie scoperte sulla natura dei corpi celesti. Galileo divenne Accademico Linceo nel 1611. Il Cesi, in un suo famoso discorso, dirà del telescopio: *"tanto ci aggiunge la vista e tanto ci avvicina alle stelle e cose remotissime in un subito"*. Ingrandendo la Via Lattea, quella che ad occhio nudo si presenta come una scia biancastra, e che gli antichi credevano fosse formata da etere denso, Galileo si accorse che essa era, in realtà, un ammasso di stelle. Nel ***Dialogo sui due massimi sistemi*** egli dirà: *"le nebulose erano prima piazzette albicanti, ma poi noi co'l telescopio l'aviamo fatte diventare drappelli di molte stelle lucide e bellissime."* Il

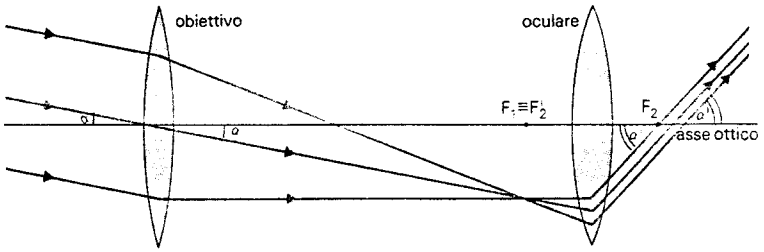
nuovo potente strumento permise di vedere insospettate rugosità sulla superficie lunare, di studiare le macchie solari, di cui Virgilio aveva parlato nelle *Georgiche,* e di vedere le fasi di Venere, che **Copernico** aveva previsto in linea teorica: *"Venere sotto il sole si mostra falcata, e va puntualmente mutando sue figure nello stesso modo che fa la Luna."* Galileo avvistò quattro satelliti di Giove, di cui tratta il suo ***Sidereus Nuncius***, e intravide qualcosa intorno a Saturno, che solo anni dopo **Huyghens** avrebbe potuto riconoscere come anelli. Nel *Dialogo* Galileo dirà: *"Queste cose non possono essere comprese se non co'l senso della vista, il quale da natura non è stato conceduto a gli uomini tanto perfetto, che sia potuto arrivare a discerner tali differenze; anzi, pur lo strumento stesso del vedere a se medesimo reca impedimento: ma doppo che all'età nostra è piaciuto a Dio di concedere all'umano ingegno tanto mirabil invenzion, di poter perfezionar la nostra vista co'l multiplicarla, 4, 6, 10, 20, 30 e 40 volte, infiniti oggetti che, per la loro lontananza o per la loro estrema piccolezza, ci erano invisibili, si sono co'l mezo del telescopio resi visibilissimi."*
Gli astri poterono essere visti con maggiore nitidezza che ad occhio nudo, in quanto non più *"inghirlandati di raggi avventizii e stranieri, così lunghi e folti, che il lor nudo corpicello ci si mostra ingrandito 10, 20, 100 e mille volte di più di quello che ci si rappresenterebbe quando se gli levasse il capellizio radioso non suo".* Ciò permise di dare valutazioni più precise sul diametro delle stelle e sulle loro distanze dalla Terra.

L'uso del cannocchiale fu fatale alla vista di Galileo, che lo puntava spesso verso il Sole, accrescendone così l'effetto abbagliante. Egli divenne completamente cieco.

Contrariamente a quanto molti credono, Galileo non fu l'inventore del cannocchiale. Egli si limitò a mettere a frutto e perfezionare un progetto che già circolava in Europa. Non scrisse mai nessun trattato di ottica, diversamente da molti fisici e matematici dell'epoca, tra cui **Cartesio**, che nella sua ***Dioptrique*** descrisse persino il modo ottimale per lucidare le lenti, e **Keplero**, autore di ben due opere sulla teoria degli strumenti ottici. In una di queste, edita nel 1611, egli descrisse il cannocchiale usato da Galileo (ad oculare concavo) ed un altro, più efficiente, ad oculare convesso. Per questo egli rivendicò la priorità sull'invenzione. Pare, comunque, che essa spetti a Giambattista della Porta, che descrive una sorta di cannocchiale in una sua opera della metà del Cinquecento.



Schema del cannocchiale di Galileo. Esso è formato da una lente convergente e da una lente divergente. Il fuoco dell'obiettivo coincide con il secondo fuoco dell'oculare. Ciò fa sì che i raggi paralleli provenienti da un oggetto celeste emergano dal cannocchiale ancora paralleli. L'angolo di emergenza α' è tuttavia maggiore dell'angolo di incidenza α: la separazione angolare apparente tra due punti della volta celeste risulta pertanto maggiore che ad occhio nudo.



Schema di cannocchiale astronomico. Esso è formato da due lenti convergenti. Il primo fuoco dell'obiettivo coincide con il secondo fuoco dell'oculare. Ciò fa sì che, come nel cannocchiale di Galileo, i raggi paralleli provenienti da un oggetto celeste escano dall'oculare ancora paralleli. L'angolo di emergenza α' è anche in questo caso maggiore dell'angolo di incidenza α.

(da: G. Manuzio, G. Passatore, *Verso la fisica,* Principato, Milano 1983)

I cannocchiali posseduti da Galileo sono esposti a Firenze, nel Museo di Storia della Scienza.

La storia del cannocchiale raccontata dal Leopardi

Galileo Ferraris: studio di sistemi di lenti

La storia del cannocchiale raccontata dal Leopardi

"La impresa di avvicinare gli astri sembra da annoverarsi tra le impossibili ad eseguirsi; eppure si può dir quasi che l'uomo vi è riuscito perfettamente. Se prestasi fede a quanto ci si narra intorno alla fortuita invenzione di questo meraviglioso istrumento, quali riflessioni non si affollano alla mente del saggio! Tutto il mondo avea tra le mani quelle lenti, che dovean servire a comporre il telescopio; eppure quanto tardossi prima di giungere alla invenzione di esso! Non si trattava che di congegnare e comporre in proporzionata distanza quelle lenti, che a tutti eran cognite; ma questa combinazione d'idee, questo concatenamento di cognizioni, sì facile in apparenza, è in realtà la più difficile operazione dell'uomo, è l'ultima cosa, a cui giunge la mente limitata di questo essere. Gli antichi, riflette un sensato scrittore[1]*, avean cognizioni dei caratteri rilevati, ed usavano improntar cifre con forme gittate di metallo. Or, perché non far di tutte le lettere altrettante simili forme combinate insieme e stampare? Qual cosa in apparenza più facile di questa? Eppure passarono de' secoli in gran numero, e l'uomo ignorava che cosa fosse stampare. Così, se crediamo a coloro che stabiliscono la invenzione del telescopio nel secolo decimo settimo, avvenne all'uomo in riguardo a questo istrumento. Varie sono le opinioni degli storici intorno alla invenzione di esso. Alcuni l'attribuiscono a Zaccaria Iansen, nativo di Middelburg nella Zelanda; parecchi al famoso Ruggiero Bacone; altri a Giacomo Mezio e a Giovanni Lapprey. Dicesi che i figliuoli di un occhialaio fecero osservare al loro padre, che tenendo essi due vetri da occhiale, l'uno davanti all'altro in qualche distanza, e guardando attraverso i medesimi, vedeano il gallo d'oro d'un campanile più grande del solito. Il padre seppe trar profitto, come raccontasi, da questa osservazione, e Mezio e Iansen fecero a gara uso della medesima. Evvi chi dice che Mezio fu mosso a costruire dei cannocchiali dall'osservare che alcuni scolari avendo posti alcuni pezzi di ghiaccio sulla cima de' loro calamai, rimanean meravigliati nel vedere come avvicinarsi a loro gli oggetti lontani. Si sa che molto prima di Mezio erano in uso dei tubi per dirigere la vista agli oggetti lontani. Il P. Mabillon attesta di aver veduto in un monastero del suo Ordine, alla terza pagina delle opere di Comestore, scritte nel decimoterzo secolo, una effigie di* ***Ptolomeo*** *in atto di contemplare gli astri con un tubo di quattro canne. Questi tubi però non erano forniti di vetri, e Giacomo Mezio Olandese, fratello di Adriano Mezio, che pubblicò alcune istituzioni astronomiche, fu, secondo alcuni autori, il primo, che ai tubi li applicasse. Egli è però certo*

[1] Francesco Algarotti (1712 –1764) scrittore veneziano. La citazione è tratta dai suoi *Dialoghi sopra l'Ottica Neutoniana.*

che il famoso Giambattista Porta, il quale fiorì verso la metà del secolo XVI, fa menzione, nella sua Magia naturale, di uno specillo, mercé di cui potean gli oggetti vedersi chiaramente, benché lontanissimi. Ed infatti fu ancor egli considerato come il vero inventore del telescopio. Checché ne sia, narrasi dagli storici che nell'anno 1609 essendo stati inventati i telescopi, la fama di una tale invenzione si sparse ben presto per tutta l'Europa e fissò l'attenzione de' dotti. Galilei avendo inteso parlare di cotesti istrumenti, per mezzo de' quali vengon gli oggetti come ad ingrandirsi, fece intorno ad essi sì profonde riflessioni che senza averne giammai veduto alcuno, trovò il modo di fabbricare i cannocchiali, siccome riferisce egli stesso."

(cit. da G. Leopardi, *Storia dell'Astronomia,* in: *Tutte le opere,* Mondadori, Milano 1962, pagg. 913-915)

Il racconto del Leopardi non è privo di sfumature leggendarie. D'altronde tutta la sua *Storia dell'Astronomia* è pervasa di ammirazione per tutti quegli uomini che, nel corso dei secoli, si dedicarono allo studio degli astri. Il valore da lui attribuito alle moderne conquiste della ragione si unisce alla suggestione poetica del mistero dell'universo, che traspare, più che altrove, nei versi del *Canto notturno di un pastore errante dell'Asia,* rivolti alla Luna:

"Spesso quand'io ti miro
Star così muta in sul deserto piano,
Che, in suo giro lontano, al ciel confina,
Ovver con la mia greggia
Seguirmi viaggiando a mano a mano;
E quando miro in cielo arder le stelle;
Dico fra me pensando:
A che tante facelle?
Che fa l'aria infinita, e quel profondo
Infinito seren? che vuol dir questa
Solitudine immensa? ed io che sono?
Così meco ragiono: e della stanza
Smisurata e superba,
E dell'innumerabile famiglia;
Poi di tanto adoprar, di tanti moti
D'ogni celeste, ogni terrena cosa,
Girando senza posa,
Per tornar sempre là donde son mosse;
Uso alcuno, alcun frutto
Indovinar non so. Ma tu per certo,

Giovinetta immortal, conosci il tutto."

Per alimentare il mito dell'astronomia, Leopardi cita alcune leggende. Racconta che il matematico greco **Eudosso** avrebbe dato la vita pur di poter vedere il Sole da vicino, e che **Eratostene**, divenuto cieco, si lasciò morire di fame per il dolore di non poter più guardare il cielo.

Bonaventura Cavalieri (Milano, 1598 – Bologna, 1647)

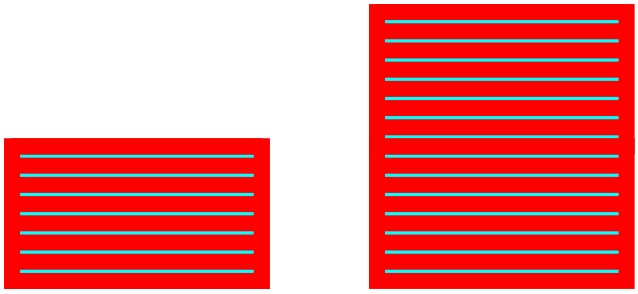


Appartenente, fin dalla gioventù, all'ordine dei Gesuati, ottenne, nel 1629, presso l'Università di Bologna, la cattedra di matematica che era stata precedentemente occupata da **Pietro Antonio Cataldi**, e che conservò per tutta la vita. Come **Evangelista Torricelli**, fu allievo di **Galilei**, che assistè negli anni della vecchiaia, trascorsi nell'isolamento forzato della villa d'Arcetri. Gli spetta il merito di aver diffuso l'uso dei logaritmi in Italia. Egli è passato alla storia grazie all'invenzione della **teoria degli indivisibili**, che sviluppò insieme a Torricelli: con il suo amico e collega condivise anche l'esperimento del 1644, che prelude alla realizzazione del primo barometro.
La prima testimonianza scritta sugli indivisibili risale al 1635: è esposta nei sette volumi della ***Geometria indivisibilibus continuorum quadam ratione promota***. La formulazione definitiva appare invece nella principale opera del Cavalieri, i sei libri delle ***Exercitationes Geometricae***, apparsi in due edizioni, la prima del 1643 e la seconda, postuma, del 1653.

La teoria degli indivisibili
L'idea di base risale a Galilei, che vi accenna nella Prima Giornata dei suoi ***Discorsi***. La si può riassumere dicendo che una retta è composta da un'infinità di segmentini tanto piccoli da poter essere assimilati a punti. Essi si distinguono dai segmenti veri e propri, perché, diversamente da questi, non possono essere ulteriormente suddivisi. In tal senso sono paragonabili alle particelle elementari, che sono gli ultimi componenti della materia. Lo stesso principio, trasferito nello spazio, permette di concludere che le superficie sono formate da tante strisce di larghezza infinitesima, che, in pratica, sono segmenti: sono gli *indivisibili di area.* Ogni solido è invece costituito dalla

sovrapposizione di infiniti "strati" di spessore infinitesimo, detti *indivisibili di volume* e paragonabili a figure piane.
Citando un paragone dello stesso Cavalieri, una retta è composta da punti come un rosario da grani; una superficie è composta da rette come una stoffa da fili e un volume è composto da aree piane come un libro da pagine.

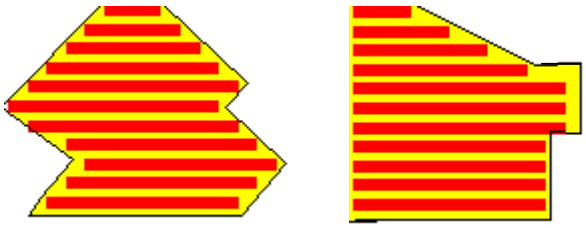
Cavalieri utilizza la teoria degli indivisibili per calcolare aree e volumi, che, a suo avviso, possono essere quantificati tramite il "numero" di indivisibili che li compongono.
Se due rettangoli, ad esempio, hanno la stessa base, ma l'altezza del secondo è il doppio di quella del primo, allora il secondo avrà area doppia rispetto al primo. Infatti entrambi sono composti da indivisibili identici, ma il secondo li contiene in misura doppia:



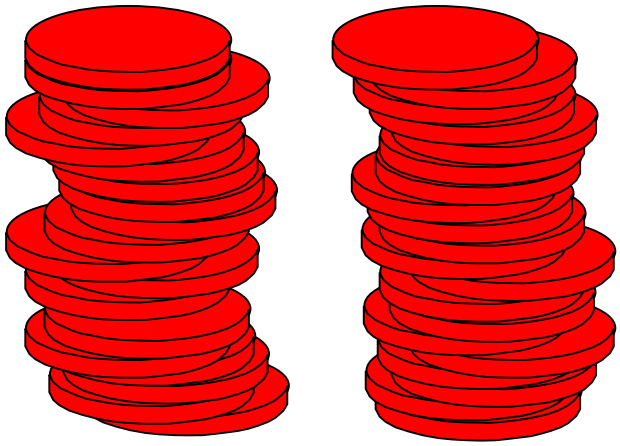
Dette A_1 e A_2 le aree dei due rettangoli, e $L(A_1)$ e $L(A_2)$ i numeri di indivisibili (di *"tutte le linee"*) che li compongono, per Cavalieri vale, in generale, la proporzione:

$$A_1 : A_2 = L(A_1) : L(A_2)$$

Poco importa se i valori di $L(A_1)$ e $L(A_2)$ non sono definiti come numeri.
La stessa formula permette di concludere che due figure, aventi, alla stessa distanza dalla base, sezioni trasversali uguali, hanno la stessa area:



Così due solidi aventi, alla stessa distanza dalla base, sezioni piane di uguale area hanno lo stesso volume: è questo l'enunciato del noto **Principio di Cavalieri**.



Questo teorema permette di concludere, ad esempio, che il volume di un cono circolare retto è pari ad *1/3* del volume del cilindro circoscritto, risultato già noto ad **Euclide**.

La teoria degli indivisibili è basata sull'idea di approssimare una figura curvilinea con figure poligonali e, sotto questo aspetto, affonda le radici nell'antico **metodo di esaustione**, impiegato anche da **Archimede**, ed anticipa, d'altro canto, il moderno **calcolo integrale**. Ad esso si ispirerà, ad esempio, **Newton** nel suo **metodo delle prime ed ultime ragioni**. Un importante risultato ottenuto da Cavalieri – e presentato nell'opera ***Centuria di varii problemi*** (1639) - riguarda proprio l'area sottesa a certe curve algebriche. Nella moderna simbologia dell'analisi, esso corrisponde alla formula:

$$\int_0^a x^n \, dx = a^{n+1}/(n+1),$$

che Cavalieri dimostrò per i valori interi di *n* compresi tra *1* e *9*. La dimostrazione è puramente geometrica. Utilizzando metodi algebrici, Newton generalizzerà la formula, estendendola a tutti i valori razionali di *n*.

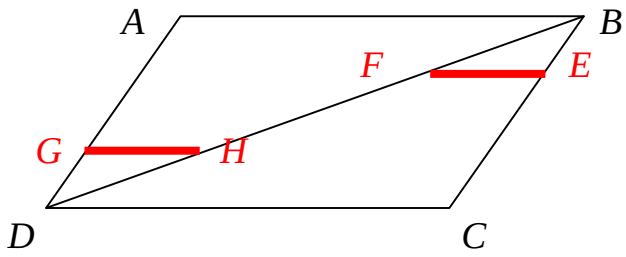
Cavalieri non riuscì mai a coinvolgere il suo maestro, Galileo, nella ricerca sugli indivisibili. In effetti questi era interessato solo al risvolto fisico del problema, la struttura atomica della materia, e non intendeva approfondirne l'aspetto matematico astratto. Nella vana attesa di un suo intervento, Cavalieri ritardò per molti anni la pubblicazione dei propri scritti. Fu invece Torricelli a trarre profitto

dagli studi di Cavalieri: li applicò alla quadratura della parabola e al calcolo dell'area sottesa ad una **cicloide**, oltre che alla determinazione dei baricentri di figure piane e solide dotate di un asse di simmetria.

La mancanza di fondamenti matematici rigorosi procurò alla teoria degli indivisibili molte critiche, soprattutto da parte del matematico svizzero **Guldino**, anch'egli studioso di volumi e superficie. Questi, che era stato solidale con il padre gesuita Orazio Grassi nella polemica contro Galileo, arrivò persino ad accusare Cavalieri di plagio nei confronti di **Keplero**, che aveva usato la teoria degli indivisibili nel suo trattato sulla **misurazione del volume delle botti**. Lo stesso Torricelli non mancò di esprimere perplessità sul metodo di Cavalieri - che pure aveva cercato di estendere al calcolo delle lunghezze delle curve - invitando alla prudenza nel suo impiego.

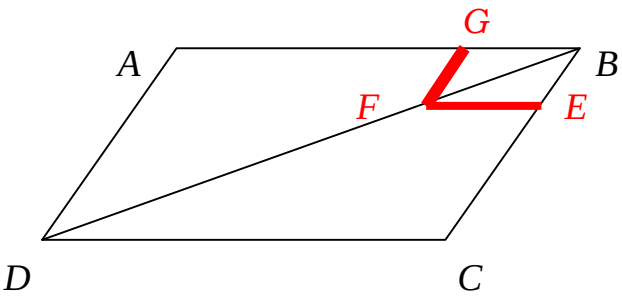
In molti frammenti, raccolti sotto il titolo di ***Contro gl'infiniti***, Torricelli presenta diversi ragionamenti fallaci, tranelli in cui si può facilmente cadere lasciandosi prendere troppo dal fascino degli indivisibili.

La teoria degli indivisibili può essere applicata per dimostrare, ad esempio, che l'area di un parallelogramma è il doppio dell'area di ognuno dei triangoli in cui lo suddivide ciascuna delle diagonali.

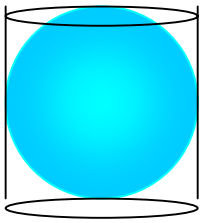


Se, nel parallelogramma *ABCD* si scelgono, sui lati *AD* e *BC*, i punti *G* ed *E* in modo che *GD* = *BE,* allora i segmenti *GH* ed *FE* della figura, aventi il secondo estremo sulla diagonale, e paralleli alla base, hanno la stessa lunghezza. Quindi i due triangoli *ABD* e *BCD* sono composti da due schiere uguali di segmenti, e quindi, secondo il principio degli indivisibili, le loro aree sono uguali.

Torricelli mostra una variante scorretta di questo ragionamento, che conduce ad un risultato erroneo.

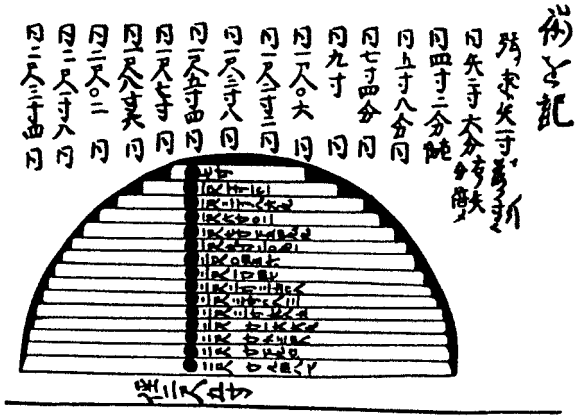


Il triangolo *ABD* è unione dei segmenti, paralleli ad *AD*, delimitati dal lato *AB* e dalla diagonale *BD*: *FG* è uno di questi. Analogamente, il triangolo *BDC* è formato dai segmenti che, come *FE*, sono paralleli ad *AB* e sono delimitati dal lato *BC* e dalla diagonale. Confrontando a due a due i segmenti delle due schiere, come *FG* e *FE*, si vede che ad ogni segmento del triangolo *ABD* ne corrisponde, nel triangolo *BDC*, uno più lungo. Apparentemente segue che l'area di *BDC* è maggiore di quella di *ABD*, il che, naturalmente, è falso.



Un esempio di errata applicazione della teoria degli indivisibili ai solidi è il seguente. Se si tagliano una sfera ed il cilindro circoscritto con un piano parallelo alla base di quest'ultimo, le due sezioni saranno sempre circonferenze, e la sezione della sfera sarà sempre minore di quella del cilindro, con l'unica eccezione della sezione contenente il centro. Se ne dovrebbe concludere che la superficie della sfera è minore di quella laterale del cilindro. In realtà esse sono uguali.

Una lettera di Cavalieri a Torricelli
Torricelli calcola il volume del paraboloide
La teoria degli indivisibili secondo Pascal



Il metodo degli indivisibili per il calcolo dell'area di un semicerchio In un trattato giapponese del sec. XVII.

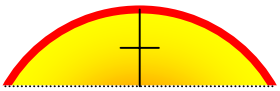
Una lettera di Cavalieri a Torricelli

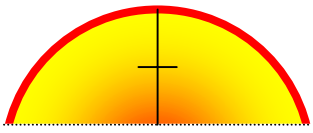
Nella lettera seguente, datata 24 marzo 1643, **Cavalieri** scrive al suo amico e assistente **Torricelli** a proposito delle critiche rivolte al suo **metodo degli indivisibili** dal matematico svizzero **Guldino**.

"M.to Ill.re, et Ecc.mo Sig.re e P.ron Col. mo,

Sono uscito ora di letto dove sono stato contrastando con la Gotta, e febbre continua circa dieci giorni; subito però levato ho voluto riverirla con questa mia, et insieme dirle, come con l'occasione, che si finisce di stampare la tavola de' Seni, e Logaritmi con un opuscolo delle regole della Trigonometria in grazia de' miei scolari da me lasciata uscire in luce; parmi bene dare un avviso della risposta, che io son per dare doppo alle opposizioni del Guldini, et accennare, conforme al suo consiglio, come in esso non mancano proposizioni false, senza dire quali siano, e ciò faccio assicurandomi, che ella non abbi verun dubbio nella sua dimostrazione, nella quale prova, che il Centro di gravità della superficie della porzione, o frusto sferico sia nel mezzo della saetta, o asse siccome li posso opporre parimente qualche petizione di principio. Credo, che avrà ricevuta la mia, nella quale l'avvisavo come a Venezia potesse avere gli quattro libri di esso Guldini, perciò essendo fresco dal male non mi estenderò più in lungo; ma facendo fine, me gli confermerò devotissimo, e cordialissimo servitore baciandole affettuosamente le mani."

Cavalieri fa, tra l'altro, riferimento al seguente **risultato**, dovuto a Torricelli: il baricentro di una calotta sferica è il centro del suo asse di simmetria.





I teoremi di Guldino

Il matematico svizzero **Paolo Guldino** (1577-1643) è legato a due bellissime regole per determinare il volume di un solido di rotazione e l'area di una superficie di rotazione. L'idea risale, in realtà, al matematico alessandrino **Pappo**.

L'area di una superficie ottenuta facendo ruotare una linea di lunghezza finita attorno ad un asse che non la attraversa è pari al prodotto della sua lunghezza per il perimetro della circonferenza descritta dal suo baricentro.

Il volume di un solido ottenuto facendo ruotare una figura piana limitata attorno ad un asse che non la attraversi è pari al prodotto della sua area per il perimetro della circonferenza descritta dal suo baricentro.

Ad esempio, facendo ruotare una circonferenza intorno ad una retta esterna si ottiene una superficie chiamata **toro**. Detta a la distanza del centro della circonferenza dalla retta, e detto r il raggio della circonferenza, si ricava che l'area della superficie è

$$A = 4\pi^2 ra.$$

I criteri di Guldino possono anche essere applicati per trovare il baricentro di una linea, una volta che si conosce l'area della superficie da essa generata, oppure il baricentro di una figura piana, una volta che si conosce il volume del solido di rotazione da essa generato.

Una sfera (vuota) è ottenuta facendo ruotare una semicirconferenza intorno al suo diametro. La sua area, come noto, è

$$A = 4\pi r^2.$$

Il baricentro della semicirconferenza, per ovvie ragioni, si trova sul suo asse di simmetria. Per localizzarlo è allora sufficiente conoscere la sua distanza dal diametro, che, per Guldino, è uguale a

$$a = A/(\pi r \cdot 2\pi) = 2r/\pi.$$

In maniera analoga, applicando il criterio di Guldino al volume della sfera, si deduce che il baricentro del semicerchio (pieno) è sul suo asse di simmetria ed ha dal diametro distanza pari a

$$a = 4r/3\pi.$$

Un risultato approssimato era stato trovato, con considerazioni meccaniche, da **Leonardo da Vinci**.

È notevole il fatto che Pappo abbia intuito il suo teorema molti secoli prima dell'invenzione del **calcolo integrale**, il solo strumento che permetta di darne una dimostrazione rigorosa.

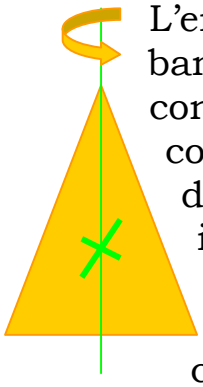
Utilizzando la **teoria degli indivisibili**, che è il primo germe del calcolo integrale, **Torricelli** e **Cavalieri**, allievi di **Galilei**, potranno determinare i baricentri di vari solidi e varie superficie, come, ad esempio, le **calotte sferiche**.

Guldino ed il calcolo dei baricentri

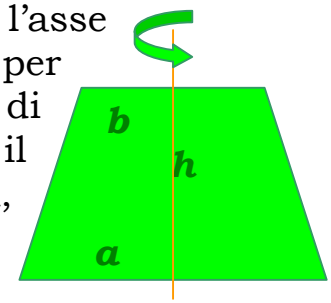
Guldino ed il calcolo dei baricentri

Il matematico svizzero Paolo Guldino dedicò la sua opera principale, intitolata ***Centrobaryca,*** al calcolo dei **baricentri** di figure piane e solide. Questa, pubblicata in quattro libri tra il 1635 ed il 1641, contiene, tra l'altro, i famosi **teoremi** che portano il nome dell'autore.

Il trattato è intriso di spirito polemico contro la **teoria degli indivisibili** di **Cavalieri**, che egli evita il più possibile di utilizzare, percorrendo proprie vie di ragionamento. I suoi argomenti alternativi non sono, però, sempre corretti. **Torricelli** individua quello che è forse il più grave svarione commesso da Guldino: quest'ultimo segue un'intuizione fallace, e sbaglia il baricentro di alcune superficie di rotazione. Egli pone, ad esempio, il baricentro della calotta semisferica di raggio r alla distanza $4r/3\pi$ dalla base, mentre, come mostrano i **calcoli di Torricelli**, esso si trova, in realtà, a metà dell'asse.



L'errore di Guldino risiede nella falsa convinzione che il baricentro di una superficie di rotazione coincida sempre con quello delle figure piane individuate dall'intersezione con un qualunque piano contenente l'asse di rotazione. Ciò è casualmente vero per il cono circolare, e per il tronco di cono circolare: per il primo il baricentro è a $1/3$ dell'altezza, come per tutte le sue sezioni triangolari, per il secondo il baricentro coincide con quello delle sue sezioni, che sono trapezi: dette a e b le sue basi, e h la sua altezza, la distanza del baricentro dalla base a in questo caso è data dalla formula:



$$h\,(a+2b)/3(a+b)$$

Questa proprietà non può, però, essere estesa, per analogia, alla calotta sferica. Così Guldino cade in quella stessa tentazione di semplificare troppo il ragionamento geometrico che proprio lui aveva rimproverato a **Keplero**, riferendosi alla sua opera sul **calcolo del volume delle botti**.

Guldino apre il Libro I della sua opera esprimendo le proprie riserve nei confronti della teoria degli indivisibili.

Cavalieri dedica la terza delle sue ***Esercitazioni*** alle obiezioni sollevate da Guldino. Quest'ultimo preferisce l'approccio di **Euclide** ed **Archimede**, basato sul **metodo di esaustione**: ma Cavalieri osserva che questo produce quasi sempre dimostrazioni indirette, con ***reductio ad absurdum***. La teoria degli indivisibili permetterebbe, invece, di procedere in maniera "ostensiva", ossia costruendo esplicitamente la verità che si vuole provare.
Guldino non potrà mai leggere la risposta data alle sue critiche, perché morirà poco prima che lo scritto venga dato alle stampe.

Il baricentro del paraboloide di rotazione

Evariste Galois (1811-1832)



Ebbe una vita breve, movimentata ed infelice, segnata dalle persecuzioni politiche, dalle incomprensioni del mondo accademico e da un grave lutto familiare. Suo padre, che era preside del collegio di Bourg-la-Reine (un villaggio ribattezzato Bourg-l'Egalité dopo la Rivoluzione), si suicidò, in circostanze misteriose, durante una trasferta di lavoro a Parigi.

Evariste stesso finì tragicamente i suoi giorni, morendo a soli 21 anni per le ferite riportate in un duello, le cui ragioni non furono mai completamente chiarite. Attivista repubblicano ai tempi della restaurazione post-napoleonica della monarchia in Francia, fu incarcerato due volte. La sua militanza politica gli procurò anche l'espulsione dalla Scuola Normale, dove si stava preparando alla professione d'insegnante. La prigionia minò irrimediabilmente la sua costituzione debole: tutti questi eventi non gli impedirono, però, di dedicarsi ai suoi personalissimi studi sulle equazioni algebriche, che egli proseguì con grande perseveranza, pur non riuscendo mai ad ottenere, dall'università, alcun significativo riconoscimento dei propri meriti. Non superò mai la delusione di essere stato respinto per ben due volte all'esame d'ammissione alla prestigiosa Ecole Polytechnique di Parigi.
I suoi manoscritti, inviati all'Accademia per la pubblicazione, e passati per le mani di **Cauchy**, **Fourier** e **Poisson**, andarono in parte perduti, in parte furono respinti perché giudicati incompleti e scarsamente leggibili.

Le sue **ultime annotazioni scientifiche** risalgono alla notte precedente lo scontro a fuoco che gli fu fatale, e sono accompagnate da un commento a margine, che, *a posteriori*, suona come un'oscura premonizione: *"Questa dimostrazione sarebbe da completare. Ma non ne ho il tempo."* La sua lettera di addio agli amici, in cui dà sfogo a tutta la sua amarezza, si conclude con queste funeste parole: *Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis involuta.* Galois affidò i suoi scritti ad Auguste Chevalier, suo compagno di studi e di militanza politica.

Le cronache dell'epoca riportano tutti i dettagli di questa tragedia, nata da una questione d'onore. Il duello ebbe luogo all'alba del 30 maggio, vicino allo stagno della Glacière, nel territorio di Gentilly. Galois ricevette un solo colpo di pistola, sparato da una distanza di venticinque passi, che lo colpì all'addome. Abbandonato in fin di vita in aperta campagna, fu soccorso da un contadino dopo alcune ore. Ricoverato in ospedale, morì il mattino seguente.

L'opera matematica completa di Galois vide la luce solo 14 anni dopo la sua morte, nel 1846, sul *Journal de Mathématiques* diretto da Liouville. La seconda edizione è del 1897.

Quella che oggi va sotto il nome di ***teoria di Galois*** è una disciplina che non si insegna a scuola, ma è una delle principali conquiste della matematica moderna. Essa è fondata su di un criterio generale che permette di stabilire quando un'equazione algebrica ammette una formula risolutiva esplicita, esprimibile mediante radici. In tal caso l'equazione si dice *risolubile per radicali*. Lo sono le equazioni di secondo grado (risolte dalle **formule di Newton**), quelle di **terzo grado** (risolte dalle **formule di Cardano**) e quelle di quarto grado (risolte dalle **formule di Ferrari**). Non lo sono, in generale, quelle di grado superiore. Lo stesso criterio consente di verificare se una data costruzione geometrica sia possibile o meno con riga e compasso: bisogna, in tal caso, ricorrere preliminarmente alla **geometria analitica** per tradurre il problema geometrico in un'equazione algebrica, secondo il metodo di **Descartes**.

È fondamentalmente merito di Galois se si è posto fine alla millenaria ricerca di una soluzione, con riga e compasso, dei problemi della **duplicazione del cubo** e della **trisezione dell'angolo**: la sua teoria ci assicura che questa soluzione non esiste. L'impossibilità della **quadratura del cerchio** fu invece stabilita solo alla fine del secolo scorso, grazie agli studi compiuti da Lindemann sul numero π .

Il criterio introdotto da Galois si basa sul concetto di ***gruppo***, una struttura che generalizza quella **di insieme di numeri dotati di un'operazione**. La teoria dei gruppi comporta nozioni di algebra astratta e viene normalmente svolta solo nei corsi di livello universitario.

Galois fu influenzato in maniera decisiva dagli studi sulla risoluzione delle equazioni algebriche compiuti da **Lagrange**, e dal matematico

norvegese Niels Henrik **Abel**, morto anch'esso in giovane età. Quest'ultimo, pochi anni prima di Galois, aveva dimostrato l'impossibilità di risolvere per radicali l'equazione generale di quinto grado. Un'altra dimostrazione era stata trovata da **Ruffini**.

Il nome di Galois è rimasto legato anche alla nozione di ***campo finito***: un insieme finito di elementi tra i quali sono definite operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione aventi proprietà analoghe a quelle valide nel campo dei numeri reali. Se p è un numero primo, ed v un esponente intero positivo, allora i numeri complessi che sono **radici *n*-esime dell'unità**, dove $n = p^v - 1$, formano, insieme a 0, un campo finito avente p^v elementi. Tutti i campi finiti – detti comunemente *campi di Galois* – sono essenzialmente di questo tipo.

Il primo lavoro di Galois ad essere pubblicato fu un articolo di otto pagine, apparso negli *Annales de Mathématiques* nel 1828. Esso conteneva un interessante teorema sulle **frazioni continue**:

Se una delle radici di un'equazione algebrica di grado arbitrario (a coefficienti razionali) è una frazione continua che è periodica dal primo termine in poi, allora anche un'altra radice è una frazione continua periodica, che si ottiene dividendo -1 per la stessa frazione continua, scritta nell'ordine inverso.

La breve vita di Galois e la sua tragica fine hanno circondato la sua figura di un alone di mito e di mistero.
Lo scrittore australiano Tom Petsinis ne ha voluto fare il protagonista di un romanzo storico e biografico, dipingendolo come un giovane idealista. Galois vi appare come il tipico eroe ottocentesco, radicale ed incosciente, disposto a sacrificare tutto, compresa la salute e gli affetti familiari, per il progresso della scienza e l'affermazione della libertà: nella sua mente questi due principi sono indissolubilmente legati, ed egli va quasi volontariamente incontro alla morte, quando vede sfumare i propri sogni. Petsinis immagina che Galois abbia della scienza una visione romantica e passionale. Egli accosta la storia della matematica a quella della poesia: la prima procederebbe, come la seconda, per salti, secondo i lampi dell'intuizione. L'apparente percorso logico e lineare sarebbe solo il risultato di una rielaborazione razionale a posteriori. Ecco un brano della conferenza che, nel romanzo, Galois tiene nella saletta di una libreria parigina, di fronte ad un pubblico di intellettuali, tra cui lo scrittore Stendhal:

"Non lasciatevi sviare dalla credenza popolare che la matematica si muova linearmente, assimilando con calma, integrando passato e presente. Molto più spesso avanza per mezzo d'idee radicali, rivoluzionarie.
Permettetevi di ricordarvi che gli antichi greci inorridirono quando il concetto di ***numero irrazionale*** *incominciò a introdursi nel loro mondo ordinario. Non c'erano precedenti per tali numeri, che sfidarono e minarono alle fondamenta le loro più profonde convinzioni. All'inizio l'opposizione a queste entità sovversive fu estremamente forte, delle persone furono uccise per aver osato diffonderle. E anche in tempi più recenti la stessa violenza ha salutato la comparsa dei* ***numeri immaginari****, perché mettevano in discussione l'idea che il numero deve per forza avere una correlazione con il mondo fisico. Il grande* ***Gauss*** *rese bene l'idea quando disse che il vero significato della radice quadrata di meno uno era vivido nella sua mente, sebbene lo trovasse difficile da spiegare a parole. Questo è esattamente ciò che intendo con la parola [...] intuitivo, ciò che al momento attuale manca di un vocabolario adeguato. Ma proprio come gli irrazionali ampliarono il campo d'azione della matematica, così gli immaginari, e oggi il* ***teorema fondamentale dell'algebra*** *è definito in termini di numeri immaginari."*

È a questo punto della storia dell'algebra che si inserisce la teoria di Galois: una volta stabilito che ogni equazione algebrica ha soluzioni, si tratta di trovare una formula per esprimerle. Galois prosegue la sua relazione passando alla storia della geometria:

"Se volete un altro esempio dell'indole rivoluzionaria della matematica, ci sono gli sviluppi che dalla Russia ci ha riferito il signor Ostrogradski. Quale esempio migliore di reazione contro il Classicismo del lavoro del signor ***Lobachevsky****, un professore dell'università di Kazan? Ha messo in dubbio il* ***postulato delle parallele*** *e proposto* ***una nuova geometria****, nella quale le linee parallele si incontrano e la somma dei tre angoli di un triangolo non dà come risultato 180°. Sembra che questa nuova geometria sia basata su di un'idea di spazio curvo, al posto delle superficie piane di* ***Euclide****. Nonostante l'idealismo platonico, la geometria degli antichi greci non era affatto ideale, poiché era basata sulla falsa percezione di una terra piatta. Io azzardo che questo Lobachevsky non avrebbe visto i limiti della geometria classica senza l'intuizione."*

(cit. da T. Petsinis, *Il matematico francese,* trad. di F. Paracchini, Baldini&Castoldi, Milano 1999, pagg. 274-275)

Galois è considerato un grande innovatore del linguaggio matematico: egli cerca nell'**algebra** la sintesi e la generalizzazione dei risultati ottenuti attraverso i calcoli tipici dell'**analisi**. Questo è lo scopo del suo **metodo**, con cui egli si aspetta di vedersi aprire nuove strade nella ricerca matematica. In effetti Galois, come osserva Dieudonné, seppe anticipare molte idee moderne: nei suoi scritti si intravede, ad esempio, una prima intuizione del concetto di superficie di **Riemann**.

Curiosità

Galois non fu mai un allievo modello, eccezion fatta per le sue notevolissime doti matematiche. Al Lycée Louis-Le-Grand di Parigi la sua condotta era giudicata mediocre, il suo studio incostante, i suoi progressi poco soddisfacenti, il suo carattere dissimulato ed originale. Ecco una delle sue pagelle dell'Ecole Normale:

1828-1829
"MATHEMATIQUES SPECIALES"

Primo Trimestre
Giudizio di studio

Condotta ineguale e spesso meritevole di biasimo; ha studiato con passione, le sue facoltà sono sorprendenti, i suoi progressi rapidi. Il suo carattere è assai ineguale; talora mite e ragionevole, è altre volte assai spiacevole. Ha un contegno discreto durante gli esercizi religiosi. Da qualche tempo ha mal d'orecchi.

Matematica

Quest'allievo ha una accentuata superiorità su tutti i condiscepoli.

Chimica
Giudizio del prof. Thillaye

Distratto, studio scarso.

Fisica
Giudizio del prof. Thillaye

Disattenzione; studio: nulla.

(cit. da P. Dupuy, *La vita di Evaristo Galois,* a cura di C. Motti, Tumminelli, Roma, 1945, pag. 100)

Il metodo di Galois

Evariste Galois, nella prefazione alle sue memorie di analisi pura, descrive il proprio programma di ricerca in matematica, inserendolo nel quadro globale dell'evoluzione della disciplina. È evidente il desiderio di rompere con una certa tradizione metodologica, alimentato anche, così pare, da una spiccata insofferenza per il mondo accademico dell'epoca, verso il quale, per altro, Galois aveva motivi personali di rancore.

*"I lunghi calcoli algebrici sono stati dapprima poco necessari al progresso della Matematica, i teoremi erano così semplici che non valeva quasi la pena di tradurli nel linguaggio dell'Analisi. È solo a partire da **Eulero** che questa lingua più concisa è diventata indispensabile alla nuova estensione che questo grande geometra ha dato alla scienza. Da Eulero in poi i calcoli sono divenuti sempre più necessari, ma sempre più difficili, mano a mano che essi si applicavano ad oggetti di studio più avanzati. Fin dall'inizio del secolo, l'algoritmo aveva raggiunto un tale grado di complicazione che ogni ulteriore progresso era divenuto impossibile per quella via, senza l'eleganza che i geometri moderni hanno saputo conferire alle proprie ricerche, e per mezzo della quale **la mente afferra prontamente, in un colpo solo, un gran numero d'operazioni**.*

È evidente che l'eleganza tanto giustamente vantata non ha altro scopo che questo.

Dal fatto ben assodato che gli sforzi dei geometri più avanzati hanno per oggetto l'eleganza, si può dunque concludere con certezza che sta diventando sempre più necessario abbracciare più operazioni alla volta, perché la mente non ha più il tempo di soffermarsi sui dettagli. […]
Saltare a piè pari i calcoli; raggruppare le operazioni, classificarle secondo le loro difficoltà e non secondo le loro forme; questa è, secondo me, la missione dei geometri futuri; questa è la via per la quale sono entrato in quest'opera.
[…]
È naturale che, trattando degli argomenti così nuovi, avventurandomi per una via così insolita, si sono spesso presentate delle difficoltà che non ho saputo superare. Così, in queste due memorie, e soprattutto nella seconda, che è la più recente, si troverà spesso la formula "non lo so". La categoria di lettori di cui ho parlato all'inizio non mancherà di trovarvi un motivo d'ilarità. Il fatto è che purtroppo non immaginano che il libro più prezioso del più saggio possa essere quello in cui egli

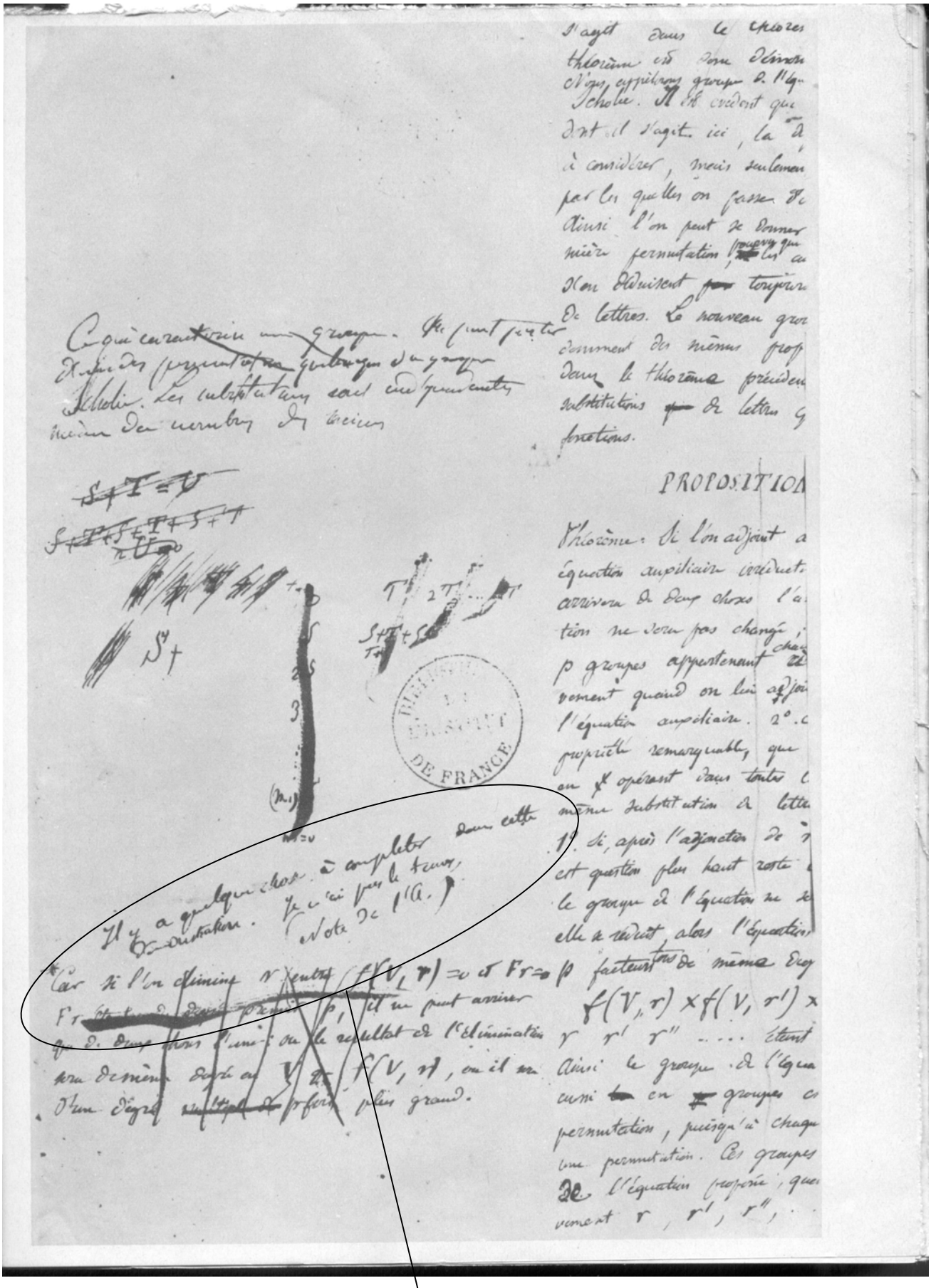
dice tutto ciò che non sa, il fatto è che non sanno che un autore non nuoce mai tanto ai suoi lettori come quando dissimula una difficoltà. Quando la concorrenza, cioè l'egoismo, non regnerà più nella scienza, quando ci si associerà per studiare, anziché inviare alle accademie dei pacchetti sigillati, allora ci si affretterà a pubblicare ogni più piccola osservazione che sia almeno un po' nuova, e si aggiungerà: il resto non lo so."

Galois si propone dunque un vero e proprio progetto di riforma della matematica, che egli giustifica alla luce dello sviluppo della scienza:

"Di tutte le conoscenze umane, si sa che l'Analisi pura è la più immateriale, la più logica, la sola che non attinga nulla dalle manifestazioni dei sensi. Molti ne concludono che essa è, nel suo insieme, la più metodica e la meglio coordinata. Ma ciò è falso. Prendete un libro d'Algebra, uno didattico oppure uno di ricerca, e non ci troverete che un ammasso confuso di proposizioni la cui regolarità contrasta stranamente con il disordine del tutto. Sembra che le idee costino già troppo all'autore perché egli si dia la pena di collegarle, e che la sua mente, esaurita dalle concezioni che sono alla base della sua opera, non possa partorire una stessa idea che governi il loro insieme.
Se vi capita di trovare un metodo, un collegamento, una coordinazione, tutto ciò è falso e artificiale. Sono delle divisioni senza fondamento, degli accostamenti arbitrari, una sistemazione tutta convenzionale. Questo difetto, peggiore che l'assenza di ogni metodo, si riscontra soprattutto nelle opere didattiche, composte, per la maggior parte, da uomini che non possiedono né l'intelligenza né la scienza che professano.
Tutto ciò stupirà molto la gente, che in generale ha preso la parola Matematico per un sinonimo di regolare.
Ma ci si stupirà ancora di più se si pensa che qui come altrove ***la scienza è l'opera della mente umana, che è destinata più a studiare che a conoscere, più a cercare che a trovare la verità****.*
In effetti, si immagina che una mente che avesse il potere di percepire in un colpo solo l'insieme delle verità Matematiche – non quelle a noi note, ma tutte le verità possibili – potrebbe anche dedurle regolarmente e quasi meccanicamente da alcuni principi combinati con un metodo uniforme; allora niente più ostacoli. Non ci sarebbero più quelle difficoltà che lo scienziato trova nelle sue esplorazioni, e che spesso sono immaginarie. Ma allora anche lo scienziato perderebbe la sua parte. Non è così: ***se il compito dello scienziato è più faticoso e quindi più bello, la marcia della scienza è anch'essa meno***

regolare. La scienza progredisce per una serie di combinazioni, in cui il caso gioca un ruolo non trascurabile, il suo cammino è grezzo e assomiglia a quello dei minerali che crescono per strati successivi*. Ciò si applica non solo alla scienza quale essa risulta dai lavori di una serie di scienziati, ma anche alle ricerche particolari di ognuno di loro. Invano gli analisti vorrebbero nasconderlo: essi non deducono, ma combinano, compongono: per quanto immateriale sia l'analisi, essa non è in nostro potere più di altre discipline; occorre spiarla, sondarla, sollecitarla. Quando essi arrivano alla verità, è perché ci sono caduti sbattendo da una parte e dall'altra."*

Lo scopo di Galois è dunque quello di trovare una veste nuova alla matematica del tempo, che la riassuma con chiarezza, facendo dimenticare il percorso tortuoso che ha portato alla sua formazione.



“C’è qualcosa da completare in questa dimostrazione. Non ne ho il tempo.”

BIBLIOTECA FACOLTA' di SCIENZE • UNIVERSITA' • BARI

*Car l'on aura $f(F(V), r) =$ une fonction divisible par $f(V, r)$

Donc, (Lemme I) $f(FV', r') =$ une fonction divisible par $f(V', r')$

1832 Proposition III

Théorème. Si l'on adjoint à une équation toutes les racines ~~de l'eq~~ d'une équation auxiliaire, les groupes dont il est question dans le théorème II jouissent de plus de cette propriété que les substitutions ~~de~~ ~~[illegible]~~ sont les mêmes dans chaque groupe.

On trouvera la démonstration.

2° e
de V
autres.
racine
il est
de f
Cela
à r'
une m
En
on aw
pour
mutate
que pa
permu
de th

Théorè
et qu
nombr

BIBLIOTHÈQUE DE L'INSTITUT

I numeri poligonali

I membri della scuola di **Pitagora** consideravano l'unità (*ἡ μονάς*) come elemento generatore di tutti i numeri, e la rappresentavano con un punto tracciato sulla sabbia, oppure un ciottolo. Pare che essi raffigurassero la sequenza dei numeri naturali come un triangolo isoscele:

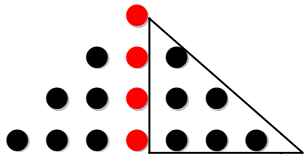


Fig.1

Le linee orizzontali rappresentano i numeri dispari *1, 3, 5, 7,…* Togliendo la linea mediana rossa si ottengono, sempre in senso orizzontale, i numeri pari *2, 4, 6,….*
Si consideri il triangolo evidenziato nella Fig.1. Esso contiene 6 punti. Il numero 6 è un ***numero triangolare***, cioè un numero che può essere raffigurato disponendo i punti a forma di triangolo rettangolo. Esistono infiniti numeri triangolari, i primi della serie sono:

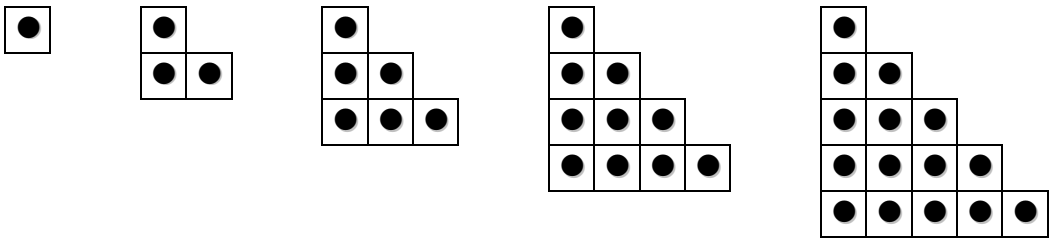


Fig.2

È evidente che l'*n*-esimo numero triangolare è la somma dei primi *n* numeri interi positivi.
In modo analogo si definiscono i ***numeri quadrati***:

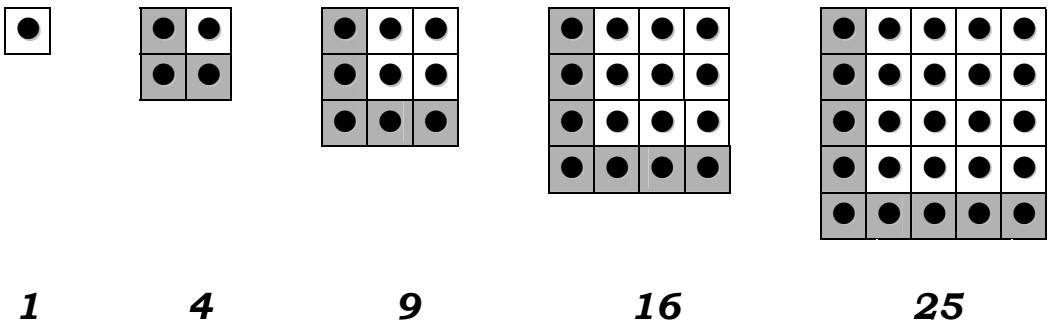
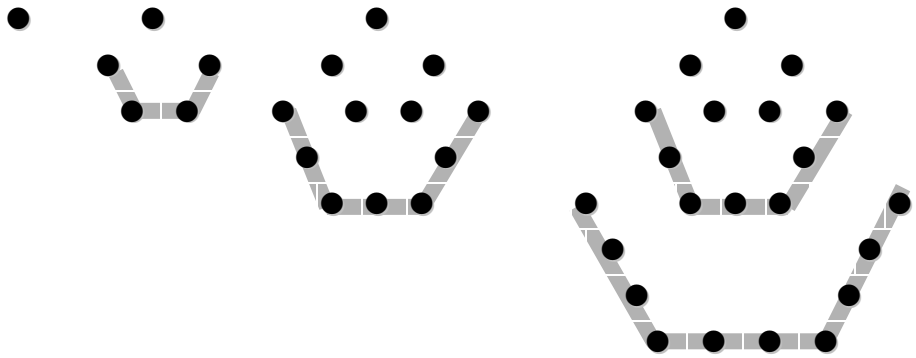


Fig.3

Si osservi che per passare da ogni quadrato al successivo si aggiungono una riga ed una colonna, disposte a forma di L. Questa figura, che noi abbiamo evidenziato in grigio, si dice ***gnomone***. Lo gnomone appartenente ad un quadrato ha due lati, ma si possono anche costruire gnomoni con un qualunque numero di lati maggiore di due. Aggiungendo via via uno gnomone con tre lati si ottiene una sequenza di pentagoni:



1 ***5*** ***12*** ***22***

Fig.4

In questo modo si costruisce la sequenza dei ***numeri pentagonali***. Analogamente si costruiscono i ***numeri esagonali*** (con gnomoni a quattro lati), ed i numeri corrispondenti ad ogni altro tipo di poligono. Questi numeri vengono detti ***numeri poligonali***. Essi formano, insieme ai ***numeri poliedrici***, la classe dei ***numeri figurati***. I numeri poligonali furono oggetto di approfonditi studi fin dall'antichità: il grande matematico greco **Diofanto** dedicò ad essi un intero trattato.

Un po' di aritmetica

I numeri poligonali possono essere ricavati, oltre che col metodo geometrico che abbiamo appena visto, applicando semplici formule aritmetiche.

Ricaviamo la formula per l'n-esimo numero triangolare, che chiameremo T_n. Immaginiamo di raddoppiare il triangolo corrispondente a questo numero, in modo da formare un rettangolo.

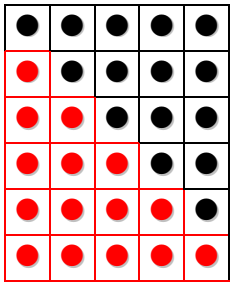


Fig.5

Questo rettangolo avrà n colonne e $n+1$ righe, quindi conterrà $n(n+1)$ punti. Pertanto l'n-esimo triangolo conterrà $\frac{1}{2}\, n(n+1)$ punti, cioè

$$T_n = \tfrac{1}{2}\, n(n+1).$$

Per questa formula si può dare anche una **dimostrazione** che utilizza il **principio d'induzione**.
Per venire ai numeri quadrati, è facilissimo rendersi conto che l'n-esimo quadrato contiene n^2 punti, cioè l'n-esimo numero quadrato è

$$Q_n = n^2.$$

Per finire, l'n-esimo numero pentagonale è

$$P_n = \tfrac{1}{2}\,(3n^2-n),$$

e l'n-esimo numero esagonale è

$$E_n = 2n^2-n.$$

Le ultime due formule si ricavano con metodi più complessi dei precedenti: sarebbe troppo lungo e complicato descriverli qui.

La bellezza dei numeri poligonali

I numeri triangolari e quadrati non solo corrispondono a forme geometriche molto regolari, ma hanno anche un importante ruolo nell'insieme dei numeri interi: i Pitagorici l'avevano scoperto, e ne erano rimasti affascinati.

Vediamo che nell'n-esimo triangolo della Fig.2 le righe contengono rispettivamente $1,2,3,\ldots,n$ punti. Da qui si ricava la bella formula:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = T_{n,}$$

In altri termini: **la somma dei primi *n* numeri naturali è uguale all'*n*-esimo numero triangolare**.

Passando ai numeri quadrati, dalla Fig.3 risulta che lo gnomone dell'*n*-esimo quadrato contiene *2n-1* punti. È noto che *2n-1* è l'*n*-esimo numero dispari. D'altra parte è anche evidente che l'*n*-esimo quadrato è formato unendo al primo quadrato della serie tutti gli gnomoni dei quadrati compresi fra il secondo e l'*n*-esimo.

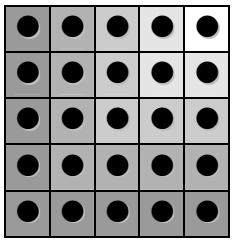


Fig.6

Quindi, riassumendo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = Q_{n.}$$

In altre parole: **la somma dei primi *n* numeri dispari è uguale all'*n*-esimo numero quadrato**.

Fin qui ci siamo divertiti a mescolare geometria ed aritmetica: abbiamo contato i punti di triangoli e quadrati seguendo particolari percorsi (le colonne, gli gnomoni), e così facendo abbiamo trovato delle formule interessanti. Adesso continuiamo il gioco, ma con un metodo più raffinato: quello del "puzzle". L'abbiamo già usato, anche se in forma molto semplice, nella Fig.5.

Un semplice calcolo algebrico ci dice che vale la seguente identità:

$$\tfrac{1}{2}\, n(n-1) + \tfrac{1}{2}\, n(n+1) = n^2.$$

Questa esprime una relazione generale fra numeri triangolari e quadrati: infatti $T_n = \tfrac{1}{2}\, n(n+1)$, di conseguenza

$$T_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n-1)n,$$

come si vede sostituendo *n-1* ad *n* nella formula per T_n. Inoltre $Q_n = n^2$, quindi

$$T_n + T_{n-1} = Q_n .$$

Abbiamo appena dimostrato algebricamente che **ogni numero quadrato è somma di due numeri triangolari**. L'ha scoperto per primo **Teone da Smirne** (365 d.C.), che ne ha trovato una elegante dimostrazione del tipo "puzzle":

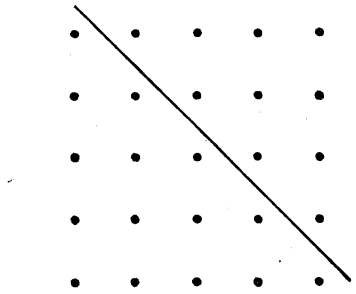


Fig.7

Un altro "puzzle" ci giunge da **Plutarco**, notissimo storico greco (46-120 d.C.):

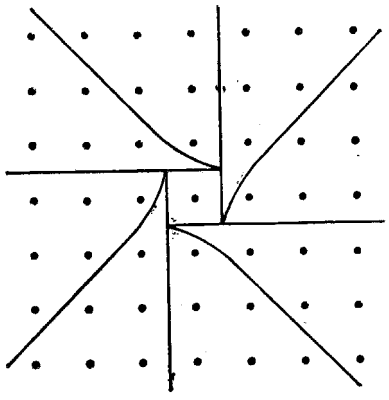


Fig.8

Questa è la dimostrazione visiva della formula

$$8T_n + 1 = Q_{2n+1},$$

che ci dice: **ogni numero triangolare, moltiplicato per otto, con l'aggiunta di uno, è uguale ad un numero quadrato**.

Diamo un'ultima formula, che mostra la relazione tra i numeri triangolari e pentagonali:

$$3T_{n-1} + n = P_n.$$

Anche in questo caso, la formula nasce da un "puzzle":

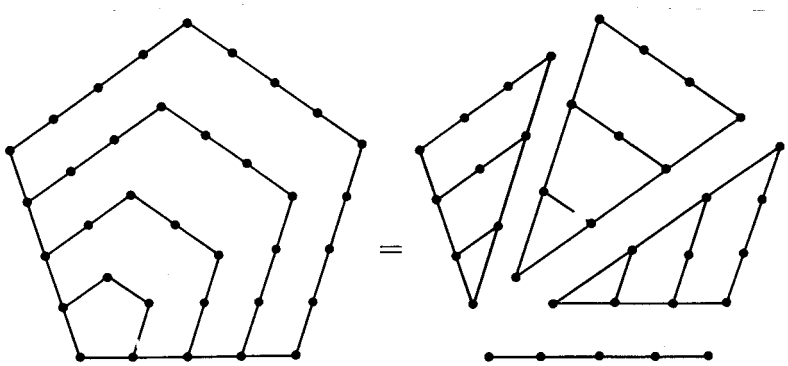


Fig.9

Adesso provate a cimentarvi voi stessi.

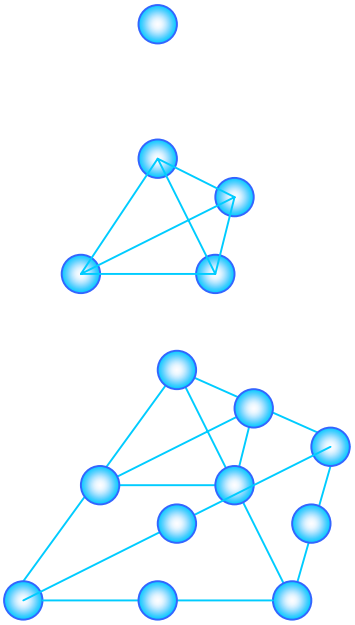
Esercizio: Dimostrare, usando l'algebra o un puzzle, la seguente formula, che lega numeri triangolari, quadrati e pentagonali:

$$T_{n-1} + Q_n = P_n.$$

Nota: Questa formula è dovuta a **Nicomaco da Gerasa** (o Geraseno) un tardo seguace della scuola pitagorica, e si trova nella sua opera ***Introductio Arithmetica***, pervenutaci tramite **Boezio**.

La ricerca intorno ai numeri poligonali è proseguita fino in epoca moderna. **Fermat** enunciò per primo un risultato che fu poi dimostrato, in tempi diversi, da **Gauss**, **Lagrange** e **Cauchy**: **ogni numero naturale è somma di 1, 2 o 3 numeri triangolari, è somma di 1, 2, 3 o 4 numeri quadrati, è somma di 1, 2, 3, 4 o 5 numeri pentagonali, è somma di 1, 2, 3, 4, 5 o 6 numeri esagonali, e così via per tutti gli altri numeri poligonali**.

I numeri che nascono da disposizioni regolari nello spazio prendono il nome di ***numeri poliedrici***. Il tipo più semplice è costituito dagli analoghi tridimensionali dei numeri triangolari, che sono i **numeri piramidali**:



1

4

10

I poligoni

I **numeri figurati** secondo **G.A. Alberti**

I numeri poligonali ed il triangolo aritmetico

Carl Friedrich Gauss
nato il 30 aprile 1777 a Braunschweig (Germania)
morto il 23 febbraio 1855 a Göttingen, Hannover (Germania)

Infanzia e adolescenza



Gauss era di origini estremamente modeste: il padre passava da un mestiere all'altro, a seconda di dove gli si presentavano le occasioni di guadagno: fu muratore, giardiniere, macellaio. La madre, prima del matrimonio, aveva lavorato come domestica, ed era praticamente analfabeta. Non si può proprio dire che il geniale talento del piccolo Carl Friedrich potesse trovare in casa stimoli adeguati: ciononostante egli si fece subito notare, fin dalla scuola elementare, per la sua straordinaria predisposizione alla matematica. Il suo maestro Büttner fu coprotagonista di un episodio passato alla storia: un giorno assegnò ai suoi alunni il compito di sommare i numeri da *1* a *100*. Dopo pochi minuti il ragazzino gli consegnò il risultato esatto: *5050*. Egli aveva avuto l'idea di scrivere i numeri su due righe:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots\ldots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

La somma di ciascuna colonna è *100*, le colonne sono *101*. Dunque la somma cercata si può calcolare come

$$\frac{100 \times 101}{2}$$

che è, appunto, uguale a *5050*. Questo non è che un caso particolare di una formula per i **numeri triangolari**, di cui è possibile dare una **dimostrazione** basata sul **principio d'induzione**.

Le sue straordinarie doti furono notate da persone di alto rango, fra cui il Duca Ferdinando di Braunschweig. Grazie all'appoggio finanziario di quest'ultimo, Gauss poté proseguire gli studi in prestigiosi collegi della città, e quindi, nel 1795, iscriversi all'Università di Göttingen. Allora Gauss non aveva ancora deciso se dedicarsi alla matematica oppure alla filologia. La definitiva scelta a favore della prima avvenne il 30 marzo 1796, quando egli fece una storica **scoperta**: egli provò per primo la possibilità di costruire, con riga e compasso, un **poligono regolare** con 17 lati (*ettadecagono*). Fu questa la prima annotazione di Gauss sul suo diario scientifico: ad essa ne seguirono ben 146, concentrate in sole diciannove pagine. L'ultima reca la data del 9 luglio 1814. Tra i primi risultati riportati ricordiamo quello del 10 luglio 1796: ogni numero intero è somma di non più di tre numeri triangolari. Più tardi Gauss definì la matematica come la regina delle scienze, e l'aritmetica (o **teoria dei numeri**) come la regina della matematica.

Nonostante la sua precocità, la scoperta sui poligoni regolari non è il primo risultato trovato da Gauss: egli esordì infatti all'età di soli 15 anni, intuendo una formula per la **distribuzione di numeri primi**, che poté essere provata solo nel 1896, da **Hadamard** e **de la Vallée Poussin**: per ogni numero intero positivo n sia $\pi(n)$ il numero di primi minori o uguali a n, allora

$$\lim_{n\to\infty} (\pi(n)\log n)/n = 1$$

Nel 1949 **Paul Erdős** e **Atle Selberg** fornirono la prima dimostrazione elementare.

Da ragazzino Gauss si occupò anche dei fondamenti della **geometria euclidea**, giungendo alla conclusione che l'**assioma delle parallele** era probabilmente indipendente dagli altri. Inoltre sviluppò i fondamenti del **metodo dei minimi quadrati**, un criterio per correggere gli errori di misurazione in fisica: con ciò Gauss anticipò di alcuni anni un analogo risultato di **Legendre**.

La casa natale di Gauss



Gli anni della maturità



1 La teoria dei numeri

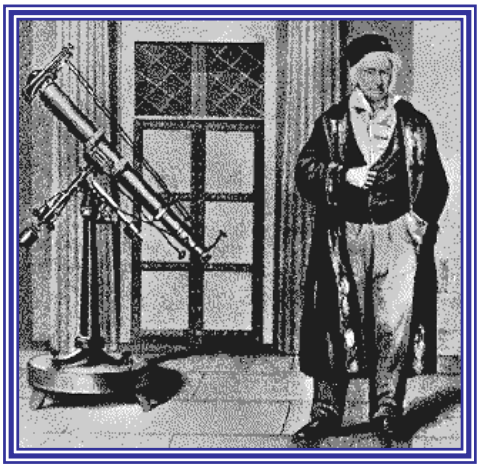
Nel 1798 Gauss conseguì il dottorato presso l'Università di Helmstedt, Germania. La tesi, scritta in latino, e pubblicata un anno dopo, era intitolata *Demonstratio nova Theorematis omnem Functionem algebricam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi Gradus resolvi posse* (Nuova dimostrazione del teorema che ogni funzione algebrica razionale intera a una variabile può essere risolta in fattori lineari di primo o secondo grado). Il teorema in questione è oggi noto come **teorema fondamentale dell'algebra**, e stabilisce che ogni polinomio ha almeno una radice, a patto di estendere il campo dei numeri reali e costruire il campo dei **numeri complessi**. È dovuta sempre a Gauss la più efficace interpretazione geometrica dei numeri complessi (**piano di Gauss**).

Nel 1801 Gauss pubblicò la sua opera principale, le ***Disquisitiones arithmeticae***, un trattato di **teoria dei numeri**, che volle dedicare al suo mecenate, il Duca di Braunschweig. Il testo fu redatto in latino, e ne seguì una versione in francese, edita a Parigi nel 1807.

La prima parte del volume riguarda le **congruenze di numeri interi**, e contiene la **legge di reciprocità dei residui quadratici**, che già **Legendre** aveva pubblicato alcuni anni prima: Gauss la chiama *theorema aureum,* e la considera la gemma dell'aritmetica. Gauss presenta, inoltre, una dimostrazione rigorosa del **teorema fondamentale dell'aritmetica**, già noto ad **Euclide**: ogni numero intero maggiore di 1 si scompone in uno ed un solo modo come prodotto di numeri primi positivi. Egli estende questo risultato all'insieme degli **interi gaussiani**.

Nell'opera compare anche la prima importante scoperta del giovane Gauss: la costruibilità del poligono regolare con 17 lati. Egli sviluppa questo argomento fino a trovare un **criterio generale**, che permette di stabilire quando, dato un numero intero $n \geq 3$, è possibile costruire, con riga e compasso, un poligono regolare avente n lati.
Quest'opera fu importante oggetto di studio e fonte di ispirazione per molti matematici, tra cui il giovane **Dirichlet**, che sviluppò la sua teoria dei numeri proprio a partire dal lavoro di Gauss, ed **Abel**, che approfondì la teoria della risoluzione delle equazioni algebriche.

2 L'astronomia



Durante la prima notte del secolo XIX, il 1° gennaio 1801, l'astronomo italiano G. Piazzi dell'osservatorio di Palermo scoprì il primo asteroide della storia, cui venne dato il nome di "Cerere". Ma dopo poche settimane il piccolo corpo celeste, visibile solo al telescopio, fu improvvisamente perso di vista. Una sera gli astronomi non lo videro più ricomparire nel punto del cielo in cui, secondo i loro calcoli, avrebbe dovuto trovarsi. Essi avevano creduto di poter ricostruire la sua traiettoria sulla base delle osservazioni fino ad allora compiute sui suoi spostamenti nel cielo. Ma i loro metodi prevedevano un grado di approssimazione insufficiente a determinare l'orbita sulla base di pochi dati. Gauss seppe minimizzare l'errore di calcolo grazie alla tecnica da lui inventata, detta dei minimi quadrati. E Cerere fu ritrovata, esattamente dove aveva previsto Gauss, in un punto distante ben 14 diametri lunari dalla posizione in cui gli astronomi avevano invano aspettato di vederla.

Un secondo asteroide, battezzato "Pallade", fu scoperto il 28 marzo 1802 dal medico H.W.M. Olbers, nel suo osservatorio privato di Brema. Questo nuovo pianetino creò non pochi problemi a Gauss, che impiegò diversi anni per perfezionare il suo metodo di calcolo, e svelare tutti i misteri della sua traiettoria.
I successi ottenuti da Gauss in campo astronomico gli valsero, nel 1807, la nomina a direttore dell'Osservatorio di Göttingen, col privilegio di tenere corsi di matematica all'Università. I principali risultati delle sue ricerche in astronomia confluirono nell'opera *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Teoria del movimento dei corpi celesti intorno al sole seguendo delle sezioni coniche), apparsa nel 1809.

3 L'analisi
Avendo completato i suoi studi sui numeri complessi e la loro **rappresentazione geometrica**, Gauss pensò di estendere al campo complesso la teoria delle funzioni di una variabile, che **Lagrange** aveva sviluppato per il campo reale. Gauss fu dunque il vero inziatore dell'**analisi complessa**. Nel 1811 confidò al suo amico **Bessel** un importantissimo risultato, che però rimase segreto: si trattava di un teorema, che **Cauchy** scoprì e pubblicò solo anni dopo, ignaro di essere stato preceduto. Questo teorema è, in effetti, noto come il **teorema di Cauchy**, e riguarda il **calcolo integrale**. A quest'ultimo Gauss dedicò anche il trattato *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Nuovi metodi per determinare i valori degli integrali per approssimazione).
Gauss si occupò anche della convergenza delle **serie numeriche** (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*).

La distribuzione gaussiana (con il suo famoso grafico a **campana**) riveste un ruolo fondamentale nella **teoria della probabilità**: essa permette uno studio analitico dei processi aleatori che rispettano **la legge dei grandi numeri** di **Jakob Bernoulli**.

4 La geometria
Nel 1816 Gauss venne incaricato dal governo del Regno di Hannover di compiere misurazioni del territorio. In questo periodo egli compì notevoli progressi in *geodesia*, la disciplina che studia la geometria delle

superficie curve *(Disquisitiones circa superficies curvas,* 1828*)*. Fu lui ad introdurre quella grandezza oggi nota come **curvatura di Gauss**.
E fu sempre lui ad ideare le cosiddette **applicazioni conformi**, ossia trasformazioni tra superficie che conservano particolari proprietà locali (*"le superficie sono simili nelle loro parti più piccole").* Ma a Gauss geometra si deve anche un'invenzione di carattere pratico: l'***eliotropo***, un nuovo strumento di misura. A questa si aggiungono studi orientati alle applicazioni in **cartografia**.
Negli stessi anni in cui si occupava degli aspetti pratici della geometria, Gauss si convinceva sempre più che la geometria euclidea non era la sola geometria possibile. Nel 1817 egli era ormai sicuro che l'assioma delle parallele era indipendente dagli altri **postulati euclidei**. Comunicò le sue idee ad alcuni intimi amici, tra cui **Wolfgang Bolyai**, padre di **János Bolyai**. Questi vengono ricordati insieme a Gauss ed a **Lobachevsky** come fondatori della **geometria non euclidea**.

5 La fisica
Nel 1831 iniziò la collaborazione fra Gauss ed il giovane fisico **Wilhelm Weber**. Insieme i due scienziati si occuparono di una branca della fisica che allora stava appena vedendo la luce: ***l'elettromagnetismo***. Solo da pochi anni gli studiosi avevano cominciato a lavorare intorno all'ipotesi che l'elettricità ed il magnetismo fossero fenomeni strettamente correlati. Anche quest'attività ebbe un significativo risvolto pratico: Gauss e Weber realizzarono il primo **telegrafo elettromagnetico** (1833), per collegare l'istituto di fisica con l'osservatorio. Gauss si rese conto della storica importanza dell'evento, dicendo che ormai la creazione di una rete mondiale di comunicazioni non era che un problema tecnico ed economico. Sul fronte della teoria, Gauss e Weber approfondirono lo studio di quelle forze, come quella gravitazionale (vedi la **legge di Newton**) e quelle elettromagnetiche, la cui intensità in un dato punto è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dall'oggetto che la genera (**teoria del potenziale**).
Spetta infine a Gauss e Weber il merito di aver determinato con precisione la posizione dei poli magnetici terrestri: i dati vennero loro forniti da numerosi centri di rilevamento sparsi in tutto il mondo, ai quali aveva dato vita il grande esploratore tedesco **Alexander von Humboldt**, al ritorno da una spedizione in Sud America. L'esattezza del calcolo del polo sud magnetico venne confermata alcuni anni più tardi da una nave americana giunta nei pressi dell'Antartide.

Gauss rivolse la sua attenzione anche verso altri settori della fisica, come la **meccanica** e l'**ottica**.
La città di Göttingen ha voluto dedicare ai due scienziati un **monumento**, che li ritrae insieme.
Ed in Antartide sorge un **monte**, scoperto agli inizi del Novecento, che porta il nome di Gauss.

Curiosità

Curiosità su Gauss

- Gauss adottò come emblema un albero con pochi frutti, accompagnato dal motto *"Pauca sed matura"* (pochi ma maturi). Con ciò intendeva riferirsi alle sue pubblicazioni matematiche: *"Ammirando con entusiasmo giovanile il perfetto concatenamento delle dimostrazioni sintetiche nelle quali* ***Archimede*** *e* ***Newton*** *avevano costretto le loro ispirazioni, Gauss aveva risolto di seguire il loro grande esempio e di non lasciar dietro di sé che lavori ben finiti e rigorosamente perfetti, ai quali non si potesse aggiungere né togliere niente senza sfigurare l'intera opera: secondo la sua opinione questa deve sostenersi da sé, completa, semplice e convincente, senza che resti in essa nessuna traccia del lavoro compiuto per costruirla; una cattedrale non è una cattedrale, diceva, finché l'ultima impalcatura non sia scomparsa."*
  (cit. da E. T. Bell, *I grandi matematici,* Sansoni, Firenze, 1950, trad. di D. Aduni, pag. 234)

- Pare che Gauss non amasse molto l'insegnamento agli studenti universitari, che, per la maggior parte, stimava assai poco. In una lettera del 1810 indirizzata al suo amico **Bessel**, astronomo e matematico, Gauss così scriveva*: "Quest'inverno, faccio due serie di corsi a tre studenti, dei quali uno ha una preparazione mediocre, l'altro più che mediocre, e il terzo manca totalmente sia di preparazione che di capacità. Questi sono i mesi morti della professione del matematico."* (ibidem, pagg.249-250)

- A Gauss viene attribuita la seguente frase: *"Sono soltanto tre i matematici che hanno fatto epoca: Archimede, Newton e* ***Eisenstein****."* C'è da dire che il terzo dei matematici citati morì prima di aver compiuto trent'anni.

- Un giorno il grande esploratore tedesco Alexander von Humboldt, amico di Gauss, chiese al grande matematico francese **Laplace** quale fosse, a suo parere, il più grande matematico della Germania. Con sua grande sorpresa, la risposta fu: "**Pfaff**." "E di Gauss che ne fate?" replicò von Humboldt. "Oh", disse Laplace, "Gauss è il più grande matematico del mondo."

- Anche Gauss, come innumerevoli matematici di tutto il mondo, si cimentò invano con l' **Ultimo Teorema di Fermat**. In realtà non vi si dedicò che per pochi giorni: poi abbandonò, riconoscendo l'insormontabile difficoltà del problema.

- Il ***gauss*** è l'unità di misura dell'induzione magnetica nel vecchio sistema cgs.

- L'effigie di Gauss compare sulle banconote da 10 marchi tedeschi circolanti in Germania fino all'introduzione della moneta unica europea.



La grande scoperta di un giovane matematico

Fece grande sensazione, nel mondo accademico, l'annuncio che il 1° giugno 1796 apparve sul giornale "*Intelligenzblatt der Allgemeinen Literaturzeitung*" di Jena, Germania:

Nuova scoperta.

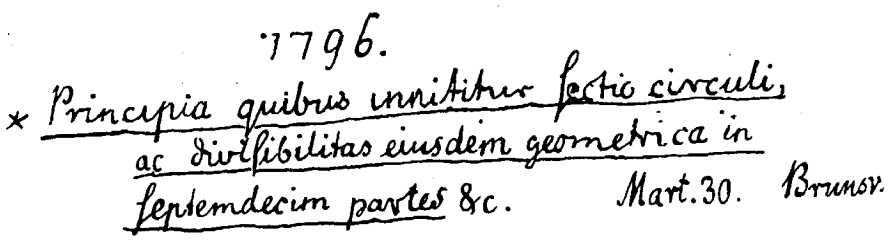
È noto ad ogni principiante della geometria che diversi poligoni ordinati (leggi: regolari), *ossia il* ***triangolo***, *il* ***pentagono***, *il* ***pentadecagono***, *e quelli ottenuti dagli stessi mediante il ripetuto raddoppiamento del numero dei lati, possono essere costruiti geometricamente. Ciò era già noto ai tempi di* ***Euclide***, *e pare che da allora ci si sia convinti che il campo della geometria elementare non si estenda ulteriormente.... A maggior ragione ritengo che meriti attenzione la scoperta che, oltre a quei poligoni ordinati, un gran numero di altri, ad esempio il poligono con 17 lati, ammettono una costruzione geometrica.*

C. F. Gauss, *di Braunschweig*
studente di matematica a Göttingen

Il prof. E.A.W. Zimmermann aggiunge:

È degno di nota il fatto che il Sig. Gauss si trova nel suo diciottesimo anno di età e si è dedicato, qui a Braunschweig, con uguale successo sia alla filosofia ed alla letteratura classica sia alla matematica superiore. 18 aprile 1796.

Poiché Gauss ci ha lasciato un diario, conosciamo con esattezza il momento ed il luogo della scoperta: il 30 marzo 1796, alle 10 del mattino, a letto, un mese prima del suo diciannovesimo compleanno.


1796.
* Principia quibus innititur sectio circuli,
ac divisibilitas eiusdem geometrica in
septemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

L'annuncio ufficiale fu preceduto dal seguente curioso episodio: "*Un*

giorno Gauss si avvicinò ad A. G. Kästner, che era suo professore all'Università di Göttingen, con la dimostrazione della costruibilità del poligono regolare a 17 lati. Kästner era incredulo e cercò di sbarazzarsi di Gauss, proprio come i professori universitari di oggi si sbarazzano dei ***trisettori dell'angolo****. Piuttosto che perdere del tempo ad esaminare la dimostrazione di Gauss per trovarvi il supposto errore, Kästner gli disse che la costruzione era scarsamente importante perché erano note delle* ***costruzioni pratiche****. Naturalmente, Kästner sapeva che l'esistenza di costruzioni pratiche o approssimate era del tutto irrilevante per il problema teorico. Per interessare Kästner alla sua dimostrazione Gauss osservò allora che aveva risolto un'equazione di diciassettesimo grado. Kästner replicò che la soluzione era impossibile, ma Gauss aggiunse che aveva ridotto il problema alla soluzione di un'equazione di grado inferiore.*
- Oh bella, - lo schernì Kästner, - questo l'ho già fatto io! - Più tardi Gauss ripagò della stessa moneta Kästner, che si vantava anche di essere un poeta, lodandolo come il miglior poeta fra tutti i matematici e il miglior matematico fra tutti i poeti." (cit. da M. Kline, *Storia del Pensiero Matematico*, Volume II, Einaudi 1996).

La trattazione completa del risultato fu pubblicata solo alcuni anni dopo, nell'opera ***Disquisitiones arithmeticae***" (1801).
Il diario di Gauss rimase nascosto fra le carte di famiglia fino al 1898, quando fu ritrovato a Hamlin, in casa di un suo nipote. Tre anni dopo il matematico **Felix Klein** ne curò la pubblicazione in occasione del 150° anniversario della fondazione della Società Scientifica di Göttingen. L'originale venne depositato presso gli archivi gaussiani di Braunschweig e Göttingen.

Gauss rimase per tutta la vita estremamente fiero della sua scoperta, al punto di chiedere che sulla sua lapide venisse inciso un poligono regolare con 17 lati. Al momento di realizzare l'opera, però, lo scalpellino si rifiutò, in quanto riteneva che la figura non sarebbe risultata distinguibile da un cerchio. Il desiderio di Gauss fu esaudito qualche tempo dopo: su di un monumento a lui dedicato dalla città di Braunschweig nel 1880 appare effettivamente inciso il famoso poligono.

Costruibilità dei poligoni regolari

La legge di reciprocità dei residui quadratici

Dati due numeri naturali p e q, si dice che p è un ***residuo quadratico*** di q se esiste un quadrato perfetto n^2 tale che n^2-p sia divisibile per q. **Legendre**, nel 1808, introdusse la seguente notazione. Se q è un numero primo, si pone

$$(p/q) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \text{ è un residuo quadratico di } q \\ -1 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Se p è divisibile per q si pone, per convenzione, $(p/q) = 0$.

La ***legge di reciprocità dei residui quadratici***, espressa in formule, afferma che, se p e q sono **numeri primi** dispari distinti, allora

$$(p/q)\,(q/p) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

In altri termini, quando l'esponente è pari, p è residuo quadratico di q se e solo se q è residuo quadratico di p. Se invece l'esponente è dispari, allora solo uno tra p e q è residuo quadratico dell'altro.

Esempio: Se $p=3$ e $q=5$, allora l'esponente è 2. Nessuno tra 3 e 5 è residuo quadratico dell'altro. Invece $16 - 3 = 13$: quindi $p=3$ e $q=13$ sono l'uno residuo quadratico dell'altro. In effetti l'esponente in questo caso è 6.

Il primo a intuire la legge di reciprocità dei residui quadratici fu **Eulero**: **Gauss** e **Legendre** furono i primi a darne una dimostrazione.

Il teorema fondamentale dell'algebra

Questo teorema fu provato per la prima volta da **Gauss** nel 1799, nella sua tesi di dottorato, presentata in quell'anno presso l'Università di Helmstedt, Germania. Successivamente egli trovò altre tre diverse dimostrazioni dello stesso risultato. Quest'ultimo si fonda sul concetto di **numero complesso**. In moderno linguaggio matematico, l'enunciato è il seguente:

Un'equazione algebrica di grado n>0 a coefficienti complessi ha n radici complesse, ogni radice contata secondo la propria molteplicità

In particolare ***l'equazione binomia***

$$X^n = 1$$

ha *n* radici, le ***radici n-esime dell'unità***.

Osservazione Contrariamente a quanto credeva **Eulero**, un'equazione algebrica a coefficienti tutti reali spesso non ha nessuna radice reale. Infatti:

- Un'equazione di secondo grado a discriminante negativo ha due radici non reali (v. numeri complessi);
- L'equazione

$$X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4 = 0,$$

ha quattro radici non reali (non facili da determinare). Questo esempio risale a **Nikolaus Bernoulli** che lo produsse proprio per smentire Eulero.

È però vero che:

Ogni equazione algebrica a coefficienti reali di grado dispari ha sempre almeno una radice reale.

Esistono formule di risoluzione per

- le equazioni binomie $X^n - a=0$ di ogni grado (**formule di De Moivre**);
- le equazioni di secondo grado (**formule di Newton**);
- le equazioni di terzo grado (**formule di Tartaglia**);
- le equazioni di quarto grado (**formule di Ferrari**).

Non esistono invece formule generali per le equazioni di grado superiore al quarto, come dimostrato da **Abel** e **Galois**.

L'esistenza di radici per le equazioni algebriche è legata alla decomposizione in fattori dei polinomi. Vale infatti il seguente teorema di **Ruffini**:

Dato un polinomio p(X), allora α è una radice dell'equazione algebrica p(X)=0 se e solo se il polinomio X -α è un divisore di p(X).

Dal teorema fondamentale dell'algebra e dal teorema di Ruffini si deduce facilmente che ogni polinomio di grado $n>0$ a coefficienti complessi è decomponibile nel prodotto di n polinomi di grado 1 a coefficienti complessi.

La regola di Newton

DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

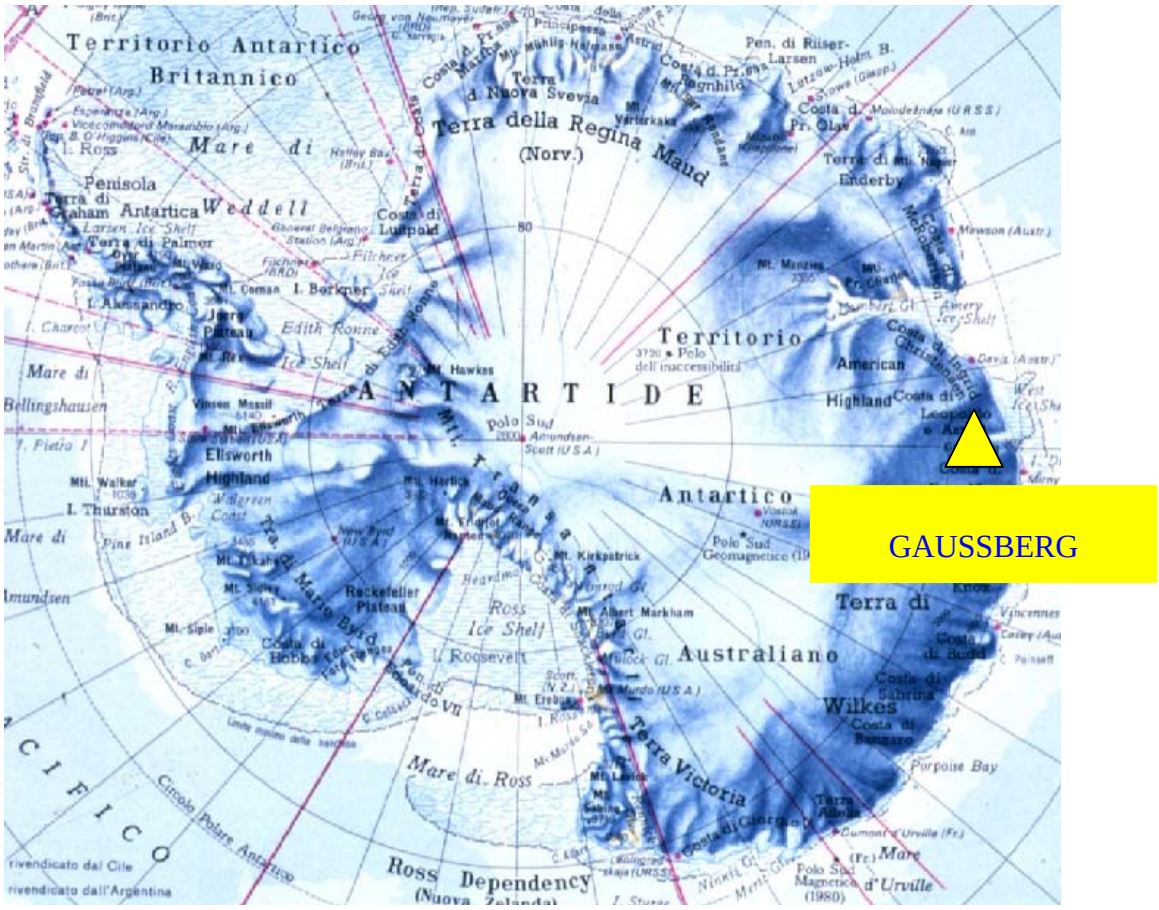
D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

Il Gaussberg




FRIEDRICH GAUS
UND
WILHELM WEBER

I numeri amicabili e perfetti

Definizione Due numeri interi positivi *n*, *m* si dicono ***amicabili*** se la somma dei divisori propri di *n* è uguale a *m* e viceversa.

Pare che sia stato **Pitagora** a scoprire l'esistenza di simili coppie di numeri: fu probabilmente lui il primo ad accorgersi che *220* e *284* possiedono questa singolare proprietà. In effetti: i divisori propri di *220* sono *1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110*. Sommate questi numeri e otterrete *284*. D'altra parte i divisori propri di *284* sono *1, 2, 4, 71, 142,* la cui somma è proprio *220*.

I numeri *220* e *284* sono stati per molti secoli gli unici amicabili conosciuti: fin dall'antichità furono oggetto di superstizione. Si credeva che due amuleti sui quali fossero incisi questi numeri avrebbero assicurato eterna amicizia tra i loro portatori.

Per avere una nuova coppia di numeri amicabili si dovette aspettare fino al secolo XVII, quando **Fermat** annunciò che anche *17.296* e *18.416* lo sono. Due anni dopo un altro grande matematico francese, **Cartesio**, trovò in *9.363.584* e *9.437.056* una terza coppia di numeri amicabili. Pare che comunque entrambe le coppie fossero già state trovate, molto tempo prima, dai **matematici arabi** **Al-Fārisī** e **Al-Yazdi**. Nel '700 il matematico svizzero **Eulero** allungò la lista con 60 nuovi esempi. Ma a tutti questi grandi geni, inspiegabilmente, sfuggì una coppia di numeri amicabili di 4 cifre (*1184* e *1210*), che fu invece scoperta, nel 1866, da **Nicolò Paganini**, un ragazzino di 16 anni, omonimo del grande musicista. Oggi si conoscono alcune centinaia di coppie di numeri amicabili.

In realtà il principale merito spetta forse al matematico arabo **Tâbit ibn Qorra**, che nel secolo IX pubblicò una semplice regola per produrre coppie di numeri amicabili:

Se, per un certo intero $k>1$, i tre numeri $p=3\cdot 2^k - 1$, $q=3\cdot 2^{k-1} - 1$ e $r=9\cdot 2^{2k-1} - 1$ sono primi, allora i numeri $N = 2^k pq$ e $M=2^k r$ sono amicabili.

Eulero ne trovò una generalizzazione:

Se, per interi positivi n, m, i numeri $p=(2^{n-m}+1)\cdot 2^n - 1$, $q=(2^{n-m}+1)\cdot 2^m - 1$ e $r=(2^{n-m}+1)^2\cdot 2^{n+m} - 1$ sono primi, allora i numeri $N= 2^n pq$ e $M=2^n r$ sono amicabili.

La regola di Tâbit ibn Qorra si ottiene da quest'ultima ponendo $k=n=m+1$.

Introduciamo ora un altro tipo di numeri, che, come vedremo, è legato alla nozione di numeri amicabili. La definizione seguente è tratta dal Libro VII degli ***Elementi*** di **Euclide**. La traduciamo in linguaggio moderno.

Definizione *Un numero* ***perfetto*** *è quello che è uguale alla somma dei suoi divisori propri.*

In altri termini, un numero perfetto è un numero amicabile con se stesso. L'ultima proposizione del Libro IX degli *Elementi* di Euclide fornisce un criterio per trovare numeri perfetti pari. Il risultato è stato perfezionato molti secoli più tardi da Eulero:

Il numero n è pari e perfetto se e solo se si può scrivere nella forma:

$$n = (2^k-1) \cdot 2^{k-1},$$

per qualche k>1, e per questo valore di k il numero 2^k-1 è primo.

In questo enunciato compare implicitamente la nozione, più moderna, di **primo di Mersenne**. Si noti, inoltre, che ogni numero perfetto pari è un **numero triangolare**.

Il teorema che abbiamo appena enunciato fornisce tutti i numeri perfetti pari. In effetti possiamo facilmente utilizzarlo per ricavare i valori dei più piccoli numeri perfetti pari: *6* (*k=1*), *28* (*k=2*), *496* (*k=3*). Basta passare in rassegna i possibili valori di k e prendere in considerazione solo quelli per i quali il numero 2^k-1 è primo.

E i numeri perfetti dispari? La verità è che nessuno, finora, sa se ne esistano.

La perfezione del sei secondo Vitruvio
La perfezione del sei secondo Firenzuola

Agnolo Firenzuola
Ragionamenti (1523-1525)
Giornata I, Introduzione

Sei persone, tre uomini e tre donne, si sono riuniti nella campagna presso Firenze. Tra di essi v'è una nobildonna romana, che gli altri chiamano *la Reina.* Questa suggerisce al gruppo di ritrovarsi per sei giorni consecutivi nello stesso luogo, e di narrare ognuno una novella. L'accostamento al *Decameron* del Boccaccio è esplicito. È la Reina stessa ad aprire la serie delle narrazioni, spiegando i motivi della sua predilezione per il numero sei.

"[…] perché voi dovete sapere che di agosto, dalli Latini chiamato «sestile» percioché, come sapete, e' gli è in ordine il sesto mese, ai ***sei*** *dì io rinacqui e vissi da vero, essendo di dicembre, pure ai sei dì, venuta al peregrinaggio di questo mondo. E come il rinascere mi avenisse e come io vivesse da vero, domattina piacendo a Dio spero farvi intendere più apertamente. Le quali natività, sappiendo io di quanto commodo sia capace questo numero e come sia pieno di religione, io me le ho sempre recate in filicissimo augurio; e sempre sono stata disiderosa partir tutte le mie faccende per sei -.*
A cui Fioretta:
Che capacità o di commodo o di religione ha in sé questo numero, che voi per gran ventura vi arrechiate lo esser nata o rinata, per meglio dire, e nel sesto mese e nel sesto giorno? -
A cui la Reina:
Poi che tu ti mostri, Fioretta, disiderosa di intendere la sua virtù, io te la narrerò più succintamente che io potrò, acciò che questi altri, che forse meglio la sanno di me, ne piglino manco fastidio che sia possibile. Dicono adunque i matematici che quel numero è perfetto le parti aliquote del quale (siami lecito usare or questo vocabolo tra voi Toscani, ben che duro, poscia che altro più molle per or non mi soccorre) le parti aliquote, dico, del quale, accozate insieme, rilevano detto numero. Addomandano questi medesimi le parte aliquote quelle che, alquante volte prese, rilevano tutto il numero del quale si ragiona; come si può vedere in questo di ***sei****, del quale le parti aliquote sono uno, dui e tre; metti questi tre numeri, uno, dui e tre insieme e vedrai che e' faran sei; imperciò che uno e dui fan tre, e tre poi fa sei; e che questi tre numeri, uno, dui e tre siano parti aliquote di sei ve lo dimostra in prima uno, il quale preso sei volte fa sei; dui preso tre volte fa sei; e tre dui volte preso fa sei. Vedete che ciascuno di questi numeri alquante volte preso e multiplicato fa quel numero del quale egli è parte aliquota. Quattro*

non è parte aliquota di sei, perciò che pigliatelo quante volte voi volete e multiplicatelo per che verso voi volete e' farà sempre più o manco di sei; preso una volta e' fa quattro, che è men di sei; preso due e' fa otto, che è più di sei. E acciò che voi possiate vedere più chiaramente la perfezzione di sei, egli è necessario mostrarvi la imperfezzione di otto, di cui le parti aliquote sono uno, dui e quattro, le quali, accozate insieme, fanno sette, che secondo costoro è numero difettivo o vero diminuito; dove che, se e' rilevasse più di otto, e' lo chiamerebbono imperfetto abbondante. E che uno sia parte aliquota di otto, voi lo potete vedere per questo: che preso otto volte e' rileva otto; e il simile è di dui e di quattro, de' quali l'uno preso quattro volte fa otto, e l'altro preso due volte fa pur otto. Tre non è parte aliquota di otto, perciò che preso otto volte fa ventiquattro; preso dui volte fa sei; preso tre fa nove; e pigliatelo quante volte voi volete, e' non farà mai otto. Or conchiudendo, adunche, diciamo che essendo quel numero perfetto di chi le parti aliquote rilevano il preso numero, e rilevando le parti aliquote di ***sei*** *il detto numero, ne seguita necessariamente che egli sia perfetto. Della cui perfezzione da dieci in giù niuno altro se ne ritrova capace, avenga imperò che da dieci in su se ne ritrovino molti pochi, de' quali il primo è ventotto. Poscia che noi aviamo veduto la sua perfezzione, io voglio che discorriamo brevemente la sua fertilità, la quale è grandissima; e udite come. Avenga che il nono mese dia più frequentemente alle donne gravide il tempo di partorire, nientedimeno la natura, adescata dalla dolceza di questo numero, il concede nel settimo alcuna volta. Ma voi mi direte: «Nel settimo mese che ci ha da fare il sei più che il sette?». Ecco che brevemente ve lo dimostro. Pigliate dui di quei numeri che i medesimi matematici chiamano cubi (noi altri Toscani, che non ne avemo proprio vocabolo, potremoli chiamar quadrati); e pigliate il maschio e la femmina, i primi che si ritruovino, (maschio secondo loro è il dispari e la femina è il pari: sarà adunque il maschio ventisette e otto la femina, imperciò che questi sono i primi cubi che si ritruovino); cognungetegli insieme e vedrete che di questo cognungimento ne nascerà trentacinque, perché, come ognun di voi sa, XXVII e VIII fan XXXV; multiplicate or quel trentacinque per* ***sei*** *e troverrete che e' rileverà dugento dieci; e dugento dieci dì fanno a punto il numero compito di sette mesi, il qual numero, come si è detto, è il primo tempo che aiuti alle pregna<n>ti partorire vivacemente. Dalla cui perfezzione tratto Iddio, come io mi credo, creò questo mondo così maraviglioso in sei dì e in sei etadi lo divise, come si vede che egli fece molte altre cose, le quali per brevità io lascio di raccontare. Per le quali tutte ragioni voi potete considerare in quanto buono augurio aviamo a pigliare lo avere a camminare con sei piedi ogni nostra faccenda, e se io ho ragione dovermene rallegrare -.*

Folchetto il Corfinio, che lo un de' tre giovani era, come quello che naturalmente era molto sollazevole, poi che la Reina taceva, voltosi verso le donne sogghignando disse: - Deh, come ho io fatto bene a non ci menar la mia moglie, come volevate voi altre che io facesse; ché noi saremmo stati sette e alle sue cagioni averemmo perduto così fatta ventura; io sapeva ben, io, ch'ella era così strana e così ritrosa ch'ella ci arebbe guasto ogni nostro disegno.
Ritroso e strano sei stato tu - disse allotta Bianca, che la cognata di Celso era e sempre si dilettava di mordere altrui con gentil dente. - Perché non lasciavi tu venir lei e tu te ne restavi a casa, che così averesti compiaciuto a noi, che la desideravamo, e non aresti guasto il numero di ***sei****?*
Fussinci pur venuti tramendoi - soggiunse Selvaggio il Plozio, che il terzo giovane era, - che e' non ci averebbeno fatto sconcio alcuno, percioché io so bene che alla nostra Reina non sarebbe mancato che dire sopra il numero di sette. Ma a me parrebbe che, lasciando il sette e l'otto a' mercatanti, anzi che e' si facesse più tardi noi ci riducessimo verso il colle; però che il sole, come vedete, ha già voltati i suoi raggi agli uomini di quell'altro orizzonte -.
Per le cui parole tutti, sanza altro dire, impiè levatisi preseno il cammino verso casa; dove arrivati, perciò che l'ora era tarda e la cena era in punto, data l'acqua alle mani si posero a mangiare."

I numeri perfetti

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

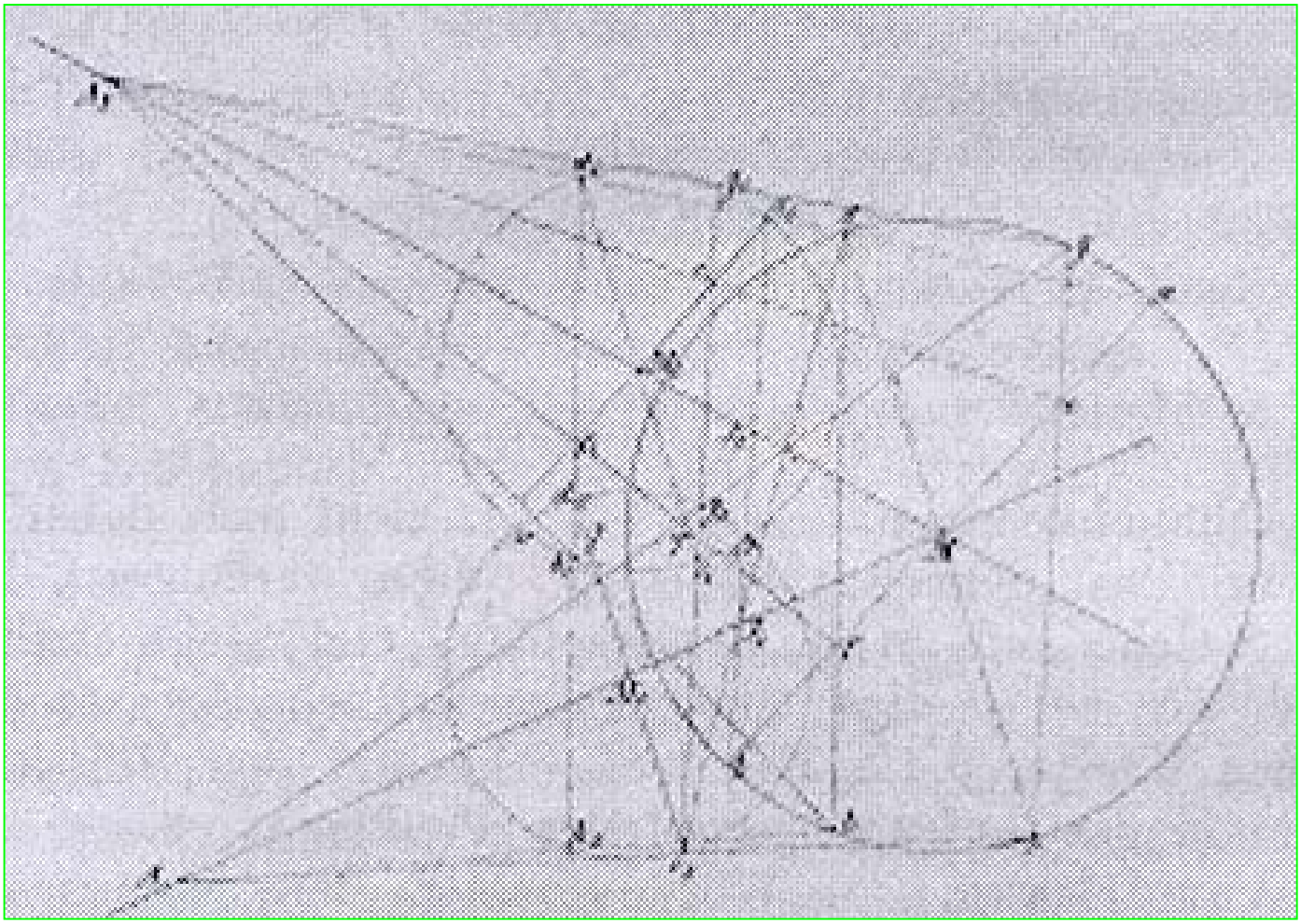
Jacob Steiner
Die geometrischen Constructionen ausgefuehrt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises als Lehrgegenstand auf hoeheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung
Leipzig, 1895

(*Le costruzioni geometriche realizzate mediante la linea retta ed un cerchio fisso come oggetto di insegnamento negli istituti di istruzione superiore e per l'utilizzo pratico*
Lipsia, 1895)

Il libro è una raccolta di esercizi svolti. Nella parte centrale dell'opera vengono presentate le costruzioni fondamentali della **geometria euclidea**, tutte realizzate non, come si impara oggi nelle scuole, con riga e compasso, ma col solo ausilio della riga e di un cerchio di riferimento già presente sul foglio (il cerchio di centro M e passante per a della **figura**). Il disegno rappresenta la soluzione del **Problema Ottavo** "*Trovare i reciproci punti di intersezione di due cerchi assegnati*" nel caso in cui dei due cerchi sono dati rispettivamente soltanto i centri M_1 e M_2 ed i punti di passaggio a_1 ed a_2. Tante rette per risolvere il problema senza disegnare i due cerchi.

La "*Geometria del compasso*" di Mascheroni

La superficie romana di Steiner



Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)



A questo matematico russo risale la prima pubblicazione di **Geometria non Euclidea**, apparsa nel 1829. Il suo lavoro però ebbe scarsa risonanza perché scritto in russo e severamente criticato dagli stessi matematici russi. Egli è universalmente riconosciuto, insieme a **Bolyai** e **Gauss**, come uno dei fondatori della **Geometria iperbolica**.
Nel 1840 pubblicò un trattato in tedesco che ebbe maggior fortuna, giungendo all'attenzione di Gauss. Egli chiamò la sua geometria dapprima *"geometria immaginaria"* e più tardi "*pangeometria".*
Non fu apprezzato durante la sua vita; nel 1846 fu cacciato dall'Università di Kazan nonostante venti anni di lavoro come insegnante. Nell'ultimo anno della sua vita, divenuto ormai cieco, dovette dettare il suo ultimo libro.
Fu chiamato da **Eric Temple Bell** *"il grande emancipatore"* ed apertamente ricusò la dottrina **Kantiana** dello spazio.
Nel 1835, aveva scritto: *"La inutilità degli sforzi fatti fin dal tempo di **Euclide** ... ha fatto sorgere in me il sospetto che la verità non fosse contenuta negli stessi dati, che per stabilirla fosse necessario l'aiuto di esperimenti, per esempio, di osservazioni astronomiche, come accade per altre leggi della natura."*

Janos Bolyai (1802-1860)



Il nome di Janos Bolyai è strettamente legato, insieme con quelli di **Gauss** e **Lobachevsky**, alla storia delle **Geometrie non Euclidee**.
Suo padre Wolfgang Farkas, anch'egli matematico, era stato studente in Göttingen insieme a Gauss, di cui era divenuto molto amico e quest'amicizia si era conservata anche dopo il suo ritorno in Ungheria.
A soli 13 anni il giovane Janos conosceva perfettamente il calcolo differenziale ed integrale, era una giovane promessa, tanto che il padre chiese a Gauss di prenderlo con sé come apprendista matematico, ma Gauss non rispose a tale richiesta.
Quando annunciò privatamente al padre le sue scoperte sulla Geometria non Euclidea, questi gli consigliò di pubblicarle al più presto per due motivi: primo, perché "*le idee passano facilmente da una persona ad un'altra che potrebbe pubblicarle prima*", secondo, perché ***"sembra vero che molte cose hanno un'epoca in cui vengono scoperte contemporaneamente in diversi posti, esattamente come le viole appaiono ovunque in primavera"***.
Janos Bolyai pubblicò le sue scoperte in un'appendice di 26 pagine ad un libro di suo padre, il "**Tentamen**", nel **1831**. Una copia del libro fu inviata a Gauss, la cui lettera di risposta deluse il giovane Janos.
Gauss, infatti, scriveva:
Se io comincio con l'affermare che non posso valutare questo lavoro, naturalmente sarai stupito per un attimo: ma io non posso fare diversamente poiché valutarlo significherebbe valutare me stesso; perché l'intero contenuto del lavoro, i risultati ottenuti da tuo figlio coincidono quasi esattamente con le mie stesse meditazioni che hanno occupato la mia mente per 30-35 anni. In questo senso sono estremamente stupito.
Riguardo al mio lavoro, di cui finora è stato pubblicato veramente poco, la mia intenzione è di non permettere che divenga noto durante la mia vita. Moltissime persone non hanno la capacità di capire le nostre conclusioni ed io ho incontrato poche persone che hanno ascoltato con particolare interesse ciò che ho loro comunicato. Per capire queste cose, uno dovrebbe innanzitutto avere una acuta percezione di cosa è necessario, e su questo punto la maggioranza è piuttosto confusa.

D'altra parte, è mia intenzione scrivere tutto, in modo che almeno tutto ciò non muoia alla fine con me.

La delusione del giovane Bolyai fu grande, e benché fosse di grande temperamento e provetto spadaccino, fu vittima di una profonda depressione e non pubblicò più le sue ricerche.
Una traduzione delle sue incredibili 26 pagine si trova in *Bonola, Non Euclidean Geometry, 1955*.

La scienza assoluta dello spazio

Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web

Janos Bolyai

La Science absolue de l'espace
indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiôme XI
par Jean Bolyai
Capitaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne.
Gauthier-Villars, Paris 1868

Il testo è preceduto da notizie biografiche su **Janos Bolyai** e su suo padre **Wolfgang Farkas**, seguito da un commento dello stesso Farkas, a sua volta matematico.
È diviso in 43 paragrafi e tratta della Geometria ellittica piana e spaziale, partendo dalla negazione del **postulato euclideo delle parallele**. Questo postulato, oggi comunemente citato come **V assioma**, appare riportato da **Tartaglia** nell'***Euclide Megarense*** come ***"quinta petitione"*** e nell'***Euclide restituto*** di Vitale Giordano come **assioma XI**.
Nel primo paragrafo, Bolyai espone tale assioma e prova che la somma degli angoli interni di un triangolo non può essere maggiore di 180°.
Successivamente, indica con S il sistema assiomatico derivante dai primi dieci assiomi e con Σ il comune sistema assiomatico euclideo. Fino al paragrafo 14, procede ignorando la distinzione tra S e Σ, pur utilizzando il concetto di parallelismo, ma senza usare il postulato delle parallele. Poi, appoggiandosi all'autorevolezza di Lobachevsky, prosegue, separando i risultati ottenibili in S e quelli ottenibili in Σ, e sviluppando su un'ipotetica superficie una teoria geometrica fondata sul sistema S. Procede così fino al paragrafo 32, in cui finalmente espone il suo concetto di **Geometria Assoluta**: *Toutes les expressions fondées sur l'hypothèse de la réalité du système S seront absolutement vraies, lors même qu'on ignore complètement si c'est le système Σ qui est ou non le système de la réalité.*
Nel successivo **paragrafo 33** egli espone lo scopo della teoria elaborata, iniziando con l'affermare che non si può decidere quale dei due sistemi, S o Σ, abbia luogo nella realtà.

LA SCIENZA ASSOLUTA

§ 33.

Rimane ancora da esporre (come abbiamo annunciato al § 32) quale sia lo scopo di questa teoria.

I. *È il sistema* ***Σ*** *o il sistema* ***S*** *ad aver luogo nella realtà? Non sappiamo deciderlo.*

II. *Tutte le ipotesi tratte dalla falsità dell'Assioma XI (prendendo queste parole sempre nel significato del § 32) sono assolutamente vere, e, in questo senso, non si appoggiano su alcuna ipotesi. Esiste dunque una Trigonometria piana a priori, nella quale il solo sistema vero resta ignoto, e dove si ignorano soltanto le grandezze assolute delle espressioni, ma dove un solo caso noto fisserebbe evidentemente tutto il sistema. La* ***Trigonometria sferica****, al contrario, è stabilita in modo assoluto al § 26.*
Si ha, sulla superficie ***F****, una geometria interamente analoga alla geometria piana nel sistema* ***Σ****.*

III. *Se fosse stabilito che è il sistema* ***Σ*** *ad aver luogo, non resterebbe più nulla di ignoto su questo punto. Ma se fosse stabilito che il sistema* ***Σ*** *non è vero, allora (§ 31), dati, per esempio, in maniera concreta, i lati* ***x*** *e* ***y*** *dell'angolo rettilineo compreso fra di essi, è chiaro che sarebbe impossibile in sé e per sé risolvere il triangolo assolutamente, cioè determinare a priori gli altri angoli ed i rapporti tra il terzo lato e i due lati noti, a meno che non si determinino le quantità* ***X*** *e* ***Y****. Pertanto bisognerebbe avere sotto forma concreta qualche lunghezza a di cui l'A sia noto. Allora i sarebbe l'unità naturale di lunghezza (come e è la base dei logaritmi naturali). Se l'esistenza di questa quantità i è data per riconosciuta, vedremo come si possa costruirla, almeno con grande approssimazione, ai fini pratici.*

IV. *Nel significato suesposto (I e II), si potrà evidentemente applicare ovunque il metodo analitico moderno (se utile, quando lo si applica nei limiti opportuni).*

V. *Infine, il lettore non si risentirà vedendo che, nel caso in cui sia il sistema S, e non il sistema Σ, ad aver realmente luogo, si può* ***costruire una figura rettilinea uguale ad un cerchio.***

§ 33.

Il reste encore à exposer (comme nous l'avons annoncé au § 32) quel est le but de cette théorie.

I. Est-ce le système Σ ou le système *S* qui a lieu dans la réalité? C'est ce qu'on ne saurait décider.

II. Toutes les hypothèses tirées de la *fausseté* de l'Axiôme XI (en prenant toujours ces mots dans le sens du § 32) sont *absolument vraies*, et en ce sens, *ne s'appuient sur aucune hypothèse*. Il y a donc *une Trigonométrie plane* a priori, *dans laquelle le système seul vrai reste inconnu*, et où l'on ignore seulement les grandeurs *absolues* des expressions, mais où un *seul* cas connu fixerait évidemment tout le système. La Trigonométrie sphérique, au contraire, est établie d'une manière absolue au § 26.

On a, sur la surface *F*, une géométrie entièrement analogue à la géométrie plane dans le système Σ.

III. S'il était *établi* que c'est le système Σ qui a lieu, il ne resterait plus rien d'inconnu sur ce point. Mais s'il était *établi* que le système Σ *n'est pas vrai*, alors (§ 31), *étant donnés*, par exemple, *d'une manière concrète*, les côtés x, y et l'angle rectiligne qu'ils comprennent, il est clair qu'il serait impossible en soi et par soi de résoudre absolument le triangle, c'est-à-dire de déterminer *a priori* les autres angles et les rapports du troisième côté aux deux côtés donnés, à moins que l'on ne déterminât les quantités X, Y. Pour cela, il faudrait que l'on eût *sous forme concrète* quelque longueur a dont le A fût connu. Alors i serait l'*unité naturelle de longueur* (comme e est la base des logarithmes *naturels*). Si l'existence de cette quantité i est supposée reconnue, nous verrons comment on peut la construire, au moins avec une grande approximation, pour la pratique.

IV. Dans le sens expliqué (I et II), on pourra évidemment appliquer partout la méthode analytique moderne (si utile, lorsqu'on l'emploie dans des limites convenables).

V. Enfin, le lecteur ne sera pas fâché de voir que, dans le cas où c'est le système *S*, et non le système Σ, qui a réellement lieu, on peut construire une figure rectiligne égale à un cercle.

Traduzione

La Geometria Riemanniana

Riprendendo le considerazioni fatte per il caso di una creatura *2*-dimensionale (**La curvatura di Gauss**), **Riemann** considerò che noi ci troviamo in una situazione del tutto analoga a quella di una tale creatura, vivendo in un universo *3*-dimensionale in cui un punto è caratterizzato da tre coordinate *(x, y, z)* ed il quadrato di uno spostamento infinitesimo nella distanza *ds* è dato da una formula che coinvolge i tre infinitesimi *dx, dy, dz:*

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{22}\,dy^2 + g_{33}\,dz^2 + 2g_{12}\,dx\,dy + 2g_{13}\,dx\,dz + 2g_{23}\,dy\,dz,$$

dove le funzioni $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{12}, g_{13}, g_{23}$ dipendono dalle coordinate del punto.
Usando questa formula, **Riemann** fu in grado di definire un "**tensore di curvatura**" analogo alla curvatura di **Gauss** per una superficie, ma più complicato: la curvatura di **Gauss** coinvolge una sola funzione, la curvatura di **Riemann** coinvolge sei funzioni. **Riemann** scoprì questa curvatura quasi accidentalmente nelle sue ricerche sulla trasmissione del calore.
In realtà, **Riemann** andò ben oltre la situazione appena descritta; egli sviluppò, infatti, questo tensore di curvatura per *geometrie astratte di dimensione arbitraria n*, ed **Einstein** fu capace di applicare le idee di **Riemann** al suo spazio-tempo di dimensione $n = 4$.
Dunque noi ci troviamo nella stessa situazione della povera creatura *2*-dimensionale, che è, in linea di principio, in grado di calcolare la curvatura della superficie su cui vive.
Noi possiamo eseguire misure per determinare la *curvatura Riemanniana* del nostro universo. Gli astronomi si occupano di queste misure.
Se si trova che la curvatura Riemanniana è non nulla, allora la geometria non è Euclidea.
Tuttavia questo non significherebbe che il nostro spazio è immerso in uno spazio fisico di dimensioni maggiori, in cui esso è in qualche modo curvo.
Quando affermiamo che lo *"spazio è curvo"* noi intendiamo che le sue proprietà geometriche differiscono da quelle dello spazio euclideo (detto *spazio piatto*) in modo veramente specifico, regolato dalle formule di **Riemann**.
Fu nel **1854**, nella sua lezione inaugurale "***Sulle ipotesi che costituiscono i fondamenti della Geometria***", che **Riemann**

introdusse l'idea di uno spazio a più dimensioni (n-dimensionale) la cui geometria intrinseca è governata da una forma quadratica per il quadrato del cambiamento infinitesimo ds della distanza.
Una tale struttura è oggi chiamata **Varietà Riemanniana**.
Diverse varietà danno *differenti geometrie e quindi* ***Riemann*** *scoprì un numero infinito di nuove geometrie.*
Ognuna di queste geometrie ha le sue "**rette**", dette "**geodetiche della varietà**", e sono archi di curve minimizzanti le lunghezze; inoltre **Riemann** stabilì che le geodetiche possono avere lunghezza finita se la varietà ha curvatura positiva. Per esempio, sulla sfera di raggio r la curvatura vale $1/r^2$ e le geodetiche (archi di circonferenze massime) hanno lunghezza $L \leq 2\pi r$.

È importante sottolineare che la formulazione di **Riemann** non rappresenta semplicemente una generalizzazione delle idee di **Gauss** dalla dimensione *2* a dimensioni più alte, ma dà informazioni anche sulle ***superficie*** *(varietà di dimensione 2) che non possono essere immerse nello spazio euclideo tridimensionale.*
Per esempio, il *piano iperbolico* può essere descritto come una varietà riemanniana completa, di dimensione *2* e curvatura negativa costante, ed il *piano ellittico* può essere descritto come una varietà Riemanniana completa di dimensione *2* e curvatura positiva costante, in cui due punti giacciono su un'unica geodetica. Nessuna di queste varietà può essere analiticamente immersa (senza autointersezioni) nello spazio euclideo tridimensionale.

È fuori discussione che nella prima metà del XX secolo ha avuto grande rilievo la **Geometria Riemanniana** e, come tecnica di studio, il metodo dei "**Gruppi di trasformazioni**" secondo il **programma di Erlangen**, dovuto essenzialmente a **Klein**. Numerosissime sono le applicazioni nel campo della **fisica relativistica**.

L'osservazione fondamentale è piuttosto semplice:

Consideriamo il modello fondamentale del **piano Euclideo** dato da

$\mathbf{R^2}$ con l'elemento lineare $\mathbf{ds^2 = dx^2 + dy^2}$

ed il semipiano positivo

$\mathbf{R \times R^*_+}$ con lo stesso elemento lineare.

Le trasformazioni che conservano la metrica, ovvero le **isometrie**, costituiscono un gruppo e governano la geometria euclidea nel senso che le proprietà metriche sono quelle invarianti per tali trasformazioni.
Un teorema fondamentale stabilisce che le isometrie del piano euclideo sono prodotto di traslazioni e di trasformazioni ortogonali distinguibili a loro volta in rotazioni e riflessioni. A meno di isomorfismo tale gruppo è un gruppo di matrici ed è il prφdotto semidiretto $\mathbf{O(2)} \times \mathbf{R^2}$.

Il semipiano di Poincaré può essere descritto come

$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*_+$ con elemento lineare $\mathbf{ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2.}$

È possibile costruire un altro modello isometrico al precedente, considerando

$\mathbf{R^2}$ con elemento lineare $\mathbf{ds^2 = dx^2 + e^x dy^2}$.

Il gruppo delle isometrie è profondamente diverso da quello del caso euclideo.
Per inciso, osserviamo che anche sul **disco di Poincaré** si può assegnare una metrica in modo da renderlo isometrico a quello appena descritto, si ottiene così la suggestiva figura ***Angel-Devil*** di Escher.

Dunque su uno stesso insieme di punti si possono fare due geometrie profondamente diverse.

Il Programma di Erlangen, sviluppato da Felix Klein nella sua tesi (**1872**,Università di Erlangen) può essere spiegato nel modo seguente:

Assegnato un insieme X ed un gruppo G di permutazioni di X, una proprietà di X che non cambia per effetto delle permutazioni appartenenti a G si dice un **G-invariante di X**. Per "***teoria di X governata da G***" si intende lo studio dei G-invarianti di X.
Il programma di Erlangen stabilisce che ogni geometria è la teoria di uno spazio corrispondente ad un certo gruppo di permutazioni dello spazio.

Diventa chiaro il ruolo dei gruppi di trasformazioni che permettono di parlare di **geometria euclidea**, **iperbolica**, **ellittica**, affine, conforme e così via. Se, poi, si consente alla metrica una segnatura, eliminando la richiesta di positività, si ottiene la geometria detta semi-Riemanniana ed in particolare quella Lorentziana, che governa la relatività.

Superficie non immergibili nello spazio Euclideo

La superficie romana di Steiner

La bottiglia di Klein

Felix Klein (1849 - 1925)



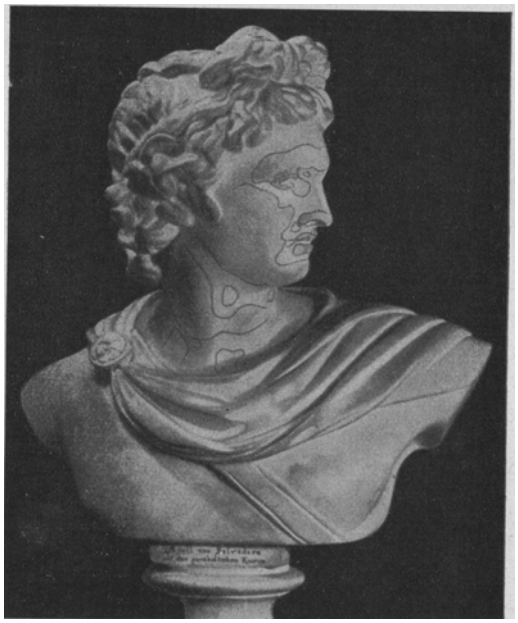
Questo matematico tedesco studiò a Göttingen, e si interessò in maniera particolare alle opere di **Bolyai** e **Lobachevsky**. Fu assistente di **Plücker** all'Università di Bonn, del quale proseguì gli studi di **geometria analitica**. Dopo aver seguito, a Parigi, i corsi di **Lagrange** sulla **teoria dei gruppi**, decise di avviare un nuovo progetto di ricerca. Esso era finalizzato alla descrizione di ogni spazio geometrico mediante il **gruppo delle trasformazioni** che ne lascia invariate le figure. Ad esempio, negli spazi euclidei, di qualunque dimensione, questo gruppo di trasformazioni è formato da tutte le composizioni di traslazioni e di trasformazioni ortogonali (rotazioni, riflessioni). Questa codifica della geometria in termini algebrici fu l'argomento della lezione con cui Klein, nel 1872, inaugurò il professorato. Essa è passata alla storia come ***Programma di Erlangen***, dal nome dell'università tedesca che fu teatro dell'evento. Klein riuscì a unificare le teorie geometriche, mostrando che anche le **geometrie non euclidee** sono particolari manifestazioni della **geometria proiettiva**. In questo modo completò un'idea che era stata di **Cayley**.

Klein scrisse anche un libro sulla storia della matematica ottocentesca, apparso postumo tra il 1926 e il 1927. Fu inoltre curatore di una Enciclopedia Matematica.

Nel 1885 divenne membro della Royal Society, che gli conferì la Copley Medal nel 1912.
Nel 1886 fu nominato professore a Göttingen, dove nel 1895 lo raggiunse **Hilbert**.

Curiosità

Felix Klein fece tracciare sul viso dell'Apollo del Belvedere i punti di **curvatura di Gauss** nulla per cercare di scoprire il mistero della bellezza.



La bottiglia di Klein
Il modello di Beltrami-Klein del piano iperbolico
Un testo didattico di Klein

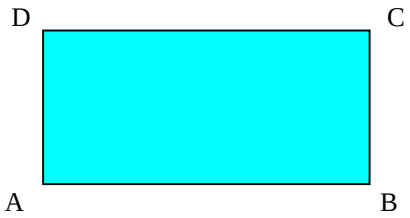
Il programma di Erlangen

Ecco il brano conclusivo della conferenza inaugurale di **Klein**, neo-professore all'Università di Erlangen: un efficace riassunto delle posizioni innovative del matematico tedesco circa le metodologie d'approccio alla geometria.

*"Spesso si è accusata la geometria analitica di privilegiare, con l'introduzione del **sistema di coordinate**, elementi arbitrari, e questa accusa riguarda ugualmente ogni metodo per le varietà estese che caratterizzi il singolo oggetto mediante i valori di variabili. Se questa accusa era troppo spesso giustificata di fronte al modo insoddisfacente con cui una volta si maneggiavano i sistemi di coordinate, essa ora decade in presenza di una trattazione razionale del metodo. Le espressioni analitiche, che possono nascere, in termini di un gruppo, analizzando una **varietà**, devono, a causa del loro significato, essere indipendenti dal sistema di coordinate, essendo questo scelto a caso, e si tratta ora di mettere in luce questa indipendenza anche dal punto di vista formale. Che ciò sia possibile e come ciò possa avvenire lo mostra l'algebra moderna, nella quale il concetto formale di **invariante**, del quale si tratta, è maggiormente sviluppato. Essa possiede una regola di formazione generale ed esauriente per le espressioni invarianti ed opera fondamentalmente solo con queste."*

Klein propone di applicare l'algebra alla geometria, ma in una maniera più generale rispetto a **Cartesio**: quest'ultimo studia l'equazione cartesiana che rappresenta un oggetto geometrico (una curva del piano, ossia una varietà di dimensione 1) rispetto ad un certo sistema di coordinate. Questo metodo manca di generalità: cambiando il sistema di riferimento, l'equazione cambia. Le proprietà geometriche dell'oggetto considerato sono registrate non dalle proprietà algebriche di una sua singola equazione, ma dalle proprietà algebriche che tutte le sue possibili equazioni cartesiane hanno in comune, ovvero le proprietà che sono ***invarianti*** per cambiamento di coordinate. Per individuare queste ultime occorre un metodo generale, che permetta di cogliere, in un colpo solo, tutte le possibili equazioni cartesiane. Ad ogni varietà geometrica deve essere associato un oggetto algebrico che sia insensibile ai cambi di coordinate, ossia al modo in cui la varietà è collocata rispetto agli assi cartesiani. Questo oggetto è un ***gruppo di trasformazioni***, ossia un insieme di corrispondenze biunivoche dello spazio in sé, che possono essere invertite e combinate a piacere, e che lasciano immutata la forma della varietà. Un esempio particolarmente semplice di gruppo siffatto,

che da Klein ha preso il nome, è l'insieme delle simmetrie del piano che lasciano invariato un rettangolo.

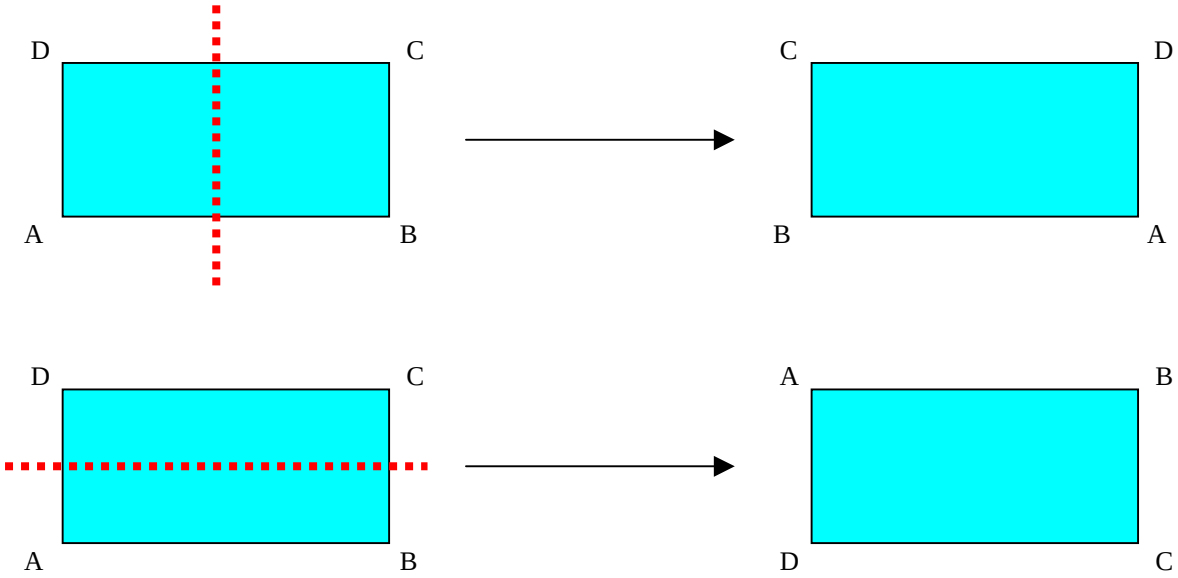


Gli elementi del gruppo sono quattro:

- la trasformazione identica, che lascia il piano così com'è,



- le due simmetrie rispetto alle bisettrici delle due coppie di lati opposti,



- e la trasformazione risultante dalla composizione di queste ultime, che è poi la rotazione di 180° intorno al centro del rettangolo:



La composizione può avvenire in entrambi gli ordini possibili, la trasformazione risultante è la stessa.

Inoltre, effettuando composizioni successive di queste trasformazioni, si ottiene sempre una di queste trasformazioni. Ogni trasformazione è l'inversa di se stessa: componendola con se stessa si ottiene la situazione di partenza, il che equivale ad applicare la trasformazione identica.

Evidentemente, la definizione del gruppo di Klein fa completamente a meno del sistema di coordinate, e si applica, indifferentemente, ad ogni rettangolo del piano. È facile rendersi conto che il gruppo di Klein caratterizza tutte le forme del piano che sono simmetriche solo rispetto a due assi ortogonali.

Le trasformazioni del gruppo di Klein sono particolari **isometrie**.

A proposito della differenza tra l'approccio analitico e quello sintetico alla geometria, Klein nel suo discorso dice:

"Se il metodo sintetico lavora più che altro con l'intuizione spaziale, conferendo ai suoi primi, semplici sviluppi un enorme fascino, così il campo dell'intuizione spaziale non è precluso al metodo analitico, e si possono considerare le formule della geometria analitica come una espressione precisa e trasparente delle relazioni geometriche. D'altra parte non si deve sottovalutare il vantaggio che un formalismo ben impostato può costituire per le ulteriori ricerche, anticipando, in un certo senso, il pensiero. Ci si deve sempre attenere al principio secondo cui non si può dare per acquisito un oggetto matematico, finché esso non è divenuto concettualmente evidente, e andare un po' avanti seguendo il formalismo è già un importante primo passo."

L'astrazione dell'algebra non deve, comunque, far dimenticare la realtà dell'oggetto geometrico soggiacente, quella geometria "ingenua", che tutti conosciamo dalla scuola elementare, che ha per oggetti le figure geometriche in quanto tali, e non in quanto modelli di relazioni matematiche astratte. Klein dedica una parte della suo discorso al *"Valore dell'intuizione spaziale"*.

"Quando nel testo abbiamo definito l'intuizione spaziale come qualcosa di temporaneo, intendevamo che ciò dovesse essere riferito soltanto al contenuto puramente matematico delle osservazioni da formulare. La intuizione ha, per esso, soltanto il valore di una visualizzazione, che,

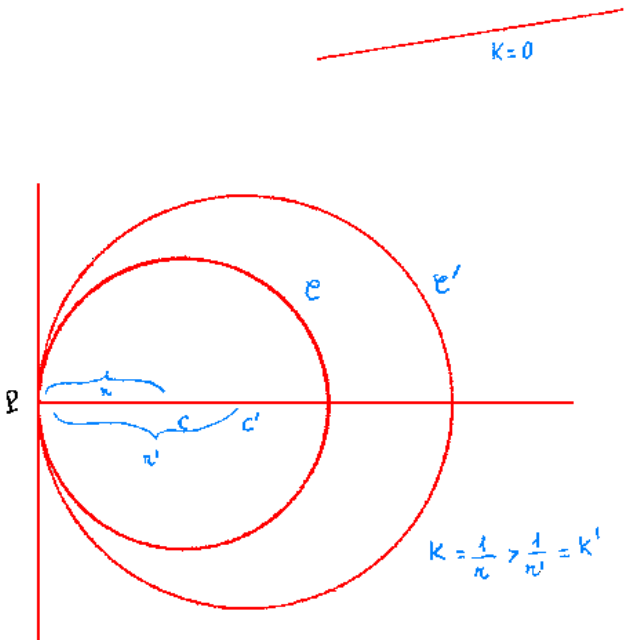
tuttavia, è da mettere in grande risalto nel contesto pedagogico. Un ***modello geometrico****, per esempio, è, da questo punto di vista, molto istruttivo e interessante.*

In maniera ben diversa si pone la questione del valore dell'intuizione spaziale in sé e per sé. Io lo considero qualcosa di autonomo. Esiste una geometria vera e propria, che non vuole essere, come le indagini discusse nel testo, solo una forma visualizzata di indagini astratte. In essa si tratta di concepire le figure spaziali in tutta la loro realtà corporea, e (ciò che rappresenta l'aspetto matematico) considerare le relazioni che soddisfano come evidenti conseguenze dei principi dell'intuizione spaziale. Un modello – sia esso realizzato e guardato o solo presentato a gesti – non è, per questa geometria, un mezzo per il fine, bensì la cosa in sé."

Nella ***relatività einsteiniana***, le trasformazioni dello spazio-tempo che legano le descrizioni geometriche di uno stesso evento rispetto a due osservatori distinti, formano un gruppo di isometrie dello spazio-tempo, detto gruppo di Poincaré.

La curvatura di Gauss

La nozione di "**curvatura**" è fondamentale nello studio delle superficie immerse nello spazio Euclideo ed è, in qualche modo, la migliore chiave di lettura per comprendere il passaggio alla **Geometria Riemanniana**.
È tuttavia impossibile spiegare in modo rigoroso le idee della geometria Riemanniana senza usare il linguaggio del calcolo differenziale ed integrale. Volendo evitare ogni tecnicismo, occorrerà affidarsi alla intuizione per capirne le idee.
Iniziamo da considerazioni in *dimensione 2*.
Nel piano Euclideo le due figure più semplici, lisce, di dimensione *1*, sono una retta ed un cerchio (cerchio è termine usato come sinonimo di circonferenza). Noi immaginiamo una retta come una linea diritta, cioè non piegata. Quindi, se volessimo assegnarle un numero k che in qualche modo ne misuri l'incurvarsi, sceglieremmo il valore $k = 0$.

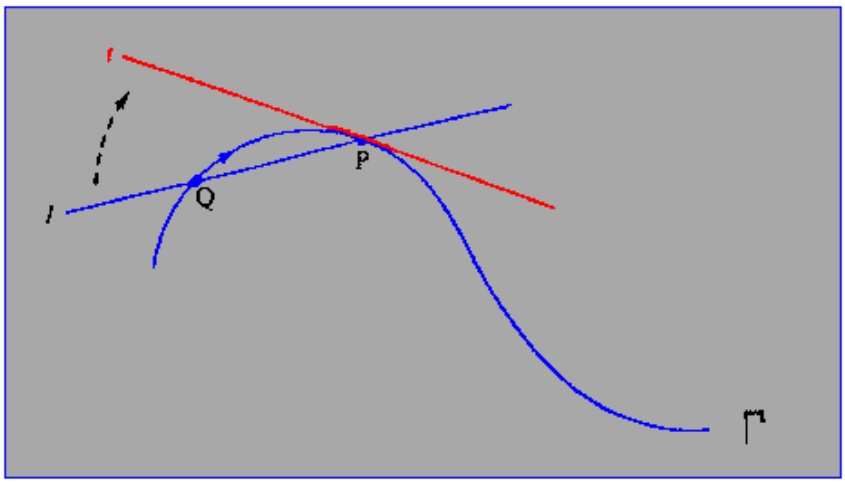


Un cerchio C, invece, è certamente incurvato e più piccolo è il suo raggio più esso è incurvato, mentre più grande è il raggio più il cerchio si avvicina ad una retta.
È naturale allora definire la *curvatura di un cerchio* di raggio r come $k = 1/r$.

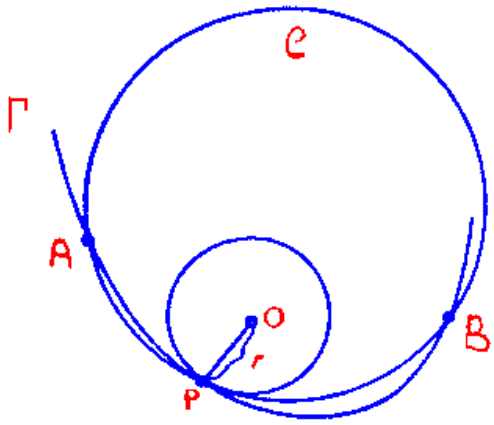
Consideriamo ora nel piano Euclideo una *arbitraria curva* Γ che sia *liscia*. "Liscia" significa che in ogni punto esiste la retta tangente in quel punto alla curva e che tale tangente dipende con continuità dal punto.

Possiamo definire la *tangente* in un punto P come segue: P ed un altro punto Q su Γ determinano una retta l. Fissiamo P e lasciamo che Q si avvicini a P rimanendo sulla curva.

La *posizione limite* raggiunta dalla retta $[P,Q]$ è, per definizione, la **tangente** in P a Γ.

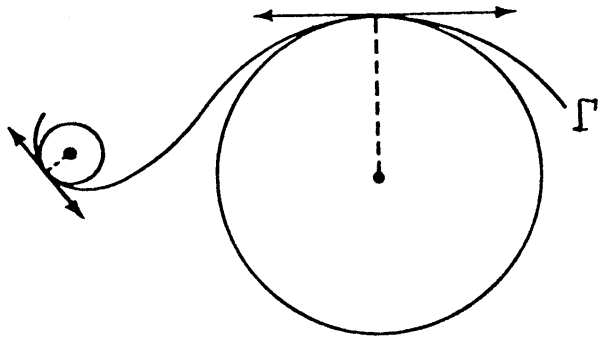


Oltre al fissato punto P, consideriamo altri due punti A e B su Γ. Questi tre punti determinano un unico cerchio C. Fissiamo P e lasciamo che A e B si avvicinino a P rimanendo su Γ. La *posizione limite* raggiunta dal cerchio C è il cerchio che meglio aderisce alla curva Γ in P e viene detto **cerchio osculatore** Γ in P.



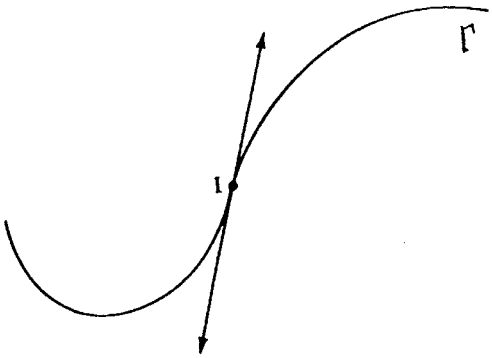
In un certo senso, Γ si incurva nel punto P come il cerchio C e quindi è ragionevole definire la curvatura di Γ in P come la curvatura del cerchio osculatore in P, cioè $\boldsymbol{k(P)=1/r}$, se r è il raggio del cerchio osculatore; r è detto anche raggio di curvatura di Γ in P.

È chiaro che il cerchio osculatore può variare in grandezza lungo la curva e quindi la curvatura varia con il punto lungo Γ. Si noti anche che la tangente a Γ in P è anche la tangente in P al cerchio osculatore. Inoltre i cerchi osculatori nei vari punti della curva possono trovarsi da parti opposte rispetto alla curva.



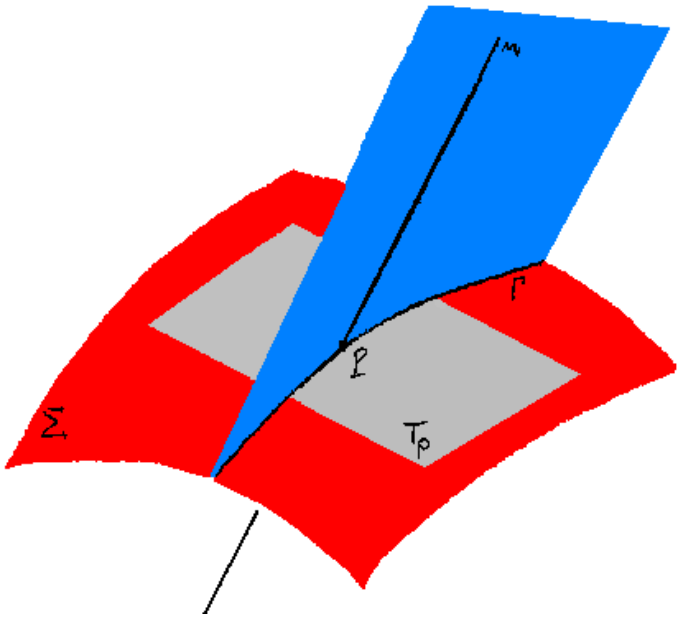
È conveniente, allora, ed è possibile farlo in modo rigoroso, ridefinire la curvatura in modo che sia *positiva* su un lato e *negativa* sull'altro e ciò dipende dalla parametrizzazione della curva, ossia dal verso in cui immaginiamo di percorrerla.

Una volta che ciò sia stato fatto è chiaro che se per due punti A e B su Γ si ha $k(A)>0$ e $k(B)<0$, allora esiste un punto I tra A e B in cui la curvatura si annulla, poiché supponiamo che Γ sia abbastanza liscia da ottenere la continuità per la curvatura. Il punto I si dice punto di inflessione ed in tale punto il cerchio osculatore degenera in una retta, che è la tangente in I a Γ.



Passiamo ora <u>in *dimensione 3*</u>, cioè consideriamo superficie *lisce* immerse nello spazio Euclideo tridimensionale. "Liscia" ora significa che in ogni punto esiste il piano tangente nel punto alla superficie e che questo varia con continuità con il punto.

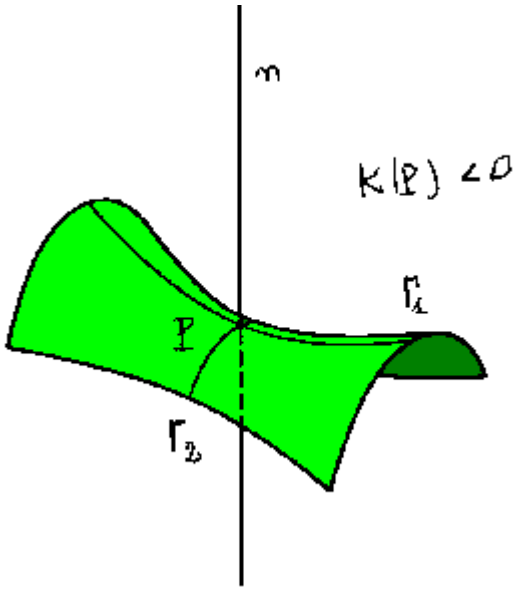
Sia dunque Σ una superficie liscia e sia P un suo punto. Indichiamo con n la retta normale a Σ in P, cioè la retta perpendicolare in P al piano tangente in P. Consideriamo un piano che contenga n; esso interseca la superficie in una curva piana.



Immaginando che il piano ruoti attorno a n, otteniamo su Σ diverse curve sezioni, tutte passanti per P e situate su piani diversi e di ciascuna curva sezione sappiamo calcolare la curvatura in P. In generale, queste curvature variano al variare della sezione. Se la

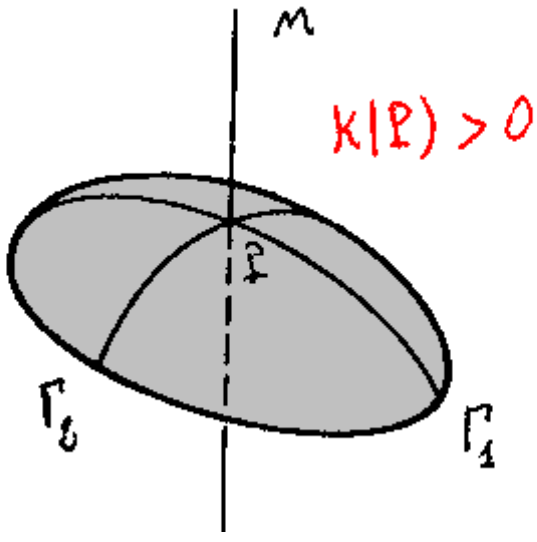
superficie è sferica, esse sono tutte eguali ad $1/r$, se r è il raggio della sfera, poiché le sezioni normali sono tutte cerchi massimi.
Si può provare, con metodi della geometria differenziale, che queste curvature raggiungono un valore minimo $\boldsymbol{k_1(P)}$ ed un valore massimo $\boldsymbol{k_2(P)}$, e le corrispondenti sezioni normali sono perpendicolari (si trovano cioè su piani perpendicolari). Esse sono dette curve principali di Σ nel punto P.
Il prodotto $\boldsymbol{K(P) = k_1(P)k_2(P)}$ è chiamato la **curvatura Gaussiana** o semplicemente la curvatura della superficie nel punto P. Ancora una volta $\boldsymbol{K}$ varia al variare di P su Σ.
Se accade che $\boldsymbol{K}$ è costante, si ottengono tre geometrie a seconda che $\boldsymbol{K}$ sia negativa, positiva o nulla, e sono rispettivamente la geometria della pseudosfera (iperbolica), la geometria della sfera (ellittica) e la geometria del piano (euclidea).

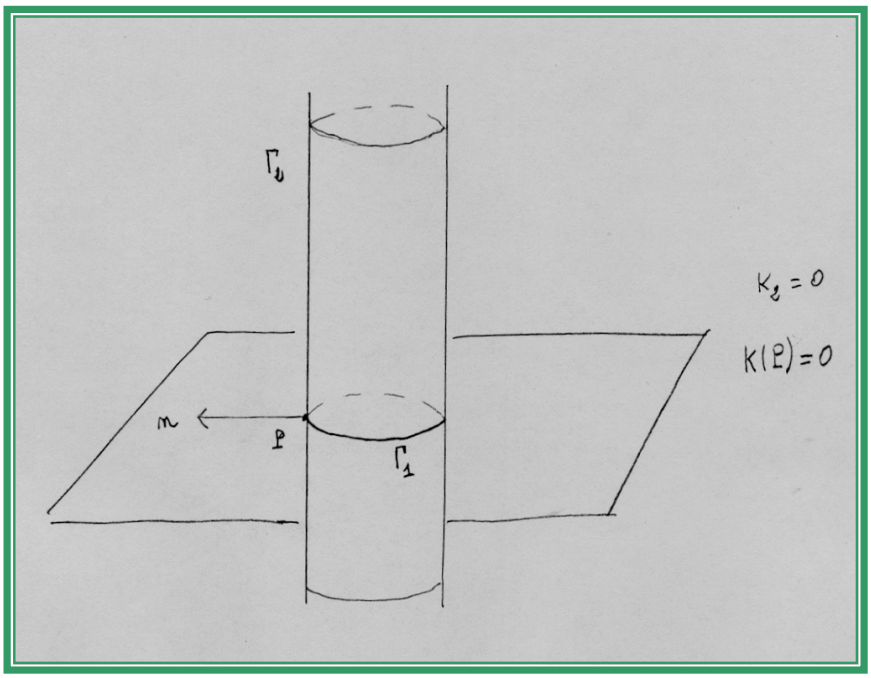
Esempi



1) Nella figura della superficie a sella (*paraboloide a sella o iperbolico*) si vedono la normale e le curve principali in un punto P. In ogni punto di questa superficie la curvatura è negativa, perché i cerchi osculatori alle due curve principali si trovano da parti opposte rispetto al piano tangente.

2) Per la superficie a forma d'uovo (*ellissoide*) le due curve principali si trovano dallo stesso lato del piano tangente e quindi la curvatura di Gauss è positiva.





3) Nel caso di un *cilindro*, in ogni suo punto *P*, una delle curve principali è una retta che ha curvatura zero, e quindi la curvatura di **Gauss** sarà zero.

Si può capire meglio questo risultato apparentemente sorprendente, se pensiamo ad un cilindro come ad una striscia di piano arrotolata. Certamente ogni ragionevole definizione di curvatura assegna *curvatura zero* ad un piano. Nel processo di arrotolamento di una striscia rettangolare di piano le lunghezze d'arco e gli angoli tra curve sulla striscia non cambiano (abbiamo cioè eseguito una isometria) ed in questo senso la geometria intrinseca non cambia.

La semisomma ***H*** delle due curvature principali $\boldsymbol{k_1(P)}$ e $\boldsymbol{k_2(P)}$ in un punto *P* di una superficie Σ si chiama **curvatura media** di Σ in *P*. Se la curvatura media ***H*** è zero in ogni punto della superficie, la superficie si dice ***minimale***.

Gauss cercava una definizione di curvatura per una superficie che dipendesse solo dalla *geometria intrinseca* della superficie e non dal modo particolare in cui tale superficie era *immersa* nello spazio euclideo. Si noti infatti che nella definizione precedente è stata utilizzata la retta normale alla superficie in un assegnato punto *P* ed è tale retta che, in un certo senso, esprime il modo in cui la superficie si pone nello spazio. Egli riuscì a provare che la funzione ***K*** non cambiava se la superficie era sottoposta a cambiamenti che lasciavano invariate le lunghezze e gli angoli di tutte le curve sulla superficie. Dunque ***K*** descrive la geometria intrinseca e non dipende dalla posizione della superficie nello spazio. Il dato importante è che le

due curvature principali $k_1(P)$ e $k_2(P)$ cambiano, mentre il loro prodotto non cambia.
Gauss fu così eccitato da questo risultato che lo chiamò il "**Teorema egregium**".
In una lettera all'astronomo **Hansen** egli scrisse:
"questi studi coinvolgono molte altre cose, oserei dire che sono coinvolti nella metafisica della geometria dello spazio."
Gauss risolse il problema di determinare K senza alcun riferimento allo spazio ambiente.
Il problema può essere proposto in questi termini:
immaginiamo una creatura *2*-dimensionale che vive su una superficie e non ha alcuna idea di una terza dimensione, non essendo in grado di concepire la retta normale che abbiamo usato per definire K. Come potrebbe questa creatura calcolare K ?

Occorre conoscere il linguaggio del calcolo differenziale per dare la risposta di **Gauss**.
Nel piano euclideo, un punto è determinato dalle sue **coordinate cartesiane** (x,y) in un fissato riferimento. Se queste coordinate sono soggette a cambiamenti infinitesimi, denotati dx e dy, allora il punto si muove di una distanza infinitesima ds il cui quadrato è dato, via il **teorema di Pitagora**, da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Ora, su una superficie liscia, un punto è ancora individuato da due coordinate (u,v) e, se queste coordinate sono soggette ad una variazione infinitesima du e dv, allora il punto si muove sulla superficie a distanza infinitesima ds, il cui quadrato è dato dall'espressione più complicata:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

dove E, F, G sono funzioni delle coordinate u,v del punto, ed, in linea di principio, potrebbero essere determinate dalla creatura *2*-dimensionale eseguendo delle misure sulla superficie.
Gauss provò che la curvatura K si può esprimere mediante le funzioni E, F, G con una formula non troppo complicata. Dunque, la nostra creatura potrebbe calcolare K con questa formula e scoprire che il suo mondo è curvo, sebbene essa avrebbe difficoltà ad immaginare che cosa ciò significhi.

Un corollario del teorema di **Gauss-Bonnet** (versione locale), noto come **Teorema elegantissimum di Gauss**, stabilisce che, se $\boldsymbol{T}$ è un triangolo (geodetico) sulla superficie, allora, detta S la somma degli angoli interni di $\boldsymbol{T}$, risulta:

$$\boldsymbol{S = \pi + \iint_T K\, d\Sigma}$$

dove $d\Sigma$ denota l'elemento di volume (in questo caso di area) su Σ.
Un triangolo si dice *geodetico* se ogni suo lato è una geodetica, cioè è la curva di lunghezza minima tra tutte le curve che congiungono i suoi estremi, rimanendo sulla superficie. Per esempio un triangolo geodetico su una sfera deve avere, come lati, archi di cerchi massimi, poiché le geodetiche sulla sfera coincidono con archi di cerchi massimi.
Se $\boldsymbol{K}$ è costante, si ottiene $S = \pi + \boldsymbol{K}\, A(T)$, dove $A(T)$ è l'area del triangolo, e quindi:

$\boldsymbol{S = \pi}$ **se e solo se** $\boldsymbol{K = 0}$ **(*geometria Euclidea*)**

$\boldsymbol{S < \pi}$ **se e solo se** $\boldsymbol{K < 0}$ **(*geometria iperbolica*)**

$\boldsymbol{S > \pi}$ **se e solo se** $\boldsymbol{K > 0}$ **(*geometria ellittica*)**

Poiché le tre possibilità descritte per S sono, nell'ordine, equivalenti all'assioma delle parallele della **geometria euclidea**, iperbolica ed ellittica (**il postulato delle parallele e le geometrie non euclidee**) si può concludere che, almeno localmente - cioè in un intorno di ogni punto - la geometria della superficie è rispettivamente **Euclidea, iperbolica, ellittica**. Anche se questo discorso su una creatura *2*-dimensionale può sembrare bizzarro, tuttavia non lo è, come ha provato **Riemann,** (**La Geometria Riemanniana**).

Superficie nello spazio Euclideo: L'iperboloide iperbolico Il toro
La superficie di Beltrami L'elicoide La superficie catenoide
La superficie di Scherk La superficie di Enneper

Il Postulato delle parallele e le Geometrie non Euclidee

Il **V postulato di Euclide**, più noto come il **Postulato (o l'assioma) delle parallele**, ha rappresentato il punto cruciale per lo sviluppo della Geometria e della stessa Matematica.
Esso possiede varie formulazioni equivalenti, la più nota delle quali recita:

1) Data una retta r ed un punto P che non le appartenga, esiste un'unica retta s passante per P e ad essa parallela.
(in questo caso, poiché r≠s, si ha: r // s ⇔ r∩ s =∅).

Questa formulazione è certamente nota nel 1818 ad opera di **Gergonne**, ma molto probabilmente risale a tempi precedenti, ed apparirà nella sistemazione della geometria Euclidea dovuta a **David Hilbert**.

La formulazione originaria di **Euclide** fu la seguente:

2) Se due linee sono tagliate da una trasversale in modo tale che la somma degli angoli interni da una parte della trasversale è minore di 180°, allora le due linee s'intersecano dalla stessa parte della trasversale.

Un'altra interessante formulazione dello stesso postulato è:

3) La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Il problema fondamentale su questo postulato (o assioma) fu, quasi dall'inizio, il tentativo di capirne la necessità e la dipendenza o meno dagli altri assiomi. Sembra, infatti, abbastanza curioso e sintomatico che lo stesso Euclide lo abbia adoperato il meno possibile.
Per diverse ragioni quest'assioma non sembrò autoevidente, come gli altri, probabilmente perché i Greci avevano familiarità con linee, dette asintotiche, che pur non incontrandosi in alcuna regione limitata del piano, tendevano ad incontrarsi all'infinito. Non era dunque evidente che per un punto esterno ad una retta si potesse tracciare soltanto una parallela.
Occorsero molto tempo e l'ingegno di molti Matematici per dirimere la questione, provando l'indipendenza con la costruzione di modelli di due nuove Geometrie, dette **Geometrie Non Euclidee**, che, dal punto di vista della logica matematica, sono equivalenti alla Geometria **Euclidea** nel senso che ciascuna di esse è consistente se e solo se lo è

la geometria Euclidea. (In realtà per geometria non Euclidea si deve intendere una qualsiasi geometria differente da quella di Euclide.)

Volendo schematizzare il problema, si può procedere secondo due direttive:
1) Cancellare il V postulato e studiare tutto quello che si può dedurre dai rimanenti postulati. Si ottiene una geometria nota come **Geometria assoluta o neutrale**.
2) Cercare di dimostrare la dipendenza del V postulato assumendo come ipotesi la sua negazione. Se si giunge ad una contraddizione questo significherà che il V postulato è in realtà deducibile dagli altri. Poichè il postulato in questione contiene due affermazioni, una di esistenza e l'altra di unicità, è possibile procedere in due modi negando solo l'unicità oppure negando l'esistenza.
Tutti i tentativi non portarono ad alcuna contraddizione; nacquero così due nuove geometrie, dette appunto non Euclidee: la geometria iperbolica (Bolyai, Gauss, Lobachevsky) e la geometria ellittica (Gauss, Riemann), e l'indipendenza del V postulato fu definitivamente stabilita quando si costruirono modelli di tali geometrie (Beltrami, 1868).

Il caso iperbolico:
data una retta ed un punto P non appartenente ad essa esistono diverse rette per P ad essa parallele.
Equivalentemente: **la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°.**

È necessaria una precisazione. La negazione del V postulato deve essere formulata nel seguente modo: *esiste una retta r ed esiste un punto P fuori di essa tale che almeno due diverse parallele a r passano per P.*
Oppure: *esiste un triangolo tale che la somma dei suoi angoli interni è minore di 180°.*
Tuttavia, partendo da queste ipotesi è possibile dimostrare che la proprietà ipotizzata vale per tutte le scelte di una retta e di un punto fuori di essa, e per tutti i triangoli.

Il caso ellittico:
data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, non esiste alcuna retta per P ad essa parallela.
Equivalentemente: **la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°.**

Sembra dunque che la partita si giochi sulla nozione di retta.

Modelli del piano iperbolico:
questi modelli possono essere costruiti nel piano Euclideo.
Il modello di Beltrami - Klein
Il disco di Poincaré
Il semipiano di Poincaré
L'isomorfismo tra il modello di Beltrami-Klein ed il disco di Poincaré

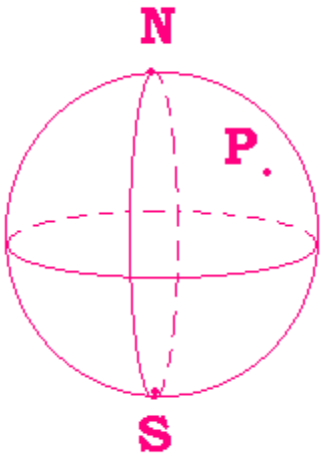
Modelli del piano ellittico

La costruzione di modelli della geometria ellittica è meno immediata rispetto al caso iperbolico e richiede qualche accortezza in più.
Infatti, la sola e semplice sostituzione del V postulato di Euclide con il postulato della non esistenza di parallele, senza effettuare altre modifiche, porta all'inconsistenza della teoria. Infatti, si consideri:

piano ≡ $\mathbf{S^2}$ (superficie sferica)

punto ≡ punto di $\mathbf{S^2}$

retta ≡ circonferenza massima



È evidente che due rette hanno sempre intersezione non vuota, ma sfortunatamente non è più verificato il primo assioma di Euclide, poiché per due punti antipodali passano infinite rette.
È necessario, allora, modificare la definizione di punto, considerando la coppia di punti antipodali come uno stesso punto della nuova struttura, cioè identificando punti diametralmente opposti sulla superficie sferica.

Formalmente quest'operazione si descrive matematicamente come un passaggio al quoziente. Si ottiene un primo modello:

La sfera (superficie sferica) in cui siano stati identificati punti diametralmente opposti

$$\mathbf{S^2 \ / \ R}$$

dove **R** è la relazione di equivalenza in $\mathbf{S^2}$ definita da:

$$\mathbf{X \ R \ Y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X = Y} \quad \vee \quad \mathbf{X = -Y}$$

Altri modelli sono:
La semisfera con bordo, con identificazione di coppie di punti diametralmente opposti sul bordo
Il piano Euclideo ampliato con i punti all'infinito
La stella propria di rette dello spazio Euclideo
Il piano numerico proiettivo reale
La superficie romana di Steiner

Per lo stesso motivo, cioè per la possibilità di realizzare modelli, sia la consistenza della geometria iperbolica sia quella della geometria ellittica assicurano la consistenza della Geometria Euclidea. Infatti, orocicli sulle orosfere nello spazio iperbolico formano un modello delle linee nel piano Euclideo (Kulczycki), e il piano Euclideo può essere immerso nel piano proiettivo reale.

Dunque la **logica matematica** permette di concludere che l'esistenza dei modelli sposta semplicemente il problema della consistenza da una geometria all'altra.

Per molto tempo però i matematici furono angustiati da due domande:
qual è la geometria dello spazio in cui viviamo?
qual è la geometria vera?

Riportiamo una famosa risposta di **Poincaré** alla seconda domanda.
Se la geometria fosse una scienza sperimentale, non sarebbe una scienza esatta, ma sarebbe soggetta a continue revisioni.
Gli assiomi geometrici non sono né intuizioni sintetiche a priori, né fatti sperimentali. Essi sono convenzioni.
La nostra scelta tra le possibili convenzioni è guidata dai fatti sperimentali; ma rimane libera, ed è solo limitata dalla necessità di evitare ogni contraddizione.
Che cosa pensiamo della domanda: la geometria euclidea è vera?

Non ha senso. Potremmo egualmente chiederci se il sistema metrico è vero e se i vecchi pesi e misure sono falsi; se le coordinate cartesiane sono vere e le coordinate polari sono false.
Una geometria non può essere ***più vera*** *di un'altra, può solo essere* ***più conveniente.***

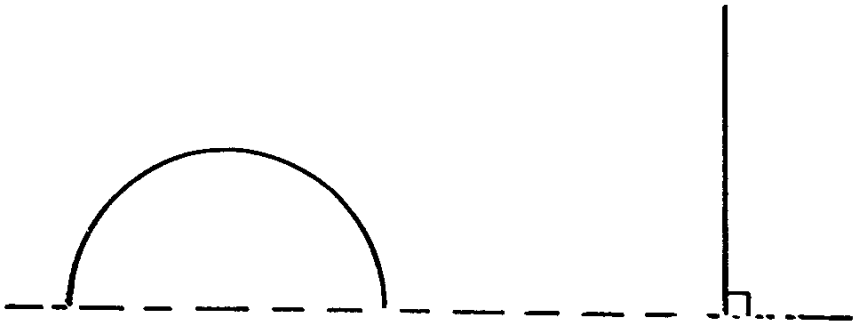
Si può pensare che la geometria Euclidea sia la più conveniente?
Lo è per l'ordinaria ingegneria, ma non lo è per la **teoria della relatività**.
Inoltre, **Luneburg** ha sostenuto che il nostro modo di percepire lo spazio, cioè la trasmissione visiva dello spazio al nostro cervello attraverso i nostri occhi, è più convenientemente descritto dalla geometria iperbolica.

Discutiamo ora il primo problema: *qual è la geometria dello spazio in cui viviamo?*
Poichè il postulato delle parallele e le sue due varianti, iperbolica ed ellittica, sono esprimibili in termini di somma degli angoli interni di un triangolo, si potrebbe pensare di misurare sperimentalmente tale somma.
Per esempio, interpretiamo una "retta" fisicamente come il percorso compiuto da un raggio di luce.
Consideriamo tre sorgenti luminose separate e proponiamoci di misurare gli angoli interni di questo triangolo, per verificare se la somma vale o no 180 gradi. Quest'esperimento dovrebbe dirimere la questione se lo spazio in cui viviamo è euclideo, iperbolico o ellittico.
Gauss ideò questo famoso esperimento usando tre vette di montagne come vertici del triangolo, ma il risultato fu inconcludente, perché gli esperimenti comportano errori sperimentali e gli strumenti non sono mai completamente accurati.
Infatti, supponiamo che il risultato sia di 180. Se l'errore nelle misure fosse al più di 1/100 si potrebbe solo concludere che la somma è tra 179,99 e 180,01 ma non potremmo essere certi che valga 180.
Se il risultato della misura desse 179, potremmo solo concludere che la somma è compresa tra 178,99 e 179,01 e in ogni caso minore di 180.
In altre parole la sola conclusione possibile dell'esperimento potrebbe essere che lo spazio è iperbolico.
Così, se il risultato fosse 181, la somma sarebbe compresa tra 180,99 e 181,01 e si potrebbe concludere che lo spazio è ellittico.
Dunque un esperimento fisico non può definitivamente provare che lo spazio è euclideo, può solo provare che è non euclideo.

Ma la discussione può e deve essere più sottile:
- gli strumenti non sono forse pensati e costruiti sulla base di assunzioni euclidee?
- i raggi luminosi non potrebbero viaggiare su linee curve?
- lo spazio di dimensioni cosmiche non potrebbe essere governato da geometrie diverse da queste?
Quest'ultima è in realtà la convinzione scientifica attuale.
Secondo **Einstein** spazio e tempo sono inseparabili e lo spazio-tempo è affetto dalla materia di modo che i raggi di luce possono essere incurvati per effetto dell'attrazione gravitazionale delle masse.
Il problema è dunque più complicato di quanto Euclide e Lobachevsky immaginassero.
Nessuna delle loro geometrie è adeguata per la nostra presente concezione dello spazio.
Naturalmente, ciò non diminuisce l'importanza storica delle geometrie non-euclidee.
Einstein disse:
A quest'interpretazione della geometria io attribuisco grande importanza, perchè se non avessi avuto familiarità con essa, mai sarei stato in grado di sviluppare la teoria della relatività.
Einstein sviluppò una geometria appropriata per la relatività generale partendo dalle idee di **Riemann** e dalla geometria che da lui prese il nome di **Geometria Riemanniana**.

Gli effetti sulla matematica della scoperta di geometrie non euclidee furono di notevole portata: entrò in crisi il concetto di assioma, si sviluppò lo studio dei problemi fondazionali, si giunse, sia pure a distanza di tempo, al processo di formalizzazione (dai **sistemi formali** ai **teoremi di Gödel**), nacquero nuove discipline.

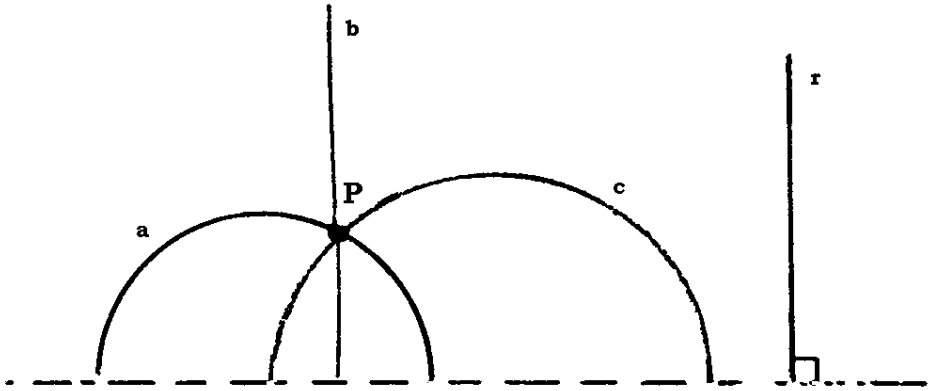
Il semipiano di Poincaré



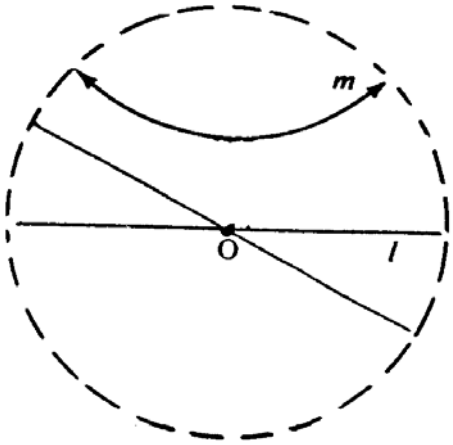
piano ≡ semipiano Euclideo positivo
punto ≡ punto del semipiano Euclideo positivo

retta ≡⟨ semiretta euclidea aperta perpendicolare al bordo
semicirconferenza che interseca ortogonalmente il bordo ed è contenuta nel semipiano.

Verifica dell'assioma delle parallele: *a, b, c* sono parallele a *r* passanti per **P.**



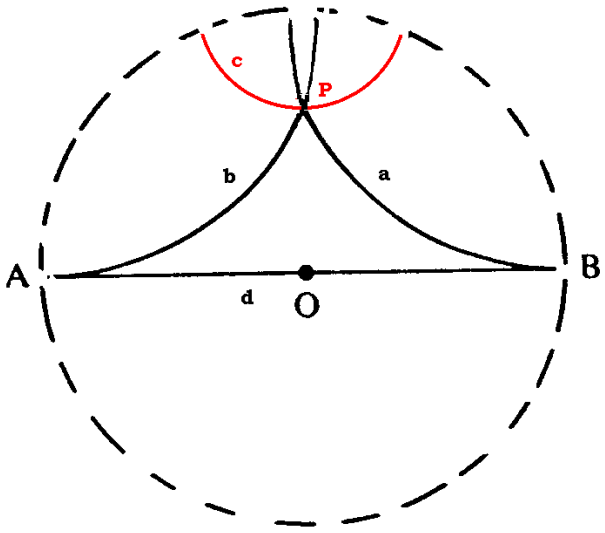
Il disco di Poincaré



piano ≡ D (disco aperto del piano Euclideo)
punto ≡ punto di D

retta ≡ ⟨ diametro di D
arco di circonferenza che interseca perpendicolarmente il bordo di D ed è contenuto in D.

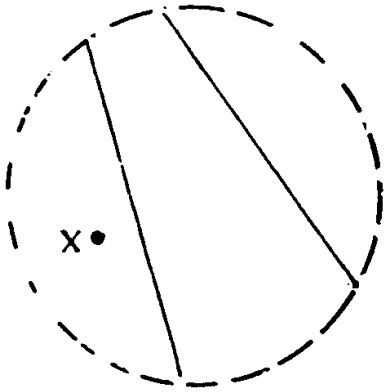
Verifica dell'assioma delle parallele: *a, b, c* sono parallele a *d.*
Inoltre *a, b* sono le *parallele limite* passanti per **P**.



Angel-Devil (M.C. Escher, 1941)

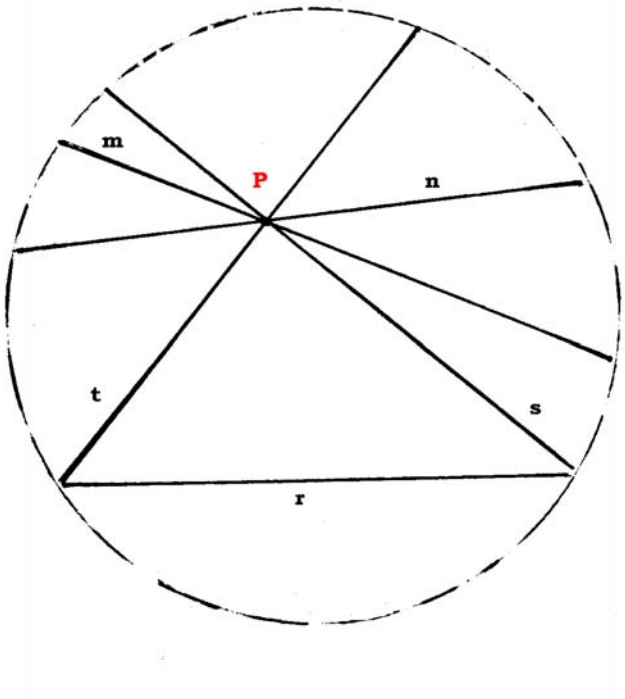
Per una opportuna metrica assegnata sul disco di Poincaré si ottiene questa **suggestiva figura** in cui ogni diavolo rappresenta una regione di area costante.

Il modello di Beltrami - Klein

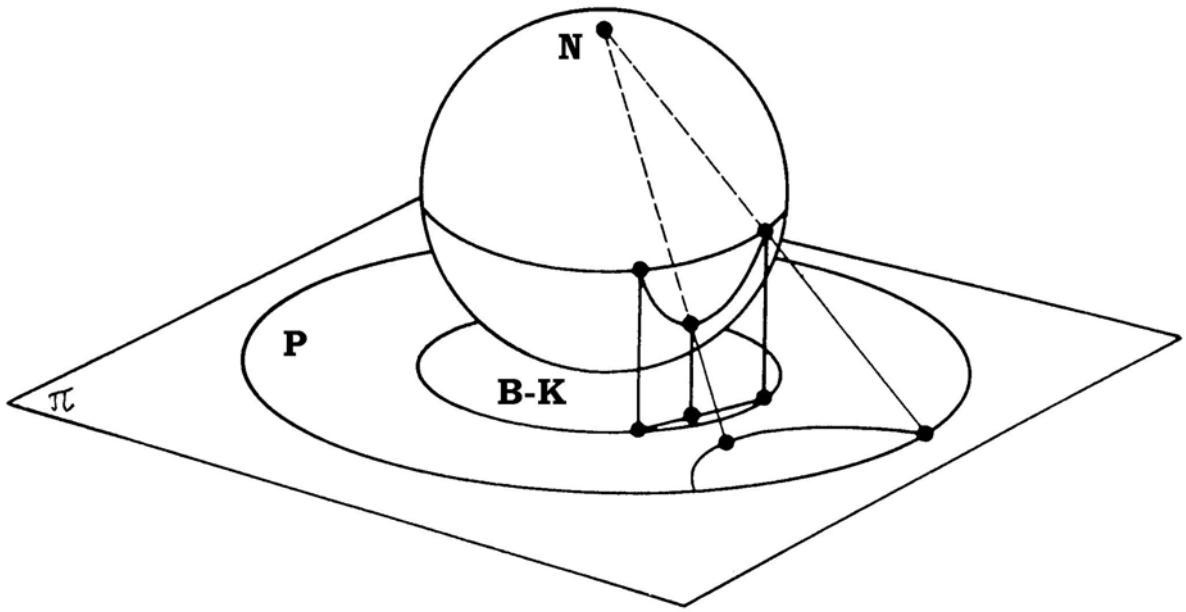


piano ≡ D (disco aperto del piano euclideo)
punto ≡ punto di D
retta ≡ corda di D

Verifica dell'assioma delle parallele: *t, s, m, n* sono parallele a *r* passanti per **P**.
Le parallele limite sono *t* e *s*.

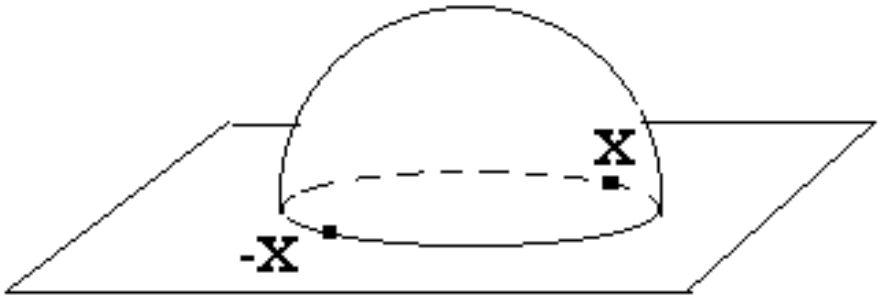


L'isomorfismo tra il modello di Beltrami-Klein ed il disco di Poincaré



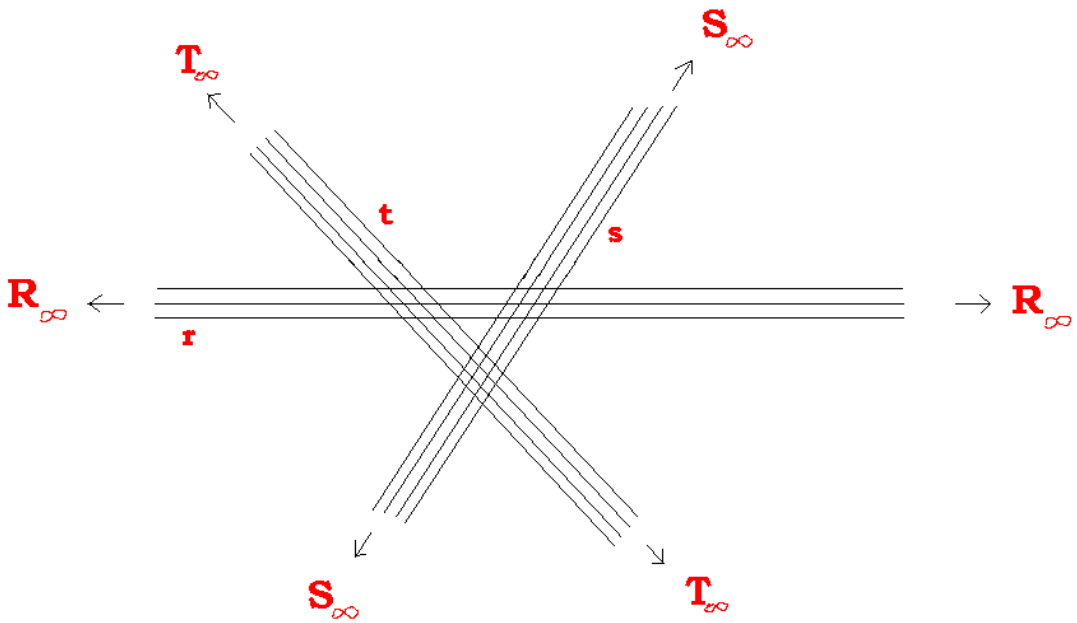
π è il piano tangente alla sfera $\mathbf{S^2}$ nel polo Sud.
Sia $\mathbf{S^2}_-$ la semisfera inferiore, ed indichiamo con **P** il disco di Poincaré e con **B-K** il modello di Beltrami-Klein.
Siano α: $\mathbf{S^2}_- \rightarrow$ **B-K** la proiezione ortogonale e β: $\mathbf{S^2}_- \rightarrow$ **P** la proiezione stereografica di centro nel polo Nord *N*.
L'applicazione β associa ad ogni punto *A* della semisfera inferiore il punto d'intersezione del piano π con la retta congiungente i punti *A* e *N*.
Allora $\beta \circ \alpha^{-1}$: **B-K** $\rightarrow$ **P** è un'applicazione bigettiva che trasforma punti e rette di **B-K** rispettivamente in punti e rette di **P**. Essa realizza un isomorfismo tra i due modelli.

La semisfera con bordo, con identificazione di coppie di punti diametralmente opposti sul bordo



Il piano Euclideo ampliato con i punti all'infinito

Ell = $\mathbf{E_2} \cup \mathbf{i}_\infty$, dove $\mathbf{E_2}$ è il piano euclideo, $\mathbf{i}_\infty$ è la *retta impropria* ottenuta come quoziente $\Sigma_2/_{//}$ dell'insieme Σ_2 delle rette di $\mathbf{E_2}$ rispetto alla relazione di equivalenza " // " fornita dal parallelismo tra rette di $\mathbf{E_2}$.



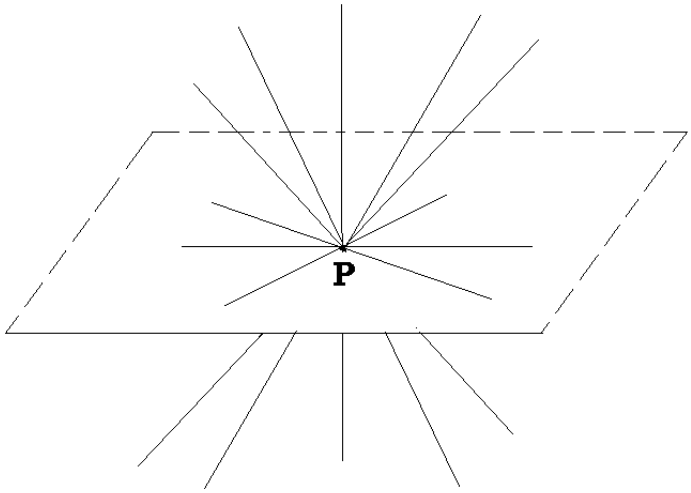
I punti del piano ampliato sono in corrispondenza biunivoca con i punti del **piano numerico proiettivo reale**, di cui esso è un modello geometrico.

L'idea alla base di questo modello è dovuta a **Desargues**, ed è utile, ad esempio, nello studio delle **coniche**.

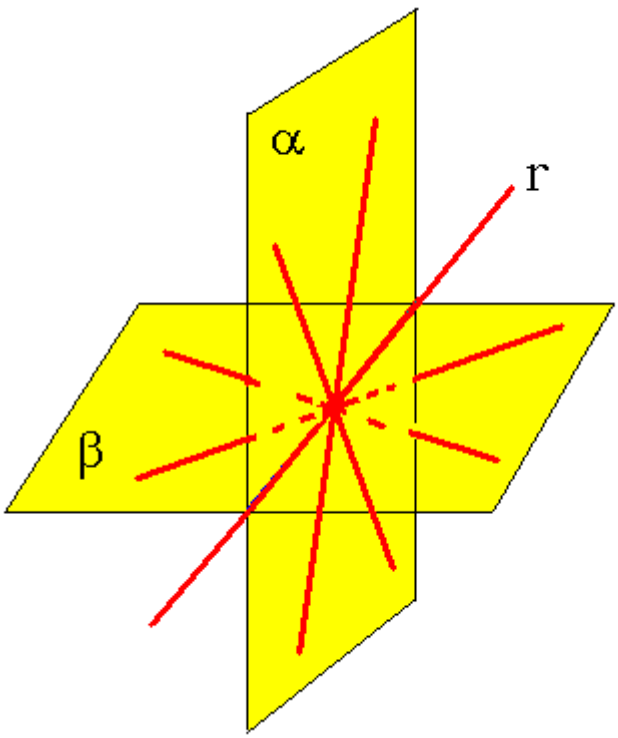
La stella propria di rette dello spazio Euclideo

Ell = *St(P),* dove ***St(P)*** denota l'insieme delle rette dello spazio euclideo $\mathbf{E_3}$ passanti per un fissato punto ***P***.
Allora si ha, per definizione:

- punto di **Ell** = retta di $\mathbf{E_3}$ passante per ***P***,
- retta di **Ell** = piano di $\mathbf{E_3}$ passante per ***P***.



Segue che due rette α e β di **Ell** hanno sempre un punto r in comune.



Il piano numerico proiettivo reale

$$RP_2 = (R^3)^* / E$$

dove E è la relazione di equivalenza che identifica terne di numeri reali non nulle e proporzionali.

$(x_1,x_2,x_3) \in (R^3)^* \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$

$(x_1,x_2,x_3)\ E\ (y_1,y_2,y_3) \Leftrightarrow (\exists \rho \in R^*)(y_1 = \rho x_1,\ y_2 = \rho x_2,\ y_3 = \rho x_3)$

Un modello geometrico del piano numerico proiettivo reale

Curiosità

P. R. Halmos
Selected Research Contributions
New York, 1983

(Contributi di ricerca scelti)

Questa raccolta di scritti scientifici contiene articoli di **Calcolo delle Probabilità** e Teoria della Misura (anteriori al 1950) e di Teoria degli Operatori (posteriori al 1950). Una breve **nota** è dedicata al cosiddetto **Problema del matrimonio**, un problema di Calcolo Combinatorio così formulato da Philip Hall:
"Si supponga che ogni componente di un insieme (eventualmente infinito) di ragazzi conosca un insieme finito di ragazze. Sotto quali ipotesi è possibile che ogni ragazzo sposi una delle sue conoscenze femminili? "
La risposta è la seguente. Condizione necessaria e sufficiente è che ogni insieme finito di k ragazzi conosca complessivamente almeno k ragazze. Questo risultato, precedentemente trovato da **Weyl**, e, in maniera indipendente, da Everett e Whaples, viene qui ridimostrato in forma più semplice, come conseguenza di un noto teorema topologico di Tychonoff.

Reprinted from the
AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 72, pp. 214-215, 1950

THE MARRIAGE PROBLEM.*

By PAUL R. HALMOS and HERBERT E. VAUGHAN.

In a recent issue of this journal Weyl [1] proved a combinatorial lemma which was apparently considered first by P. Hall.[2] Subsequently Everett and Whaples [3] published another proof and a generalization of the same lemma. Their proof of the generalization appears to duplicate the usual proof of Tychonoff's theorem.[4] The purpose of this note is to simplify the presentation by employing the statement rather than the proof of that result. At the same time we present a somewhat simpler proof of the original Hall lemma.

Suppose that each of a (possibly infinite) set of boys is acquainted with a finite set of girls. Under what conditions is it possible for each boy to marry one of his acquaintances? It is clearly necessary that every finite set of k boys be, collectively, acquainted with at least k girls; the Everett-Whaples result is that this condition is also sufficient.

We treat first the case (considered by Hall) in which the number of boys is finite, say n, and proceed by induction. For $n = 1$ the result is trivial. If $n > 1$ and if it happens that every set of k boys, $1 \leqq k < n$, has at least $k + 1$ acquaintances, then an arbitrary one of the boys may marry any one of his acquaintances and refer the others to the induction hypothesis. If, on the other hand, some group of k boys, $1 \leqq k < n$, has exactly k acquaintances, then this set of k may be married off by induction and, we assert, the remaining $n - k$ boys satisfy the necessary condition with respect to the as yet unmarried girls. Indeed if $1 \leqq h \leqq n - k$, and if some set of h bachelors were to know fewer than h spinsters, then this set of h bachelors together with the k married men would have known fewer than $k + h$ girls. An

* Received June 6, 1949.

[1] H. Weyl, "Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space," *American Journal of Mathematics*, vol. 71 (1949), pp. 178-205.

[2] P. Hall, "On representation of subsets," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 10 (1935), pp. 26-30.

[3] C. J. Everett and G. Whaples, "Representations of sequences of sets," *American Journal of Mathematics*, vol. 71 (1949), pp. 287-293. Cf. also M. Hall, "Distinct representatives of subsets," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 54 (1948), pp. 922-926.

[4] C. Chevalley and O. Frink, Jr., "Bicompactness of Cartesian products," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 47 (1941), pp. 612-614.

application of the induction hypothesis to the $n-k$ bachelors concludes the proof in the finite case.

If the set B of boys is infinite, consider for each b in B the set $G(b)$ of his acquaintances, topologized by the discrete topology, so that $G(b)$ is a compact Hausdorff space. Write G for the topological Cartesian product of all $G(b)$; by Tychonoff's theorem G is compact. If $\{b_1, \cdots, b_n\}$ is any finite set of boys, consider the set H of all those elements $g = g(b)$ of G for which $g(b_i) \neq g(b_j)$ whenever $b_i \neq b_j$, $i, j = 1, \cdots, n$. The set H is a closed subset of G and, by the result for the finite case, H is not empty. Since a finite union of finite sets is finite, it follows that the class of all sets such as H has the finite intersection property and, consequently, has a non empty intersection. Since an element $g = g(b)$ in this intersection is such that $g(b') \neq g(b'')$ whenever $b' \neq b''$, the proof is complete.

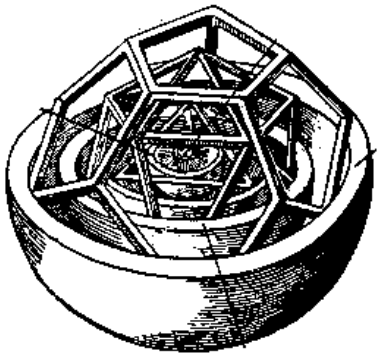
It is perhaps worth remarking that this theorem furnishes the solution of the celebrated problem of the monks.[5] Without entering into the history of this well-known problem, we state it and its solution in the language of the preceding discussion. A necessary and sufficient condition that each boy b may establish a harem consisting of $n(b)$ of his acqaintances, $n(b) = 1, 2, 3, \cdots$, is that, for every finite subset B_0 of B, the total number of acquaintances of the members of B_0 be at least equal to $\Sigma n(b)$, where the summation runs over every b in B_0. The proof of this seemingly more general assertion may be based on the device of replacing each b in B by $n(b)$ replicas seeking conventional marriages, with the understanding that each replica of b is acquainted with exactly the same girls as b. Since the stated restriction on the function n implies that the replicas satisfy the Hall condition, an application of the Everett-Whaples theorem yields the desired result.

UNIVERSITY OF CHICAGO
AND
UNIVERSITY OF ILLINOIS.

Johannes Kepler (Keplero)
nato il 27 dicembre 1571 a Weil, Württemberg,
morto il 15 novembre 1630 a Ratisbona

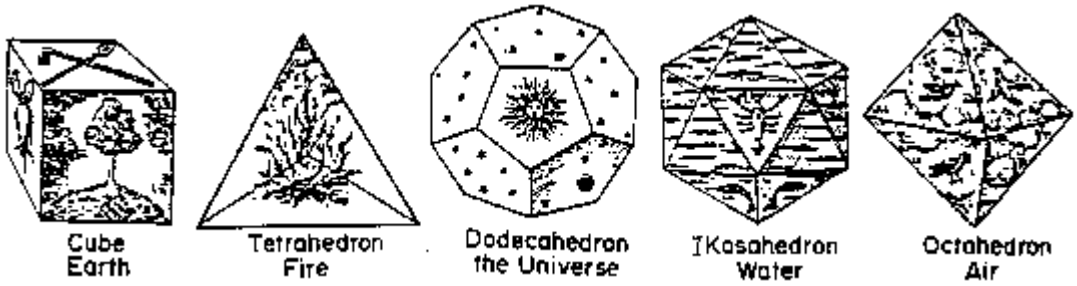


Fin dai tempi dei suoi studi all'Università di Tubinga, iniziati nel 1589, sotto la guida del maestro Mästlin, il giovane Keplero si era convinto della validità della teoria astronomica di **Copernico**: nella sua prima opera di rilievo, il ***Prodromus Dissertationum Cosmographicum continens Mysterium Cosmographicum*** (1596) egli addusse nuove importanti prove a sostegno del sistema eliocentrico. Egli ne inviò una copia a **Galileo**, che ne rimase colpito. In seguito lo scienziato pisano sarebbe entrato in polemica con Keplero per divergenze sulla visione dell'astronomia.
Nello stesso trattato Keplero espose anche una curiosissima idea sulla disposizione delle orbite dei corpi celesti allora conosciuti, che pare gli sia balenata per caso, nel corso di una lezione da lui tenuta nel luglio del 1595 all'università di Graz, in Austria, guardando un disegno che aveva appena tracciato sulla lavagna: si trattava della rappresentazione dei trigoni dello **zodiaco**, che gli fece venire in mente i **poliedri regolari**, quelli esposti da **Platone** nel ***Timeo***. Ed ecco cosa pensò di avere scoperto: la sfera sulla quale si muove ogni pianeta è circoscritta ad un diverso solido regolare, il quale, a sua volta, è circoscritto alla sfera di un altro pianeta, secondo il seguente ordine:



Clicca sull'immagine

Sfera di Saturno
Cubo
Sfera di Giove
Tetraedro
Sfera di Marte
Dodecaedro
Sfera della Terra
Icosaedro
Sfera di Venere
Ottaedro
Sfera di Mercurio



I poliedri disegnati da Keplero

I raggi delle orbite planetarie calcolati da Keplero sulla base di questo modello geometrico risultarono grosso modo in accordo con i valori stabiliti da **Copernico** (un po' meno con le misurazioni effettuate da **Tycho Brahe**, come egli ebbe modo di constatare di persona, qualche anno più tardi, una volta diventato suo assistente a Praga).

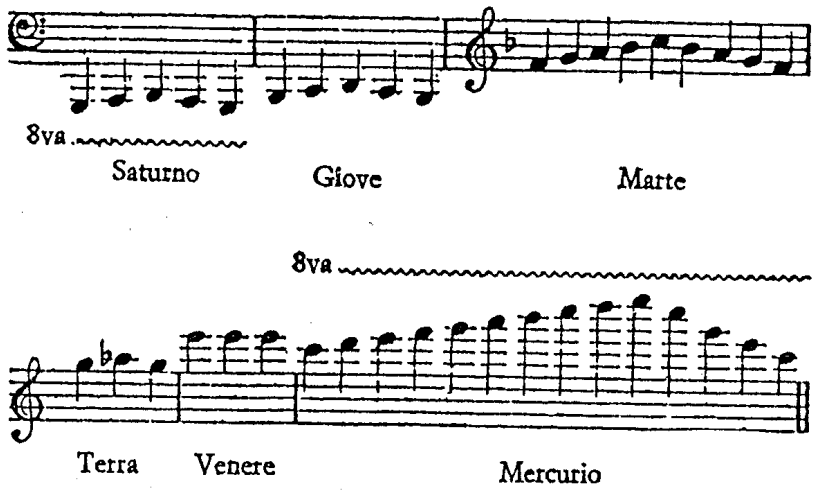
Le fantastiche speculazioni di Keplero si spinsero anche oltre, fino ad immaginare una sorta di classificazione gerarchica tra i solidi e a trarne deduzioni astrologiche sui pianeti. Perfino nella sua opera fondamentale, ***Harmonices mundi libri V*** (1619), troviamo ancora tracce di quel pensiero misticheggiante che ci riporta, incredibilmente, molto indietro nella storia della scienza, fino a certe magiche visioni di **Pitagora**. Ossessionato dall'idea di dover trovare, a tutti i costi, una conferma matematica dell'armonia divina insita nel Creato, ed una volta che le ricerche sulle distanze interplanetarie si erano rivelate infruttuose, pensò di rivolgere la sua attenzione alle velocità di rivoluzione dei corpi celesti. I suoi calcoli gli rivelarono che il rapporto tra la velocità minima (all'afelio) e la velocità massima (al perielio) era, per ogni pianeta, uguale ad un diverso intervallo musicale, come dimostra la tabella qui a lato:

♄	1′ 46″ *a* 2′ 15″ *b*	1′ 48″ / 2′ 15″ = 4/5	terza maggiore
2♃	4′ 30″ *c* 5′ 30″ *d*	4′ 35″ / 5′ 30″ = 5/6	terza minore
♂	26′ 14″ *e* 38′ 1″ *f*	25′ 21″ / 38′ 1″ = 2/3	quinta
☉	57′ 3″ *g* 61′ 18″ *h*	57′ 28″ / 61′ 18″ = 15/16	semitono
♀	94′ 50″ *i* 97′ 37″ *k*	94′ 50″ / 98′ 47″ = 24/25	diesis
☿	164′ 0″ *l* 384′ 0″ *m*	164′ 0″ / 394′ 0″ = 5/12	ottava piú terza minore.

Keplero, ovviamente, non credeva che il moto dei pianeti producesse un suono vero e proprio. Il suo era un accostamento puramente matematico tra la velocità angolare (di rivoluzione) e la nozione di frequenza (numero di giri nell'unità di tempo), che è poi quella che caratterizza i diversi toni. In questo linguaggio, ogni pianeta, che, durante la sua rivoluzione, varia la sua velocità, emette una certa gamma di toni, che percorrono un certo intervallo. Per associare ad ogni tono una nota del pentagramma, occorre innanzitutto normalizzare tutte le sue frequenze, in modo che i loro rapporti siano minori di *1:2*, cioè interni ad un'ottava. Ciò si realizza dividendo le velocità angolari per un'opportuna potenza di due, come in tabella:

Velocità di Saturno all'afelio	divisa per 2^0 =	1′ 46″
al perielio	divisa per 2^0 =	2′ 15″
Velocità di Giove all'afelio	divisa per 2^1 =	2′ 15″
al perielio	divisa per 2^1 =	2′ 45″
Velocità di Marte all'afelio	divisa per 2^3 =	3′ 17″
al perielio	divisa per 2^4 =	2′ 23″
Velocità della Terra all'afelio	divisa per 2^5 =	1′ 47″
al perielio	divisa per 2^5 =	1′ 55″
Velocità di Venere all'afelio	divisa per 2^5 =	2′ 58″
al perielio	divisa per 2^5 =	3′ 3″
Velocità di Mercurio all'afelio	divisa per 2^6 =	2′ 34″
al perielio	divisa per 2^7 =	3′ 0″.

I toni vanno poi ricollocati nelle rispettive ottave di appartenenza: queste ultime sono individuate dall'esponente di *2*. Così, ad esempio, la nota di Saturno e della Terra all'afelio è la stessa, il sol, ma vi sono cinque ottave di differenza. Ecco le note dei pianeti segnate sul pentagramma:



E allora, i toni di pianeti vicini sono consonanti o no? Keplero, nella sua smisurata curiosità musicale, si mette a confrontare il tono più basso del pianeta superiore con quello più alto del pianeta inferiore (*intervallo divergente)* e il tono più alto del pianeta superiore con quello più basso del pianeta inferiore (*intervallo convergente).* Ed ecco i risultati dei suoi calcoli:

Pianeti	Intervallo divergente	Intervallo convergente
Saturno - Giove	1:3	1:2
Giove - Marte	1:8	5:24
Marte - Terra	5:12	2:3
Terra - Venere	3:5	5:8
Venere - Mercurio	1:4	3:5

In quasi tutti i casi la consonanza è pressoché perfetta, tranne che tra Giove e Marte.

Quanto abbiamo esposto finora rientra senz'altro nel campo delle curiosità. Galileo rimproverò duramente Keplero per avere trasceso a speculazioni tipiche dell'occultismo ed estranee al campo delle scienze esatte. Naturalmente, il posto fondamentale che Keplero occupa nella storia dell'astronomia è dovuto a ben altro: alle **tre leggi** sul moto planetario.

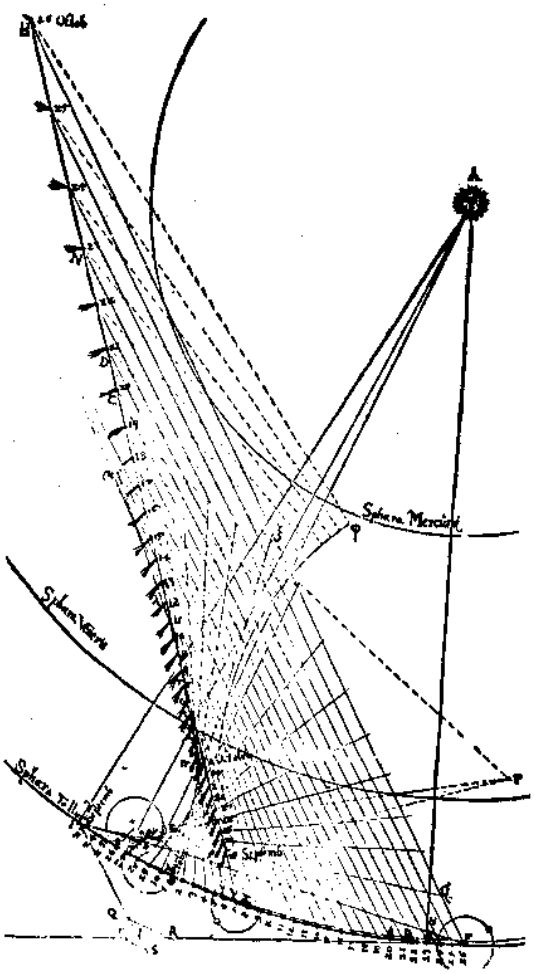
In campo matematico, Keplero ebbe intuizioni che anticiparono l'avvento di grandi novità. Il metodo da lui impiegato per determinare aree e volumi è fondato su di una tecnica che, ripresa da **Bonaventura Cavalieri**, aprirà la strada al ***calcolo integrale***. E dire che tutto cominciò in un giorno del 1612, durante un'annata particolarmente buona per il vino, quando a Keplero venne la voglia di **calcolare il volume di una botte**! Il suo contributo fu forse il primo progresso significativo dai tempi del trattato ***Sulla sfera e sul cilindro*** di **Archimede**.

In geometria Keplero introdusse l'idea di "punto all'infinito", compiendo, forse inconsciamente, il primo, determinante passo fuori dalla **geometria euclidea**.

Alla morte di Tycho Brahe, Keplero gli successe come astronomo alla corte di Rodolfo II d'Asburgo. All'imperatore egli dedicò le **tavole** astronomiche pubblicate a Ratisbona nel 1596, che da allora sono note col nome di *rudolfine*.

Keplero fu anche studioso di ottica; nel trattato ***Ad Vitellionem*** ("dedicato a Witelo"), apparso nel 1604, espose la teoria delle lenti. Contese a **Galileo** la paternità dell'invenzione del **cannocchiale**.

Keplero osservò la cometa apparsa nel 1607, che avrebbe, successivamente, preso il nome di **cometa di Halley**. Ne studiò la traiettoria, giungendo all'errata conclusione che la sua orbita fosse rettilinea.



Curiosità

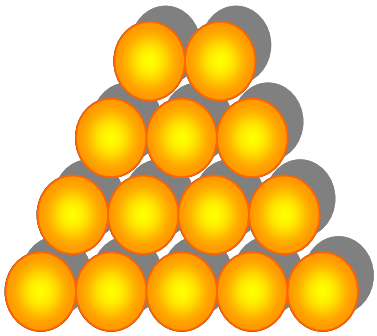
- Keplero scrisse, nel 1634, la prima opera di fantascienza della storia, alla quale si ispirarono molti altri autori del Seicento e dei secoli successivi fino a Jules Verne. Il racconto, intitolato

Somnium seu opus posthumum de astronomia lunari, narra di immaginari abitanti della Luna, che l'autore descrive come esseri di dimensioni enormi, di "natura serpentina", che chiamano "Volva" la nostra Terra. All'epoca molti, tra cui l'astronomo olandese **Huyghens**, erano convinti dell'esistenza di queste creature extraterrestri, chiamate *seleniti.*

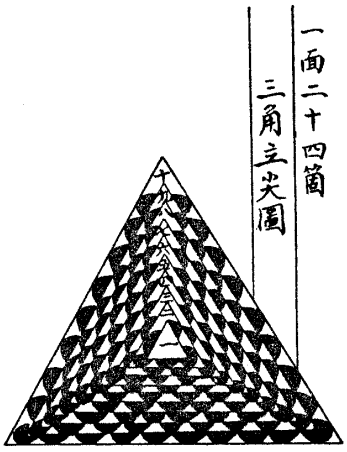
- Keplero scrisse anche un **trattato sulla forma dei fiocchi di neve**.

Il problema delle palle di cannone

Un problema di logistica è diventato, per la sua difficoltà, il più famoso enigma della geometria discreta. Per molti secoli i matematici, tra cui grandi nomi come **Keplero** e **Gauss**, si sono arrovellati intorno alla seguente domanda: qual è il modo migliore di accatastare delle sfere? Come si può realizzare la massima densità possibile (più sfere in meno spazio)? Keplero congetturò che la disposizione ottimale fosse quella piramidale:



che, d'altronde, è quella normalmente scelta dai commercianti per sistemare i mucchi di arance al mercato, e, nei secoli passati, dagli artiglieri per le palle di cannone. Per molto tempo gli studiosi, pur essendo sicuri di poter dare ragione a Keplero, non hanno saputo conseguire la certezza assoluta: hanno invano cercato una giustificazione matematica rigorosa. Non a caso la congettura è presente nella lista dei **23 problemi** che **Hilbert** considerava le maggiori sfide per i ricercatori del Novecento. Ci sono voluti quattro secoli perché questo traguardo potesse essere raggiunto: la notizia è del 9 agosto 1998. In questa data **Thomas Hales**, un matematico dell'Università del Michigan, Stati Uniti, ha annunciato di aver finalmente risolto il problema, con 250 pagine di dimostrazione ed un programma di computer da 3 gigabytes.



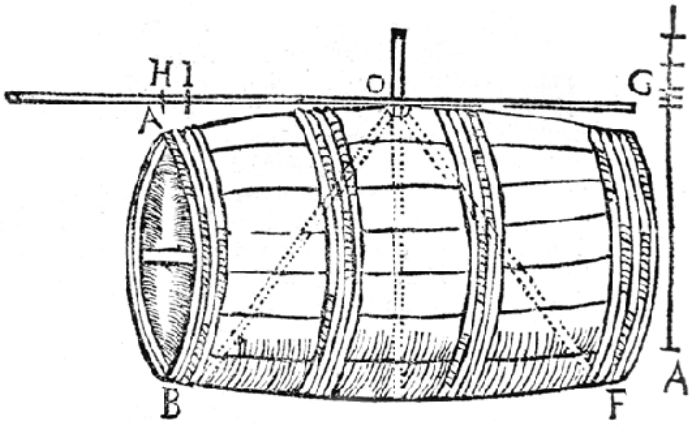
Una piramide di sfere vista dall'alto, da un trattato cinese del 1558

Il calcolo del volume di una botte

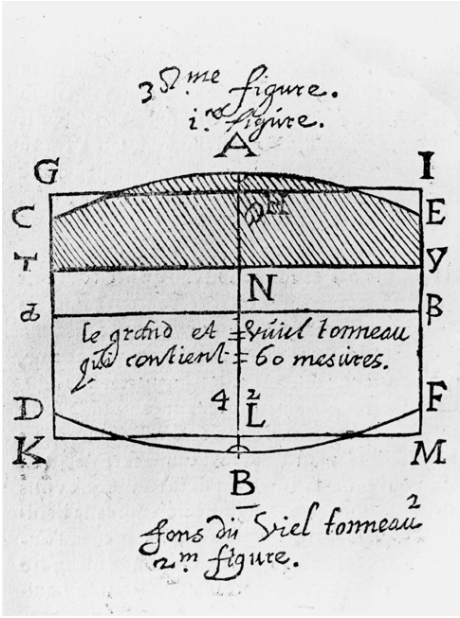


È questo un problema antichissimo, di cui già si occupò **Archimede** nel suo trattato di stereometria, ***Sulla sfera e sul cilindro***. Formule di risoluzione sono state proposte, nel corso dei secoli, fino in epoca moderna. Anche **Keplero** dette il suo contributo, nella opera ***Nova stereometria doliorum*** del 1615, che può essere considerata come un'anticipazione del **calcolo infinitesimale**.

Alcune pagine storiche



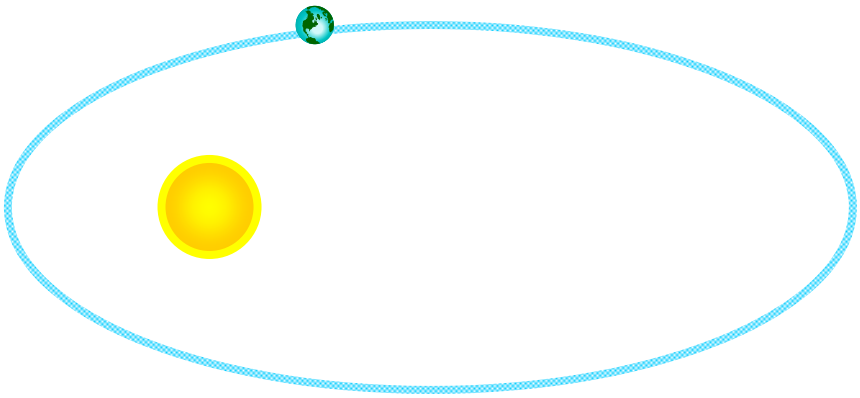
da: A.Metius, *Arithmetica Libri Duo et Geometriae Libri VI*, sec. XVII



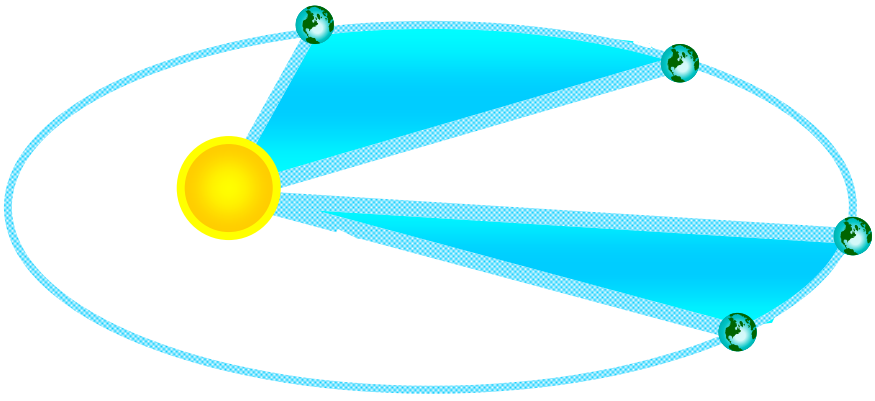
da: Michele Connette (Coignet), *La Géométrie*, Paris 1626.

Le tre leggi di Keplero sul moto planetario

Le prime due leggi, presentate da **Keplero** nell'***Astronomia nova*** (1609), abbatterono millenarie convinzioni sul moto dei pianeti: tutti, prima di lui, avevano creduto che le orbite fossero circolari, o almeno combinazioni di più cerchi. Secondo la ***Prima Legge*** queste sono invece tutte di forma ellittica. Il Sole si trova non nel centro, ma in uno dei **fuochi** di ognuna delle ellissi descritte dai pianeti.



Un'altra supposta regolarità del moto dei pianeti viene a cadere con la ***Seconda Legge***; la velocità non è costante, ma varia continuamente secondo la regola seguente: il segmento congiungente la stella ed il pianeta spazza in tempi uguali aree uguali.

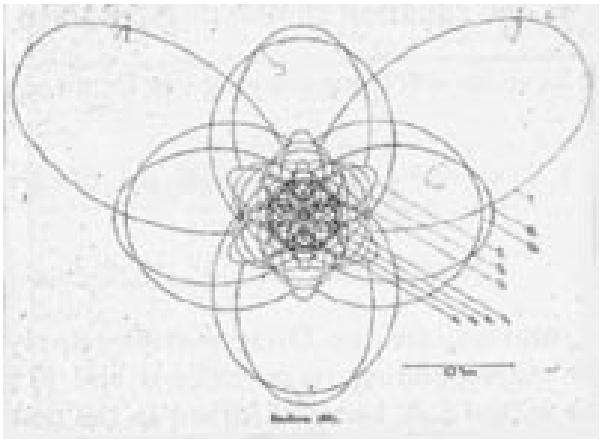


La scoperta di queste due leggi presuppone una conoscenza approfondita delle **sezioni coniche**: in effetti Keplero compì studi sull'argomento, che pubblicò nel 1604 col titolo ***Ad Vitellionem Parapolimena*** (*Introduzione all'Ottica di Witelo).* In quest'opera egli

introdusse il termine “fuoco” e mosse i primi passi in direzione della **geometria proiettiva**, anticipando di circa trent’anni la teoria che sarebbe stata poi sviluppata da **Desargues**.

La ***Terza Legge*** compare nell’opera monumentale ***Harmonices mundi libri V***. Essa stabilisce che il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è uguale al cubo della sua distanza media dal Sole, purché si prenda come unità di misura del tempo il periodo di rivoluzione della Terra (anno solare) e come unità di misura della distanza la sua distanza media dal Sole.

Secondo il **modello planetario dell’atomo** sviluppato dal fisico **Ernest Rutherford** (1871-1937), gli elettroni descriverebbero, intorno al nucleo, traiettorie ellittiche.



Keplero e la forma dei fiocchi di neve

Keplero fu affascinato dalla **simmetria** delle strutture **poligonali** e **poliedriche** in natura: la sua **curiosa visione** geometrica del cosmo ne è la prova più evidente. A questo argomento egli dedica un suo scritto poco noto, che offre come strenna natalizia ad un dignitario dell'imperatore di Boemia. La dedica così esordisce:

All'Illustre Signor Consigliere aulico
di sua Maestà l'Imperatore
Johannes Matthäus Wackher von Wackhenfels,
Cavaliere del Vello d'Oro e titolare di molte altre distinzioni,
mecenate della gente di lettere e dei filosofi,
mio protettore e benefattore.

Non è che io non sappia quanto Voi amiate il Nulla, […] Così mi è facile presumere che un regalo vi sarà tanto più gradito quanto più esso sarà prossimo al Nulla.
*Qualunque sia l'oggetto che vi aggradi come evocazione del Nulla, bisogna che esso sia di tenue importanza, di piccola misura, di prezzo minimo, e che non sia granché durevole, cioè che sia quasi Nulla. Nella natura, queste cose abbondano e una scelta si impone. […] non pensiate alla terra e ai tesori del mio caro **Archimede**, che ha ridotto la terra in sabbia e che fa stare diecimila piccoli granelli di polvere in un solo seme di papavero[1]. […] la figura di questi corpuscoli sfugge alla vista […] Non c'è dunque, in essi, alcun carattere proprio, alcuna attrattiva […] Per di più se c'è una cosa durevole, è proprio la polvere, come quella che stabilisce il suo dominio sulle travi consumate dal tempo e rose dalla carie. Se Vi offro ciò, Vi darò dunque troppo. […]*
Vogliate dunque ricevere in tutta serenità questa approssimazione del Nulla e, se Voi l'apprezzate, trattenete il fiato, per paura di ritrovarVi con Nulla.
A dire il vero, si fa dissertare Socrate sul salto di una pulce[2]. Ecco allora perché esaminare il motivo per cui le nevi, alla loro prima caduta, prima di aggrovigliarsi in fiocchi più grossi, sono sempre esagonali, e hanno, ogni volta, sei raggi vellutati come piccole piume."

Keplero arriva a elencare cinque diverse possibili ragioni, tutte molto fantasiose, per la forma esagonale dei **fiocchi di neve**. Ma egli stesso riconosce che nessuna di queste risulta inattaccabile.

---

[1] Il riferimento è all'opera **Arenario**.
[2] Il riferimento è alla commedia parodistica *Le Nuvole* di Aristofane.

- **PRIMA RAGIONE** Tra i poligoni regolari, l'esagono è il primo poligono regolare che non compare come faccia di nessuno dei cinque poliedri regolari: il **tetraedro**, l'**ottaedro** e l'**icosaedro** hanno le facce triangolari, il **cubo** le ha quadrate, il **dodecadro** le ha pentagonali.

- **SECONDA (E TERZA RAGIONE)** L'esagono dà origine ad una **tassellatura** del piano (più precisamente, è il poligono regolare più prossimo al cerchio ad avere questa proprietà).

- **QUARTA RAGIONE** La simmetria esagonale è tipica del mondo inanimato, quella pentagonale è tipica del mondo animale e vegetale.

- **QUINTA RAGIONE** La forma esagonale è il riflesso dell'anima creatrice della natura.

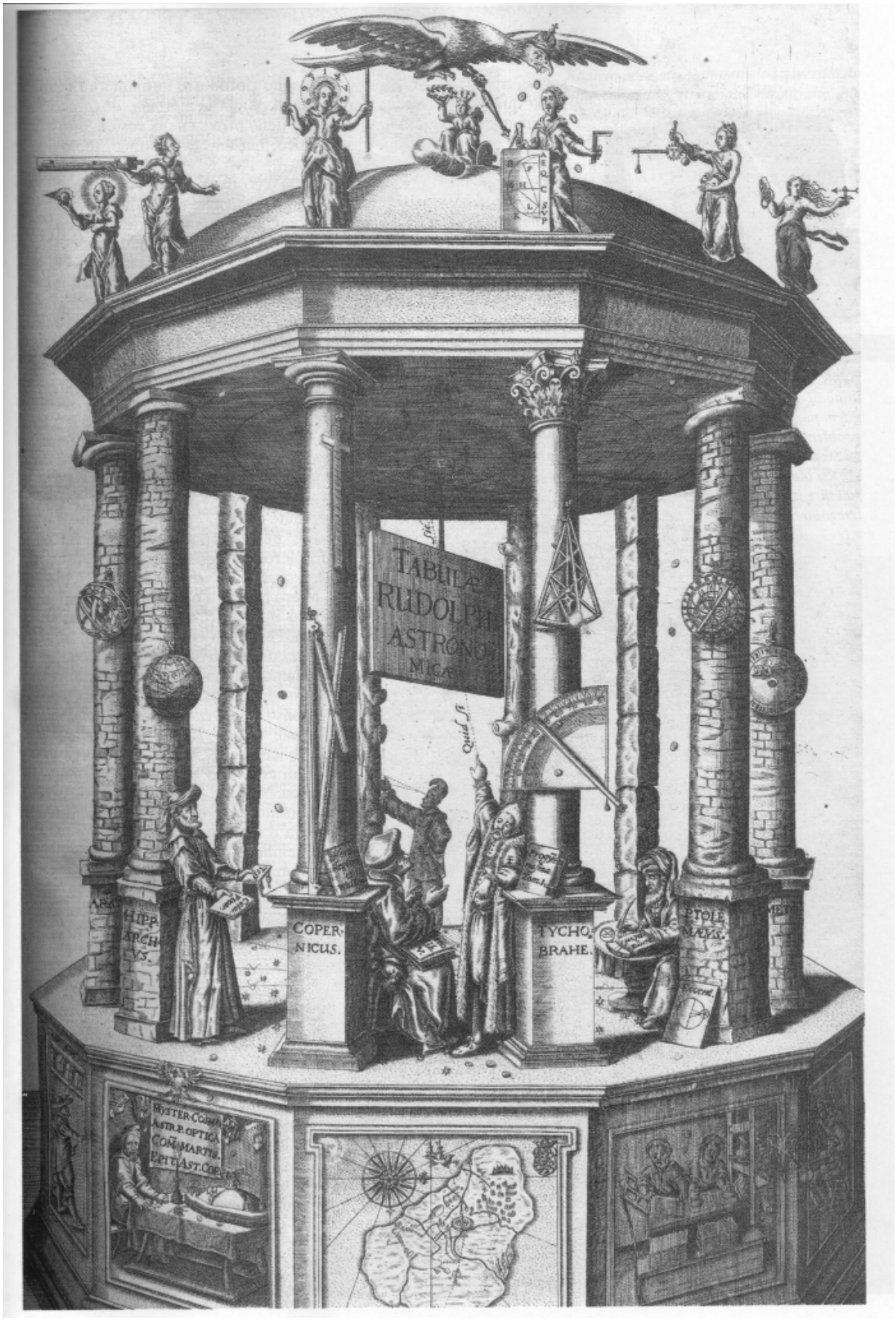
La quarta ragione sembra essere smentita dall'evidenza che certi fiori, come i gigli, hanno i petali suddivisi in gruppi di tre o di sei.
D'altra parte è vero che questa struttura si riscontra solo nei fiori che non producono frutti, gli altri presentano una forma quinaria.

La quinta ragione è ancora più difficile da sostenere, visto che tra i minerali sono rappresentate tutte le strutture poliedriche possibili.

Keplero non giunge dunque a nessuna conclusione, e chiude la sua opera invitando il lettore a trovare lui stesso la risposta al quesito.

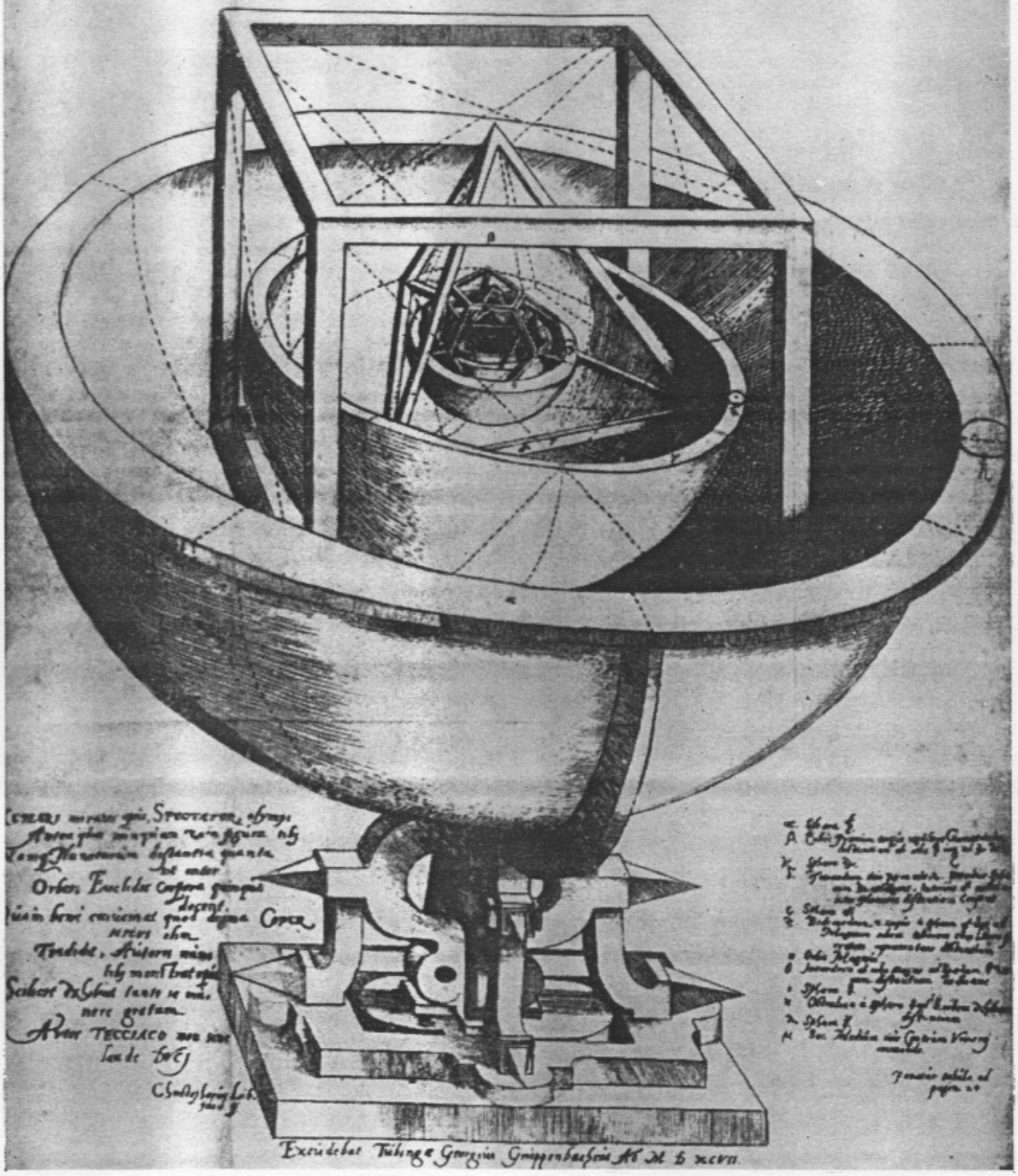
Anche **Descartes**, nel saggio ***Les Météores***, aveva affrontato, sia pur con un approccio più rigorosamente fisico, lo stesso problema della formazione dei cristalli di ghiaccio.

Il senso di Smilla per la neve: i cristalli di ghiaccio


TABULÆ
RUDOLPH
ASTRONO
MICÆ
COPER-
NICUS.
TYCHO
BRAHE.
HIPP
ARCH
VS.
PTOLE
MÆVS.
MYSTER. COSMO
ASTR. P. OPTICA
COM. MARTIS.
EPIT. AST. COP.

TABVLA III. ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.

ILLVSTRISS. PRINCIPI, AC DNO. DNO. FRIDERICO. DVCI WIRTENBERGICO, ET TECCIO, COMITI MONTIS BELGARVM, ETC. CONSECRATA.

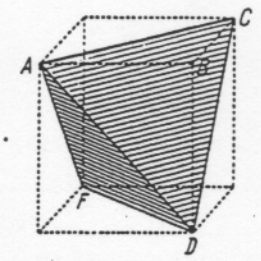


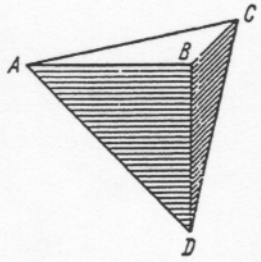
Excudebat Tubingæ Georgius Gruppenbachius Ao. M. D. XCVII.

In priori figurâ apparet Tetraëdron ACDF latens in Cubo, sic ut quodlibet Tetraëdri planum ut ACD, tegatur ab uno cubi angulo ACDB.

In secunda figura apparet Cubus AED latens intus in Dodecaëdro, sic ut quodlibet Cubi planum, ut AED, tegatur à duobus Dodecaëdri angulis seu PentaëdroABCDE quod est sectile in tria Tetraëdra dissimilia per duo plana, DCA, et ABD.

Intra Tetraëdron est Dodecaëdron 3. Vltima primariarum, similis scilicet *Compositae* ex Cubi partibus, Tetraëdri similibus, id est, ex Tetraëdris irregularibus, quibus tegitur Cubus intus. Huic succedit 181
Icosaëdron 4. ob similitudinem, ultima secundariarum, angulo solido plurilineari utentium. Intimum est Octoëdron 5. Cubi simile, et prima





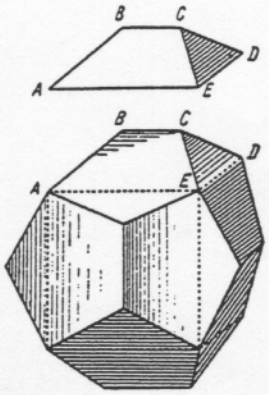
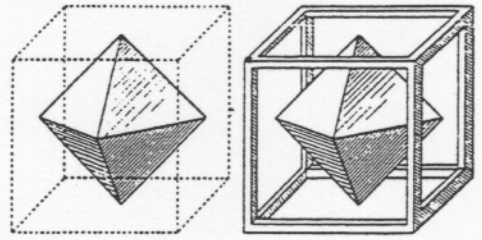
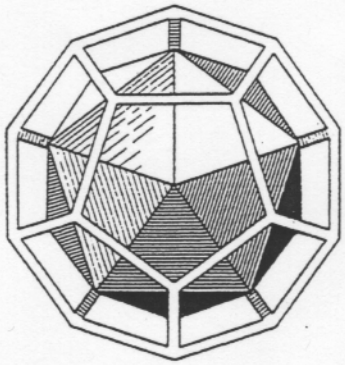
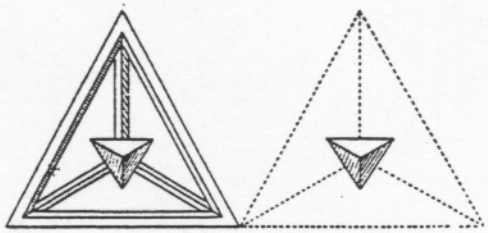


figura secundariarum, cui ideò primus locus interiorum debetur, quippe inscriptile: uti cubo circumscriptili primus exteriorum.

Sunt autem notabilia duo veluti conjugia harum figurarum, ex diversis combinata classibus: Mares, Cubus et Dodecaëdron ex primarijs; 10
foeminae, Octoëdron et Icosiëdron ex secundarijs; quibus accedit una veluti coelebs aut Androgynos, Tetraëdron; quia sibi ipsi inscribitur,







Hic vides Octaëdron inscriptum Cubo; Icosiëdron Dodecaëdro, Tetraëdron Tetraëdro.

ut illae foemellae maribus inscribuntur et veluti subjiciuntur, et signa sexus foeminina masculinis opposita habent, angulos scilicet planiciebus.

Praetereà ut Tetraëdron est elementum, viscera et veluti costa Cubi Maris; sic Octaëdron foemina, est elementum et pars Tetraëdri, aliâ ratione: ita mediat Tetraëdron in hoc conjugio.

7) inscriptili

ING. PASQUALE FANTASIA

GUIDA

ALLA

MISURAZIONE DEL VOLUME DELLE BOTTI

CON UN'APPENDICE

SUL CALCOLO DELLE DIMENSIONI DELLE BOTTI

di data forma e capacità

UNIVERSITA' DI BARI
BIBLIOTECA della FACOLTA' di SCIENZE
N.° d' Inventario 3481



AVELLINO & C.
STABILIMENTO TIPOGRAFICO
Bari — Piazza Massari 4 e 5 | Giovinazzo — R. Ospizio Vitt. E. II.
1895



Al lettore

Il geometra è spesso chiamato, specie nelle Puglie, a determinare la capacità di una botte od a misurarne il volume del pieno, quand' essa non è interamente riempita. Di questo problema, tanto importante nella pratica del commerciante e del finanziere, si sono occupati parecchi illustri matematici; ma non riesce facile a tutti di procurarsi o di leggere le loro memorie su tale argomento, per essere molte di esse scritte in lingua straniera ed alcune affatto rare.

È poi frequente il caso di trovare in qualche manuale di stereometria applicata le formule relative al quesito accennato, senza nessuna traccia di dimostrazione; il che può non essere indifferente per lo studioso e per l' insegnante nelle scuole di arti e mestieri. Questi massime dovrebbe conoscere, fino alle minime particolarità, la teoria delle formule dettate ai suoi allievi, per suggerirne o sconsigliarne l' uso, secondo la forma della botte a misurarsi ed il grado di esattezza che si desidera. Soltanto così può egli rendere facile e proficuo il suo insegnamento pratico; e gli alunni potranno rimanerne soddisfatti ed avvantaggiarsene poi nella pratica.

Ora, per quanto mi consta, manca da noi un libro,

dove questa parte della geometria pratica trovasi trattata con quel rigore scientifico e quell' estensione che merita. Mi è parso quindi utile di riepilogare in queste pagine le ricerche fatte finora sull' importante argomento. Esse perciò non contengono nulla di nuovo, se tali non possono chiamarsi certe formule dedotte da quella relativa alla curva parabolica per le doghe, ed alcune osservazioni ondate sugli esperimenti fatti per le botti di costruzione pugliese.

Aderendo al desiderio di taluni miei ex-allievi della scuola di arti e mestieri, annessa una volta a questo R. Istituto, ho aggiunto in una breve appendice parecchi problemi utili all' arte del bottaio ed una tabella, per facilitare il calcolo del volume delle botti.

Se questo lavoruccio potrà riuscire di utile guida ai miei allievi, che più volte me ne hanno richiesto, mi terrò soddisfatto della fatica durata.

Rendo qui pubbliche grazie al geometra Francesco Ruta, ex-allievo di questo R. Istituto tecnico, ed al Sig. Michele Barbone, proprietario di una grande fabbrica di botti in questa città, per i mezzi e per l' aiuto prestatomi nell' eseguire gli esperimenti.

Bari, Gennaio 1895.

P. FANTASIA

I.

CENNO STORICO

1. La determinazione del volume delle botti è stata oggetto di studio di parecchi insigni matematici. Il celebre *Keplero*, fra i suoi scritti immortali, ci ha lasciata una *stereometria doliorum* (delle botti). Dopo di lui il *Lambert*, l'autore delle lettere scientifiche pubblicate per cura del Bernoulli, ha trattato l'importante quesito in due memorie comparse nei « *Beiträge zum Gebrauche der Matematik und deren Anwendung durch I. H. Lambert*, Parte I, Berlino 1765, pag. 314; e Parte II, Berlino 1777, pag. 12 ». Però questo grande matematico, contro la sua usanza, non ha mai data una dimostrazione rigorosa della sua formula, che anche oggi è ritenuta per la più esatta. Pare anzi che l'abbia trovata a via di tentativi ed esperimenti, se deve giudicarsi da quanto egli asserisce nelle due memorie citate, che cioè « a stretto rigore la formula è fondata su di una specie di *Tatonnement* ».

2. Dopo del Lambert il *Kästner* si occupò dello stesso argomento. Questo illustre matematico (1), deplorando

(1) *A. G. Kästner*, professore nell'Università di Gottinga, scrisse parecchie opere di matematica ed una storia di questa scienza. Fu il primo a trovare che il problema dei quattro

che ai suoi tempi si procedeva troppo praticamente in un quesito di tanta importanza, così si esprime, nel suo solito modo faceto, nel « *Leipziger Magazin für reine und angewandte Matematik*, 1789, pag. 69 »:

« Credo che chi voglia far quattrini coll'applicazione della matematica deve cercare di attenersi sempre un pò più alla teoria; chi ha mente, ma non ha a ciò attitudine, ne lasci ad altri la cura. Perchè debbono i matematici sciupare tempo e cervello, per dar regole al così detto pratico, che può poi usarle senza alcuna fatica e riflessione? Neanche un « *grazie* » costa tale dabbenaggine. Appunto, per essersi i matematici spesso così abbassati, si è dimenticato che la loro scienza, sovente la parte sublime di questa, era necessaria per trovare tali regole, e renderle adatte per la pratica; sicchè ognuno, dal finanziere allo stazzatore di botti, ritiene oggi la matematica un' inutile fantasticheria.

« Non così semplici sono stati i giuristi, che non hanno rese popolari le cognizioni legali attinenti al civile consorzio, in modo che ogni borghese o contadino po-

---

punti, chiamato anche oggi col nome del francese Pothenot, è dovuto all' olandese Snell. Ecco com' egli si esprime sul proposito nella prefazione alle sue memorie di geometria: « così trovai, non è molto, il problema della cinquantunesima memoria, pag 273, in *Willebrod Snellius:* **Erathosthenes Batavus**, Leiden 1617 ».

E più oltre a p. 5: « È stato perciò Snellius, che ha risoluto questo problema trigonometricamente e Pothenot non è il primo inventore di esso; ma molto probabilmente ignorava la soluzione di Snellius. Se Snellius fosse stato noto al Signor De Montesson (*che in un suo scritto attribuiva al Pothenot la soluzione del detto problema*), questi avrebbe forse detto: Snellius ha adoperato il metodo di Pothenot, come Cassini di Thury dice: Snellius, per la misurazione del grado, ha adottato il metodo degli astronomi francesi, invece di dire: gli astronomi francesi..... come Snellius. La figura rettorica si chiama, io credo, ὕστερον πρότερον. »

tesse servirsene, senza ricorrere ad ulteriori spiegazioni. Eglino hanno piuttosto avuta l' accortezza di complicare precetti, che già lo stesso criterio naturale insegna, con formule solenni; affinchè i legulei posteriori, ed ancor più chiunque vuol salire un pò in alto, dovessero andare a scuola per imparare le Pandette.

« La scusa ordinaria che le teorie matematiche debbono escludersi nella pratica deriva da ciò, che per ufficii, spesso molto importanti nella vita comune, si ritiene adatta gente, che non sa alcun che di teoria e non può perciò applicare convenientemente quella già nota e molto meno proporsi dei pratici quesiti, come p. e. questo: *trovare la forma ed il volume di una botte coll' uso delle recenti teorie.*

« Che i matematici, almeno fin dai tempi di Keplero, abbiano, per la soluzione di tale quesito, applicate spesso le teorie superiori, è noto a chiunque sa un pò di storia dell' *arte del misurare;* ma è altresì noto che, in un argomento di tanta importanza pel traffico e pel commercio, si è proceduto in tutt' altro modo che matematico; e di questo ingiusto procedimento ne risente chiunque non è assolutamente astemio. »

Da queste argute parole del Kästner si può argomentare che, prima di lui, il problema citato non era stato trattato con quel rigore scientifico che meritava, e che per la sua soluzione non si erano applicate le teorie del calcolo integrale, già molto progredite in quel tempo.

3. Fin dal 1770 il matematico napoletano Caravelli considerò il profilo longitudinale della doga come un arco di cerchio. Secondo quest' autore la botte è un solido di rotazione, generato da un arco di circolo che rota intorno ad una retta parallela alla corda ed a questa

più vicina che il diametro. Egli nel IV libro della sua geometria spiega il procedimento, per trovare il volume di tal solido; ma non dà alcuna formula (1).

4. Nel 1786 l' *Oberreit,* supponendo pel profilo delle doghe un arco di parabola, giunse ad una formula diversa e più esatta di quella del Lambert. E già a quei tempi si erano dovute considerare, forse dal Kästner, altre curve per la forma delle doghe; perchè Oberreit dai risultati ottenuti dagli esperimenti di confronto concluse: « *che la curva parabolica è propriamente quella che più si approssima alla verità* (2). Egli perciò stabilì per la forma della botte quella di un segmento di paraboloide a due basi.

5. Il Tucci, nel suo trattato di voltimetria (3), assumendo per la forma della doga l'arco ellittico, trovò per mezzo del calcolo integrale la stessa formula del Lambert. E già, prima di lui, il Brunacci, considerando la botte come un segmento di ellissoide a due basi, aveva dimostrata la regola pratica data dall'astronomo Oriani (4). Il Tucci si occupò anche del problema di determinare il contenuto di una botte non interamente riempita; ma la formula, a cui giunse, richiede calcoli troppo lunghi e laboriosi per la pratica.

6. Verso il 1842 il milanese A. Carnevalli propose al Governo austriaco un metodo geometrico (una stazza) per determinare la capacità delle botti. La stazza del Carnevalli, sperimentata per diversi anni, fu giudicata

---

(1) Vedi: **Caravelli**, *Elementi di matematica.* Tomo IV, pag. 138, Napoli 1770.

(2) Vedi: *Leipziger Magazin für reine und angewandte Matematik.* Annata 1786, pag. 454.

(3) **Paolo Tucci.** *Misura delle volte,* pag. 203, Napoli 1832.

(4) **Brunacci.** *Matematica sublime,* Tomo II, pag. 100.

disadatta pel servizio delle gabelle da una Commissione all' uopo nominata. Lo Stampfer, membro di questa e professore di Geodesia nel Politecnico di Vienna, fu allora incaricato di trovare un metodo di stazzatura che convenisse per qualunque specie di botti; perchè la stazza austriaca dava risultati giusti soltanto per botti di una determinata forma. Nello stesso tempo altri matematici si occuparono del medesimo problema, e furono presentate diverse memorie all'Accademia imperiale delle scienze di Austria, che prescelse quella di Stampfer. La memoria di questo professore, pubblicata negli atti di detta Accademia, annata 1849, fascicolo di Aprile, porta il titolo: « *Uebersichtliche Darstellung der Auflosung der Aufgabe, eine möglichst brauchbare geometrische Visirmethode zu finden.* »

7. Fino al 1853 si era supposta per le doghe la curva ellittica o parabolica e non si era sperimentato l' arco di cerchio. Il Grunert, professore nella Reale Università di Greifswald, partendo dall' ipotesi dell' arco di cerchio per la forma delle doghe, giunse ad una formula, che dà risultati poco differenti da quelli ottenuti nell' ipotesi delle doghe paraboliche. La dotta memoria di questo illustre professore trovasi pubblicata nello *Archiv der Mathematik und Phisik mit besonderer Rücksicht auf. Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.* Dopo di lui *Matthieu* e *Séguier*, membri dell' Accademia francese, ammettendo per le doghe un arco di cerchio raccordato con due linee rette, trovarono una formula più semplice di quella del Grunert e che dà ancora risultati più prossimi al vero, per botti di costruzione ordinaria.

8. Nel 1859 *M. Belval*, considerando il volume della botte equivalente a quello di un cilindro avente per

diametro della base la semisomma dei diametri della pancia e del fondo e per altezza la lunghezza della botte, potè costruire una stazza semplicissima, il cui uso è molto esteso oggidì. Questa stazza fondata su retti principii e su di un' ipotesi che più si avvicina al vero, per la maggior parte delle botti, si distingue essenzialmente dalle altre finora proposte ed è quella che più risponde allo scopo. La relazione di *Matthieu* e *Séguier* sulla memoria di Belval « *Essai sur une nouvelle jauge construite par M. Belval* » trovasipubblicata nei « *Comptes rendus de l' Académie des sciences de Paris* » fascicolo del 10 Gennaio, 1859.

9. Il Dott. Giuseppe Herr, che succedette a suo suocero Stampfer come professore di Geodesia nel Politecnico di Vienna, migliorò la stazza di Stampfer e la ridusse da misure viennesi a misure metriche. La memoria del Dott. *Herr*: « *Anleitung zur Gebrauche des Stampfer-schen Visirstabes* » fu pubblicata nel 1873.

L' equazione posta a base della stazza costruita da Herr è:

$$I = A\ L\ B^2 \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dinotando I il volume della botte, L la lunghezza *esterna*, cioè la distanza fra le faccie esterne dei fondi, B il diametro interno della pancia, C il diametro *esterno* dei fondi ed A una costante da determinarsi sperimentalmente. *Herr* scelse per A un valore tale, che la formula citata dava colla maggiore esattezza possibile i volumi di 162 botti di diversa forma e nazionalità, la cui capacità era stata già determinata esattamente mediante il

peso netto di ciascuna botte; sicchè la stazza può servire per qualunque forma di fusti.

Essa consta di un regolo a sezione rettangolare di 21 mm. per 14 e della lunghezza di circa 1,51 m. Sulla faccia stretta superiore è segnata una graduazione dinotata con D e sulla faccia opposta trovasi un'altra scala dinotata con L. Sulle due facce verticali più larghe sono segnate altre due graduazioni indicate rispettivamente con S ed I, le quali però non sono strettamente necessarie, potendo venir sostituite da apposita tabella. Un cursore prismatico, con due indici applicati alle facce più larghe e segnati rispettivamente colle lettere s ed i, può scorrere sulla stazza e venir fermato con vite di pressione.

Per ottenere ora il volume di una botte, si misura colla stazza il diametro interno della pancia e si legge sulla graduazione dinotata con D; indi si misura la lunghezza esterna e si legge sulla graduazione L; infine si misura il diametro esterno dei fondi e si legge anche sulla graduazione indicata con D. Siano rispettivamente l, b, c le tre letture corrispondenti ad L, B e C, ottenute sulle graduazioni L e D; si sommano l, b, c e $\frac{1}{2}(b \cdot c)$, si fa scorrere il cursore finchè l'indice s coincide colla divisione che indica la somma ottenuta S e si legge, sulla scala dinotata con I, la divisione coincidente coll'indice i. La lettura dà in litri il volume della botte.

La ragione di questo procedimento sta nell'equazione

$$I = A\ L\ B^2 \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

su cui è fondata la costruzione della stazza descritta. Difatti si ha:

$$log.I = log.A + log.L + 2\,log.B + \tfrac{1}{2}\,log.C - \tfrac{1}{2}\,log.B$$

Aggiungendo e sottraendo al secondo membro *log. B* e *log. C*, si ottiene:

$$log.I = log.A + log.L + log.B + log.C + \tfrac{1}{2}\,log.B - \tfrac{1}{2}\,log.C$$

Ora le letture *l*, *b*, e *c* eseguite sulle graduazioni dinotate con *L* e *D* non sono altro che rispettivamente *log. L*, *log. B* e *log. C*, riportati in lunghezza sulla stazza, e parimenti $\frac{1}{2}\,(b-c)$ esprime la differenza $\frac{1}{2}$ *log. B* — $\frac{1}{2}$ *log. C*. Sulla graduazione dinotata con *S* sono riportate in millimetri le somme di questi numeri; mentre sulla graduazione dinotata con *I* sono riportate le stesse somme aumentate della costante *A*. E perciò, portando l'indice *s* del cursore a coincidere colla divisione indicata, sulla graduazione *S*, dalla somma

$$S = l + b + c + \tfrac{1}{2}\,(b-c)$$

e leggendo poi sulla graduazione dinotata con I la divisione corrispondente all'altro indice *i* del cursore, si ha il numero corrispondente a log. I, che esprime in litri il volume della botte.

Il Professore Herr asserisce nella memoria citata, che l'errore commesso coll'uso di questa stazza è di 1,10 $^{0}/_{0}$. Nonostante tale approssimazione sufficiente per la pratica, la stazza di Stampfer, pel tempo che richiedeva il suo uso

ed anche per le inesattezze dovute agli errori inerenti alla graduazione ed alla lettura, è andata in disuso (1).

Si costruiscono anche oggi altre stazze logaritmiche; ma, a causa della loro inesattezza, non sono quasi mai adoperate. Le più preferite, oltre a quella del Belval, sono le stazze quadratiche e cubiche, che saranno descritte in seguito.

II.

Botti a sezione circolare

Formule derivate dall' ellisse e dalla parabola
Formula di Lambert

10. La difficoltà di ottenere una formula sicura, per la determinazione del volume delle botti, sta appunto nella forma delle doghe, la cui curvatura non segue una legge, che possa tradursi a rigore in una espressione matematica. Se tutte le botti si costruissero secondo determinate regole e se, per una data curva delle doghe, si adottasse sempre lo stesso rapporto fra i diametri della pancia e dei fondi e la lunghezza della botte, si potrebbe calcolare immediatamente e con sicurezza il loro volume.

Un tentativo di questo genere è stato già fatto in

(1) Mi è parso opportuno di ricordare in questo cenno storico la stazza di Stampfer, che ora non si costruisce più. I meccanici *Starke* e *Kammerer* di Vienna, ai quali mi rivolsi per averne un esemplare, mi risposero (27 Ottobre 94): .... *wir bemerken, dass wir Visirstäbe von Professor Stampfer seit langen nicht mehr anfertigen und auch sonst hier niemand mehr macht*.....

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Felix Klein
Einleitung in die Höhere Geometrie, I
Vorlesung Gehalten im Wintersemester 1892-93
Göttingen, 1893
(stampa anastatica del manoscritto originale)

(*Introduzione alla Geometria Superiore, I*
Corso tenuto nel semestre invernale 1892-1893
Gottinga, 1893)

Il testo raccoglie, a cura di F. Schilling, le lezioni tenute da **Felix Klein** nell'anno accademico 1892-93.
Il testo è un manuale universitario di Geometria Superiore che spazia tra la Geometria piana e spaziale e la Geometria differenziale, con frequenti cenni storici e citazioni bibliografiche non solo di scuola tedesca, come la ***Geometria del compasso*** di **Mascheroni** e la ***Géométrie descriptive*** di **Monge**.
Approfondisce anche nozioni tecniche, studiando alcuni sistemi di coordinate ed evidenziando le implicazioni fisico-matematiche con un consistente approfondimento di Algebra Superiore e di Geometria Algebrica.

Nella seconda parte vengono trattate la ***Geometria Proiettiva*** e la teoria delle **curve piane**, oltre alle **trasformazioni piane**.
La terza ed ultima parte si occupa di trasformazioni spaziali e di Topologia Generale, con ulteriori riferimenti analitici e fisico-matematici.
Vi sono esposte in parallelo **definizioni e nozioni** relative al caso dei complessi lineari e sferici.

Liniengeometrie	Kugelgeometrie
1) Unter einem linearen Liniencomplex haben wir 3-fach ∞ viele Linien zu verstehen, die in bekannter Weise zu einem Nullsystem in Beziehung stehen.	Dem tritt gegenüber der lineare Kugelcomplex als die Gesammtheit von ∞^3 Kugeln, welche eine feste Kugel unter gegebenem Winkel schneiden.
Als Unterart ergab sich der specielle Liniencomplex, als die ∞^3 Treffgeraden einer festen Geraden	Als specieller Kugelcomplex sind analog ∞^3 Berührungskugeln einer festen Kugel anzusehen. (Hier zählen alle Kugeln mit, diejenigen, welche die feste Kugel von innen oder von aussen berühren; nur müssen wir letztere mit negativem Vorzeichen von r einführen, vorausgesetzt, dass der Radius der festen Kugel > 0 genommen ist).
2) Die lineare Congruenz besteht aus der Gesammtheit aller geraden Linien, welche 2 feste Geraden treffen, mögen letztere reell, oder imaginär sein, in eine Leitlinie zusammenfallen oder gar unbestimmt werden. Diese Geraden bilden eine 2fach unendliche Mannigfaltigkeit.	Die lineare Kugelcongruenz besteht dem analog aus ∞^2 Berührungskugeln zweier Leitkugeln. Hier aber ist noch ein Unterschied zu machen. Bei gegebenen 2 Leitkugeln gibt es noch 2 Congruenzen. Die Kugeln der einen Congruenz berühren beide Leitkugeln gleichartig [also von

aussen, oder von innen], die der andern Congruenz ungleichartig [die eine von aussen, die andere von innen resp. umgekehrt].

3) Als die 3 linearen Complexen gemeinsamen Geraden haben wir die Regelschaar erkannt, welche die eine Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids bildet. Die Linien der andern Erzeugung des Hyperboloids bilden die ∞ vielen „Leitlinien," und zwar schneiden sämmtliche Geraden der ersten Art sämmtliche Geraden der zweiten Art.

Drei lineare Gleichungen der Kugelgeometrie geben eine Kugelschaar als einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller der Kugeln, die eine denselben einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Leitkugeln berühren. Wählt man drei Leitkugeln aus, so ist durch sie das ganze Gebilde erst vierdeutig bestimmt.

Die erste Kugelschaar hat nun eine Röhrenfläche zur Enveloppe, die auch von der zweiten Schaar umhüllt wird. Man sieht leicht, dass wir zu der doppelten Erzeugung der „Dupinschen Cyclide" geführt werden.

Traduzione

Geometria della linea

1) Con un complesso lineare di linee intendiamo ∞^3 linee che stanno in un noto rapporto con un sistema di riferimento. Come sottospecie abbiamo ottenuto il complesso speciale di linee, formato dalle ∞^3 linee che intersecano una retta fissata.

2) La congruenza lineare è formata dalla totalità delle linee rette che intersecano due rette fissate, che possono essere reali o immaginarie, coincidere o, addirittura, restare indeterminate. Queste rette formano una varietà doppiamente infinita [leggi: di dimensione 2].

3. Abbiamo individuato le rette comuni a tre complessi lineari in una delle due famiglie di rette che generano un iperboloide a una falda [***iperboloide iperbolico***].

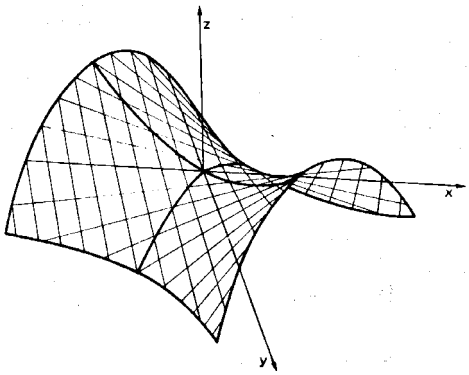
Geometria della sfera

A questo si contrappone il complesso lineare di sfere come la totalità di ∞^3 sfere che intersecano una sfera fissata secondo angoli dati.
In modo analogo, sono da considerare un complesso speciale di sfere le ∞^3 sfere tangenti ad una sfera fissata. (Qui contano tutte le sfere, che toccano la sfera dall'interno o dall'esterno, solo che queste ultime devono essere introdotte con raggio negativo, supponendo di aver preso come positivo il raggio della sfera fissa).

La congruenza lineare di sfere è costituita, analogamente, da ∞^2 sfere di contatto di due sfere di riferimento. Qui si deve però fare una distinzione. Date due sfere guida, esistono ancora due congruenze. Le sfere della prima congruenza toccano entrambe le sfere alla stessa maniera (cioè esternamente o internamente), quelle dell'altra congruenza in maniera diversa (una esternamente, l'altra internamente o viceversa).

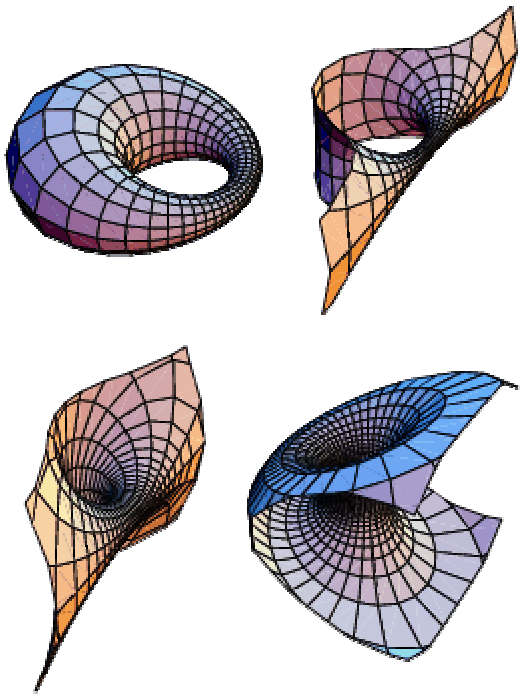
Tre equazioni lineari della geometria della sfera danno una famiglia di sfere come la varietà semplicemente infinita [leggi: di dimensione 1] *di tutte le sfere che toccano una varietà anch'essa semplicemente infinita di sfere di riferimento. Se si scelgono tre sfere di riferimento,*

Le linee dell'altra famiglia formano le infinite "linee di riferimento", ossia tutte le rette della prima famiglia intersecano tutte le rette della seconda.

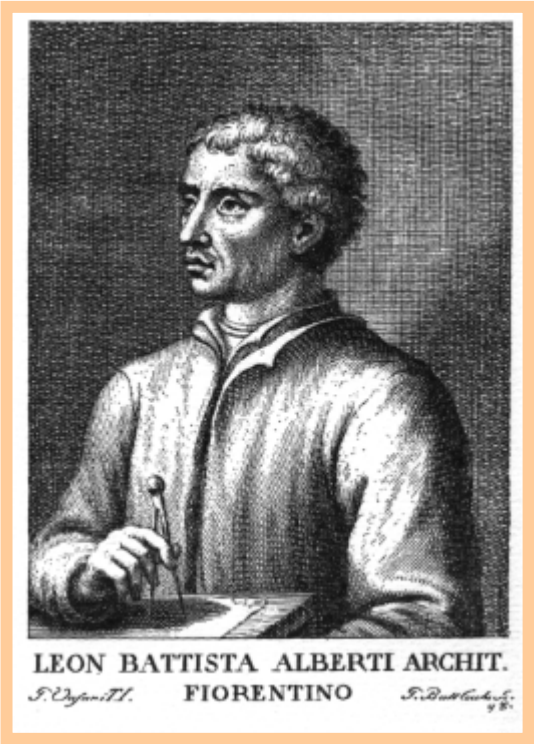


allora tutta la struttura è dapprima definita in maniera quadruplice.
*La prima famiglia di sfere ha ora una superficie tubolare come inviluppo, che viene avvolto anche dalla seconda famiglia di sfere. Si vede facilmente che ciò ci conduce a due famiglie generatrici della cosiddetta "**ciclide di Dupin**".*

(Nota: Una ciclide di Dupin è una superficie tangente a tutte le sfere appartenenti a due famiglie ad un parametro. La figura rappresenta alcuni esempi di ciclide)



Leon Battista Alberti (Genova 1404 - Roma 1472)



Discendente da un'antica famiglia nobile fiorentina, fu letterato ed architetto. Egli mirò a creare, nelle opere da lui progettate, un'armonia di tipo musicale, tradotta in proporzioni tra misure e forme, che fosse percepita dall'occhio con lo stesso piacere provato dall'orecchio durante l'esecuzione di una gradevole serie di accordi.
La chiesa di San Francesco a Rimini, detta **Tempio Malatestiano**, seppure incompiuta, rappresenta la più alta realizzazione dell'ideale albertiano. Ispirata a modelli classici romani, presenta sui **lati** una serie di sette archi identici, la cui luce misura 12 piedi, uguale alla larghezza dei pilastri angolari, e pari al doppio della larghezza dei rimanenti pilastri. Ciò produce la sequenza di rapporti

2:2:1:2:1:2:1:2:1:2:1:2:1:2:2.

La struttura della **facciata**, che misura 100 piedi, è data dalla successione pilastro-arcata laterale-pilastro-arcata del portale-pilastro-arcata laterale-pilastro (11 piedi + 16,5 piedi + 11 piedi + 23 piedi + 11 piedi + 16,5 piedi + 11 piedi). Se l'arcata del portale fosse larga 22 piedi anziché 23 piedi, si otterrebbe una sequenza di proporzioni corrispondenti agli intervalli musicali:

Arcata del portale pilastro = 22:11 = 2:1 (ottava)
Arcata laterale pilastro = 16,5:11 = 3:2 (quinta)
Arcata del portale arcata laterale = 22:16,5 = 4:3 (quarta)

Ma ciò avrebbe prodotto una lunghezza complessiva di 99 piedi. Alberti rinunciò a riprodurre con precisione i rapporti musicali per poter far comparire il numero 100, ottenuto moltiplicando per se stesso il dieci, il numero sacro a **Pitagora**, e massimo simbolo della perfezione.
In una lettera indirizzata all'amico Matteo de Bastia, a proposito del Tempio Malatestiano, Alberti scriverà:

"Le misure e proporzioni de' pilastri, tu vedi ond'elle nascono, ciò che tu muti, discorda tutta quella musica".

Altri famosi edifici progettati dall'Alberti sono **Palazzo Rucellai** a Firenze e le chiese di **S. Sebastiano** e **S. Andrea** a Mantova. A lui si devono anche il completamento della facciata della chiesa di **S. Maria Novella** a Firenze e la **tribuna** dell'Annunziata per Ludovico Gonzaga.

Alberti espose i principi tecnici ed estetici, ma anche sociali e morali, della sua arte nei trattati ***De re aedificatoria*** (1452), in dieci libri, ***De statua*** (1431) e ***De pictura*** (1435), dedicato al Brunelleschi. Un'altra opera, intitolata ***Ludi matematici*** (1452), raccoglie varie curiosità geometriche, tra cui alcuni metodi per la misurazione delle distanze.

Alberti, come sottolinea il Vasari nelle *Vite*, fu soprattutto un teorico dell'arte, *"molto più inclinato a lo scrivere che a lo operare".* Scarsa e di poco pregio è la sua produzione pittorica. A lui va comunque riconosciuto il merito di essere stato il primo a formulare per iscritto quelle regole di composizione che tanta importanza ebbero per i pittori e gli scultori dell'epoca. Citando ancora le parole del Vasari, si può senz'altro dire che Alberti *"fu bonissimo aritmetico e geometrico",* e non v'è dubbio che, grazie alla sua solida cultura ed alle sue capacità divulgative, egli *"abbia avanzato tutti coloro che lo avanzarono nell'operare".*

Curiosità Leon Battista Alberti scrisse un trattato ***Della cifra***, in cui proponeva un particolare codice segreto.

Leon Battista Alberti racconta la morte di Archimede



Autoritratto

Leon Battista Alberti

L'architettura - De re aedificatoria

Quest'opera, ispirata all'**omonimo trattato** dell'architetto romano **Vitruvio**, contiene tutte le prescrizioni estetiche e tecniche per la progettazione e la realizzazione degli edifici e dei loro decori. Il principio sovrano è quello classico dell'armonia, così poeticamente espresso dall'autore nel **Libro Primo**:

"In ogni caso è mio costume raccomandare di non cadere in quel difetto per cui l'edificio sembra un corpo deforme con le spalle o i fianchi sproporzionati. Invero la varietà dà un sapore gradevole a tutte le cose, se poggia sull'unità e sulla corrispondenza reciproca tra elementi distanti tra loro; ma se tali elementi mancano affatto di legami e non trovano un accordo conveniente, questo genere di varietà costituisce una grave stonatura. Anche in musica, quando alle voci gravi rispondono le acute, e tra quelle e queste risuonano le medie con perfetta armonia, dalla varietà delle voci si crea come per incanto una condizione di felice equilibrio fra i suoni, che accresce il piacere nell'ascoltatore e ne conquista l'animo; e così avviene in ogni opera che sia rivolta appunto a commuovere l'animo e ad attrarlo."

Per l'Alberti l'armonia si raggiunge scegliendo le giuste proporzioni che, come gli intervalli musicali, sono espresse da rapporti fra numeri interi. Ecco come egli, nel **Libro Settimo**, descrive la struttura di un **capitello ionico**:

"L'altezza del capitello sia suddivisa in diciannove moduli. L'altezza dell'abaco misurerà tre moduli; quella del raccordo delle volute, quattro; quella dell'echino, sei. I sei moduli rimanenti, nella zona inferiore, saranno riservati alle volute che sporgeranno ai due lati del capitello a partire dal raccordo suddetto. Il lato dell'abaco misurerà quanto il diametro del sommoscapo della colonna. La larghezza del raccordo delle volute dalla fronte al retro del capitello, sarà uguale alla misura del lato dell'abaco; in lunghezza si estenderà da un lato all'altro piegandosi in basso nel giro a spirale delle volute. I due occhi di queste ultime disteranno tra loro ventidue moduli; e ciascuno di essi disterà dalla linea superiore dell'abaco dodici moduli."

Vitruvio a suo tempo aveva descritto in termini di numeri interi la **figura umana ideale**.

La descrizione dell'Alberti prosegue con la costruzione della **voluta**:

"La voluta si disegnerà così. Si tracci nel centro della voluta un piccolo cerchio, il cui raggio misuri un modulo; in corrispondenza poi del margine superiore si segni un punto, e un altro dall'opposta banda in corrispondenza del margine inferiore del cerchio stesso. Si punti il compasso nel primo di questi due punti, facendogli descrivere un arco che partendo dalla linea di demarcazione tra il raccordo e l'abaco raggiunga il margine esterno del capitello fino a completare un intero semicerchio e ad arrivare esattamente sotto il centro del cerchio piccolo. Dopo di ciò si restringerà il compasso, puntandolo nel punto segnato in precedenza per secondo sul margine basso del cerchio suddetto, e facendogli descrivere un semicerchio dal punto in cui si era arrivati prima fino al margine superiore dell'echino. In tal modo si sarà completato un intero giro di spirale composto di due semicerchi di diverso raggio. Di qui ricomincerà un giro analogo al precedente, fino a raggiungere con la spirale (ossia con una curva come quella descritta ora) l'occhio della voluta (ossia il cerchio piccolo menzionato in principio)."

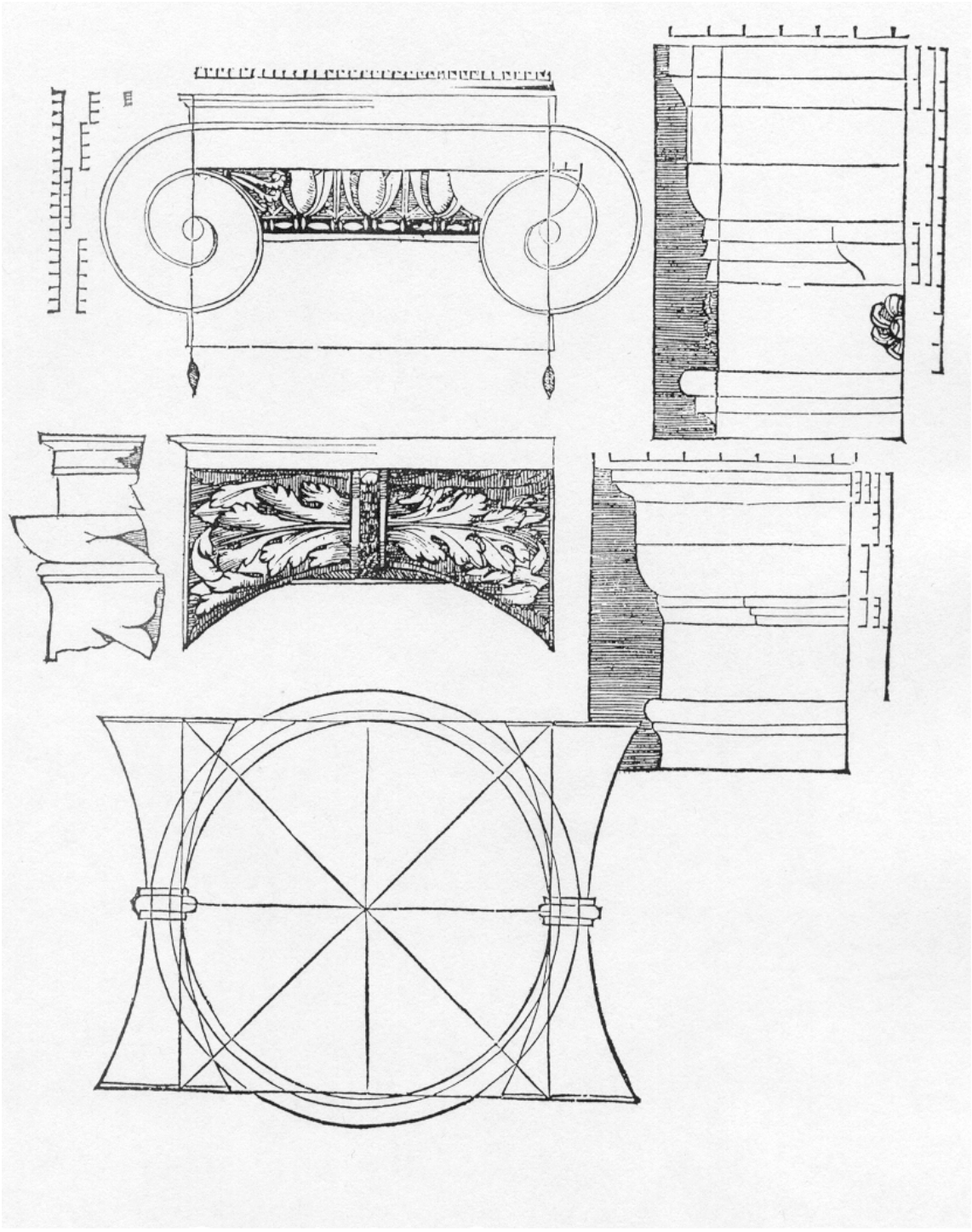
La voluta descritta dall'Alberti è un'approssimazione della **spirale equiangolare o logaritmica**.

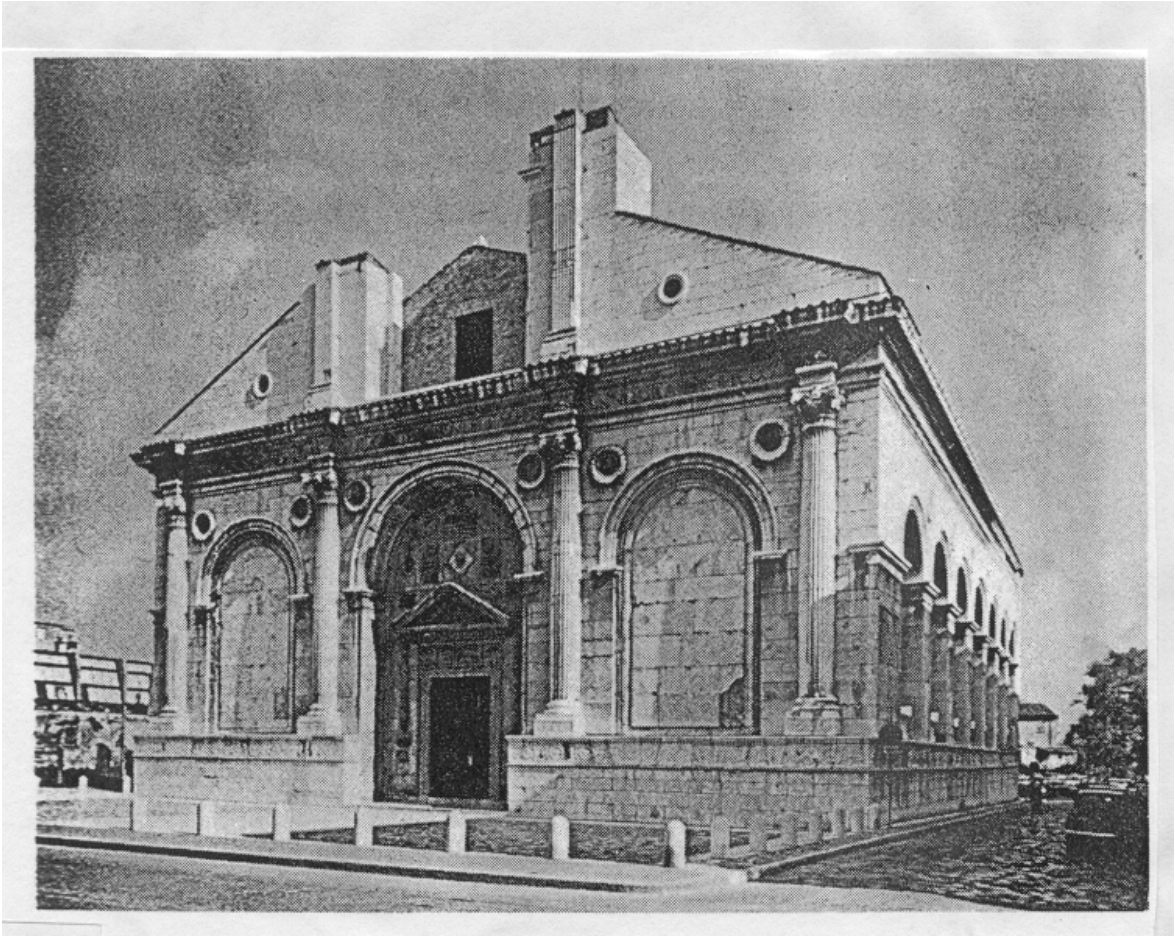
In un altro punto troviamo la costruzione di alcuni **poligoni** regolari, quelli maggiormente usati come **piante di edifici**:

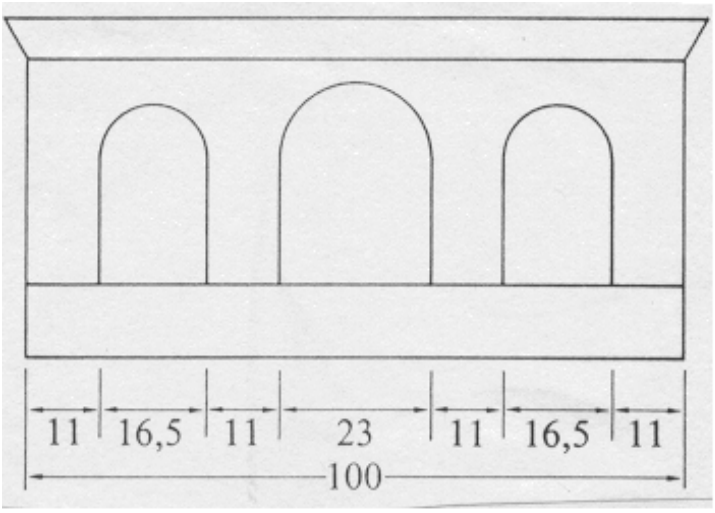
"Tra le piante poligonali gli antichi ricorrevano a quelle esagone ed ottagone, ed anche decagone. Tali piante devono tutte risultare inscrivibili entro cerchi. E del resto esse sono esattamente ricavabili dal cerchio stesso. Difatti, dimezzando il diametro del cerchio si ottiene il lato dell'esagono. Se poi dal centro si conducono delle rette a tagliare i lati dell'esagono nel loro punto medio, è manifesto che si otterrà una pianta dodecagona. Del pari manifesto è che da quest'ultima si possono ottenere quella quadrata e anche quella ottagona. Per disegnare una pianta ottagona, tuttavia, esiste un altro metodo comodissimo: disegnato un quadrato perfetto, si congiungono i suoi vertici con le diagonali; poi si fa ruotare la metà di ciascuna diagonale a partire dal loro punto d'intersezione fino a tagliare da una parte e dall'altra i lati del quadrato; il segmento che unisce ciascuna coppia d'intersezioni dei lati corrisponderà al lato dell'ottagono. Pure dal cerchio è possibile ricavare il decagono. Si disegnino due diametri che s'intersecano ad angolo retto; dei semidiametri così ottenuti se ne divida uno qualsiasi in due parti uguali; poi da quest'ultimo punto di

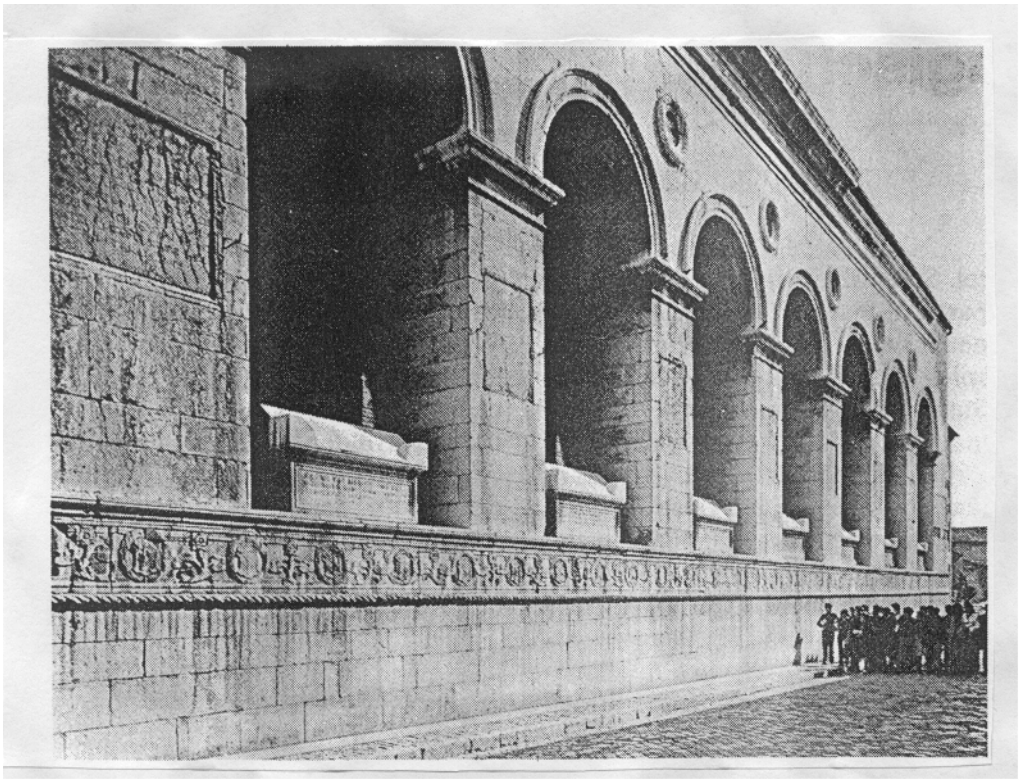
divisione si conduca obliquamente una retta fino a un estremo dell'altro diametro. Togliendo a questa retta la quarta parte di un intero diametro, ciò che rimane corrisponde al lato del decagono."
È interessante confrontare queste costruzioni con quelle proposte da **Euclide** nei suoi ***Elementi***.

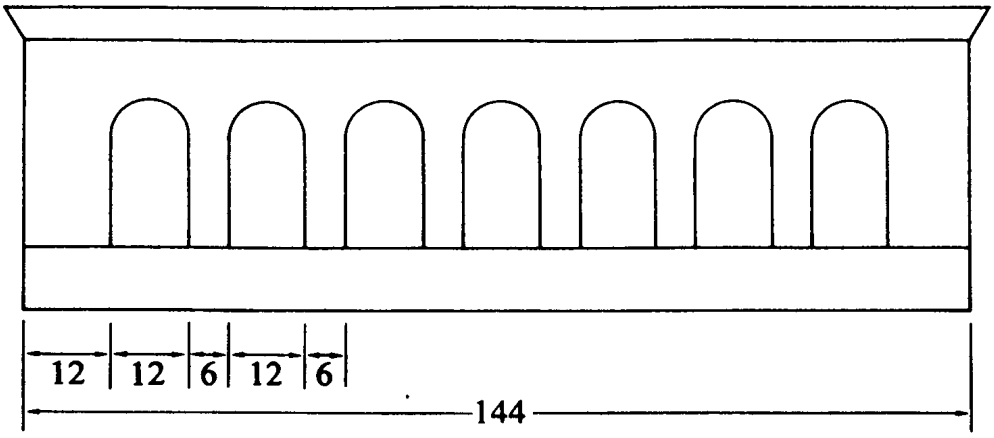
La costruibilità dei poligoni regolari

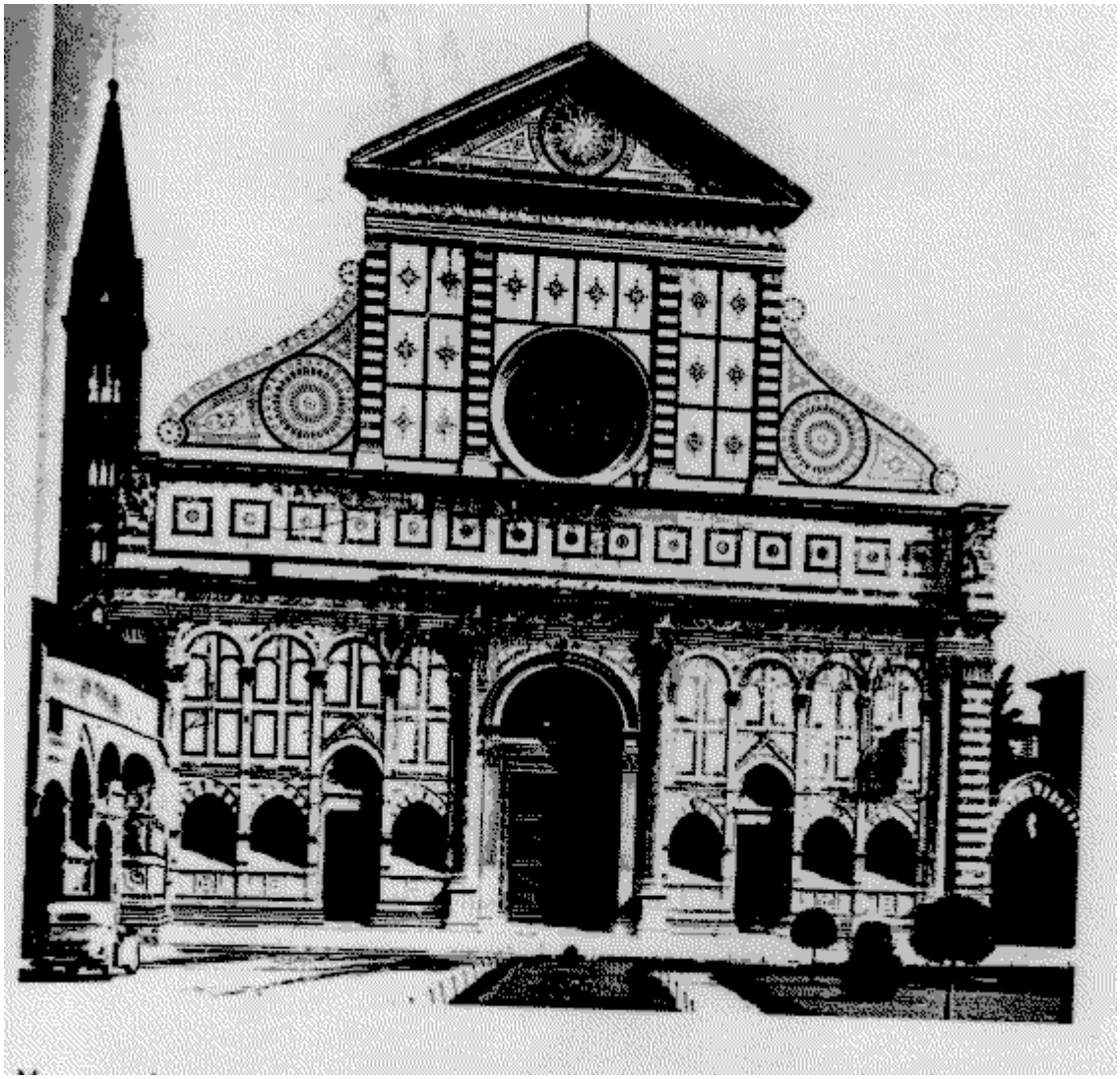


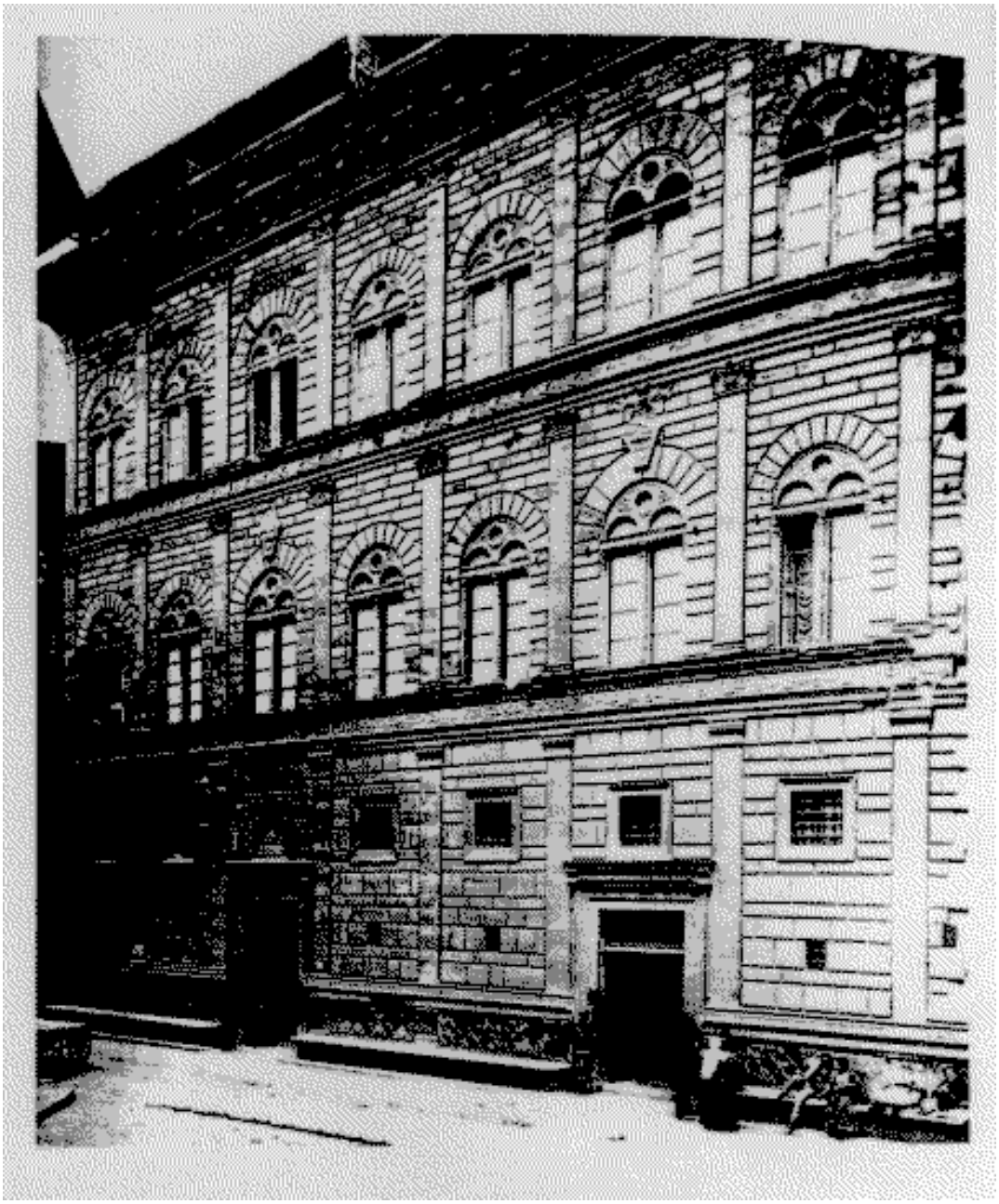



11
16,5
11
23
11
16,5
11
100




12
12
6
12
6
144











Leon Battista Alberti

Elementi di pittura

DEDICA

Vedestu mai che un cieco insegnasse la via a chi vedea? Apresso noi qui con questi brevissimi ricordi, quali chiamiamo Elementi, assequirai che chi forse per sé non sa designare, e' mostrerà vera e certa ragione e modo a diventare perfetto designatore, purché tu non fugga aprendere quello che tu iudichi impossibile. Prova prima se ti riesce, e poi iudica e della nostra erudizione e del tuo ingegno quello te ne pare. Provando mi crederai, e credendomi ti deletterai conoscerli tutti. Tu così fà, e amami.

ELEMENTI

***A**. Per essere breve scrivendo e chiaro mi pare qui preporre queste diffinizione.*

1. El punto dicono essere quello che nulla si possa dividere in parte alcuna.

2. Linea dicono esser quasi uno punto disteso in lungo. Potrassi adunque dividere alla linea la sua longitudine, non latitudine.

3. Superficie dicono esser addutta quasi come estendendo la linea per la larghezza, e a questa adonque potrai dividere la sua longhezza [e larghezza], e non profondità.

4. Corpo dicono esser qualunque cosa si possa e per la longhezza e per la larghezza dividere, e anche per sua profondità.

***B**. Queste dissero li antiqui.*

1. Corpo appelliamo quello che sia coperto da superficie, in quale se fermi il nostro vedere.

2. Superficie appelliamo quella estrema scorza del corpo, la qual sta acerchiata dal suo lembo.

3. Lembo appelliamo quello tutto el circuito, quasi costure, dove termina la superficie, qual sito io chiamo discrimen, vocabulo tolto da' Latini.

4. Discrimen proprio si è quel mezzo addutto dal fronte, quale divide i capelli, que' che vanno in qua da que' che pendano in quest'altra parte. Adunque a questa similitudine apresso di noi serà discrimen quella longhezza tra due superficie in mezzo quale divide

l'una dall'altra, e sta questa longhezza terminata da due punti.

5. Punto appello quell'ultimo dove più longhezze e discrimini conterminano.

***C**. Questo considerammo noi. Quanto a' nostri pittori:*

1. Punto nominamo noi in pittura quella piccola inscrizione quale nulla puote essere minore.

2. Linea nominamo quella inscrizione longa da un punto a uno altro sottilissima, per qual se circumscrive alla area el suo lembo.

3. Lembo nominamo tutta quella circumdutta descrizione fatta da linee sottilissime, per quale sia l'una area divisa dall'altra.

4. Area nominamo quello spazio a quale circumscrivemo el suo lembo a certa similutudine della veduta superficie.

***D**. Agiugni a questi che:*

1. Concentrica area se nomina quella che con soi anguli e linee chiude tutto el lembo, e corisponde per questo a quella superficie quale sarà posto sotto uno certo vedere, tale ch'ella indi non pare in alcuna sua parte minore che invero ella si sia, comparata all'altre.

2. Comminuta area appelliamo noi quella quale sia simile alla superficie veduta, quando ella sia posta in modo ch'ell'appara da qualche sua parte minore.

3. Proporzionale area serà quando ciascuna delle sue linee sarà in qualche certa sua parte o più longa o più curta che non paiano quelle della veduta superficie.

E queste ancora considerammo noi.

4. Punto commensurato serà quello qual dagli altri punti, o vòi dalla concentrica, o vòi dalla comminuta, averà sue coequali distanze.

5. Retta linea si è quella perscrizione addutta da un punto a uno altro per via brevissima, e quale non incurvi in alcuno degli spazi.

6. Quinci s'appellano rettilinee quelle o aree o superficie delle quali sua sia niuna linea flessa; e così flessilinee sono quelle in quali siano sue linee flesse.

7. Linea flessa diciamo esser quella quale da un punto a uno altro addutta descrive certa parte de qualche circulo.

8. Circulo noi qui vogliamo sia un lembo continuato e conscritto di più linee flesse agionte l'una all'altra con soi estremi capi, tale ch'elle non si taglino insieme né constituiscano angulo alcuno; e sia in modo conscritto el lembo che ogni sua parte non meno a uno certo in mezzo posto punto s'appressi che li si apressino li altri.

9. Angulo sai essere dove due linee giunte non constituiscano una linea, ma insieme si tagliano; e de questi saranno alcuni non retti e alcuni retti. Retto si è quello angulo quale uno de' quattro constituiti da due linee incrocichiate e che sé insieme tagliano, sarà né maggiore né minore che qualunque sia l'uno degli altri tre. Non retto angulo serà

quello che maggiore sia o minore che 'l retto. Di qui sono nominate rettangole o non rettangole secondo che sono gli anguli loro o retti o non retti. E così triangola e quatrangola e simile presono el nome dal numero de' suoi anguli.

***E**. Sino a qui bastino queste diffinizione.*

Qui sequita poniamo e' ricordi ordinati quali bisognano a bene intendere la ragione vera del disegno.

1. Da uno punto a uno punto scrivere una linea retta.

2. Quello spazio che sia tra due punti, dividerlo in certe parti con certi punti.

3. Estendere una linea retta ch'ella sia certa parte della sua quantità più longa.

4. Scrivere una linea retta equidistante da un'altra linea retta.

5. In uno dato punto constituire uno angulo retto.

6. Descrivere uno triangulo rettangulo equale a uno altro triangulo <rettangulo> dato.

7. Scrivere un triangulo non rettangulo equale a qualunque dato triangulo.

8. Conscrivere qualunque rettilinea concentrica.

9. In una rettilinea e concentrica area inscriver un punto commensurato.

10. Porre in una descritta area rettilinea e concentrica un'altra minore concentrica rettilinea.

11. Fuori de una concentrica rettilinea ascrivervi un punto commensurato.

12. Circumcludere una descritta area rettilinea con una maggiore area rettilinea e concentrica.

13. A una superficie rettilinea e concentrica descrivere una area simile ma proporzionale maggiore.

14. E descrivere una area rettilinea concentrica ma proporzionale minore.

15. Descrivere un punto commensurato in una area <rettilinea> proporzionale <maggiore>.

16. In una data concentrica angulare e proporzionale maggiore inscrivere una altra proporzional maggior angulare.

17. E in una proporzional minore concentrica angulare simile scrivere una proporzionale minore concentrica.

** 18. Chiudere una concentrica angulare e proporzionale maggiore in una concentrica e proporzionale maggiore.*

19. E chiudere una concentrica proporzionale minore in una concentrica e proporzionale minore.

***F**. E questo basti quanto alle rettilinee concentriche.*

E circa alle flessilinee concentriche:

1. Data una flessa linea, subducerli una altra flessa.

2. Data una flessa linea, scrivere una altra flessa linea concentrica equale.

3. Adducere una linea flessa in qual certa sua parte bisogni minore ma proporzionale a una data flessa.

4. Producere una flessa linea che sia proporzionale ma in qualche certa parte maggiore che quella data linea.

** 5. Descrivere una area equale a certa parte d'una superficie, qual sia resecata con sola una certa flessa linea.*

6. E conscrivere una area che sia equale a una parte de una superficie circulare resecata con più flesse linee.

7. Conscrivere una area flessalinea ma con certa proporzione maggiore.

8. Ancora scrivere proporzionale una area flessa<linea> concentrica ma minore.

9. In una concentrica flessalinea porre uno punto commensurato.

10. E in una flessilinea concentrica scrivere un'altra flessalinea concentrica.

11. Porre uno punto commensurato fuor de una flessalinea concentrica.

12. Chiudere una flessilinea concentrica con una maggior flessilinea concentrica.

13. Dentro a una area flessilinea proporzionale maggiore notarvi un punto commensurato.

** 14. In qualunque area concentrica proporzionale maggiore porvi una flessilinea.*

15. Fuori de una area flessilinea proporzionale maggiore segnare un punto commensurato.

16. E quando fusse proporzional minore, simile porvi entro el punto commensurato.

17. Ancora simile porre el punto commensurato fuori de una area proporzionale minore.

***G**. E questo basti quanto alle concentriche flessilinee.*

1. In su una data linea scrivere uno semicirculo.

2. Trovare in qualunque dato circulo el so centro e diametro.

3. Descrivere uno circulo concentrico.

4. E scrivere uno circulo concentrico proporzionale maggiore.

5. Scrivere pur uno circulo concentrico ma con certa proporzion minore.

6. In uno circulo concentrico scrivere uno punto commensurato.

7. E in uno circulo concentrico scrivere uno altro concentrico circulo minore.

8. Porre uno punto commensurato fuori del circulo concentrico.

** 9. Un descritto concentrico circulo acerchiarlo con un altro concentrico e maggior circulo.*

** 10. In un proporzionale maggiore circulo pur concentrico porvi un punto commensurato.*

** 11. E fuor de uno maggior proporzionale circulo porvi un punto commensurato.*

12. In uno circulo proporzionale minore porvi un punto commensurato.

13. E così fuora de uno minore simile porvi un punto commensurato.

14. Ascrivere dentro e ascrivere de fora qual vòi proporzionale circulare area o maggiore o minore.

***I**. E questo basti quanto a' circuli concentrici.*

Dicemmo sino a qui quanto stimammo bisogni a tutte le superficie e aree concentriche, quale vedesti sono di tre ragione: o angulare rettilinee, o angulare flessilinee, o circulare. Sequita esponiamo quanto provedemo bisogna alle aree e superficie comminute. Circa le comminute rettilinee:

1. In una rettangula concentrica area scrivere una rettangula simile a una comminuta superficie.

2. In qualunque descritta area angulare concentrica descrivere una altra minore area qual sia a una rettilinea comminuta superficie simile.

3. Con una area comminuta angulare circumscrivere una concentrica.

4. Entro a una angulare area comminuta scrivere un punto commensurato.

5. Scrivere in una comminuta angulare un'altra comminuta angulare.

6. Fuor della comminuta angulare scrivere uno punto commensurato.

7. Circumscrivere una comminuta angulare con una altra angulare pur comminuta.

8. Scrivere una proporzional maggiore area comminuta e angulare.

9. E scrivere una area angulare proporzionale minore e comminuta.

10. In qualunque de queste proporzionale o sia maggiore o sia minore porvi el punto commensurato.

11. E simile in qualunque de queste proporzionale inscrivere una pur proporzionale e comminuta.

12. A qualunque proporzional comminuta fuori ascrivere un punto commensurato, unde possi circuire ogni simile proporzionale e comminuta superficie.

***L**. E questo basti quanto alle comminute e rettilinee.*

Circa alle comminute flessilinee <e> circulare.

Le comminute flessilinee aranno quel medesmo ordine e modo de erudizione che ebbeno le rettilinee, già che dalle rettilinee si deducano le flessilinee. Adonque per brevità non lo transcrivo.

1. Descrivere una area circulare comminuta in una data rettangula.

2. Una circulare comminuta area scriverla in qualunque data angulare.

3. L'area concentrica angulare circumscriverla con una comminuta circulare.

4. E circumscrivere una comminuta angulare con una comminuta angulare.

5. Una comminuta circulare area inscriverla in una qual se sia area angulare.

6. In la circulare comminuta area porvi el punto commensurato.

7. Fuori della circulare e comminuta area porvi el punto commensurato.

8. Scrivere una area circulare comminuta in un'altra area pur circulare e comminuta.

9. Circumscrivere con una circulare comminuta una area qualunque ella si sia o angulare o circulare.

10. E scrivere una circulare area comminuta proporzionale maggiore.

11. Dentro a questa proporzional maggior porvi el punto commensurato, e indi scrivervi tutta una circulare comminuta e proporzionale maggiore.

12. E scrivere una circulare proporzional minore e comminuta, e in questa porvi el punto commensurato, e indi scrivere tutta una proporzionale minore e comminuta entrovi collocata.

13. In qualunque area scrivere qualunque altra area.

14. Apresso di qualunque area scrivere qualunque se sia altra area simile a qualunque veduta superficie.

***M**. E questo basti alle circulare comminute.*

Pregovi, o studiosi delle cose mie, facendo curiate intendere questi Elementi, quali forse leggendo non vi si apreno. Promettovi che vi deletterà avervi dato opera, e cognoscerete questa dottrina essere non meno utile che iocunda. Amate el vostro Leone Battista, quale spera ancora in migliore cose essere utile a' vostri studi. Prego ben chi me transcrive mi rilegga e con diligenza emendi.

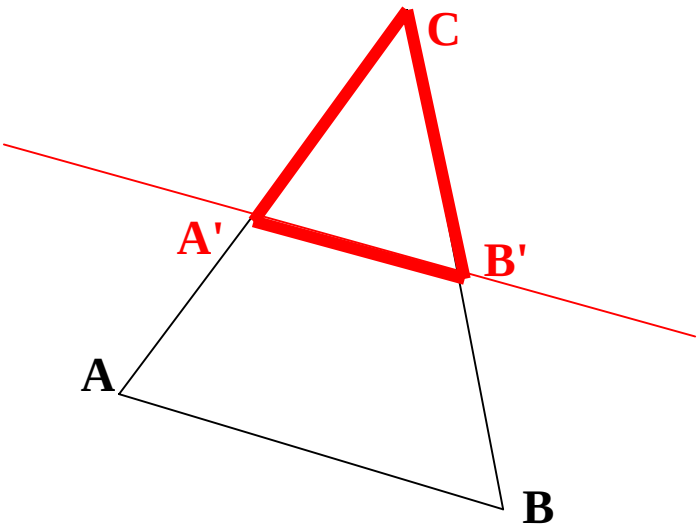
Leon Battista Alberti
De Pictura
in: Opere Volgari, vol. III, a cura di C. Grayson
Bari, Laterza 1973

Questo trattato di tecnica della pittura, edito per la prima volta nel 1435 in latino, e nel 1436 in volgare toscano, è dedicato a Filippo Brunelleschi. Nel **Prologo** l'**Alberti** così si rivolge con estrema deferenza al noto architetto, ricordando la sua opera più famosa, la **cupola del Duomo di Firenze**:
"Chi mai sì duro o sì invido non lodasse Pippo architetto vedendo qui struttura sì grande, erta sopra e' cieli, ampla da coprire con sua ombra tutti e' popoli toscani, fatta sanza alcuno aiuto di travamenti o di copia di legname, quale artificio certo, se io ben iudico, come a questi tempi era incredibile potersi, così forse appresso gli antichi fu non saputo né conosciuto? [....] Tu tanto persevera in trovare, quanto fai di dì in dì, cose per quali il tuo ingegno maraviglioso s'acquista perpetua fama e nome, e se in tempo t'accade ozio, mi piacerà rivegga questa mia operetta de pictura *quale a tuo nome feci in lingua toscana. Vederai tre libri: el primo, tutto matematico, dalle radici entro dalla natura fa sorgere questa leggiadra e nobilisima arte. El secondo libro pone l'arte in mano allo artefice, distinguendo sue parti e tutto dimostrando. El terzo instituisce l'artefice quale e come possa e debba acquistare perfetta arte e notizia di tutta la pittura."*

Il **Libro I** si apre con la descrizione dei principali enti geometrici, dal punto alla superficie: l'Alberti qui presenta, in forma riassunta, il contenuto dei suoi ***Elementi di pittura***, ispirati, nella forma e nel contenuto, agli ***Elementi*** di **Euclide**. La conoscenza della matematica è, a suo avviso, necessaria al pittore, anche se, ovviamente, è la natura la vera sostanza dell'arte. Come egli dice nel **Libro II**, questa si compone di tre parti: la *circonscrizione*, cioè il disegno dei contorni, la *composizione*, cioè la disposizione delle forme all'interno del quadro, e il *ricevere di lumi*, cioè la distribuzione dei colori, della luce e dell'ombra. Ed è nella composizione che la geometria, in particolare la teoria delle proporzioni, svolge un ruolo fondamentale. Qui proporzione non significa soltanto, come per **Vitruvio**, armonia di forme e dimensioni, ma anche e soprattutto similitudine di figure piane, che sta alla base della ***prospettiva***. Il **Libro I** è quasi interamente dedicato a questo argomento: si tratta della prima esposizione teorica della tecnica utilizzata anche da **Piero della Francesca**. L'Alberti innanzitutto osserva che la visione di un oggetto è determinata da una *piramide visiva* avente come base la superficie

dell'oggetto rivolta verso l'osservatore e come vertice il suo occhio. Tale piramide è composta dai raggi che, partendo da ogni punto dell'oggetto, convergono nell'occhio. Si distinguono i raggi *estrinseci*, che delimitano l'oggetto e formano la superficie della piramide, ed i raggi *intrinseci*, che partono da punti interni dell'oggetto: uno di questi ultimi è perpendicolare all'oggetto, e viene detto *centrico*. Il punto da cui esce il raggio centrico è detto *punto centrico*. Ciò che l'osservatore vede è la sezione (*"intersegazione"*) della piramide con un piano perpendicolare al raggio centrico e passante per il punto centrico. Se l'oggetto si sposta lungo la direzione del raggio centrico, il piano si sposta con esso: la sezione avrà in ogni momento la stessa forma, ma apparirà più grande o più piccola. In termini matematici, si vedrà sempre una figura *simile* a quella originale: le sue dimensioni aumenteranno o diminuiranno, ma resteranno invariati i rapporti tra queste, cioè le *proporzioni*. Questo fatto, di per sé evidente, è in realtà conseguenza di un teorema di geometria piana, citato come **Proposizione 2** del Libro VI degli *Elementi* di Euclide. Ecco l'enunciato con le parole dell'Alberti:

"[....] la sentenza de' matematici, onde si pruova che, se una dritta linea taglia due lati d'uno triangolo, e sia questa linea, qualora fa triangolo, equidistante alla linea del primo e maggiore triangolo, certo sarà questo minore triangolo a quel maggiore proporzionale. Tanto dicono i matematici."



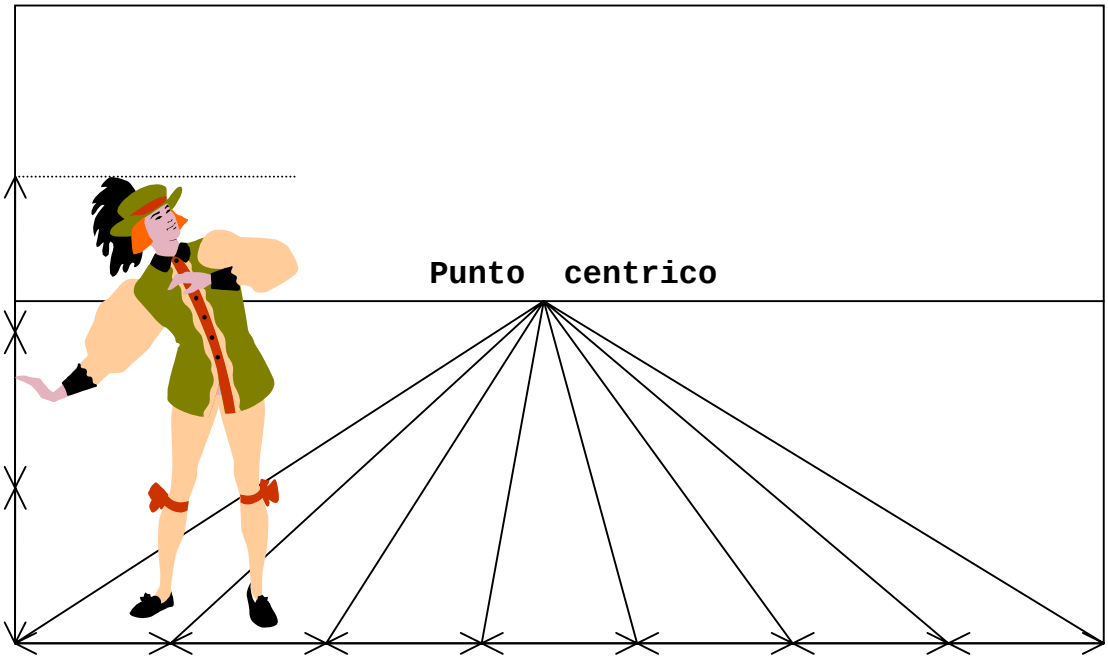
I triangoli ABC e A'B'C sono simili.

Qui *dritta linea* significa *linea retta, equidistante* sta per *parallela,* la *linea* del triangolo è la sua *base, proporzionale* è lo stesso che *simile.*

Ora, i veri oggetti raffigurati in un quadro saranno sezioni di altrettante piramidi visive secondo il piano del dipinto: ciò permette

di determinarne le dimensioni con precisione geometrica. Ma come realizzare, in due dimensioni, l'effetto di una costruzione a tre dimensioni? Questo è il problema della prospettiva. L'Alberti propone di risolverlo nel modo seguente.

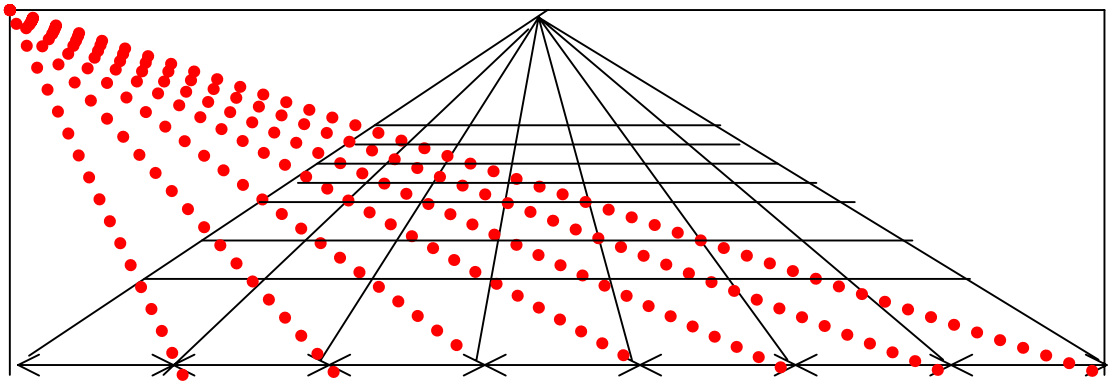
"Principio, dove io debbo dipingere scrivo uno quadrangolo di retti angoli quanto grande io voglio, el quale reputo essere una finestra aperta per donde io miri quello che quivi sarà dipinto; e quivi ditermino quanto mi piaccino nella mia pittura uomini grandi; e divido la lunghezza di questo uomo in tre parti, quali a me ciascuna sia proporzionale a quella misura (che) si chiama braccio, però che commisurando uno comune uomo si vede essere quasi braccia tre; e con queste braccia segno la linea di sotto qual giace nel quadrangolo in tante parti quanto ne riceva. [...]
Poi dentro a questo quadrangolo dove a me paia, fermo [...] il punto centrico. Sarà bene posto questo punto alto dalla linea che sotto giace nel quadrangolo non più che sia l'altezza dell'uomo quale ivi io abbia a dipingere [....]. Adunque posto il punto centrico, come dissi, segno diritte linee da esso a ciascuna divisione posta nella linea del quadrangolo che giace [...]."



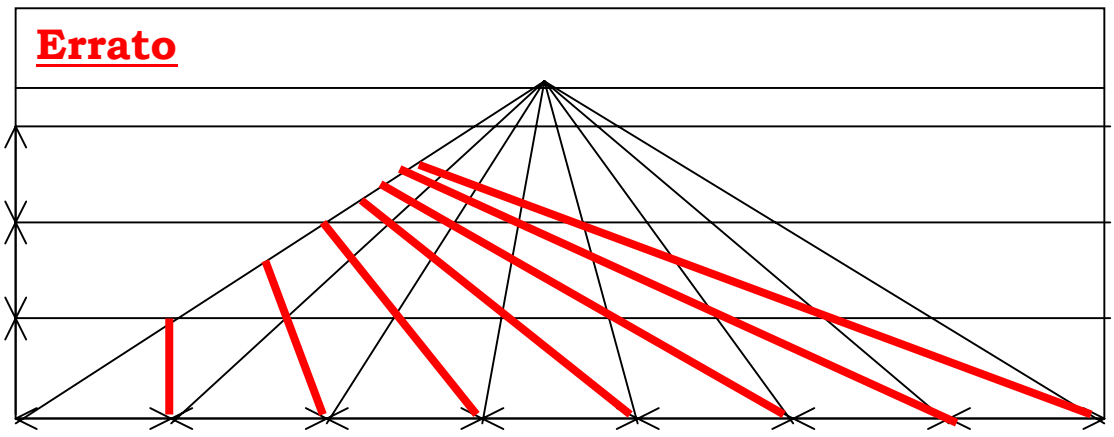
Il *punto centrico* è quello che oggi viene detto *punto di fuga.* Le linee concorrenti in questo punto sono linee parallele ed equidistanti, idealmente tracciate sul terreno, così come le vedrebbe l'osservatore. Immaginiamo ora che sul terreno siano tracciate altre parallele, equidistanti, perpendicolari alle prime: immaginiamo, cioè, di avere davanti una pavimentazione a scacchi. Come vedremo noi le linee

trasversali? L'Alberti osserva che molti pittori, sbagliando, le disegnano equidistanti: questo è un errore, poiché la distanza fra due linee consecutive ci appare tanto minore quanto più le linee sono lontane. Ma come determinare la giusta successione delle distanze, dall'osservatore all'infinito? Ecco cosa suggerisce l'Alberti:

"Prendo uno picciolo spazio nel quale scrivo una diritta linea, e questa divido in simile parte in quale divisi la linea che giace nel quadrangolo. Poi pongo al di sopra uno punto alto da questa linea quanto nel quadrangolo posi el punto centrico alto dalla linea che giace nel quadrangolo, e da questo tiro linee a ciascuna divisione segnata in quella prima linea. Poi [....] segno, quanto dicono i matematici, una perpendiculare linea tagliando qualunque truovi linea. [....] Questa così perpendiculare linea dove dall'altra sarà tagliata, così mi darà la successione di tutte le trasverse quantità. "



Questo modo di procedere fa sì che le diagonali, che nella scacchiera sono comuni a più caselle, lo siano - come dev'essere - anche nella visione prospettica. Ciò non avviene, invece, quando le linee trasversali sono disegnate equidistanti.



Nel quadro è stata così costruita una griglia ausiliaria, che permette di disegnare correttamente, secondo le norme della visione prospettica, elementi architettonici estesi, come muri o file di colonne, o anche oggetti circoli giacenti sul terreno: di queste tecniche si legge nel **Libro II**.

Il **Libro III**, come l'autore stesso preannuncia all'inizio dell'opera, è quello più propriamente estetico e filosofico, in cui egli delinea la figura ideale dell'artista, indica quali studi debba compiere e quale debba essere la sua disciplina di vita. Del resto, come emerge da ***I Libri della Famiglia***, l'importanza di una seria educazione umanistica e scientifica fu uno dei capisaldi della vita degli Alberti.

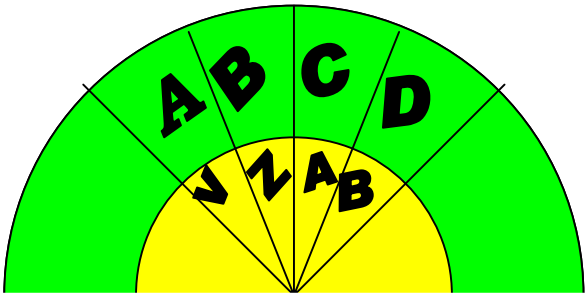
Curiosità Secondo la testimonianza di un contemporaneo, autore di una biografia anonima, sarebbe stato Leon Battista Alberti ad inventare la *camera prospettica,* solitamente attribuita al Della Porta, vissuto un secolo più tardi. Nella traduzione italiana del Bonucci leggiamo:

"Scrisse ancora alcuni libri di Pittura, e sì fece nelle medesime cose inaudite, le quali in una cassetta rinchiuse, per piccolo pertugio poi mostrava. Vaste pianure quivi veduto avresti intorno a immenso mare distendersi, e più lontane regioni da perdervi l'occhio, le quali cose chiamavale dimostrazioni, e tali si erano che dotti ed indotti sostenevano, non veder quivi cose di pennello, ma sì vive e vere."

La prospettiva secondo Dürer
Prospettiva di un pavimento ad ottagoni (Torricelli)
Studi prospettici di un toro (Piero della Francesca)
Studio prospettico di un calice (Paolo Uccello)

Leon Battista Alberti
Della cifra

In questo trattato **Leon Battista Alberti** presenta un'invenzione – il ***disco cifrante*** - che si rivelerà fondamentale per lo sviluppo della ***crittografia***, la scienza dei codici segreti. Lo strumento è costituito da due dischi concentrici di diverso raggio, imperniati in modo da poter ruotare uno rispetto all'altro. Essi sono suddivisi in 21 settori, uno per ogni lettera dell'alfabeto. Le due serie di lettere possono essere ruotate a piacere: ad esempio, ruotando il disco minore di due settori in avanti rispetto a quello del disco maggiore, la lettere A, B, C e D del primo vengono a trovarsi, rispettivamente, in corrispondenza delle lettere V, Z, A, B del secondo.



Il codice segreto che si ricava da questa operazione è quello in cui ogni lettera del disco maggiore viene sostituita dalla corrispondente lettera del disco minore:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*Z*
V	*Z*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*

Così, ad esempio, la parola ***BATTISTA*** viene cifrata come ***ZVRRGQRV***. Esistono 20 modi diversi di disporre il disco minore rispetto al disco maggiore (escludendo la disposizione banale, in cui ad A corrisponde A). Il disco cifrante permette così di realizzare venti codici segreti, in cui all'alfabeto usuale se ne sostituisce un altro. Tale numero aumenta considerevolmente se si utilizzano due o più alfabeti contemporaneamente: questo è il principio dei codici ***polialfabetici***. Si fissano, ad esempio, due diverse posizioni del disco minore, che corrispondono a due diversi alfabeti cifrati. Oltre a quello visto sopra, possiamo, ad esempio, scegliere:

A B C D E F G H I L M N O P Q R S T U V Z
R S T U V Z A B C D E F G H I L M N O P Q

ed alternare, nella cifratura del testo, un alfabeto all'altro: le lettere di posto dispari vengono cifrate col primo, quelle di posto pari col secondo. Ad esempio, ***BATTISTA*** viene cifrato in ***ZRRNGMRR***.

Il grado di complessità aumenta utilizzando un numero maggiore di alfabeti. Sul principio dei codici polialfabetici era basato il funzionamento della macchina **Enigma**, impiegata dalle forze armate tedesche durante la Seconda Guerra Mondiale. I messaggi venivano cifrati tramite un complesso meccanismo di dischi cifranti, azionati automaticamente. Un gruppo di scienziati inglesi, tra cui **Alan Turing**, riuscì solo dopo molto tempo a sviluppare un sistema per trovare la chiave di Enigma, che lo Stato Maggiore della Wehrmacht cambiava ogni giorno. Decisivo fu l'impiego di grossi calcolatori, i primi elaboratori elettronici della storia. Si può dire che la tecnologia informatica abbia tratto origine, in gran parte, dalla crittografia militare.

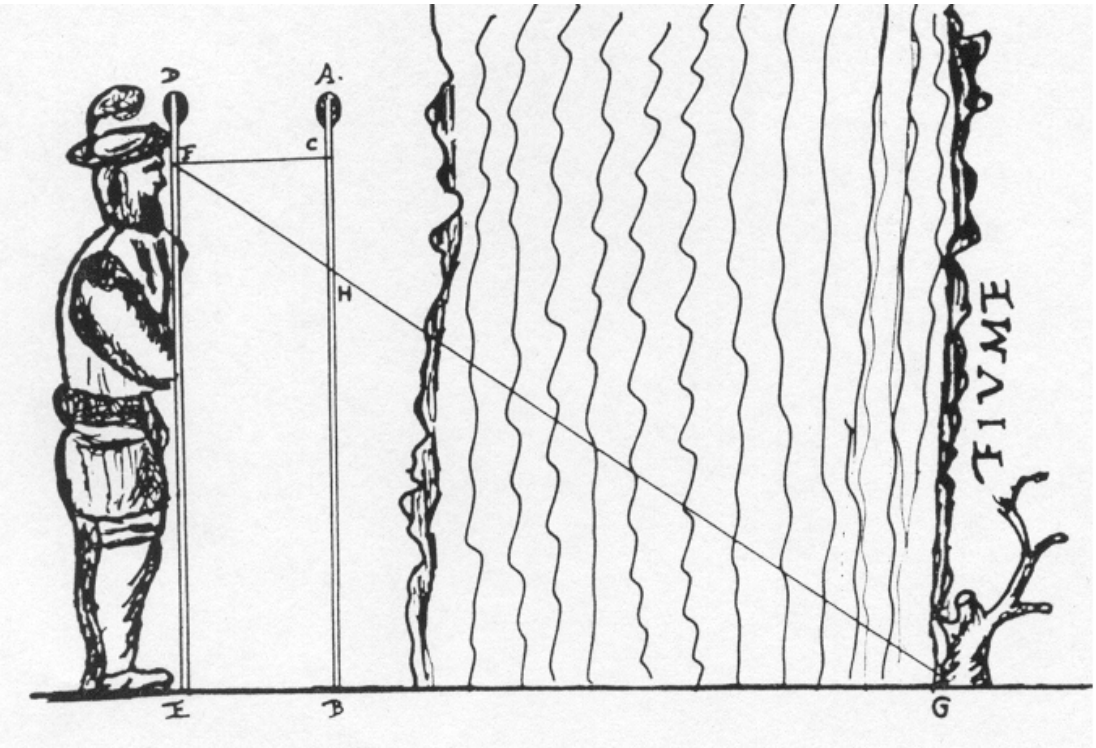
Il calcolo meccanico

Leon Battista Alberti
Ludi matematici

È una raccolta di curiosità matematiche, di idee applicate alla risoluzione di problemi pratici. L'opera venne composta tra il 1450 ed il 1452, e probabilmente scaturì dalle ricerche che l'**Alberti** svolse per il trattato ***De re aedificatoria***. Nella dedica a Meliadusio d'Este, l'autore così scrive:

"Forse arò satisfattovi, quando in queste cose iocundissime qui raccolte vi prenderete diletto sì in considerare sì ancora in praticarle e adoperarle."

Diverse pagine sono dedicate alla ***triangolazione***, il metodo di determinare le distanze tra punti lontani o inaccessibili con strumenti elementari, sfruttando semplici proprietà trigonometriche. Ecco come l'autore illustra un facile modo di misurare la larghezza di un fiume.



Su una delle rive del fiume si piantino nel terreno due aste, in posizione verticale, (nei punti *E* e *B*), in modo che la direzione *EB* sia perpendicolare alla riva. Si traccino quindi sulle due aste due segni in corrispondenza dei punti *F* e *C*, dove lo sguardo dell'osservatore,

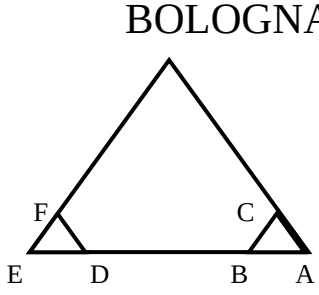
diretto orizzontalmente, incontra le due aste. Si fissi quindi il punto *G* della riva opposta del fiume che si trova sul prolungamento di *EB*. Si segni il punto *H*, in cui lo sguardo dell'osservatore, puntando *G*, incontra la seconda asta. I triangoli *FCH* e *BGH* sono simili, e *FC : HC = BG : BH*. Misurate le lunghezze dei segmenti *FC*, *HC* e *BH*, si determina così la lunghezza di *BG*, cioè la larghezza del fiume.

Più avanti nel trattato Alberti spiega come **determinare le grandi distanze**.

Ampio spazio è dedicato alla misurazione delle altezze degli edifici e alle applicazioni in balistica: questa parte dell'opera ricorda fortemente ***La Nova Scientia*** del **Tartaglia**. Gli stessi argomenti si ritrovano nella ***Geometria Pratica*** del **Perini**.

L'opera si conclude con la descrizione di due singolari strumenti: l'**odometro**, che permette di misurare la distanza percorsa da un carro, e fu inventato da **Erone**, e un'**asta graduata** per misurare la velocità in navigazione.

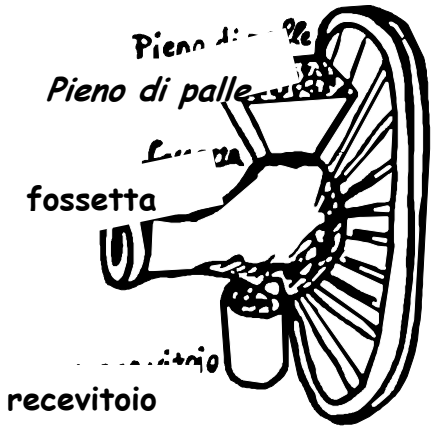
Misurate ogni gran distanza così. Poniamo caso che voi vogliate misurare quanto sia a dirittura dal monasterio vostro sino a Bologna. Andate in su qualche prato grande dove si può vedere Bologna, e ficcate in terra due dardi diritti come dicemmo di sopra, ma ponetegli distanti l'uno dall'altro mille piedi o più quanto vi pare, purché l'uno vegga l'altro e ciascun di loro vegga Bologna, in modo che tra loro tre, cioè Bologna e li due dardi, faccino un triangulo bene sparto. Fatto questo, cominciate da uno de' dardi quale forse sarà più presso verso Ferrara, e ponetevi con le spalle verso Ferrara col viso verso questo dardo, e mirate verso il secondo dardo la giù, addirizzando il vedere vostro per questo primo qui dardo; e su quella linea che farà in terra il vostro vedere, lungi dal dardo venti piedi ponete un segno, e se piace a voi, sia una ciriegia. Poi volgetevi col viso verso Bologna, e mirate per dirittura di questo medesimo dardo, e in terra simile nella linea qual farà lì il vostro vedere, lungi trenta piedi ponete una rosa o quello vi piace. Arete adunque notato in terra uno triangulo, del quale uno angulo verso Ferrara sarà el dardo, verso il mare sarà una ciriegia, verso Bologna sarà una rosa. Chiamasi adunque el dardo qui A, la ciriegia B, la rosa C. Misurate quanto sia da B ad A, e quanto da A a C, e da C a B, e notate bene queste misure appunto. Fatto questo, ite al secondo dardo, e volgete il viso verso Ferrara, e scostatevi venticinque piedi, e per questo secondo dardo mirate a dirittura il dardo primo, e per questa dirittura, quale fa il vostro mirare, ponete una ciriegia presso a questo dardo proprio quanto stava B presso ad A. Poi volgete il viso verso Bologna, e per la dirittura di questo dardo mirate Bologna, e in terra su quella linea ponete una rosa distante dal dardo proprio quanto fu nel primo triangulo distante C da A, e terrete un filo da questo dardo fino alla rosa. Fatto questo, tornate dove ponesti la ciriegia, e per dirittura di questa ciriegia mirate Bologna, e notate bene dove questo mirare testé batte in terra e taglia il filo posto e tirato fra '1 dardo e la rosa, e qui ponete una bacchetta. Arete qui notato un altro triangulo, quale uno angulo sarà il dardo, chiamisi D, l'altro sarà la ciriegia, e chiamisi E, el terzo sarà lo stecco, chiamisi F. E per meglio esprimere, eccovi a simile la pittura.



Dico che qui vi conviene considerare che voi avete tre trianguli, l'uno è A B C, l'altro D E F, el terzo è quello il quale gli anguli suoi sono l'uno Bologna, l'altro el dardo A, l'altro la ciriegia E. Misurate quante volte entra la linea E D nella linea E F nel suo piccolo triangulo, tante volte E A entrerà in tutta la linea E persino a Bologna nel suo gran triangulo. Per meglio esprimere, eccovi del tutto l'essemplo a numeri. Sia D E dieci piedi, e sia E F quaranta piedi. Dico che come dieci entra in quaranta quattro volte, così la linea e spazio E A entrerà volte quattro nella linea e spazio fra E e Bologna; e se E D entrerà trenta volte in E F, da qua dove voi operate sino a Bologna sarà trenta volte quanto sia da A sino ad E.

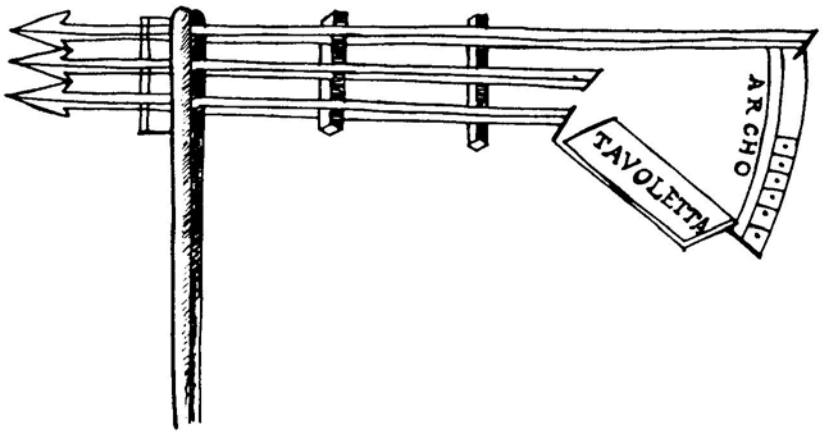
Le **tecniche di misurazione** di **Ludovico Perini**

Abbiate un carro, quanto le ruote sono maggiori d'ambito, meglio fia. In sul motto grosso della ruota, in quale stanno fitti e' razzi, e nel quale entro pertusato passa quello ch'e' Latini chiamano axis, cavate una fossetta non maggiore né più profonda se non quanto essa riceva una sola pallotta. E fate una cassa col suo pertuso sopra al vostro motto del carro, in modo che nessuna pallotta esca se non quando volgendosi la ruota una sola n'entri nella sua fossetta. Empiete questa cassetta di pallotte, e sotto fatevi dove, quando volgendosi la ruota lasci la pallotta riceuta nel pertuso fatto sotto, sia ricolta, o sacco o che si sia. Credo per vostro ingegno intendete come secondo il numero delle pallotte cadute vi saranno note le volte della ruota, e a voi sia noto quanto volge laruota. Conterete adunque tante pallotte, tante ruote, e tante volte, tante braccia. Eccovi l'essemplo dipinto:



L'odometro secondo Vitruvio

A conoscere quanto navichi una vela, ponete il vostro pennello, fatto non di piume ma di legno, fitto nella sua astola, e abbiate una assicella sottile quanto un cuoio, lunga un piè, larga quattro dita. Appiccatela con due guercetti giù basso alla coda del pennello ultima, in modo ch'ella si muova non qua e qua verso man destra o sinistra, quale fa il suo pennello e come fanno gli usci, ma su e giù come fanno le casse quando l'aprite o serrate; e sievi una parte d'uno arco quale penda in giù attaccato in modo che quando questa assicella starà più alta o più bassa, voi possiate ivi nel detto arco tutto segnare e annotare. E per più chiarezza vostra eccovi la similitudine di questo pennello e asse e arco.



Questo non bisogna persuadervi che quando non trarranno venti, questa assicella penderà giuso a dirittura, e quando sarà poco vento, questa poco s'alzerà, e quando sarà forte, ella starà sullevata assai. Convienvi avere adunque notato e ben conosciuto altrove a luoghi noti a voi quanto la vostra fusta corre per ora e per tanto vento che l'assicella s'alzi a questo o a quest'altro segno, con queste vele tanto alte che così adiritte, con questo carico, con tanti timoni in acqua e simile; e questi segni e notazioni poneteli che vi sieno ben certissimi e presenti. Adunque navicando porrete mente quante ore corse la vostra fusta pel lento del tal segno, con l'altre circunstanze a voi note, e così arete certa notizia del vostro navigio, e non converrà arbitrare per altre coniettture le miglia come fanno oggi e' marinai.

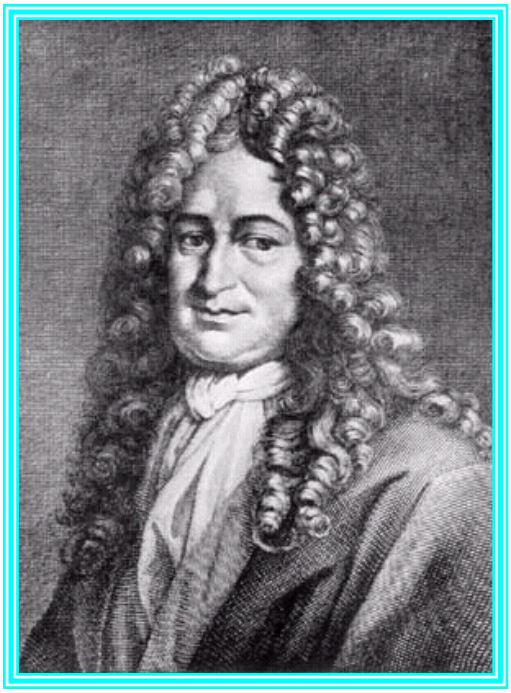
Il mito di Archimede per Leon Battista Alberti

Nell'opera ***Della tranquillità dell'animo***, l'artista e matematico rinascimentale **Leon Battista Alberti** esalta l'intima gratificazione derivante dalla pratica della matematica, che egli dice di aver provato su di sé, ma che egli crede di vedere soprattutto nella figura di **Archimede**. Dello scienziato greco ricorda due episodi leggendari: la distruzione con gli specchi ustori e con le catapulte della flotta romana di Marcello, giunta per invadere la Sicilia, e la sua morte per mano di un soldato romano; immerso nei suoi calcoli, non avrebbe fatto nulla per farsi riconoscere, e sarebbe stato ucciso come tanti suoi concittadini.

"M. Marcello presso a Siracusa comandò a' suoi armati che in tanto eccidio di sì nobil terra servassono quello Archimede matematico, quale, defendendo la patria sua con varie e in prima non vedute macchine ed istrumenti bellici, aveva una e un'altra volta perturbato ogni ordine suo, e rotto l'impeto di tanta sua ossidione e espugnazione. Trovaronlo investigare cose geometriche, quali e' disegnava in sul pavimento in casa sua; e trovaronlo sì occupato coll'animo e tanto astratto da ogni altro senso, che lo strepito dell'armi e'l gemito dei cittadini, quali cadeano sotto le ferite, le strida della moltitudine, quali periano oppressi dalle fiamme e dalle ruine de' tetti e de' templi, nulla'l commoveano. Cosa per certo mirabile che tanto fracasso, tanta caligine del fumo e del polverio non lo stogliesse da questa una sua investigazione e ragione matematica, a quale egli era tanto occupato e aggiudicato."

Curiosità Leggendo un racconto simile a questo, la giovanissima **Marie-Sophie Germain** si commosse a tal punto che decise di dedicare la sua vita alla matematica.

Gottfried Wilhelm Leibniz (Lipsia, Germania, 1646 - Hannover, Germania, 1716)



Diplomatico, consigliere di corte, e quindi personaggio politico di professione, fu filosofo e matematico di rara profondità.
A Leibniz si deve l'introduzione del punto " · " per indicare l'operazione della moltiplicazione. Egli generalizzò anche l'uso dei due punti " : " introdotto dagli inglesi per indicare l'operazione di divisione.

Leibniz divide con **Newton** il merito del grande impulso dato al **Calcolo Infinitesimale**, la cui matrice va tuttavia riconosciuta anche a matematici precedenti, in particolare a **Blaise Pascal**, alle cui opere Leibniz si avvicinò per merito del fisico **Huyghens**.
Anche se la **disputa** tra le due scuole fu aspra e si risolse a svantaggio del Leibniz, il contributo dei due ebbe origini e motivazioni profondamente diverse: applicative in Newton e teorico-filosofiche in Leibniz, esattamente come accadde per **Fermat** e **Cartesio**, i due grandi iniziatori della **Geometria analitica**.
Nel 1666, nella ***Dissertatio de arte combinatoria,*** Egli difende il valore della logica non solo come *ars demostrandi* ma anche come *ars inveniendi*, riproponendo in un nuovo senso l'ambizioso programma del logico medioevale **Raimondo Lullo**.
La sua impostazione può essere espressa in tre punti:

1. ***esprimere concetti complessi mediante concetti più semplici***
2. ***rappresentare i concetti semplici mediante simboli caratteristici***
3. ***rappresentare mediante simboli anche i procedimenti del pensiero, in modo da costruire un linguaggio simbolico (che chiama "characteristica universalis") con cui trovare quasi meccanicamente le verità note e nuove verità.***

Anche la Matematica sarebbe ottenibile da questa "***caratteristica universale***" e questa esigenza portò il Nostro all'invenzione dei simboli del calcolo differenziale ed integrale, la cui fortuna è stata enorme.

Nel 1684, in ***Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus*** pose le basi del suo calcolo differenziale, dando senza dimostrazione, le regole di differenziazione. In una lettera al **Wallis** (1690), scrive infatti:

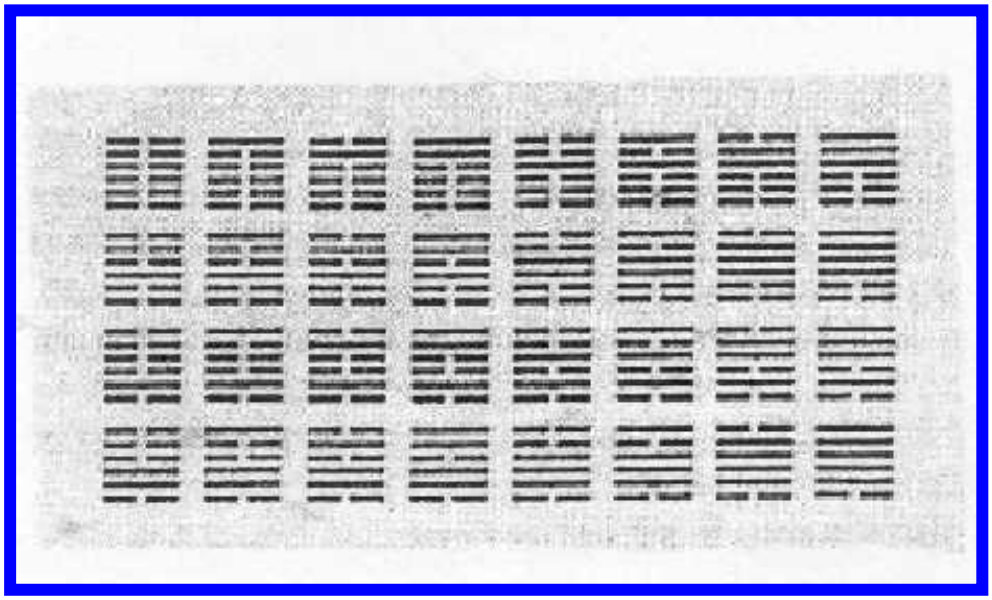
xy + d(xy) = (x + dx)(y + dy)
e quindi
d(xy) = xdy + ydx + dx dy
e dx dy va trascurato perché incomparabilmente minore di xdy + ydx.

Oltre a contendere ad Isaac **Newton** il vanto della scoperta del **Calcolo infinitesimale**, anticipò di oltre un secolo e mezzo la **logica Booleana** con la sua "**Explication de l'Arithmétique binaire**" del 1703, e lo spunto gli venne dalla conoscenza del testo **I Ching**. Riportiamo, a questo proposito, l'intero brano tratto da *"La ricerca della lingua perfetta"* (pagg. 305-307), di **Umberto Eco**, perché sebbene, o forse proprio perché, scritto da un non matematico, ci appare preciso e nello stesso tempo comprensibile dai non addetti ai lavori.

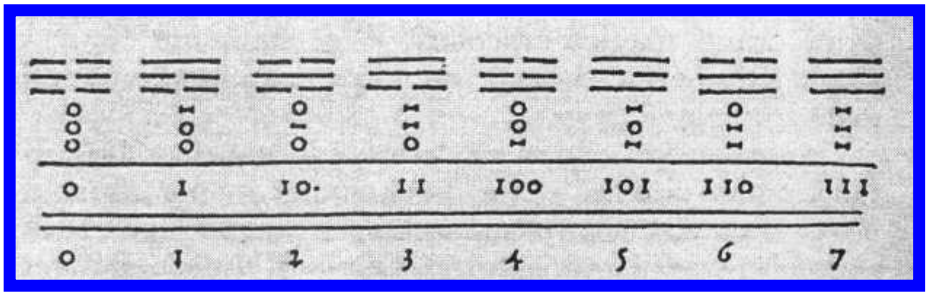
Lo "I Ching" e la numerazione binaria

*Che finalmente lo stesso Leibniz inclinasse a dirigere la caratteristica verso un calcolo veramente cieco, anticipando la logica di **Boole**, ce lo dice il modo in cui ha reagito alla scoperta del libro cinese dei mutamenti, ovvero lo I Ching. L'interesse di Leibniz per la lingua e la cultura cinese è ampiamente documentato, specie negli ultimi decenni della sua vita. Nel 1697 aveva pubblicato i Novissima sinica, una raccolta di lettere e saggi dei missionari gesuiti in Cina. L'opera fu vista dal padre Joachim Bouvet appena tornato dalla Cina, e questi gli aveva scritto sull'antica filosofia cinese che egli vedeva rappresentata nei 64 esagrammi dello I Ching. Questo Libro dei Mutamenti è stato per secoli ritenuto di origine millenaria mentre studi più recenti lo fanno risalire al III secolo a.C., ma secondo la vulgata dell'epoca Leibniz lo attribuiva al mitico Fu Hsi. Le sue funzioni erano magico-oracolari, e giustamente Bouvet aveva letto in questi esagrammi i principi fondamentali della tradizione cinese. Ma quando Leibniz gli descrive le sue ricerche sull'aritmetica binaria, e cioè il calcolo per 1 e per 0 (di cui annotava anche le implicazioni metafisiche e il potere di rappresentare il rapporto tra Dio e il Nulla), Bouvet comprende che essa spiega mirabilmente la struttura degli esagrammi cinesi. Invia a Leibniz nel 1701 (ma Leibniz la riceve nel 1703) una lettera a cui aveva unito una incisione su legno*

della disposizione degli esagrammi.
L'incisione rappresentava la disposizione degli esagrammi in modo diverso dallo ***I Ching****, ma questo errore permise a Leibniz di vedere in essi una sequenza significativa di cui renderà ragione in "Explication de l'arithmétique binaire" (1703).*
Si vedano i diagrammi consultati da Leibniz, dove la struttura centrale parte da sei linee spezzate e continua aumentando successivamente il numero delle linee intere.



Questo permette a Leibniz di vedere in questi esagrammi la perfetta rappresentazione della progressione dei numeri binari che infatti si scrivono secondo la sequenza
000, 001, 010, 110, 101, 011, 111 ...



In fondo, e ancora una volta, Leibniz svuota i simboli cinesi dai significati che altre interpretazioni vi avevano assegnato, per considerare solo la loro forma e la loro capacità combinatoria. Siamo di nuovo di fronte a

una celebrazione del pensiero cieco, ad un riconoscimento della forma sintattica come veicolo di verità. Questi 1 e questi 0 sono veramente simboli ciechi e la loro sintassi funziona, e permette scoperte prima che ogni possibile significato venga assegnato alle stringhe che produce. Leibniz anticipa certamente, e di un secolo e mezzo, la logica matematica di George Boole; ma anticipa anche il vero linguaggio dei computer, e cioè non quello che noi parliamo - all'interno di un programma - digitando sulla tastiera e leggendo sullo schermo le risposte della macchina, ma il linguaggio con cui il programmatore fornisce istruzioni al computer e il linguaggio in base al quale il computer "pensa", senza "sapere" che cosa significhino le istruzioni che riceve ed elabora in termini puramente binari.
Non conta il fatto che Leibniz si ingannasse perché "i kua vennero interpretati dai cinesi in ogni modo, fuorché in senso matematico".
Leibniz vi vede una struttura formale, che certamente c'è, ed è questa struttura che gli appare esotericamente ammirevole, tanto che (in una lettera a padre Bouvet) non esita a identificare il loro autore con Mercurio Trismegisto (e non ingiustamente, dato che Fu Hsi era considerato il rappresentante dell'era della caccia, della pesca e dell'invenzione della cottura, e quindi una sorta di padre delle invenzioni).

I linguaggi spaziali

La lingua universale secondo Cartesio

La lingua universale secondo Leopardi

La lingua universale secondo Peano

La numerologia cinese

La macchina calcolatrice di Leibniz

Linguaggi spaziali

(Da *"La ricerca della lingua perfetta"*, pagg. 330-333, di **Umberto Eco**)
Quasi ai margini della science-fiction, ma indubbiamente interessante come progetto scientifico, rimane il disegno del Lincos, una lingua elaborata da un matematico olandese, ***Hans A. Freudenthal*** *(1960) per poter interagire con eventuali abitanti di altre galassie. Il Lincos non è una lingua che aspiri a essere parlata: è piuttosto il modello di come si possa inventare una lingua insegnandola nel contempo a esseri che presumibilmente avrebbero una storia (remotissima) e una biologia diverse dalla nostra.*
Freudenthal *presume che si possano lanciare nello spazio segnali di cui non conta la sostanza dell'espressione (per comodità si assume che siano onde radio di diversa durata e lunghezza) bensì la forma e dell'espressione e del contenuto. Cercando di comprendere la logica che guida la forma dell'espressione che viene loro trasmessa, gli alieni dovrebbero essere in grado di estrapolarne una forma del contenuto che in qualche modo non dovrebbe essere loro estranea.*
In una prima fase il messaggio presenta delle sequenze di suoni regolari che dovrebbero essere interpretati quantitativamente e, una volta assunto che gli spaziali abbiano compreso che quattro impulsi significhino il numero 4, introduce nuovi segnali che dovrebbero essere intesi come operatori aritmetici:
●●● < ●●●●
●●●● = ●●●●
●●●● + ●● = ●●●●●●
Passati a familiarizzare gli alieni con una numerazione binaria che sostituisce le sequenze di segnali (del tipo ●●●● = 100, ●●●●● = 101, ●●●●●● = 110*), sarà possibile comunicare, sempre per estensione e ripetizione, alcune delle principali operazioni matematiche.*
Più complesso appare l'insegnamento dei concetti di tempo, ma si presume che, ricevendo costantemente un segnale di una stessa durata, sempre correlato al numero tre, gli spaziali possano iniziare a computare le durate in secondi. Seguono le regole di interazione conversazionale, in cui si dovrebbe familiarizzare gli interlocutori con sequenze traducibili come «Ha dice a Hb: Qual è lo x tale che 2x = 5?».
In un certo senso l'apprendimento avviene come quando si ammaestra un animale, sottoponendolo ripetutamente a uno stimolo e fornendogli un segno di approvazione quando la risposta è quella adeguata, salvo che l'animale riconosce immediatamente l'approvazione (per esempio, elargizione di cibo) mentre gli spaziali debbono essere indotti a riconoscere, per successivi e ripetuti esempi, il significato di un «OK». In

tal modo il progetto presume di poter comunicare anche significati come «perché», «come», «se», «sapere», «volere» e addirittura «giocare».
Lincos però assume che gli spaziali abbiano una tecnologia che li renda capaci di ricevere e decodificare lunghezze d'onda, e che essi seguano alcuni criteri logici e matematici affini ai nostri. Non si presuppongono solo gli elementari principi di identità o ***non contraddizione****, ma anche l'abitudine a considerare costante la regola che si è inferita per induzione da una molteplicità di casi. Lincos può essere insegnato solo a chi, avendo azzardato che per il misterioso mittente 2*2 = 4, assuma che questa regola debba valere costantemente anche in futuro. Non è premessa da poco, perché nulla esclude che possano esistere alieni che «pensano» secondo regole variabili secondo il tempo e il contesto.*
Freudenthal *pensa esplicitamente a una vera e propria characteristica universalis, ma in Lincos solo alcune regole sintattiche inedite sono esplicitamente fondate e presentate all'inizio, mentre per altre operazioni (per esempio i modelli di interazione a domanda e risposta) il progetto assume implicitamente le regole di un linguaggio naturale, e addirittura la sua pragmatica. Immaginiamo una comunità di esseri con sviluppati poteri telepatici (il modello potrebbe essere quello degli angeli, che leggono ciascuno la mente dell'altro, o tutti apprendono le stesse verità leggendole nella mente di Dio): per esseri di questo tipo la struttura interazionale a domanda e risposta non avrebbe alcun senso. Lincos soffre del fatto che, pur avendo una struttura formale, è concepito come linguaggio di comunicazione «naturale» e quindi deve rimanere aperto a momenti di incertezza, imprecisione - in altre parole non deve essere tautologico come un linguaggio formalizzato.*
Probabilmente il progetto è più interessante dal punto di vista pedagogico (come insegnare una lingua senza ricorrere all'ostensione sensibile di oggetti fisici) che da quello glottogonico. In tal senso presenta una situazione ideale assai diversa da quella sempre immaginata dai filosofi del linguaggio quando presentano un esploratore europeo che interagisce con un selvaggio, entrambi additando una certa porzione dello spazio-tempo, ma sempre incerti se la parola che l'uno o l'altro pronuncia si riferisca a un oggetto specifico in quella porzione spazio-temporale, all'evento, alla porzione stessa nel suo insieme, o alla fin fine non esprima il rifiuto dell'interlocutore a rispondere.

Intelligenza Artificiale
(*Da "La ricerca della lingua perfetta"*, pagg. 333-335, *di* **Umberto Eco**)

Lincos però fornisce l'immagine di un linguaggio quasi esclusivamente «mentale» (il supporto espressivo si riduce a fenomeni elettromagnetici), e ci porta a riflettere su un'altra discendenza della ricerca antica sulle lingue perfette: sono infatti lingue a priori quelle che parliamo con i computer, e si pensi alla sintassi del Basic o del **Pascal**.
Si tratta di sistemi che non raggiungono la dignità di lingua perché presentano appena una sintassi, semplice ma rigorosa, e rimangono parassiti di altre lingue per i significati che vengono assegnati ai loro simboli vuoti, ovvero alle loro variabili non vincolate, e in gran parte fatte di connettori logici come if .. then. E tuttavia sono sistemi universali, ugualmente comprensibili a parlanti di lingue diverse, e perfetti nel senso che non consentono errori o ambiguità. Sono a priori, nel senso che si basano su regole che non sono quelle della costruzione superficiale delle lingue naturali, ma al massimo esprimono una presunta grammatica profonda comune a tutte le lingue. Sono filosofici, perché presumono che questa grammatica profonda, che si rifà alle leggi della logica, sia la grammatica di un pensiero comune sia agli uomini sia alle macchine. Delle lingue filosofiche a priori hanno entrambi i limiti fondamentali: (i) costruiscono le loro regole sulla base della logica elaborata dalla civiltà occidentale, che secondo molti affonda le sue basi nella struttura delle lingue indo-europee; (ii) sono limitatamente effabili, e non consentono di esprimere tutto quello che può esprimere una lingua naturale.
Il sogno di una lingua perfetta in cui si possano definire tutti i significati dei termini di un linguaggio naturale, e permetta interazioni dialogiche «sensate» tra uomo e macchina, o alle macchine di elaborare inferenze proprie dei linguaggi naturali, ritorna nelle ricerche contemporanee di Intelligenza Artificiale. Per esempio si cerca di fornire alla macchina regole di inferenza in base alle quali essa possa «giudicare» della coerenza di una storia, o sia in grado di concludere, dal fatto che un tale è ammalato, che pertanto ha bisogno di cure, e così via. La letteratura in proposito è assai vasta, i sistemi molteplici, da quelli che presumono ancora la possibilità di una semantica a componenti elementari, o a primitivi, a quelli che forniscono alla macchina schemi di azione, o addirittura di situazioni (frames, scripts, goals).
Tutti i progetti di Intelligenza Artificiale ereditano in qualche modo la problematica delle lingue filosofiche a priori, e riescono a risolverne

alcuni problemi solo con soluzioni ad hoc e per porzioni molto locali dell'intero spazio di azione di una lingua naturale.

Alcuni fantasmi della lingua perfetta

Si è sovente parlato in questo libro di effetti collaterali. Senza suggerire analogie a ogni costo, si potrebbe invitare il lettore informato a rileggere vari capitoli della storia della filosofia, della logica e della linguistica contemporanea ponendosi la seguente domanda: sarebbe stato possibile elaborare questa teoria se non ci fosse stato il lavorio secolare della ricerca di una lingua perfetta, e in particolare di una lingua filosofica a priori?

Nel 1854 George ***Boole*** *pubblicava la sua* ***Investigation of the laws of thought*** *e avvertiva che lo scopo del suo trattato era indagare le leggi fondamentali di quelle operazioni mentali per mezzo delle quali si effettua il ragionamento; e rilevava che non potremmo facilmente comprendere come le innumerevoli lingue della terra abbiano potuto conservare attraverso i secoli tante caratteristiche comuni se tutte non fossero radicate nelle leggi stesse della mente.* ***Frege*** *nel suo* ***Begriffsschrift*** *o* ***Ideografia****.* ***Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*** *(1879), iniziava con un riferimento alla caratteristica universale leibniziana.* ***Russell*** *(****The Philosophy of Logical Atomism****, 1918-19) ricordava che in un linguaggio logicamente perfetto le parole di un enunciato avrebbero dovuto corrispondere una a una ai componenti del fatto corrispondente (salvo i connettivi). Il linguaggio dei Principia Mathematica, che egli aveva scritto con* ***Whitehead****, possedeva soltanto una sintassi ma, annotava* ***Russell****, con l'aggiunta di un vocabolario sarebbe stato un linguaggio logicamente perfetto (anche se ammetteva che tale linguaggio, se si fosse potuto costruire, sarebbe stato intollerabilmente prolisso).*

La lingua universale secondo Leopardi
La lingua universale secondo Peano
La lingua universale secondo Cartesio

Caso e probabilità

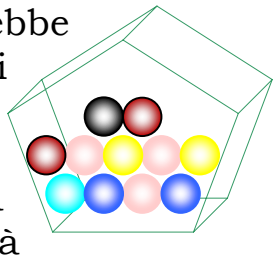
1. Introduzione

La **teoria della probabilità** nasce dal desiderio di formulare previsioni matematiche sul futuro andamento di un fenomeno avendo a disposizione certi dati numerici di base.

Tutto ha origine dall'idea di assegnare ad un certo evento X un valore compreso fra 0 e 1, che misura la *"probabilità"* che lo stesso X si verifichi: questo numero, che indicheremo con $p=p(X)$, è 0 se X è un evento impossibile, 1 se X è un evento certo. In generale X si verificherà in determinate circostanze (*casi favorevoli*), che saranno solo una parte di tutti i *casi possibili*; p misura precisamente la proporzione dei casi favorevoli rispetto ai casi possibili. Se si lancia una moneta non truccata, è intuitivo associare la probabilità $p=0,5$ all'evento X che corrisponde al risultato "testa"; per simmetria, all'evento *complementare* X' spetterà la probabilità $q=0,5$. Se la moneta non è perfettamente bilanciata, in assenza di altre informazioni, si può dire solamente che agli eventi X e X' spettano, nell'ordine, probabilità p e q soggette alla condizione $p+q=1$. Infatti i casi possibili sono formati dai casi favorevoli a "testa" e dai casi favorevoli a "croce", che, insieme, danno luogo ad un evento certo (perché sicuramente uscirà testa o uscirà croce). In generale, sia dato un numero n di eventi $X_1, X_2,\ldots, X_n$, di probabilità $p_1, p_2,\ldots, p_n$. Chiamiamo X l'evento in cui uno tra $X_1, X_2,\ldots, X_n$, si verifica: qui supponiamo che tali eventi si escludano a vicenda. Il calcolo dei casi favorevoli a X mostra subito che la probabilità di X sarà data dalla formula

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

detta della *probabilità totale*. L'evento X potrebbe essere, ad esempio, l'estrazione di una pallina di colore chiaro dall'urna raffigurata. Esso si compone degli eventi X_1, X_2 e X_3, corrispondenti all'estrazione di una pallina rosa, una pallina celeste, un pallina gialla; le rispettive probabilità sono $p_1=3/11$, $p_2=1/11$, $p_3=2/11$. Sommando, si ottiene $p= 6/11$: in effetti, una pallina chiara si estrae in 6 casi su 11 possibili.



Supponiamo ora invece di voler effettuare tre estrazioni successive, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, e di voler calcolare la probabilità che esca prima una pallina rosa, poi una celeste, infine un pallina gialla. Le combinazioni vincenti sono quelle formate da una delle tre palline rosa, dall'unica pallina celeste, e da una delle due palline gialle. I casi favorevoli al nuovo evento X desiderato si otterranno quindi moltiplicando tra loro i casi in cui la prima volta esce il rosa, i casi in cui la seconda volta esce il celeste ed i casi in cui la terza volta esce il giallo: la probabilità di X sarà il prodotto delle probabilità p_1, p_2 e p_3. In generale, se l'evento X prevede che certi eventi $X_1, X_2,\ldots, X_n$ si verifichino tutti, in maniera indipendente, la sua probabilità sarà

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

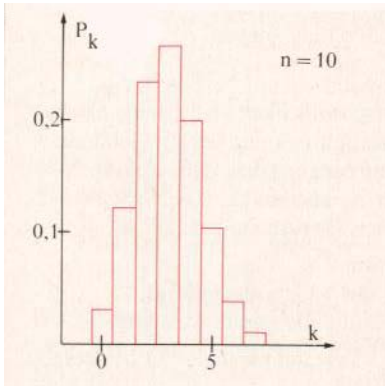
detta *probabilità composta.*

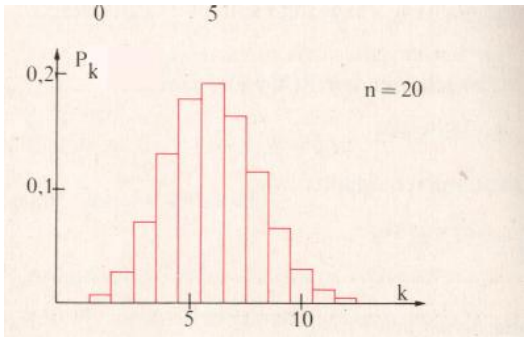
2. La distribuzione binomiale

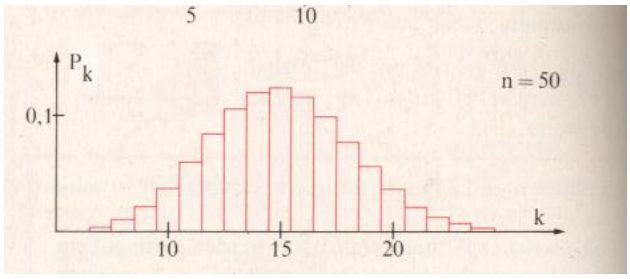
La probabilità totale e la probabilità composta vengono utilizzate, sia pur implicitamente, nelle **lettere** che, alla metà del Seicento, **Pascal** e **Fermat** si scambiarono a proposito di un **problema** di spartizione della posta tra due giocatori. Successivamente **Jakob Bernoulli** scoprì una formula generale che permette di calcolare, ad esempio, la probabilità p_k che, su n partite disputate tra due giocatori, di cui uno vince con probabilità p, questi ne vinca esattamente k:

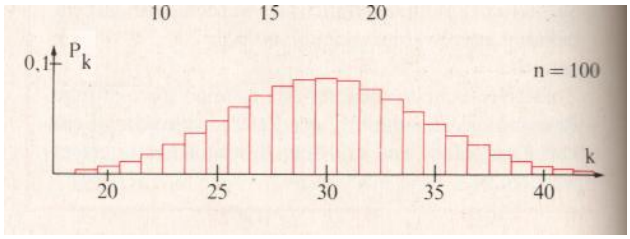
$$p_k = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Vi compare il *coefficiente binomiale "n su k",* presente nel **triangolo aritmetico**: un evento cui si applica la formula si dice retto da una ***distribuzione binomiale***. Per "distribuzione" si intende il modo in cui la probabilità totale *1* di tutti i possibili esiti del gioco si ripartisce tra questi ultimi. Essa può essere efficacemente visualizzata con un istogramma.



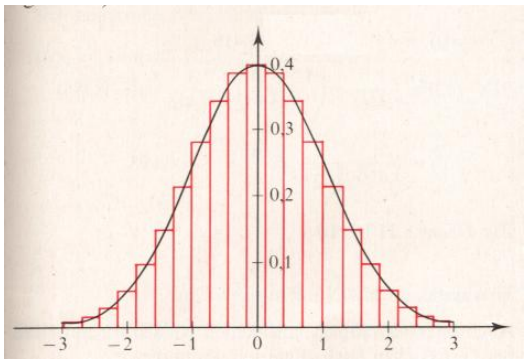






Nei quattro esempi raffigurati abbiamo fissato $p=0,3$, scegliendo per n i valori *10, 20, 50* e *100*. Sull'asse orizzontale sono riportati i possibili valori di k, e verticalmente le corrispondenti probabilità p_k. Non si può fare a meno di notare che, al crescere di n, il diagramma tende ad assumere una forma sempre più simmetrica.

In effetti, al limite, il suo profilo coincide con il grafico di una particolare funzione, detta ***campana di Gauss***.



La sua espressione è del tipo

$$f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{c}\right)^2}$$

La sovrapposizione rappresentata in figura può essere facilmente realizzata traslando l'istogramma e cambiando l'unità di misura sull'asse orizzontale secondo valori numerici prestabiliti. Attraverso questa trasformazione, è possibile allora

ricavare, dalla campana di Gauss, valori approssimati per le probabilità p_k.
Quando il numero n è grandissimo, il grafico della funzione sostituisce, in modo naturale, l'istogramma. Allora il fenomeno che si studia cessa di essere una successione *discreta* di eventi valutabili singolarmente, per divenire un insieme *continuo* di cui si possono esaminare porzioni di varia estensione, ciascuna rappresentata da un intervallo sull'asse delle ascisse. Ciò è quanto avviene, ad esempio, se si vuole rappresentare graficamente la distribuzione delle velocità delle particelle che compongono un gas in condizioni di equilibrio. (***moto browniano***). Non si potrà certo determinare direttamente la probabilità che, pescando a caso una particella, questa abbia una data velocità, ma si potrà stimare la proporzione delle particelle la cui velocità è vicina ad un certo valore.

3. I grandi numeri

La Meccanica Statistica ci insegna che il moto browniano è retto da una ***distribuzione gaussiana.*** Questa legge empirica permette di prevedere, dato un certo volume di gas ad una certa temperatura, i risultati dell'esperimento, puramente ipotetico, in cui si misurassero le velocità di un gran numero di particelle "prelevate" dal gas. Ci si aspetterebbe, in particolare, di incontrare, con maggior frequenza, le velocità prossime al valore "centrale".

D'altra parte, come abbiamo visto, la distribuzione gaussiana è una sorta di corrispettivo continuo della distribuzione binomiale. Viene allora naturale chiedersi se anche quest'ultima rispecchi i risultati che ci si deve concretamente aspettare, ad esempio, da n lanci di una moneta. L'esperienza (oltre che l'intuizione) fornisce una risposta affermativa, anche se solo al limite: la proporzione m/n di risultati "testa" tende infatti a coincidere con la probabilità $p=0,5$, e ciò è tanto più vero quanto più grande è n (e quanto più, allora, la distribuzione binomiale si avvicina alla distribuzione gaussiana). Questo è l'enunciato della ***legge dei grandi numeri***, così enunciata da Bernoulli:

Se p è la probabilità costante di un evento in una prova, e se, su n prove eseguite, m risultano favorevoli all'evento, la probabilità che risulti $|p-m/n| < \varepsilon$ *tende a 1 quando n tende all'infinito, comunque sia prefissato* $\varepsilon>0$.

Le *n* prove eseguite potrebbero essere anche, ad esempio, le ripetute misurazioni di una stessa grandezza fisica con lo stesso strumento. Se quest'ultimo è ragionevolmente affidabile, i valori misurati con maggiore frequenza saranno quelli vicini al valore reale. Più precisamente, la distribuzione dei valori misurati sarà, con buona approssimazione, gaussiana: per ovvie ragioni di simmetria sarà dunque perfettamente lecito stimare il valore reale formando la media aritmetica dei valori misurati, dopo aver eventualmente scartato quelli più "devianti". La campana di Gauss nasce, in effetti, come rappresentazione degli errori di misura.

4. La teoria del caos

Con la legge dei grandi numeri e la distribuzione gaussiana i matematici sono riusciti a scoprire, in un insieme apparentemente casuale e disordinato di eventi - un ***processo aleatorio*** - una regolarità che permette di imbrigliarli in una teoria generale, e di dominarli con facili strumenti numerici. Il termine *gas* venne coniato nel Seicento sul modello della parola greca *caos:* i risultati ottenuti nei secoli seguenti mostrarono, però, che i gas non potevano essere propriamente considerati il regno della confusione. Se caos c'è, questo è da considerarsi un *caos benigno*. Esistono invece altri fenomeni, anche macroscopici, che si sottraggono, in misura più o meno accentuata, alle leggi viste nella sezione precedente: l'andamento dei titoli di Borsa, il profilo di coste e montagne, e persino la sequenza delle piene del Nilo (l'imperscrutabile alternanza di periodi di "vacche magre" e di "vacche grasse" di biblica memoria). Questi sono tutti esempi di quello che potremmo chiamare *caos selvaggio*. Uno stadio intermedio è rappresentato da quegli eventi in cui l'approssimazione gaussiana comincia a delinearsi solo dopo un numero altissimo di iterazioni: ciò avviene in tempi estremamente lunghi, che spesso superano la durata stessa del processo: si può parlare allora di *caos lento*. La distinzione fra i tre livelli di caos risale a **Mandelbrot**, che, negli anni cinquanta, si era accorto come i fenomeni più ribelli non potessero essere domati con un approccio matematico classico. L'istogramma che raffigura la distribuzione di probabilità in *n* lanci di monete, visto da lontano, si confonde con la campana di Gauss. Così accade che il filo seghettato di un coltello ci appaia rettilineo: esiste una direzione ben precisa che prevale, come andamento complessivo,

sulle piccole irregolarità del percorso. In maniera analoga, il flusso di corrente in un filo di rame è caratterizzato da continue oscillazioni: se nel circuito si inserisce un altoparlante, si ode un rumore confuso; se si collega un amperometro, invece, la sua lancetta segna un'intensità ben precisa e costante. Questi sono due casi di caos benigno che, come dice Mandelbrot, *"fanno piacere a **Descartes**, dando la possibilità di decomporre la difficoltà: si studia dapprima la tendenza (che qui è rettilinea) e poi vi si sovrappongono le fluttuazioni."*



Questo metodo fallisce, invece, se si tenta di applicarlo alla costa della Bretagna: se se ne traccia il contorno da quote differenti, il risultato è una serie di disegni molto diversi, che non possono essere approssimati con una stessa forma "limite". Lo stesso dicasi per certi **diagrammi** raffiguranti le fluttuazioni dei prezzi.

Mandelbrot scoprì in queste forme, che sembrano arbitrariamente irregolari, un importante tratto comune, che chiamò ***autoaffinità***, e che mise a fondamento di una nuova geometria, la ***geometria frattale***.

Matematica e Psicologia: La probabilità soggettiva

Lettere sul problema delle parti

Il **problema delle parti** fu oggetto di un carteggio tra **Fermat** e **Pascal**. Le lettere che i due matematici si scambiarono sull'argomento possono essere considerati documenti fondatori del **calcolo delle probabilità**. Trascriviamo anzitutto - adattando il linguaggio - parte di una lettera che il secondo indirizza al primo, il 29 luglio 1654.

"Signore,
l'impazienza prende me come voi e, benché io sia ancora a letto, non posso fare a meno di dirvi che ho ricevuto ieri sera, da parte del signor de Carcavi, la vostra lettera sulle parti, e non vi so dire quanto io l'abbia apprezzata. […] Il vostro metodo è molto sicuro ed è quello che per primo mi è venuto in mente in questa ricerca; ma, poiché il lavoro sulle combinazioni è faticoso, ho trovato il modo di abbreviarlo, e, precisamente, un altro metodo ben più corto e più chiaro, che vorrei qui esporvi in poche parole: perché vorrei ormai aprirvi il mio cuore, se si potesse, tant'è la mia gioia di vedere come le nostre idee si incontrino. Posso constatare che la verità è la stessa a Tolosa e a Parigi.
Ecco, più o meno, come procedo per sapere il valore di ognuna delle parti, quando due giocatori giocano, per esempio, in tre partite, e ciascuno ha messo in gioco 32 pistole:

Poniamo che il primo abbia vinto due partite e l'altro una sola; essi giocano ora una partita, la cui sorte è tale che, se vince il primo, vince tutto il denaro in gioco, cioè 64 pistole; se vince l'altro, sarebbero due partite a testa, e quindi, se i due vogliono interrompere il gioco, bisogna che ognuno ritiri la sua posta, cioè 32 pistole.

Considerate dunque, Signore, che se il primo vince, gli appartengono 64 pistole; se perde, gliene appartengono 32. Quindi, se essi non vogliono rischiare e si accomiatano senza giocare la partita, il primo deve dire: "Sono sicuro d'avere 32 pistole, perché anche la perdita me le assicurerebbe; ma, quanto alle altre 32, forse le avrò io, forse le avrete voi; i casi si equivalgono; dividiamo quindi queste 32 pistole a metà tra di noi e datemi, oltre a ciò, le 32 pistole che sono sicuramente mie." Egli avrà dunque 48 pistole e l'altro 16.

Supponiamo adesso che il primo abbia vinto due partite e l'altro nessuna, e che essi comincino a giocare una partita. La sorte di questa partita è tale che, se vince il primo, egli ritira tutto il denaro, cioè

64 pistole; se vince l'altro, ci siamo ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà vinto due partite e l'altro una.
Ora, abbiamo già mostrato che in questo caso appartengono 48 pistole a colui che ha vinto due partite: dunque, se essi non vogliono giocare questa partita, egli deve dire così: "Se vinco, vincerò tutto, cioè 64; se perdo, mi spetteranno di diritto 48 pistole: quindi datemi le 48 pistole che mi toccano anche nel caso in cui dovessi perdere, e dividiamo le altre 16 a metà, perché ci sono le stesse probabilità[1] che le vinciate voi o che le vinca io." In questo modo egli avrà 48 e 8, che sono 56 pistole.

Poniamo infine che il primo abbia vinto una sola partita e l'altro nessuna. Vedete, signore, che, se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che se il primo vince, egli avrà due partite contro nessuna, e, andandosene, secondo il caso precedente, gli appartengono 56 pistole. Se perde, la situazione è di una partita a testa: quindi gli spettano 32 pistole. Dunque egli deve dire: "Se voi non volete giocare questa partita, datemi le 32 pistole che sono sicuramente mie, e dividiamo le restanti 56 a metà. Da 56 togliete 32, resta 24; dividete poi 24 a metà, prendetene voi 12 e io ne prendo 12 che, con 32, fanno 44."

Ora, in questo modo, vedete, con semplici sottrazioni, che per la prima partita, gli spettano 12 pistole in più dell'altro, per la seconda, altre 12; e per l'ultima, 8.

Adesso, per mettere le cose in chiaro […] il ***valore*** *(intendo dire il guadagno rispetto all'avversario) dell'ultima di due partite è doppio rispetto all'ultima di tre partite e quadruplo rispetto all'ultima di quattro partite e ottuplo rispetto all'ultima di cinque, ecc.*

Ma la proporzione delle prime partite non è così facile da trovare […] Dato un numero qualsivoglia di partite, trovare il valore della prima.

Sia, per esempio, 8 il numero dato di partite. Prendete i primi otto numeri pari e i primi otto numeri dispari, cioè: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.
Moltiplicate i numeri pari in questo modo: il primo per il secondo, il prodotto per il terzo, il prodotto per il quarto, il prodotto per il quinto, ecc.; moltiplicate i numeri dispari nello stesso modo: il primo per il secondo, il prodotto per il terzo, ecc.
L'ultimo prodotto dei pari è il denominatore e l'ultimo prodotto dei dispari è il numeratore della frazione che esprime il valore della prima

[1] In realtà questo termine non compare nello scritto di Pascal: non era ancora in uso all'epoca. La parola corrispondente, nel testo originale francese, è *hasard*, la cui traduzione letterale è "caso".

di otto partite; ciò significa che, se ognuno gioca il numero di pistole espresso dal prodotto dei pari, il guadagno dovrà essere pari al prodotto dei dispari.

Ciò si dimostra, anche se con molta fatica, con le combinazioni come le avete immaginate voi, ed io non ho potuto dimostrarlo nell'altra maniera che vi ho appena detto, ma solo mediante le combinazioni. Ed ecco le proposizioni che conducono allo scopo, che sono precisamente delle proposizioni aritmetiche riguardanti le combinazioni, delle quali ho trovato delle proprietà piuttosto belle.

Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2e Partie.	63	70	80	96	128	
3e Partie.	56	60	64	64		
4e Partie.	42	40	32			
5e Partie.	24	16				
6e Partie.	8					

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
La 1re Partie.	63	70	80	96	128	256
Les 2 1res Parties.	126	140	160	192	256	
Les 3 1res Parties.	182	200	224	256		
Les 4 1res Parties.	224	240	256			
Les 5 1res Parties.	248	256				
Les 6 1res Parties.	256					

Se da un numero qualunque di lettere, ad esempio, da 8 lettere A, B, C, D, E, F, G, H, voi prendete tutte le possibili combinazioni di 4 lettere, e poi tutte le possibili combinazioni di 5 lettere, e poi di 6, di 7, di 8, e quindi prendete la metà del numero delle combinazioni di 4 lettere (cioè della metà del numero complessivo di lettere), ed a questo sommate tutte le altre combinazioni superiori, la somma sarà il numero che, nella progressione geometrica di ragione 4 e termine iniziale 2 occupa il posto 4. Per esempio, e ve lo dirò in latino, perché il francese non rende l'idea:

Si quotlibet litterarum, verbi gratia octo:

A, B, C, D, E, F, G, H,

sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, senarii, etc., usque ad octonarium, dico, si jungas dimidium combinationis quaternarii, nempe 35 (dimidium 70) cum omnibus combinationibus quinquenarii, nempe 56, plus omnibus combinationibus senarii, nempe

28, plus omnibus combinationibus septenarii, nempe 8, plus omnibus combinationibus octonarii, nempe 1, factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est 2: dico quartum numerum, quia 4 octonarii dimidium est.
Sunt enim numeri progressionis quaternarii cujus origo est 2, isti:

2, 8, 32, 128, 512, etc.,

Quorum 2 primus est, 8 secundus, 32 tertius, et 128 quartus, cui 128 aequantur:

+35 dimidium combinationis 4 litterarum
+56 combinationis 5 litterarum
+28 combinationis 6 litterarum
+ 8 combinationis 7 litterarum
+ 1 combinationis 8 litterarum.

Ecco la prima proposizione, che è puramente aritmetica; l'altra riguarda la dottrina delle parti ed è la seguente:

Bisogna premettere: se è stata giocata la prima di cinque partite, ad esempio, di modo che ne mancano 4, il gioco sarà inevitabilmente deciso in 8 mani, che è il doppio di 4.
Il valore della prima delle cinque partite è la frazione che ha per numeratore la metà delle combinazioni di 4 su 8 (prendo 4 perché è uguale al numero di partite che mancano, e 8 perché è il doppio di 4) e per denominatore lo stesso numeratore più tutte le combinazioni superiori.
Così, se ho vinto la prima di cinque partite, mi spettano 35/128 della posta del mio avversario, ovverosia, se egli ha giocato 128 pistole, io ne prendo 35 e gliene lascio il resto, cioè 93. Ora, questa frazione è la stessa che quest'altra: 105/384, la quale ha come denominatore il prodotto dei pari e per numeratore il prodotto dei dispari.

Voi vi renderete senz'altro conto di tutto ciò, se solo vi dedicherete un po' della vostra attenzione: per questo ritengo inutile trattenervi ancora. Ciononostante vi invio una delle mie vecchie tabelle; non ho il tempo di ricopiarla. La rifarò. Da lì vedrete come il valore della prima partita sia sempre uguale a quello della seconda, il che si trova facilmente tramite le combinazioni. […]

Il numero delle ***combinazioni*** di k elementi scelti fra n è pari a

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)\cdot (n-k+2)\cdot\cdot\cdot n}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot k}$$

Questo è il *k*-esimo coefficiente della *n*-esima riga del **triangolo aritmetico** di Pascal. Ad esempio,

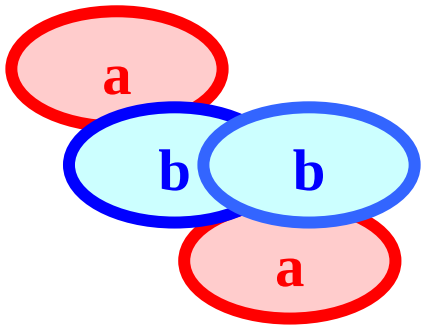
$$\binom{8}{4} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 56$$

che è uno dei risultati utilizzati nella lettera.

Dopo una settimana Fermat invia la sua risposta, di cui adesso riportiamo i passi principali. Essa contiene una rielaborazione del metodo alla luce del calcolo combinatorio.

"Ecco come voi procedete quando ci sono due giocatori:
Se due giocatori, che giocano in più partite, si trovano nella condizione in cui mancano due partite al primo e tre al secondo, per trovare il valore, si deve (dite voi) vedere in quante partite il gioco sarà deciso in ogni caso.
È facile dedurre che ciò avverrà in quattro partite, da cui voi concludete che bisogna vedere quante partite si combinano tra due giocatori e quante combinazioni fanno vincere il primo e quante il secondo, e quindi dividere il denaro secondo questa proporzione. […]

a	*a*	*a*	*a*	*1*
a	*a*	*a*	*b*	*1*
a	*a*	*b*	*a*	*1*
a	*a*	*b*	*b*	*1*
a	*b*	*a*	*a*	*1*
a	*b*	*a*	*b*	*1*
a	*b*	*b*	*a*	*1*
a	*b*	*b*	*b*	*2*
b	*a*	*a*	*a*	*1*
b	*a*	*a*	*b*	*1*
b	*a*	*b*	*a*	*1*
b	*a*	*b*	*b*	*2*
b	*b*	*a*	*a*	*1*
b	*b*	*a*	*b*	*2*
b	*b*	*b*	*a*	*2*
b	*b*	*b*	*b*	*2*



Dunque, per vedere come quattro partite si possono combinare tra due giocatori, bisogna immaginare che essi giochino con un dado a due facce (poiché sono solo due giocatori), come a testa o croce, e che lancino quattro di questi dadi (perché giocano quattro partite); e adesso bisogna vedere a quante diverse giocate questi dadi possano dare luogo. Ciò si determina facilmente: ce ne sono sedici, che è il quadrato di quattro. Infatti, immaginiamo che una delle facce sia indicata da a, favorevole al primo giocatore, e l'altra da b, favorevole al secondo: allora questi quattro dadi possono formare uno dei seguenti piatti: aaaa…bbbb.
E siccome mancano due partite al primo giocatore, tutti i piatti che contengono due a lo fanno vincere; quindi che ce ne sono 11 per lui; e poiché mancano tre partite al secondo giocatore, tutti i piatti in cui ci sono tre b lo fanno vincere: dunque ce ne sono 5. Dunque devono dividere la somma nel rapporto 11 a 5. "

Nella stessa lettera Fermat osserva che il metodo non si estende banalmente al caso di tre o più giocatori.

Il moto browniano

Il moto disordinato di particelle sospese in fluido fu osservato per la prima volta nel 1650: allora si trattava di granelli di polline e resine immersi in un liquido. Poiché il materiale era di origine vegetale, fu naturale credere che il moto fosse prodotto da minuscoli organismi. La smentita arrivò nel 1827, quando il botanico scozzese **Robert Brown** riscontrò lo stesso fenomeno in sostanze inanimate: ne concluse che la causa doveva essere meccanica, e non biologica. Da allora il moto - che da lui prese il nome di *browniano* - è un importante oggetto di studio della fisica. Col tempo l'attenzione dei ricercatori si è spostata dai fenomeni macroscopici (come quello relativo alle particelle di fumo nell'aria) ai fenomeni microscopici, come il moto di agitazione termica delle molecole di un gas. I risultati ottenuti in quest'ambito da **Einstein** nel 1905 forniscono la prima conferma della struttura atomica della materia. Gli sviluppi più recenti appartengono alla meccanica statistica e quantistica.

I Ching
(Il libro dei mutamenti)

Si tratta di un antichissimo testo cinese risalente a più di tremila anni fa. Composto da un sovrano e da suo figlio con la guida di un saggio taoista, è stato venerato come oracolo, e considerato guida al successo e libro di saggezza.
Contiene 8 **trigrammi** e 64 **esagrammi** ottenuti combinando gli otto trigrammi.

TABELLA DEI TRIGRAMMI

SUPERIORE ▶ / INFERIORE ▼	Cielo	Lago	Tuono	Fuoco	Terra	Montagna	Acqua	Vento
Cielo	1	43	34	14	11	26	5	9
Lago	10	58	54	38	19	41	60	61
Tuono	25	17	51	21	24	27	3	42
Fuoco	13	49	55	30	36	22	63	37
Terra	12	45	16	35	2	23	8	20
Montagna	33	31	62	56	15	52	39	53
Acqua	6	47	40	64	7	4	29	59
Vento	44	28	32	50	46	18	48	57

La numerologia cinese

Blaise Pascal (Clermont, Francia, 1623 - 1662)



Rimasto orfano di madre a soli tre anni, la sua educazione fu seguita dal padre Étienne, uomo di grande cultura, vivamente interessato alle scienze esatte, amico di Padre **Mersenne** ed in corrispondenza epistolare con **Fermat**.
Il giovane Blaise ebbe così l'occasione di frequentare dal 1635, insieme al padre, le riunioni, veri dibattiti scientifici, che si svolgevano presso il **Mersenne**.
Appena diciassettenne scrisse un piccolo trattato sulle **coniche**, dal titolo *Essai sur les coniques et génération des sections coniques*, stampato a Parigi nel 1640. La trattazione è svolta nell'ambito della geometria proiettiva e contiene il famoso **teorema di Pascal** sull'esagono iscritto in una conica qualsiasi.
A soli 19 anni, dovendo aiutare il padre nei suoi lunghi e continui conteggi (per motivi d'ufficio presso l'intendenza di Rouen) ideò la costruzione di una macchina che con il solo aiuto della vista e del tatto eseguiva tutti i calcoli sui numeri. Questa invenzione gli procurò molta fama; la regina della Polonia, Luigia Maria Gonzaga, se ne fece costruire due. Tuttavia la macchina calcolatrice rimase priva di quella utilità pratica che il suo ideatore si aspettava.
L'idea del ***Calcolo meccanico*** fu ripresa da altri ingegni, che cercarono di semplificare e perfezionare la macchina di **Pascal**, detta ***pascaline***. Tra questi ricordiamo **Leibniz**, l'inglese **Saunderson** con la sua *Aritmetica palpabile* e, più tardi, **Lord Stanhope** che ideò due macchine: **una**, della grandezza di un volume, capace di eseguire esattamente le operazioni più complicate di somma e sottrazione, l'altra, della grandezza di un normale tavolo, dotata di una vite girevole, capace di risolvere tutti i problemi di divisione e moltiplicazione e congegnata in modo che, se l'operatore sbagliava nel

girare la vite, usciva dalla tavola una palla d'avorio ad avvertire dell'errore.
Motivato forse dalla sua assidua partecipazione a giochi d'azzardo nei salotti mondani, **Pascal** si occupò anche di **teoria delle probabilità** che chiamò *Aleae Geometria*. Nata come scienza astratta, essa doveva poi essere applicata alla economia rendendo possibile il vero contratto d'assicurazione basato sul principio della divisione dei rischi. Risale, infatti, al 1654 una sua **lettera** a Pierre **Fermat** sul calcolo delle probabilità.
Si interessò anche di fisica: ricordiamo il "*principio di Pascal*" sulla uniforme trasmissione della pressione, in un fluido, in tutte le direzioni.
Ancora scrisse: un *Traité des coniques* (1648) di cui ci è giunta solo la prima parte ed un'analisi schematica fatta da **Leibniz**; un *Traité du triangle arithmétique* (Trattato sul **triangolo aritmetico**) stampato postumo nel 1665; *Diverses inventions en géométrie*, che contiene un *Traité général de la roulette* in cui stabilisce importanti proprietà della curva **cicloide** (*roulette*).
Fu personalità complessa, la sua vita fu altalenante tra crisi di misticismo e periodi di partecipazione attiva alla vita mondana.
Celebri i suoi *Pensées de M. Pascal sur la réligion et sur quelques autres sujets (Pensieri del Sig. Pascal sulla religione e su alcuni altri argomenti)*, di cui riportiamo il numero [17]:

L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature; mais c'est un roseau pensant. Il ne faut pas que l'univers entier s'arme pour l'écraser: une vapeur, une goutte d'eau, suffit pour le tuer. Mais, quand l'univers l'écraserait, l'homme serait encore plus noble que ce qui le tue, parce qu'il sait qu'il meurt, et l'avantage que l'univers a sur lui, l'univers n'en sait rien.

[L'uomo non è che una canna, la più debole della natura, ma è una canna che pensa. Non è necessario che l'universo intero si armi per annientarlo: un vapore, una goccia d'acqua, sono sufficienti per ucciderlo. Ma, quando l'universo lo annienterà, l'uomo sarà ancora più nobile di ciò che lo uccide, perché egli sa che muore, e il vantaggio che l'universo ha su di lui, l'universo non ne sa niente.]

Curiosità Pascal firmò alcuni suoi scritti con vari pseudonimi, ottenuti anagrammando la stessa sequenza di lettere: *Amos Dettonuille, Louis de Montalte, Salomon de Tultie.* Di anagrammi si dilettarono anche **Galileo** e **Huyghens**.

La lumaca di Pascal

Criteri di divisibilità

Il concorso sulla cicloide

Pascal contro Descartes

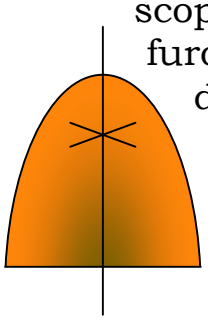
Pascal e la teoria degli indivisibili

La geometria secondo Pascal

Pascal e la "roulette"

Nel suo trattato sulla **cicloide**, **Blaise Pascal** narra una vicenda, legata a questa curva - che egli chiamava *roulette* - di cui fu egli stesso protagonista insieme con i principali matematici suoi contemporanei.

Egli racconta che, durante le sue notti insonni dell'inizio del 1658, gli erano venute alcune idee sulla cicloide. Poco tempo dopo dimostrò una serie di proposizioni di cui, come ci riferisce il suo biografo Gilbert Périer, "*egli stesso rimase sorpreso*". Il suo amico Duca di Roannez gli suggerì allora di sottoporre le sue scoperte a tutti i geometri del mondo, sotto forma di un concorso a premi. Nel giugno dello stesso anno egli lanciò dunque la sfida. In una lettera circolare, che diffuse anonimamente, egli propose sei problemi, dando ai concorrenti tre mesi di tempo per rispondere. Il primo ed il secondo premio consistevano, rispettivamente, in 40 e 20 pistole. Alla scadenza del termine egli avrebbe pubblicato le proprie soluzioni. I problemi riguardavano il calcolo dell'area e del centro di gravità di regioni di piano sottese alla cicloide, ed i volumi dei solidi di rotazione da esse generati.
Il concorso, che si inseriva perfettamente nella secolare tradizione delle **disfide matematiche**, rimase senza vincitori. Dal verbale della riunione della commissione scientifica risulta che tutti gli autori avevano finito per ritirare i propri elaborati, tranne due; uno di essi era **John Wallis**.
Entrambi avevano inviato lettere in cui comunicavano di avere scoperto degli errori nelle proprie soluzioni. Tali errori furono giudicati troppo gravi per consentire l'assegnazione dei premi. Uno dei concorrenti attribuiva ad un solido più largo alla base e più sottile verso il vertice un centro di gravità più vicino a quest'ultimo, incorrendo in una colossale cantonata. L'altro sbagliò clamorosamente l'applicazione **della teoria degli indivisibili**.



Blaise Pascal
Dei caratteri di divisibilità dei numeri dedotti dalla somma delle loro cifre

In questo trattato **Blaise Pascal** presenta semplici algoritmi per determinare se un dato numero naturale *m* è o meno divisibile per un altro numero naturale *n* fissato. Il procedimento generale è basato sulla manipolazione delle cifre della rappresentazione decimale di *m*. L'autore lo descrive nel modo seguente.

Supponiamo, per semplicità, che la rappresentazione decimale del numero *m* sia costituita da non più di *10* cifre: indicheremo con *z*, α, *β*, γ, … rispettivamente le cifre dell'unità, delle decine, delle centinaia, delle migliaia, e così via.

Si predispone anzitutto una tabella che servirà per tutti i possibili valori di *m*. Nella prima riga scriveremo, da destra a sinistra, i numeri da *1* a *10*.

10	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
						c	*b*	*a*	*1*
						γ	*β*	α	*z*

Sotto il numero *1* scriviamo *1*. Sotto il *2* inseriamo il resto della **divisione euclidea** di *10* per *n*, indicandolo con *a*. Nella colonna successiva scriviamo *b*, il resto della divisione di *10a* per *n*. Il numero *c*, che porremo sotto il *3*, sarà il resto della divisione di *10b* per *n*. Proseguiamo in questo modo, riempiendo tutta la seconda riga.

Nella terza riga trascriviamo le cifre del numero *m*. Moltiplichiamo quindi tra loro i due numeri di ciascuna colonna della seconda e terza riga: $z \cdot 1$, $\alpha \cdot a$, $\beta \cdot b$, $\gamma \cdot c$, ….. Infine, sommiamo tutti questi prodotti. Sia *M* il totale. Si può dimostrare che *m* è divisibile per *n* se e solo lo è *M*. Il vantaggio è che *M* è, in generale, un numero molto più piccolo di *m*, ed è pertanto più facile verificarne la divisibilità per *n*. Se il numero *M* fosse ancora troppo grande, lo si può comunque ridurre riapplicando il procedimento a *M* stesso. Iterando l'algoritmo un numero finito di volte, il valore di *M* ottenuto alla fine potrà avere anche solo una o due cifre. In tal caso il problema di divisibilità diviene banale.

Riprendiamo dallo scritto di Pascal un esempio concreto, relativo alla divisibilità per $n=7$. Il numero m è $287\ 542\ 178$. La tabella in questo caso è la seguente.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
	2	8	7	5	4	2	1	7	8

La casella lasciata vuota è come se contenesse lo zero.

Si ottiene $M = 8\cdot1 + 7\cdot3 + 1\cdot2 + 2\cdot6 + 4\cdot4 + 5\cdot5 + 7\cdot1 + 8\cdot3 + 2\cdot2 = 119.$

Quindi $287\ 542\ 178$ è divisibile per 7 se e solo se lo è 119. La verifica su 119 è sicuramente più semplice che sul numero di partenza. Nel caso in cui il numero 119 ci dicesse ancora poco, potremmo chiarirci le idee compilando per esso la tabella:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
							1	1	9

Chiaramente la seconda riga è la stessa di sopra: l'abbiamo calcolata una volta per tutte, è quella che caratterizza la divisibilità per 7. Il totale adesso è :

$M' = 9\cdot1 + 1\cdot3 + 1\cdot2 = 14$

Ora il problema può dirsi risolto: siccome M' è divisibile per 7, lo è anche M, e dunque lo è anche m.

Osserviamo che per n=9, il procedimento di Pascal fornisce la famosa *prova del nove*, che tutti conoscono dalla scuola media. In questo caso M è semplicemente uguale alla somma delle cifre di m, e si sa che il resto della divisione di M per 9 è uguale al resto della divisione di m per 9.
Si può utilizzare il procedimento che abbiamo descritto sopra per creare una analoga *prova del sette*.

I primi criteri di divisibilità comparvero in Europa grazie a **Fibonacci** , che li aveva appresi dai **matematici arabi e indiani**. Essi sono utili ai fini della determinazione della scomposizione di un numero intero in fattori **primi**, la cui esistenza ed unicità è sancita dal **teorema**

fondamentale dell'aritmetica, noto già ad **Euclide**: questi lo presenta nel **Libro VII** dei suoi ***Elementi***.

La prova del sette e del nove secondo M. Francesco Pagani

Pascal contro Descartes

Pascal criticava la visione materialistica del mondo su cui era fondata la **scienza** di **Descartes**, spesso usando parole mordaci. I suoi scritti contengono appunti come: *"Scrivere contro coloro che approfondiscono troppo la scienza. Descartes."* - *"Descartes inutile ed incerto"* - *"Io non posso perdonare a Descartes: egli vorrebbe, in tutta la sua filosofia, poter fare a meno di Dio; ma egli non ha potuto evitare di fargli dare un buffetto per mettere in moto il mondo; dopo di ciò, non sa più che farsi di Dio."*

In uno dei suoi scritti, Pascal accusa Descartes di aver tratto la distinzione tra *res cogitans* e *res extensa,* nonché il suo motto *"Penso, dunque sono"*, dalle opere di Sant'Agostino, banalizzandone il significato.

Da alcune testimonianze di contemporanei apprendiamo che Pascal, quando voleva dare l'esempio d'una fantasticheria che poteva essere approvata per testardaggine, normalmente proponeva l'opinione di Descartes sulla materia e sullo spazio. Egli chiamava la filosofia cartesiana il *"romanzo della natura, pressappoco simile alla storia di Don Chisciotte."*

La geometria di Pascal

Blaise Pascal vede nei principi e metodi della geometria il modello del buon ragionamento: la geometria è l'unica scienza che, immune da confusione, permetta un corretto ed infallibile studio della verità. Quest'ultimo si compone di tre parti: la prima consiste *"nello scoprire la verità, quando la si cerca"*, la seconda, nel *"dimostrarla, quando la si possiede"*, la terza, nel *"discernerla dal falso quando la si esamina"*.

La geometria insegna perfettamente come provare le verità trovate, e chiarirle in una maniera tale che la prova risulti *"invincibile"*. Il segreto di quest'arte sta nel *"tutto definire e tutto provare"*. Questo principio si realizza attraverso regole ben precise, da seguire nel percorso che conduce, dall'insieme delle *definizioni elementari* e dagli *assiomi*, ad una concatenazione, coerente e completa, di *proposizioni* dimostrate. In questo Pascal non fa che approfondire il metodo adottato da **Euclide** nei suoi ***Elementi***, il cui impianto logico presenta proprio questa tripartizione. Nel suo opuscolo intitolato ***L'arte di persuadere***, di cui ci è pervenuto solo il manoscritto, il matematico francese fissa i capisaldi del metodo geometrico:

"REGOLE PER LE DEFINIZIONI: 1. Non definire alcuna delle cose talmente conosciute di per sé, che non si hanno termini più chiari per spiegarle.
2. Non ammettere nessuno dei termini un po' oscuri o equivoci, senza prima definirli.
3. Utilizzare nella definizione dei termini soltanto parole perfettamente conosciute, o spiegate in precedenza.

REGOLE PER GLI ASSIOMI: 1. Non ammettere alcuno dei principi necessari senza prima essersi accertato che essi incontrino il consenso, per quanto essi possano essere chiari ed evidenti.
2. Richiedere agli assiomi soltanto cose perfettamente evidenti di per sé.

REGOLE PER LE DIMOSTRAZIONI: 1. Non dimostrare nessuna delle cose che sono talmente evidenti di per sé che non si ha niente di più chiaro per provarle.
2. Provare tutte le proposizioni un po' oscure, e utilizzare, nella loro prova, solo assiomi molto evidenti, oppure proposizioni già approvate o dimostrate.
3. Sostituire sempre mentalmente le definizioni al posto dei termini definiti, per non equivocare a causa del margine d'ambiguità dei termini che le definizioni hanno ristretto."

Il metodo di Pascal richiede rigore: solo la coerenza con un contesto matematico ben delimitato permette di costruire dimostrazioni *"solide ed immutabili"*. In particolare, le parole tratte dal linguaggio comune, come *"tempo"*, ricche di sfumature semantiche, dovranno essere introdotte all'inizio del discorso precisando il significato che esse assumeranno lungo tutta la trattazione. Il significato da attribuire ad un certo termine è lasciato all'iniziativa dell'autore: ma, una volta scelto, esso non potrà più essere modificato. *"Non v'è nulla di più lecito che dare il nome che si vuole ad una cosa che sia stata indicata con chiarezza. Bisogna soltanto stare attenti a non abusare della libertà di imporre nomi, dando lo stesso a due cose diverse.[…]*
Infatti i geometri e tutti coloro che agiscono metodicamente, non impongono nomi alle cose se non per abbreviare il discorso, e non per diminuire o cambiare l'idea delle cose di cui discorrono. Essi pretendono che la mente sostituisca sempre l'intera definizione ai termini abbreviati, che essi usano esclusivamente per evitare la confusione creata dalla moltitudine delle parole."

La scelta delle definizioni deve essere improntata alla chiarezza ed alla semplicità, che egli considera i criteri guida dell'esposizione matematica. Egli rifugge i vuoti artifici formali di certi logici, che tanto si affannano a teorizzare sui diversi tipi di **sillogismo**, prescrivendo regole complicate ed astratte. Per Pascal il funzionamento del sillogismo è tanto naturale, da poterlo dare per scontato, mentre i termini usati per classificarlo sono inutilmente astrusi. Qui egli cita ad esempio parole come *barbara* e *baralipton,* le cui sequenze di vocali e consonanti servono ad identificare, in maniera mnemonica, particolari categorie di sillogismi. In polemica con un certo modo di fare matematica, Pascal conclude la sua trattazione dicendo:

"Nulla è più comune che le buone cose: si tratta solo di distinguerle; ed è certo che esse sono tutte naturali e alla nostra portata, e note a tutti. Ma non sappiamo distinguerle. Ciò è universale. Non è nelle cose straordinarie e strane che si trova l'eccellenza di qualsivoglia genere. Ci si solleva per arrivarci, e ci se ne allontana: il più delle volte bisognerebbe abbassarvisi. I migliori libri sono quelli tali che, chi li legge, crede che li avrebbe potuti scrivere lui stesso. La natura, la sola cosa buona, è estremamente familiare e comune.
Quindi non ho dubbi che quelle regole, essendo quelle veritiere, debbano essere semplici, primitive, naturali come sono."

Così semplici devono essere anche i termini impiegati: i nomi altisonanti hanno solo l'effetto di far sembrare inaccessibili le cose vere. *"Io odio quelle parole gonfiate…"*

Pascal, pur attribuendo alla geometria il primato tra le scienze, non considera l'indagine razionale - contrariamente a **Descartes** - l'unico modo di pervenire alla conoscenza. Se l'***ésprit géométrique*** sa procedere solo manipolando assiomi, definizioni e proposizioni secondo le regole prestabilite, l'***ésprit de finesse*** coglie la realtà attraverso l'immediatezza del sentire *"tacitamente, naturalmente e senza arte".*

Definizioni ed assiomi della geometria di Pascal

Gli "Elementi" di Pascal

Nel frammento iniziale di un'opera che avrebbe dovuto intitolarsi ***"Introduzione alla geometria"***, **Pascal** fissa, sia pur in maniera abbozzata, le definizioni e gli assiomi su cui si fonda la geometria dello spazio. Il suo approccio ricalca - nella struttura, ma non nei contenuti - quello di **Euclide** negli ***Elementi***, e realizza le **regole** che egli, in un altro scritto, aveva fissato per la composizione di opere matematiche complete e rigorose, che godano di semplicità e chiarezza formale.

PRIMI PRINCIPI E DEFINIZIONI

PRINCIPIO 1. L'oggetto della pura geometria è lo spazio, del quale essa considera la tripla estensione in tre sensi diversi che si chiamano dimensioni, che si distinguono con i nomi di lunghezza, larghezza e profondità, dando indifferentemente ognuno di questi nomi ad ognuna delle dimensioni, purché non sia dia lo stesso a due. Essa suppone che tutti questi termini siano noti di per sé.

PRINCIPIO 2. Lo spazio è infinito secondo tutte le dimensioni, (Principio 3) e immobile in tutto e in ognuna delle sue parti.

Definizione del corpo geometrico della superficie, della linea, del punto, PRINCIPI 4, 5, 6.

PRINCIPIO 7. I punti… non differiscono che per posizione, 8., le linee per posizione, per grandezza, per direzione e per forma. Le rette per il percorso più breve.

PRINCIPIO 9. La distanza tra due punti è la linea retta.

PRINCIPIO 10. Le superficie possono differire per posizione, per lunghezza, per larghezza, per contenuto, per direzione. Le superficie piane sono delimitate in ogni parte da linee rette, e che si estendono (direttamente) dall'una all'altra. Avvertenza: noi consideriamo qui soltanto le piane. Una linea è uguale ad un'altra quando l'estensione dell'una è uguale a quella dell'altra.

TEOREMI NOTI NATURALMENTE:

1. *Le linee rette uguali tra di loro differiscono solo per posizione, essendo l'una, per il resto, del tutto simile all'altra.*

2. *I cerchi che hanno i semidiametri uguali sono uguali. Ed i cerchi uguali differiscono solo per posizione.*

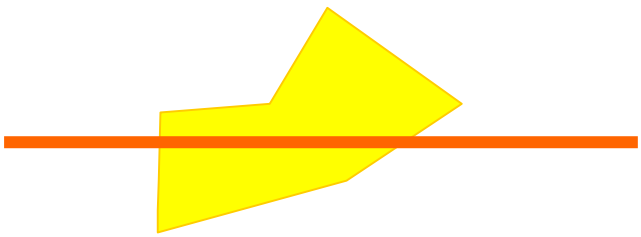
3. *Gli archi uguali degli stessi cerchi differiscono solo per posizione.*

4. *Le corde degli archi uguali di due cerchi uguali differiscono solo per posizione o sono uguali tra loro.*

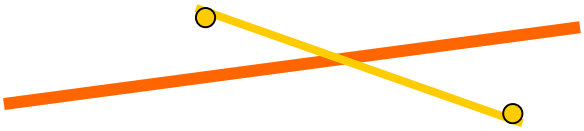
5. *Ogni diametro divide la circonferenza in due porzioni uguali ognuna delle quali è detta semicerchio.*

6. *L'intersezione di due linee è un punto.*

7. *Se per un punto preso all'interno di uno spazio limitato passa una linea retta infinita, essa taglierà le linee che delimitano questo spazio almeno in due punti.*



8. *Se ci sono due punti, l'uno al di qua, l'altro al di là di una linea retta, allora una linea retta che tenda da un punto all'altro, taglia la linea retta che è tra i due in un punto ed uno soltanto.*

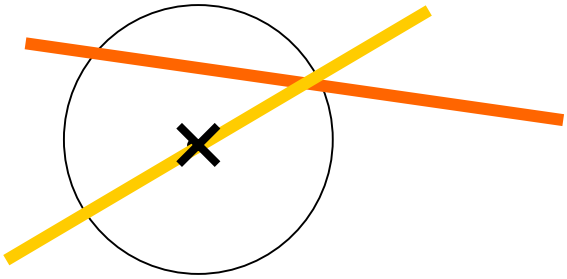


9. *La linea retta infinita che passa per un punto che sia all'interno di un cerchio taglia la circonferenza in due punti e due soltanto.*

10. *La circonferenza che passa per due punti, l'uno all'interno di un cerchio, e l'altro all'esterno, lo taglia in due punti e due soltanto.*

11. *Se due circonferenze hanno l'una dei punti all'interno dell'altra, esse si intersecheranno in due punti e due soltanto.*

12. *Se una circonferenza ha uno dei suoi punti al di là d'una linea retta infinita, e il suo centro al di là della stessa linea retta o su di essa, taglierà la stessa linea retta in due punti.*



Pascal commenta le definizioni di Euclide

Pascal commenta le definizioni di Euclide

Euclide, nelle **Definizioni del Libro VII** dei suoi ***Elementi***, distingue tra i concetti di *unità* e di *numero*: anche Aristotele considerava numero come sinonimo di pluralità. **Pascal**, tuttavia, ravvisa in questa scelta non una motivazione ontologica o semantica, ma una semplice ragione di praticità formale. In un opuscolo inedito egli così scrive:

" […] bisogna sapere che la sola ragione per la quale l'unità non appartiene al rango dei numeri è che Euclide ed i primi autori che hanno trattato l'aritmetica, dovendo dare diverse proprietà che si addicevano a tutti i numeri tranne che all'unità, per evitare di dire troppe volte che tale condizione si riscontra in ogni numero, tranne che nell'unità, essi hanno escluso l'unità dal significato della parola numero, in virtù della libertà che, come abbiamo già detto, si ha di creare definizioni a proprio piacere. Così, se avessero voluto, avrebbero, allo stesso modo, escluso il binario [il due] *ed il ternario* [il tre], *e tutto quanto loro piacesse; infatti si è padroni, purché se ne dia avviso: come, al contrario, l'unità si mette, quando si vuole, nel rango dei numeri, e si fa lo stesso per le frazioni. E, in effetti, si è obbligati a farlo nelle proposizioni generali, per evitare di dire ogni volta: in ogni numero, e nell'unità e nelle frazioni, si trova una certa proprietà; ed è questo il senso indefinito che io ho sempre usato in tutti i miei scritti.*
Ma lo stesso Euclide, che ha privato l'unità del nome di numero […] per far capire tuttavia che essa non è un nulla, ma, al contrario, che essa è dello stesso genere, definisce così le grandezze omogenee: le grandezze, egli dice, sono dette dello stesso genere, quando l'una, moltiplicata diverse volte, può arrivare a superare l'altra.
E di conseguenza, poiché l'unità può, moltiplicata diverse volte, superare qualsivoglia numero, è dello stesso genere dei numeri proprio per la sua essenza e per la sua natura immutabile, nel senso dello stesso Euclide che ha voluto che essa non fosse chiamata numero."

Questa spiegazione di Pascal è perfettamente in linea con la sua personale concezione sulla **natura e l'uso delle definizioni in geometria**.

In realtà, al di fuori del campo strettamente matematico, il **problema della natura dell'uno e dell'unità** è da sempre argomento di discussione filosofica.

Pascal e la teoria degli indivisibili

Pascal utilizza la **teoria degli indivisibili** di **Cavalieri** per calcolare aree e volumi (come nel suo scritto dedicato alla **cicloide**). In un suo opuscolo inedito, dedicato all'***ésprit géometrique***, egli sostiene la validità dell'idea che sta alla base di quel principio, come del **metodo di esaustione** di **Eudosso** ed **Archimede**: la possibilità di estendere una grandezza oltre ogni limite, oppure di ridurla a piacere, procedendo, ad esempio, per divisioni successive.

"Non esiste geometra che non creda lo spazio divisibile all'infinito. Non si può esserlo senza questo principio più di quanto non si possa essere uomini senza un'anima. E ciononostante non ve ne sono che concepiscano una divisione infinita. E dire che ci si può accertare di questa verità per la ragione semplice, ma certo sufficiente, che si capisce perfettamente che non è vero che, dividendo uno spazio si possa arrivare a una parte indivisibile, cioè priva di estensione.
Infatti, cosa c'è di più assurdo che pretendere che continuando a dividere uno spazio, si arrivi infine a una divisione tale che dividendola in due ogni metà rimanga indivisibile e senza estensione, e che così questi due estensioni nulle facciano insieme un'estensione?"

Pascal dimostra l'impossibilità di questo risultato con il ragionamento seguente:

"Un indivisibile è ciò che non ha parti, e l'estensione è ciò che ha diverse parti separate.
Sulla base di queste definizioni, io dico che due indivisibili uniti non fanno un'estensione.
Infatti, quando sono uniti, si toccano ognuno in una parte; e quindi le parti per le quali si toccano non sono separate, perché altrimenti non si toccherebbero. Ora, per definizione, essi non possiedono altre parti: quindi non hanno parti separate; quindi non sono un'estensione, in virtù della definizione di estensione che comporta la separazione delle parti."

Riferendosi a certi matematici scettici, che all'idea di uno spazio infinitamente divisibile vorrebbero opporre l'evidenza della natura, il Nostro risponde:

"Se essi non riescono a capire come delle parti così piccole, da essere impercettibili, possano essere divise tante volte quante il firmamento, non v'è miglior rimedio che di far loro vedere quelle sottili puntine

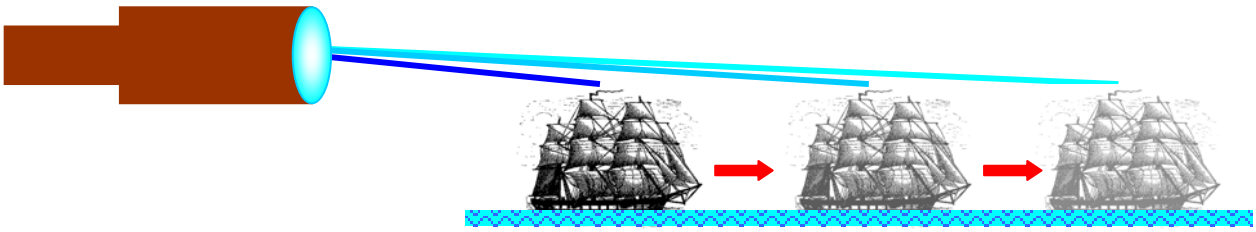
attraverso delle lenti che le ingrandiscano fino ad una massa prodigiosa; col che essi capiranno facilmente che, con l'ausilio di un'altra lente tagliata ancora più magistralmente, si potrebbe ingrandirle fino alle dimensioni del firmamento di cui essi ammirano l'estensione. E così questi oggetti parranno loro divisibili con estrema facilità, ricordando loro che la natura può infinitamente più che l'arte."

Come a Pascal preme sottolineare, è proprio la natura stessa a mostrare la tendenza verso l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo. Un versetto del Libro della Sapienza dice che *Deus fecit omnia in pondere, in numero et mensura.* Il primo concetto, quello di massa, è strettamente legato agli altri due, che scaturiscono dalle idee di unità e di estensione. E tutti insieme sono contenuti nel concetto di movimento, che non può avvenire in assenza di oggetti e di spazio, nella stessa maniera in cui, attraverso la velocità e la lentezza, dà necessariamente origine alla nozione di tempo.

"Vi sono delle proprietà comuni a tutte queste cose, la cui conoscenza apre la mente alle più grandi meraviglie della natura.
La principale di queste comprende le due infinità che si incontrano in tutte: una di grandezza e l'altra di piccolezza.
Infatti, per quanto veloce sia un movimento, si può concepire un moto che lo sia di più, e accelerare ulteriormente quest'ultimo; e così all'infinito, senza mai arrivare a uno che sia così veloce da non potervi nulla aggiungere. E, al contrario, per quanto lento sia un movimento, lo si può ritardare di più, e ancora di più; e così all'infinito, senza mai arrivare a un tale grado di lentezza da non poter più scendere ad un'infinità di altri senza incorrere nella quiete. […]
Ciò vuol dire, in poche parole, che per qualunque movimento, qualunque numero, qualunque spazio, qualunque tempo ne esiste sempre uno più grande ed uno più piccolo: di modo che essi si sostengono tutti tra il nulla e l'infinito, restando sempre infinitamente lontani da questi estremi. […] Ecco l'ammirevole rapporto che la natura ha posto tra queste cose, e le due meravigliose infinità, che essa ha proposto agli uomini, non perché le concepissero, ma perché le ammirassero: e per terminare la considerazione con un'ultima osservazione, aggiungerò che questi due infiniti, benché infinitamente diversi, sono ciononostante relativi l'uno all'altro, di modo che la conoscenza dell'uno conduce necessariamente alla conoscenza dell'altro."

Questa correlazione è evidente nei numeri: avendo a disposizione numeri grandi a piacere si possono produrre, per divisione, numeri positivi piccoli a piacere. E Pascal prosegue:

“E nello spazio lo stesso rapporto si vede tra questi due infiniti contrari: ovverosia, se uno spazio può essere indefinitamente prolungato, ne segue che esso può essere indefinitamente diminuito, come appare in questo esempio: se si guarda attraverso un cannocchiale un vascello che si allontana in linea retta, è chiaro che il punto della lente in cui si vede un qualsivoglia punto della nave continuerà ad alzarsi con continuità, mano a mano che il vascello se ne va. Dunque, se la corsa del vascello è protratta all’infinito, questo punto continuerà ad alzarsi; e intanto non arriverà mai a quello in cui cade l’orizzontale condotta dall’occhio alla lente, di modo che continuerà ad avvicinarcisi senza mai raggiungerlo. Da ciò risulta la relazione che necessariamente lega l’infinità dell’estensione del corso del vascello alla divisione infinita e infinitamente piccola di questo piccolo spazio residuo al di sopra di questo punto orizzontale.”



Leonardo da Vinci (Vinci 1452 – Cloux, Loira 1519)



Figlio illegittimo di un notaio di Vinci, crebbe nella casa del padre. La sua vita di artista, iniziata a Firenze nella bottega del pittore e scultore Andrea del Verrocchio, si svolse tra le principali corti europee: fu al servizio del duca Lodovico il Moro a Milano, del duca Cesare Borgia in Romagna, del cardinale Giuliano de' Medici a Roma, di re Francesco I in Francia. Oltre a diverse celebri opere pittoriche, di lui ci sono pervenuti numerosissimi scritti e disegni di vario argomento artistico, tecnico e scientifico, raccolti in codici, che oggi sono conservati presso vari musei europei: il ***Codice Atlantico***, presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano, il ***Codice Trivulziano***, presso la Biblioteca Trivulziana di Milano, il ***Codice Urbinate***, presso la Biblioteca Vaticana, il ***Codice Arundel*** ed il ***Codice Leicester***, presso la British Library di Londra, i due ***Codici Forster***, presso il Victoria and Albert Museum di Londra, i ***Fogli di Windsor***, presso la Royal Library di Londra, i due ***Codici di Madrid***, presso la Biblioteca Nacional della capitale spagnola, i ***Codici B-M*** ed il ***Codice Ashburnhamiano***, presso la Bibliothèque de l'Institut de France di Parigi.

La matematica che compare nelle annotazioni di Leonardo è per lo più semplice e finalizzata alle applicazioni pratiche. Pare che dei numeri e delle forme egli apprezzasse soprattutto l'essenzialità. I suoi studi architettonici si basano interamente su elementi geometrici primitivi, linee rette ed archi. Leonardo evitava i calcoli complessi, e pare che certi suoi conti aritmetici rivelassero una certa goffaggine. Egli era

carico di una portentosa intuizione, ma era poco istruito. Lui stesso ammetteva, nei suoi scritti, di essere *"omo sanza lettere"*. Non conosceva il latino, il che quasi sicuramente gli rese inaccessibili le trascrizioni medievali delle opere scientifiche dell'antichità. Gli storici su questo punto non sono concordi. Qualcuno di loro, vista la scarsa dimestichezza di Leonardo con i numeri, esclude che egli possa aver letto i trattati del **Fibonacci**. Secondo questi studiosi, egli disponeva solo di nozioni frammentarie, colte qua e là; era sicuramente venuto in contatto con gli scritti di **Archimede**, che egli citò più volte, e da cui trasse importanti ispirazioni, ma non poté mai studiarli in maniera sistematica. Ed è incerto fino a che punto egli avesse, tra le sue fonti, le opere di **Erone** ed **Euclide**, che pure molte parti dei suoi manoscritti sembrano richiamare. È difficile stabilire cosa Leonardo attinse dai suoi predecessori, e cosa reinventò in maniera indipendente, ignorando che si trattasse di idee già pubblicate.
Contro l'ipotesi di un Leonardo "uomo di numeri" pare deporre il suo disinteresse nei confronti dei grandi problemi matematici dell'epoca. Divenne amico del **Pacioli**, per il quale realizzò alcune **illustrazioni** del trattato ***De Divina Proportione***: ciononostante rimase completamente estraneo all'affannosa attività intorno alle equazioni algebriche di terzo e quarto grado che all'epoca teneva impegnati, insieme al Pacioli, il matematico **Scipione dal Ferro** e che, nel giro di una generazione, avrebbe infiammato gli animi di **Antonio Maria Fior**, **Gerolamo Cardano**, **Nicolò Tartaglia** e **Ludovico Ferrari**. Non si addentrò mai in tali questioni, ma forse ciò è dovuto in gran parte alla sua personale convinzione che in natura le sole leggi fisiche significative fossero quelle che stabilivano una dipendenza lineare *(proporzionalità)* tra le grandezze misurabili. Tra queste egli seppe riconoscere correttamente:

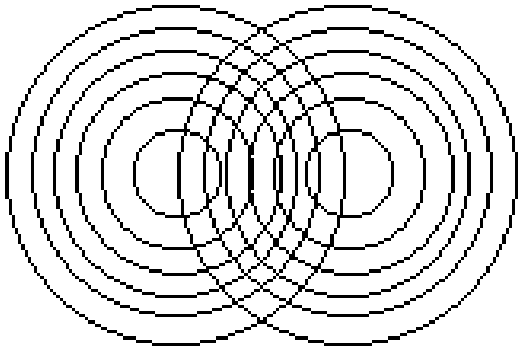
- la **legge del piano inclinato**, secondo la quale – in linguaggio moderno - il tempo di discesa, a parità di lunghezza, è inversamente proporzionale al seno dell'angolo di pendenza;

- la **legge di caduta dei gravi**, ossia il ***moto naturalmente accelerato***, cui tanta attenzione dedicherà, più di un secolo dopo, **Galilei**. La formulazione della legge, contenuta nel *Codice Forster,* è probabilmente la prima della storia.

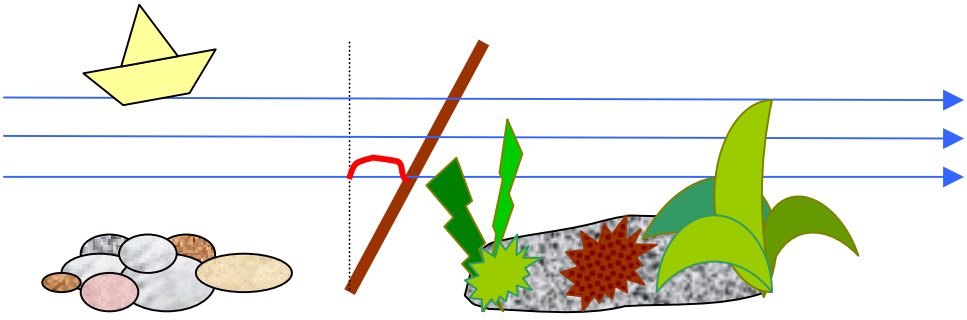
Mai nessuno scrisse tanto sulla meccanica: e le osservazioni di Leonardo spaziano dai problemi di statica (resistenza delle travi, principio della leva ed equilibrio delle bilance) agli effetti dell'attrito sul moto, fino a sfiorare, così pare, il principio di composizione delle

forze, che egli applicò in alcuni casi particolari, e che fu enunciato per la prima volta in maniera completa, due secoli più tardi, da **Newton**.

Il fatto che Leonardo non concepisse, tra le grandezze fisiche, relazioni quadratiche o di grado superiore lo portò spesso a conclusioni errate. Il suo acume gli consentì comunque di aggirare l'ostacolo, e di mettere a frutto le sue osservazioni nelle celeberrime **macchine**, come, ad esempio, quelle idrauliche e quelle per il volo. Molte delle sue pagine sono dedicate al moto dell'aria e dell'acqua, alle onde, alle correnti, ai vortici: fu il primo ad individuare **le analogie e le differenze** che i comportamenti dei due elementi presentano, precorrendo la creazione della *fluidodinamica.* La trattazione di Leonardo manca di un'elaborazione matematica vera e propria, eppure vi compaiono modelli geometrici, come quello che spiega la sovrapposizione delle onde sulla superficie dell'acqua.



Non mancano valutazioni quantitative, anche se non strettamente numeriche, sulle differenze di velocità dell'acqua che scorre in un fiume. Un fondo irregolare rallenta il flusso a causa delle onde che si creano intorno agli ostacoli e si propagano agli strati superiori. L'inclinazione di un bastoncino *(baculum*) con un'estremità fissata al fondo non indica invece necessariamente che l'acqua scorra, in superficie, più velocemente che sul fondo: il fenomeno è spiegabile con il principio della leva.



La pratica della pittura portò Leonardo ad occuparsi di **ottica** e di **prospettiva**. Le sue annotazioni sull'argomento furono raccolte da un anonimo compilatore col titolo di ***Trattato della Pittura***, e pubblicate nel 1651. Leonardo, comunque, non disdegnò la matematica pura, anche se vi si cimentò con poco successo. Molti suoi aforismi ci fanno capire il valore che egli attribuiva a questa disciplina.

"O studianti, studiate le matematiche, e non edificate sanza fondamenti." (Windsor 19066)

"Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione, e mai porrà silenzio alle contradizioni delle sofistiche scienzie, colle quali s'impara uno eterno gridore." (Windsor 19084)

"Nessuna certezza è dove non si può applicare una delle scienzie matematiche, over che non sono unite con esse matematiche." (G 96 v.)

A questo proposito Truesdell osserva: *"Se è vero che Leonardo adorava la matematica come una musa, è anche vero che non le fece una corte più serrata che alle altre muse, ed ella pare gli abbia concesso pochi favori."*

In una pagina del *Codice Atlantico* Leonardo tenta invano di dimostrare in maniera geometrica astratta che il baricentro di un triangolo è il punto d'intersezione delle mediane. Alla fine perviene al risultato tramite l'intuizione fisica: riesce a visualizzare il fatto che, per motivi di simmetria, un triangolo sospeso per quel punto deve necessariamente trovarsi in equilibrio. Con analoghi ragionamenti meccanici ricava il baricentro della piramide, come testimoniano vari brani del *Codice Arundel*. Egli dapprima risolve il problema per la piramide a base triangolare, che è poi un **tetraedro**, trovando che il baricentro coincide col punto d'intersezione di tutti i suoi assi, cioè i segmenti che congiungono il centro di ogni faccia con il vertice opposto. Il baricentro viene così a trovarsi, su ogni asse, ad un quarto di distanza dalla base corrispondente.

"Il cientro della gravità del corpo di 4 basi triangulari fia nella intersegazione de' suoi assis e sarà nella 4ª parte della sua lunghezza." (Arundel, 193 v.)

Leonardo descrive anche un'altra costruzione dello stesso baricentro, che si può ottenere come intersezione dei segmenti che congiungono il punto medio di ogni spigolo al punto medio dello spigolo opposto:

"La piramide di basa triangolare ha'l centro della sua gravità naturale nel taglio che s'astende dal mezo della basa al mezo del lato oposito a essa basa, fatto equalmente distante alla congiunzione della base col predetto lato." (Arundel, 123 v.)

Egli estende poi il risultato alle piramidi qualsiansi:

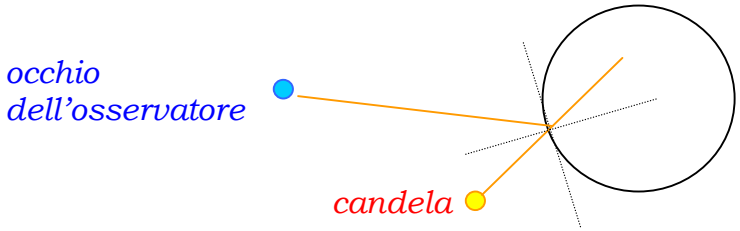
"De ogni piramide tonda, triangula o quadrata o di quanti lati sia, il centro della sua gravità è nella 4ª parte della sua assis vicina alla basa." (Arundel 218 v.)

Leonardo cerca anche di determinare il baricentro del semicerchio (pieno). Leonardo lo suddivide in 8 settori uguali, che identifica con altrettanti triangoli isosceli. Determina quindi il baricentro dell'intera figura (che è simile ad un semicerchio, ma in realtà è la metà di un esadecagono) a partire dai baricentri dei singoli triangoli. Ottiene un risultato, naturalmente approssimato, in base al quale il baricentro si troverebbe - naturalmente, sull'asse del semicerchio - ad una altezza pari a *0,427* volte il raggio. Questo valore numerico è di fatto molto vicino a quello reale: dal ***teorema di Guldino*** si deduce che esso è pari a $4/3\pi \approx 0,424$ volte il raggio.

Se Leonardo avesse voluto utilizzare il **metodo di esaustione** di Archimede, non si sarebbe fermato qui, avrebbe immaginato di aumentare all'infinito il numero dei settori, arrivando a stabilire l'esatta proporzione tra l'altezza del baricentro e le misure del cerchio.
Ma Leonardo non cercò mai un tale rigore: a lui bastava il fatto di poter ricondurre i problemi curvilinei, con approssimazione soddisfacente, a figure rettilinee. Così risolse la **quadratura del cerchio** con una costruzione approssimata, in cui l'errore è il più piccolo possibile, ed assolutamente impercettibile: essa è dunque da considerarsi perfetta ai fini pratici.
Occorrerà attendere la scuola galileiana, in particolare **Torricelli** e **Cavalieri**, per vedere uno studio sistematico dei baricentri, basato sulla ***teoria degli indivisibili***.

L'esempio forse più emblematico dell'approccio di Leonardo alla matematica è la sua soluzione meccanica del ***problema di Alhazen***, proposto da uno scienziato arabo, vissuto intorno all'anno 1000: una

candela è posta di fronte ad uno specchio sferico, e ci si chiede quale dei raggi uscenti dalla fiamma colpirà l'occhio dell'osservatore.



Leonardo mette insieme pochi listelli e costruisce uno strumento che, per ogni raggio uscente dalla fiamma, indica il corrispondente raggio riflesso.

Anche quando Leonardo sembra occuparsi di problemi geometrici astratti, il suo scopo ultimo è l'applicazione tecnica. Ci sono pervenuti, sia pure in maniera frammentaria, tre libri di un suo trattato *"titolato de strasformazione, cioè d'un corpo'n un altro sanza diminuzione o accrescimento di materia."* Vi vengono descritti vari modi per ottenere, a partire da un solido, un altro solido di forma diversa ma avente lo stesso volume. Gli oggetti da manipolare sono le *"tavole"* ed i *"cilindri"*, ossia i parallelepipedi a base quadrata, aventi altezza rispettivamente minore e maggiore del lato della base. Bisogna vedere, in essi, nient'altro che blocchi di metallo da fondere.

"D'un cilindro si facia una tavola quadrata secondo una data largheza: adomandasi quant'esso s'abassa." (Atlantico 32 r.)

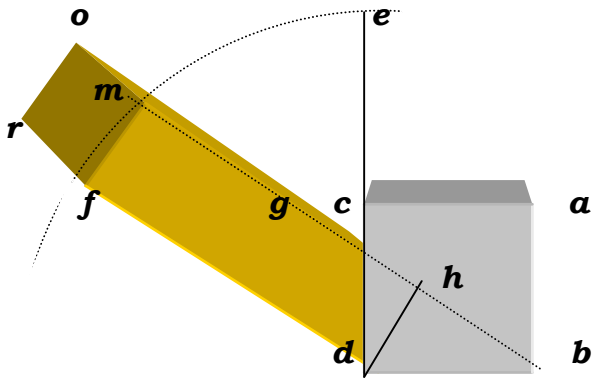
Il problema si traduce in un'equazione lineare:

$$a^2 l = m^2 x,$$

dove a^2 è l'area della base quadrata del cilindro, l la sua altezza, m il lato della base della tavola da ottenere, x la sua altezza incognita. Questo problema algebrico, che è poi una proporzione, rientra nella classe di quelli che Leonardo sapeva risolvere.

Altrove egli propone una soluzione geometrica, ovvero una costruzione con riga e compasso:

“Sia trasformato un cubo’n un cilindro equilatero secondo una data lunghezza.



Dato il cubo abcd, sia allungato secondo la linia ed. Per saddisfare alla proposta io metterò il pie’ del sesto in d, e farò la curva ef; di poi produrrò la linia df dal nascimento della linia de, e dall’angolo b produrrò la linia bg parallela alla linia df; facto questo, per fare rettangole le fronti d’esso parallelo bg df, io leverò il triangolo bhd del suo sito e lo riporterò in gmf e così arò fatto il parallelo hdfm, il quale, quadrandolo secondo la fronte m o f r, sarà equale al cubo a b c d; e perché tale fronte non resta quadrata, per avere lei da un lato la larghezza secondo la larghezza del cubo e dall’altra la larghezza m f, io lo farò di lati equali colla quinta di sotto.” (F 57 v.)

Il *“pié del sesto”* è la punta del compasso. La lunghezza *ed=fd* è l’altezza del cilindro che si vuole costruire. Leonardo dapprima costruisce il solido obliquo avente come base la base del cubo dato, e spigolo *fd*. La sezione ortogonale *(fronte) mofr* di questo solido è rettangolare, avendo il lato *mo* pari al lato *a* del cubo, e l’altro lato *mf* di lunghezza diversa *l*. Il lato *x* della base quadrata del cilindro cercato si ottiene allora risolvendo

$$al = x^2.$$

Questa è un’equazione di secondo grado, che Leonardo sa risolvere con una costruzione euclidea: essa corrisponde alla quadratura del rettangolo, che Euclide descrive nella **Proposizione 14** del **Libro II** degli ***Elementi***.

Il metodo di Leonardo

Leonardo si accosta con la sola ragione, stimolata dall'intuizione, ed alimentata dalla percezione dei sensi, al rigore matematico che vede nella struttura del mondo. Quando asserisce che *"la meccanica è il paradiso delle scienze matematiche, perché con quella si viene al frutto matematico"* (E, 8 r.) e *"la natura è costretta dalla ragione della sua legge, che in lei infusamente vive"* (C, 23 v.) per poi precisare che *"ogni nostra cognizione prencipia da sentimenti"* (Trivulziano 20 v.) pare anticipare di un secolo la posizione galileiana che vede la scienza come il risultato di esperienza e ragionamento. Allo scienziato pisano lo accomuna anche l'avversione per la cultura appresa dai libri, che si nutre di sola tradizione:

"Chi disputa allegando l'autorità, non adopra lo'ngegno, ma più tosto la memoria" (Atlantico, 76 r. a)

"Molti mi crederanno ragionevolmente potere riprendere, allegando le mie prove per esser contro all'alturità d'alquanti uomini di gran riverenza apresso de' loro inesperti iudizi, non considerando le mie cose esser nate sotto la semplice e mera sperienzia, la quale è maestra vera." (Atlantico, 119 v. a)

Ma se Galilei porrà l'accento sul dato numerico, oggettivo, sulla misura delle grandezze fisiche come garanzia di adesione alla realtà dell'elaborazione matematica, per Leonardo sono le capacità intellettive dell'uomo a garantire, di per sé, una corretta interpretazione dei fenomeni naturali: *"nessuno effetto è in natura senza ragione; intendi la ragione e non ti bisogna sperienzia."* (Atlantico147 v. a.)
Per questa via egli giunge alla formulazione di principi generali, come questo: *"data la causa la natura opera l'effetto nel più breve tempo possibile."* (Arundel 174 v.) Ci sono voluti esperimenti accurati e strumenti matematici avanzati per stabilire la validità del ***principio di Fermat***, secondo cui i raggi luminosi percorrono sempre il cammino più breve (in senso temporale). Il genio di Leonardo aveva afferrato la sostanza di questa verità con la sola arma dell'intuito. Ciò non deve far credere che Leonardo basasse, alla maniera di **Cartesio**, la conoscenza interamente sulla speculazione. Egli dice infatti:

"Nissuna cosa è che più c'inganni che'l nostro giudizio." (Urbinate 68)

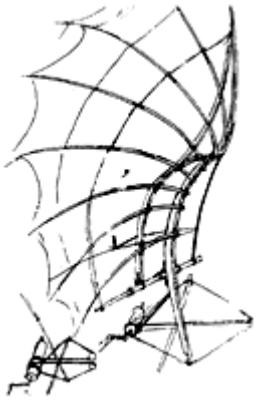
D'altra parte l'esperienza, di per sé, non permette di pervenire ad ogni verità:

"La natura è piena d'infinite ragioni, che non furono mai in isperienza." (I 18 r.)

È soltanto dall'insieme di pensiero e percezione che nasce la vera scienza: il primo avrà comunque sempre la priorità sulla seconda:

"La scienza è il capitano, e la pratica sono i soldati." (I 130 r.)

Il ragionamento che precorre l'osservazione è un tratto distintivo nell'evoluzione del pensiero di Leonardo: come rileva lo storico Gerolamo Calvi, egli fu prima inventore e solo in un secondo tempo divenne naturalista. Accurate ricostruzioni filologiche hanno stabilito che i suoi studi sul volo meccanico precedono, in effetti, quelli sul volo degli uccelli.



Le affermazioni di Leonardo sono spesso a carattere universale. Egli vede uniformità nel mondo, molto tempo prima che la fisica arrivi a formulare le prime leggi generali, come la **legge della gravitazione** di **Newton**. Ed è generale, anche se proiettata verso il lontano passato della **filosofia pitagorica**, la sua sentenza: *"La proporzione non solamente nelli numeri e misure fia trovata, ma etiam nelli suoni, pesi, tempi e siti, e 'n qualunque potenzia sia"*. Nei quadri di Leonardo, come ad esempio, nell'***Annunciazione***, troviamo lo schema ricorrente della **sezione aurea**, di antica tradizione, riportato in luce dal **Pacioli**.
In molti suoi dipinti, del resto, si riscontrano strutture geometriche, come, ad esempio, la disposizione triangolare delle figure nella ***Adorazione dei Magi***, esposto al Museo degli Uffizi di Firenze, e in ***Sant'Anna, la Madonna e il Bambino con l'agnello***, e ***La Vergine delle Rocce***, entrambi esposti al Museo del Louvre di Parigi.

Curiosità

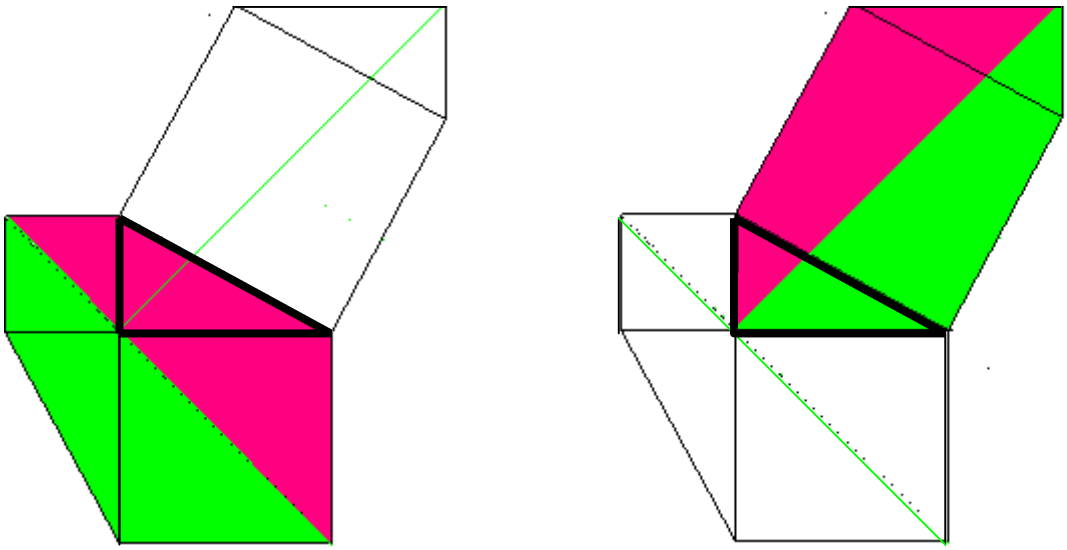
- L'interpretazione del famoso aforisma la cui trascrizione letterale è *"Non mi legga chi non è matematico nei miei principi"*, non trova d'accordo i critici. L'ambiguità risiede nella parola *principi*. Secondo alcuni la frase significherebbe "Chi non è matematico non

legga gli *elementi* del mio lavoro", secondo altri "Non mi legga chi non è, come me, un matematico agli *inizi*."

- Il padre di Gerolamo Cardano, che era professore all'Università di Pavia, era intimo amico di Leonardo. La notizia che Leonardo tentò, senza successo, di volare, ci è giunta anche tramite Cardano, che la riporta nel suo trattato ***Sulla sottilità***. La familiarità tra i due scienziati ha fatto nascere il forte sospetto che molto del materiale confluito in alcune opere di Cardano - in particolare un capitolo del Libro I del ***De Rerum Varietate***, che tratta del moto dell'acqua nei fiumi - provenga, in realtà, da documenti leonardeschi.

- Nonostante le varie analogie che si possono riscontrare tra la fisica di Leonardo e quella di Galilei, il secondo non avrebbe attinto dal primo. Entrambi avrebbero invece avuto come fonte comune gli scritti del monaco tedesco **Giordano Nemorario** (? – 1237).

- Alcuni attribuiscono a Leonardo una delle numerose dimostrazioni grafiche del **Teorema di Pitagora**:



Il moto nell'acqua ed il moto nell'aria

Leonardo aveva intuito che il moto dei fluidi, ossia di liquidi e gas, è retto da alcuni principi comuni, anche se permangono differenze sostanziali tra l'*idrodinamica* e *l'aerodinamica*. Il seguente esperimento proposto da Leonardo ha lo scopo di visualizzare le analogie nella formazione dei vortici e delle correnti nell'aria e nell'acqua:

"Se vogli vedere, che moto fa l'aria, che è penetrata da un mobile, piglia l'essemplo nell'acqua, cioè, sotto la sua superfizie, la qual sia mista con raro panico, o altra semenza minuta, che si sostenga in ogni grado d'altezza d'acqua; e di poi muovi dentro a quella un mobile, che si sostenga infra l'acqua, e vedrai la revoluzione di tale acqua la quale debbe essere'n un vaso di vetro quadro, a uso di cassetta." (Leicester, 8 v., anno 1507)

Leonardo assimila il movimento dell'aria spostata da un oggetto a quello prodotto da granellini sospesi nell'acqua, con un paragone che sembra già un'intuizione della natura molecolare dell'aria.

Per mostrare come la propulsione in aria avvenga diversamente che in acqua, Leonardo mette a confronto il volo degli uccelli con il movimento dei pesci.

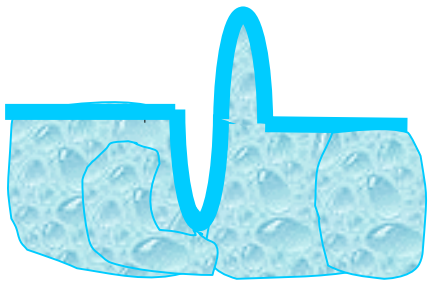
Che qualità d'aria circunda li uccelli che volano
"L'aria circundatrice delli uccelli è tanto più sottile disopra che la ordinaria sottilità dell'altra aria, quanto ella è più grossa disotto e tanto più sottile di rieto che di sopra, quanto il moto dell'uccello è più veloce nel corso trasversale ch'è quel dell'alie inverso la terra, e similmente la densità dell'aria è più densa dinanzi al contatto dello uccello che di sotto, all'avenante delle due dette sottilità dell'aria." (E 45 v.)

Qui *"all'avenante"* significa *"in proporzione"*. Negli scritti di Leonardo questa espressione non va intesa nel senso letterale matematico: egli la usa per correlare due grandezze, quando all'aumentare dell'una aumenta anche l'altra.
È interessante osservare che la prima affermazione di questo brano non è altro che il **principio di Bernoulli**: come conseguenza del movimento delle ali, la pressione al di sopra dell'uccello diminuisce, creando una spinta di pressione verso l'alto.

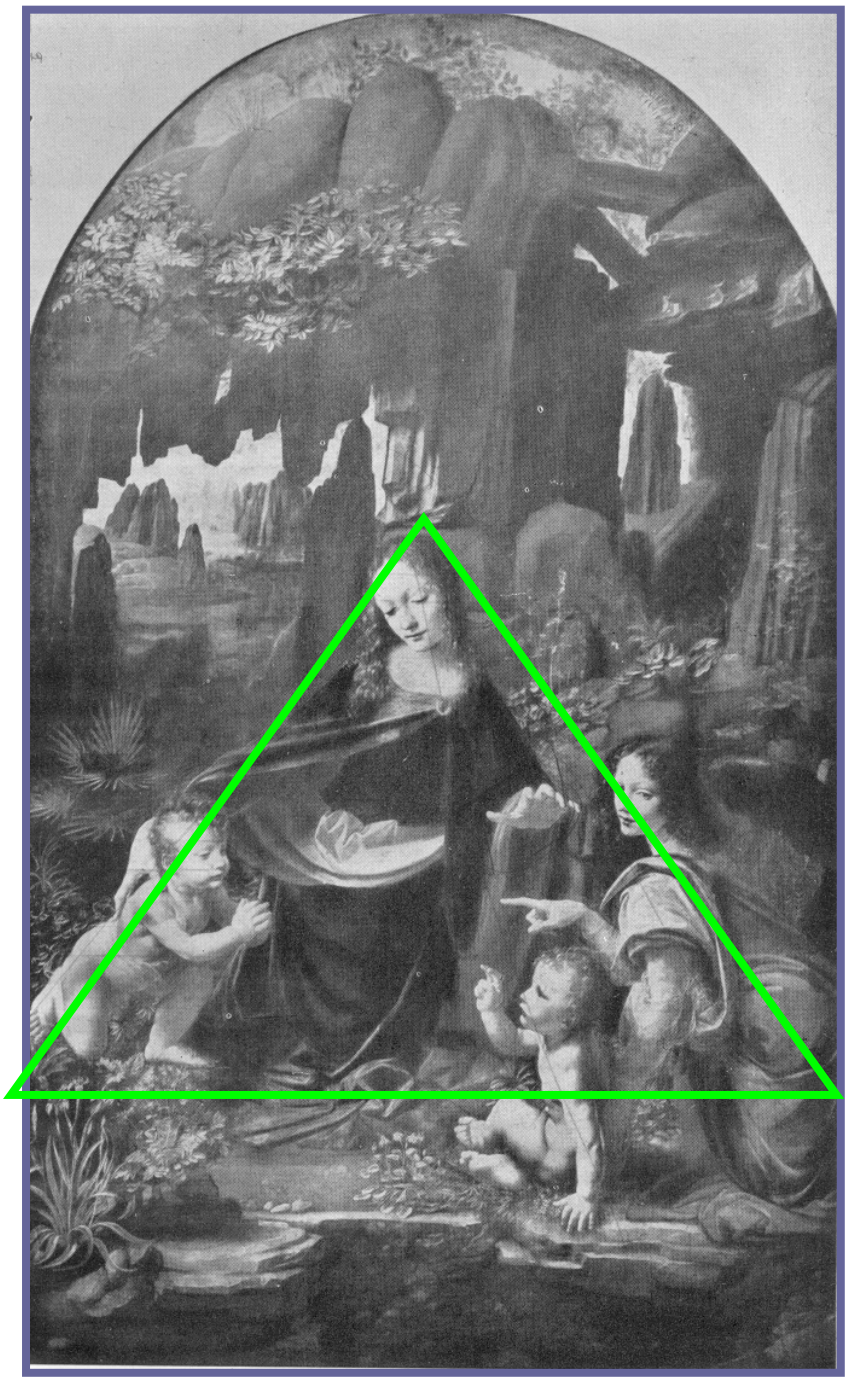
Il moto nell'aria dipende quindi in modo fondamentale dalla possibilità di comprimere l'aria. Ciò non avviene, invece, nell'acqua:

Che differenza è dalli accidenti dell'acqua alli accidenti dell'aria
"L'acqua in sé non è condensabile, né rarefattibile, ma tanto è davanti al pesce che la penetra, come dopo esso pesce e tanto se ne apre dinanzi al suo penetratore, quanto è quella che se ne riversa dietro a tal penetratore, e l'impeto del pesce è di più corta vita che quel che fa l'uccel nell'aria, ancora che i muscoli del pesce sieno potentissimi rispetto alla lor quantità, perché il pesce è tutto muscolo e ben gli bisogna per essere lui in più denso corpo che l'aria. Ma, ancora che l'acqua non sia in sé condensabile, ella ha la natura d'acquistare gravità e levità. Gravità acquista nella distruzione dell'impeto che la leva nell'aria, nella creazione dell'onda, e levità nella creazione dell'impeto, che levifica l'acqua e la move contro al natural corso delle cose gravi." (E 71 v.)

Il moto "interno" dell'acqua non si manifesta, come per l'aria, nella compressione e dilatazione di certe sue parti: la sua densità rimane ovunque inalterata, ma ciò non impedisce che il liquido possa cambiare forma. La sua superficie può, ad esempio, sollevarsi in certi punti, ed abbassarsi in altri, creando onde. Quelle circolari e concentriche che si propagano intorno ad un sasso gettato nello stagno sono un'alternanza di sollevamenti *(levità)* e abbassamenti *(gravità)*. Leonardo fu il primo a riconoscere che l'avanzamento dell'onda sull'acqua non era dovuta a spostamento del liquido, bensì alla trasmissione di un moto oscillatorio verticale.



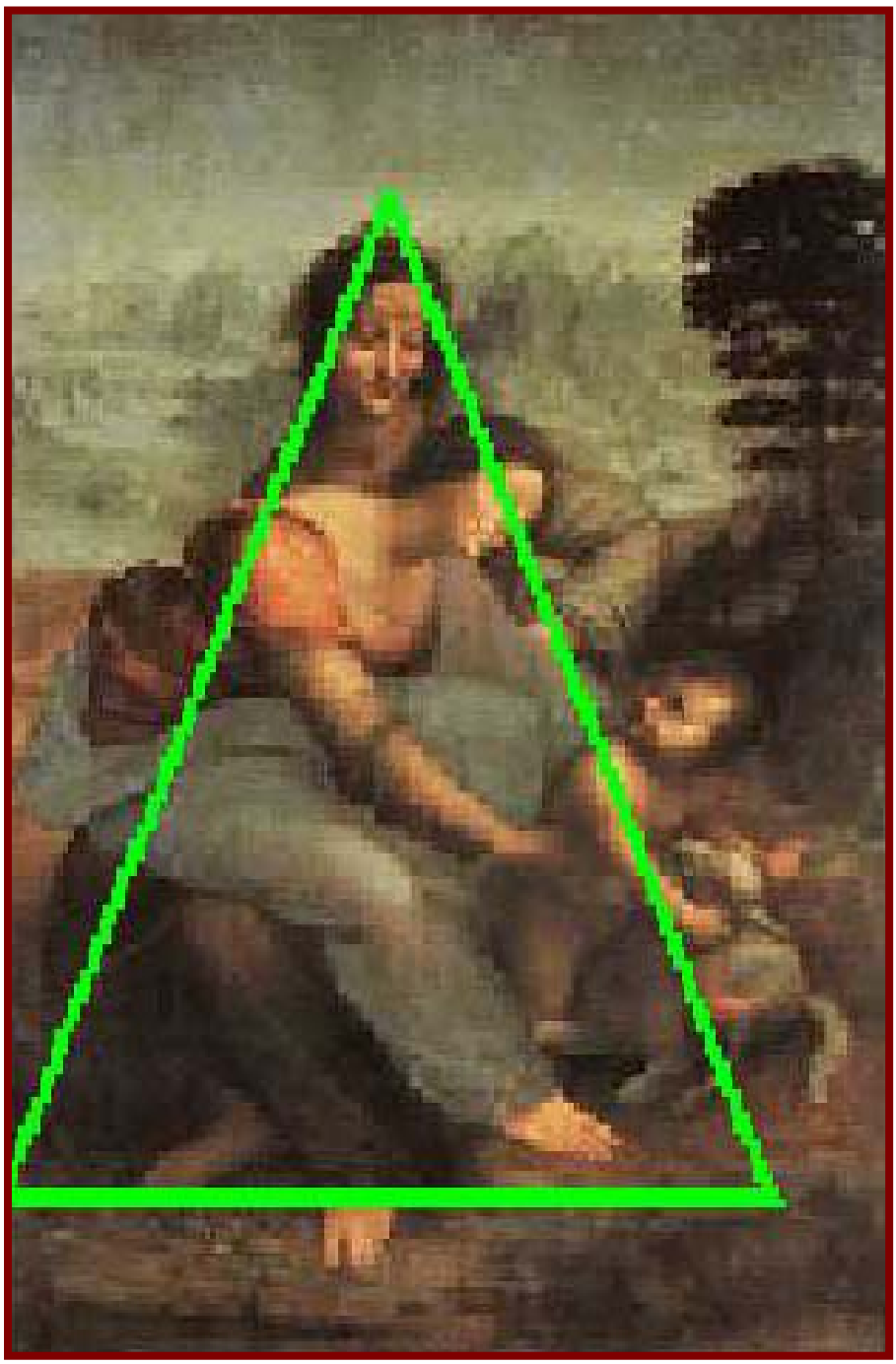
La Vergine delle rocce
Parigi, Louvre



Si nota l'ambientazione ombrosa entro una complicata architettura naturale rocciosa, che filtra e attenua la luce del giorno per donare più delicata dolcezza alle figure del gruppo: silenziosa piramide che converge verso il più luminoso volto della Madonna, che acquista unità non tanto da uno schema esterno quanto dai modulati passaggi interni. Lo scorcio della mano destra della Vergine sembra determinare per magnetico effetto i gesti dell'angelo e del Bambino; i quattro visi paiono ruotare lentamente intorno a un medesimo perno.

(da Storia dell'arte vol. III, di Castelfranchi Vegas e Cerchiari Necchi)

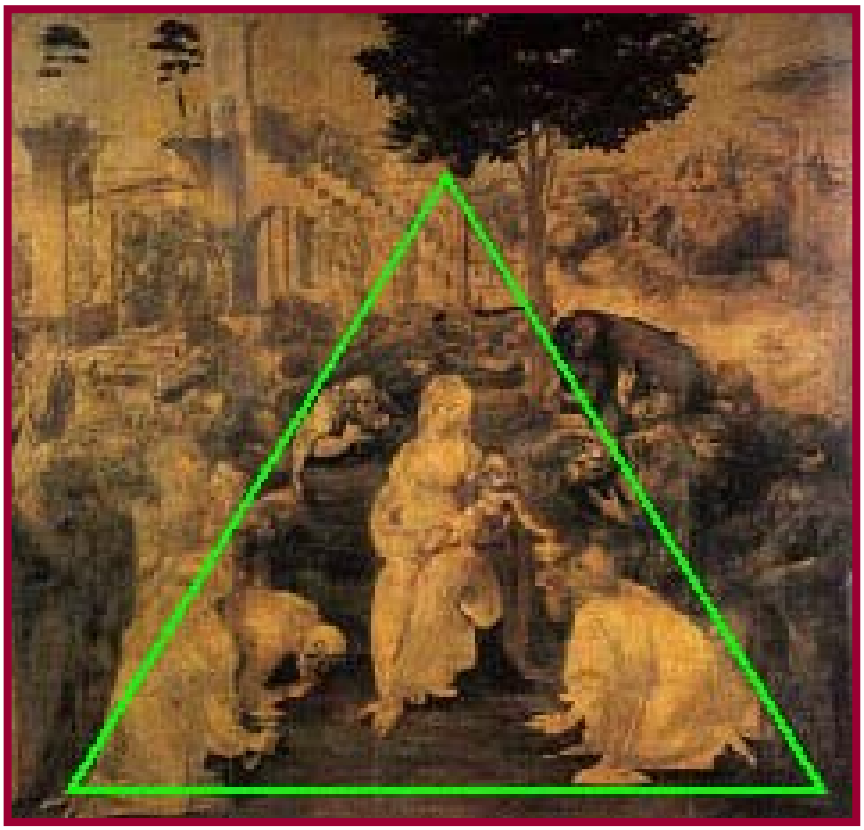
Sant'Anna, la Madonna e il Bambino con l'agnello
Museo del Louvre, Parigi



Questo dipinto risale sicuramente al periodo milanese. La tavola, di larghissimo respiro era stata preceduta da vari cartoni preparatori (di cui uno alla Royal Academy di Londra); ma in essa la composizione raggiunge la più alta e ardita coerenza, tutta impostata com'è intorno a un perno ideale: ogni immagine intimamente legata all'altra in una serratissima ed affettuosa sequenza di gesti tra la madre Anna, la figlia Maria, il Bimbo e l'agnello. La rotante articolazione del gruppo si inserisce in un paese affiorante come un miraggio favoloso che par fissare liricamente quelle folgoranti intuizioni scientifiche che Leonardo ebbe sulla genesi geologica.

(da Storia dell'arte vol. III, di Castelfranchi Vegas e Cerchiari Necchi)

Adorazione dei Magi
Museo degli Uffizi, Firenze



Grande e incompiuta pala eseguita per i frati del Convento di San Donato a Scopeto, è un documento rivelatore per la genesi di un dipinto vinciano: essa si presenta come un vasto monocromato in cui le varie tonalità dell'ocra e della terra d'ombra definiscono, mediante meri effetti disegnativi e di sfumati passaggi chiaroscurali nei primi piani, la folla tumultuosa degli adoranti intorno al radioso gruppo della Madonna col Bambino e, nello sfondo, il romantico paesaggio di rovine e picchi dolomitici davanti a cui si accendono zuffe di cavalieri. L'incompiutezza tecnica non pregiudica il significato poetico, potentemente drammatico anzi, dell'ispirazione: poiché il compimento cromatico aveva evidentemente per Leonardo una funzione accessoria.

(da Storia dell'arte vol. III, di Castelfranchi Vegas e Cerchiari Necchi)

Matematica e Meccanica

Tullio Levi-Civita
Opere Matematiche - Memorie e note
Volume IV
Bologna, 1960

Una raccolta di scritti di **Fisica Matematica**, in cui vengono affrontati problemi di **Ottica**, Termodinamica, e soprattutto, di Meccanica. Tra questi ultimi figura un trattato del 1924 dal titolo curioso: ***"Sulla stabilità delle lavagne a cavalletto"***, che così esordisce:
"Durante gli esami di Meccanica Razionale (all'Università di Roma, in quest'ultima sessione estiva) una lavagna il cui cavalletto era molto divaricato minacciò di precipitare al suolo, scivolando per ulteriore divaricamento degli appoggi. Il fatto fermò naturalmente l'attenzione mia e dei colleghi di commissione, professori Armellini e Bisconcini, ponendoci un concreto problema di stabilità dell'equilibrio che non figura (o almeno non ci consta che figuri) nella pur tanto copiosa letteratura degli esercizi di statica elementare."

XIV.

SULLA STABILITÀ DELLE LAVAGNE A CAVALLETTO

« Periodico di Matematiche », s. IV, vol. IV (1924), pp. 59-73.

Durante gli esami di Meccanica razionale (all'Università di Roma, in quest'ultima sessione estiva) una lavagna il cui cavalletto era molto divaricato minacciò di precipitare al suolo, scivolando per ulteriore divaricamento degli appoggi. Il fatto fermò naturalmente l'attenzione mia e dei colleghi di commissione, professori ARMELLINI e BISCONCINI, ponendoci un concreto problema di stabilità dell'equilibrio che non figura (o almeno non ci consta che figuri) nella pur tanto copiosa letteratura degli esercizi di statica elementare. In verità la questione rientra in tale ambito modesto; ma richiede una discussione un po' approfondita per cogliere l'andamento generale del fenomeno giungendo ad apprezzamenti quantitativi.

Mi permetto pertanto di segnalare insieme l'esercizio e la soluzione che ne ho elaborata.

1. - Specificazione del sistema materiale.

Una lavagna a cavalletto è schematicamente costituita (cfr. la fig. 1) da un telaio piano (rigido) $CABDE$ e da un puntone posteriore CP_1 detto *gambo*, girevole a cerniera attorno a C. Il telaio si appoggia in A, B sopra un suolo orizzontale e sostiene una lastra rettangolare L (lavagna) schematicamente nello stesso piano del telaio, inserita nella scannellatura (orizzontale) DE. Il tutto è simmetrico rispetto al piano mediano, verticale in condizione di equilibrio, che passa per il gambo CP_1. Fissiamo la nostra attenzione su questo piano, rappresentandovi con CP_1 (cfr. la fig. 2) il gambo, con CP la traccia del telaio, e quindi con P_1P la traccia

(orizzontale) del terreno. Designeremo con O la proiezione (verticale) della cerniera C su P_1P; e ci riferiremo ad un sistema di assi cartesiani Oxy, di cui Ox coincida (in direzione e verso) coll'orizzontale OP, e Oy (pure in direzione e verso) colla verticale OC. Dette a, a_1, h le lunghezze dei segmenti OP, OP_1, OC, le coordinate di P, P_1, C saranno rispettivamente $(a, 0)$, $(-a_1, 0)$, $(0, h)$.

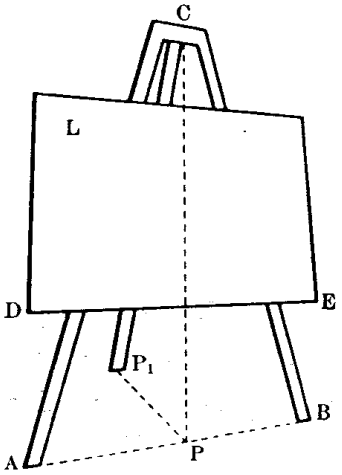


Fig. 1

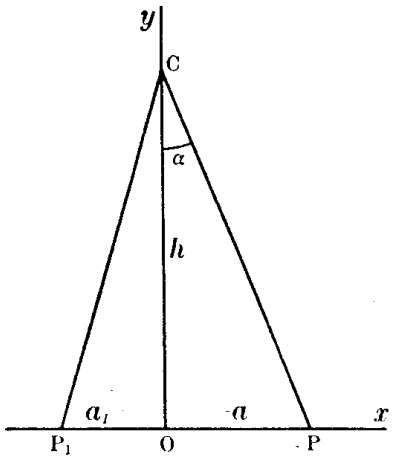


Fig. 2

Risguarderemo il telaio e la lavagna che vi è inserita come un unico sistema rigido (di traccia CP), cui è articolata, in C, l'asta, pure rigida, CP_1.

2. - Sollecitazione. Coefficiente d'attrito ridotto. Corrispondente margine di stabilità.

Abbiamo supposto ogni cosa, quindi anche la sollecitazione, simmetrica rispetto al piano mediano CPP_1. In conformità le forze applicate al telaio si compongono due a due in forze agenti nel piano mediano e applicate a punti della traccia CP (eventualmente prolungata). Le forze agenti sul gambo CP_1 sono poi (sempre per la simmetria) necessariamente contenute nel detto piano mediano Oxy. Si tratta quindi di un problema statico in questo piano, e tutto si riduce, per impostarlo, a tener conto delle tre equazioni cardinali relative alle due parti rigide CP (traccia del telaio) e CP_1 (gambo).

Specifichiamo anzi tutto le varie forze (esterne) agenti su ciascuna parte. Per il *telaio* avremo:

a) (*Peso*)

Il peso complessivo p del telaio e della lavagna di componenti $0, -p$ applicato nel baricentro G (del sistema telaio-lavagna). Di G si sa soltanto che è un punto interno al segmento CP.

b) (*Reazione del suolo*)

La reazione del suolo, applicata in P, che avrà una componente normale N (necessariamente rivolta verso l'alto, cioè nel senso positivo dell'asse Oy), e una componente tangenziale che designeremo con $-T$, perchè normalmente sarà diretta verso O, cioè negativa. Del resto non facciamo *a priori* ipotesi sul segno di T, tenendo invece presente la legge di attrito statico, la quale richiede $|T| \leqslant fN$, dove f designa il coefficiente d'attrito negli appoggi A e B (lo stesso nei due posti, per l'ipotesi della simmetria).

Volendo che sia assicurato non solo l'equilibrio degli appoggi (del punto P nella nostra rappresentazione piana), ma anche un certo margine di fronte a eventuali perturbazioni accidentali tendenti a farli scivolare, converrà sostituire ad f una frazione k alquanto più piccola, ritenendo la precedente disuguaglianza sotto la forma

$$|T| \leqslant kN\,, \tag{1}$$

con k $(< f < 1)$ *costante ben determinata* che chiameremo *coefficiente ridotto* [1].

c) (*Forza vincolare in C*)

Una forza di componenti X, Y applicata nella cerniera C, che rappresenta l'azione del gambo sul telaio [2].

---

[1] Un tale criterio equivale a fissare a priori (per una eventuale sollecitazione orizzontale tendente a perturbare l'equilibrio) un margine *unitario* ben determinato, rappresentato dalla differenza $f - k$. E questo è un criterio astrattamente soddisfacente. Per altro può benissimo accadere che si sia invece in grado di antecipare un apprezzamento sull'entità assoluta τ della perturbazione contro cui conviene premunirsi. In tal caso dovrebbe risguardarsi τ, cioè in sostanza $(f - k)N$ (e non il margine unitario $f - k$) come un dato della questione. La disuguaglianza caratteristica sarebbe in conformità, non la (1), ma

$$|T| + \tau \leqslant fN,$$

con τ costante positiva prestabilita. Ne risulterebbe un po' più laboriosa la discussione dei nn. seguenti. Perciò noi ci atteniamo alla (1), non senza rilevare che, nel nostro problema, si potrà, volendo, ottemperare *a posteriori* anche alla condizione testè accennata, sfruttando le formule risolutive, che fissano in particolare la dipendenza di N da k, e scegliendo poi (in quanto possibile) il valore numerico di k abbastanza piccolo perchè $(f - k)N$ non risulti inferiore a τ.

[2] Considerando questa azione rappresentata da una sola forza applicata in C (senza coppia), veniamo in particolare a *trascurare* l'*attrito del perno*. Ciò è giustificato a doppio titolo: sia perchè, nel caso concreto, questa influenza non è rilevante rispetto alle altre forze in gioco; sia perchè, trascurandola, si agisce comunque in favore della stabilità. Cfr. LEVI-CIVITA e AMALDI: *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, [Bologna, Zanichelli, 1923], pp. 550-551.

d) (*Perturbazione accidentale*)

Altre forze addizionali (esercitate per es. da chi scrive sulla lavagna), di cui indicheremo le caratteristiche con $-u$, $-v$, M. Si intende che $-u$, $-v$ designano le componenti orizzontale e verticale del risultante: ho premesso il segno — perchè normalmente (cioè quando si preme scrivendo sulla lavagna) u e v risultano positivi. M(pure positivo nell'esemplificazione che abbiamo in vista) rappresenta il momento (scalare), rispetto al punto P, ossia rispetto ad un asse Pz, ortogonale al piano della figura e tale che, rispetto a Pz, la coppia Oxy apparisca destrorsa.

Sul *gambo* CP_1 agiranno forze analoghe, salvo che non c'è luogo a considerare sollecitazioni addizionali. Avremo pertanto:

a_1) il *peso* p_1 applicato al baricentro G_1 di CP_1;

b_1) la *reazione* del suolo di componenti T_1, N_1, fra cui deve essere soddisfatta la disuguaglianza, analoga alla (1),

$$|T_1| \leqslant kN_1 , \tag{2}$$

supponendo che anche all'appoggio P_1 si abbia lo stesso coefficiente d'attrito ridotto, che vale (per A, B, e quindi) per P;

c_1) la *forza vincolare*, proveniente dal collegamento col telaio in C, la quale, per il principio di reazione, ha le componenti $-X$, $-Y$.

La Logica Matematica

Una delle definizioni più naturali e più comuni della logica presenta questa disciplina come **l'analisi dei metodi di ragionamento**. Nello studio di questi metodi, la logica si interessa alla forma più che al contenuto dell'argomento e quindi uno dei compiti più importanti della logica è la formalizzazione sistematica dei metodi validi di ragionamento. Questa scienza si chiama "**Logica Matematica**".
La logica matematica, come disciplina a sé, è relativamente recente; nasce, infatti, negli anni tra la fine dell'800 e l'inizio del '900 ed è attualmente oggetto di insegnamento nei corsi di studio universitari.

Il connubio tra Logica da una parte (come branca della Filosofia) e Matematica dall'altra, esprime, forse, il legame più sottile tra questi due modi di pensare e di indagare, che ha origini antiche in domande apparentemente semplici ma di rara profondità: *cosa è un numero, cosa significa dimostrare, cosa è l'infinito, cosa è lo spazio, cosa è il tempo*.
Oggi sappiamo che il concetto di numero si può precisare nell'ambito della **teoria degli insiemi** ponendo $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$ e così via; i **sistemi formali** precisano la nozione di *dimostrazione,* di *deduzione,* di *teorema. Spazio* e *tempo* sono legati nella **Teoria della Relatività**; *infiniti* ed *infinitesimi* (potenziali) sono alla base del **Calcolo Infinitesimale**; *l'infinito* attuale è organizzato nella gerarchia dei cardinali transfiniti di **Cantor**.
Ma il problema ultimo resta quello della (dimostrazione della) coerenza di una teoria.
Una lettura interessante in proposito può essere il libro *La ribellione del numero* di **Paolo Zellini**.
Il **programma Hilbertiano** di sviluppare l'aritmetica e quindi tutta la matematica su basi logiche (**sistemi R e S**) ha avuto, con i **teoremi di Gödel**, un effetto dissacrante sulla matematica e sui matematici, inficiando la fede nel metodo assiomatico-deduttivo. La *crisi fondazionale della Matematica*, che si è accompagnata a quella della *Fisica* (con il principio di indeterminazione di **Heisenberg**) ha tormentato generazioni di matematici, ma si è risolta, come spesso accade, nella apertura di nuovi orizzonti e nella nascita di nuovi filoni di indagine, relegando il problema della non contraddittorietà, sempre latente in ogni teoria, all'ambito puramente logico e non matematico.
Una delle branche più affascinanti della Logica Matematica porta il nome di ***Teoria dei Modelli***. Per comprendere pienamente la funzione della teoria dei modelli, locuzione dovuta a **Tarski**, è necessario

richiamarsi a due nozioni fondamentali della logica matematica: quella di ***linguaggio formale*** e quella di *interpretazione o modello* di un dato linguaggio. In maniera molto sommaria si potrebbe dire che un linguaggio formale è sostanzialmente costituito da una lista di simboli e da precise regole mediante le quali si possono costruire formule con tali simboli; una interpretazione è un modo di definire la nozione di verità, cioè di riconoscere se una formula è vera o falsa in un senso prefissato. Esistono numerose tecniche per la costruzione di modelli. La distinzione tra linguaggio formale e modello, porta a distinguere, inoltre, proprietà *sintattiche* da proprietà *semantiche*. La sintassi si riferisce infatti alla pura struttura formale del linguaggio, mentre la semantica riguarda l'interpretazione e il significato del linguaggio formale. Ad esempio, la lunghezza di una formula o l'insieme dei simboli che in essa occorrono, è una proprietà sintattica; la verità o falsità di una formula in un modello è invece una proprietà semantica.
È importante sottolineare che la teoria dei modelli, nonostante la dicitura, non studia i modelli, ma le relazioni tra linguaggio formale e relative interpretazioni o modelli.

La logica aristotelica: il sillogismo

Il sillogismo

Il filosofo greco **Aristotele**, nella sua opera ***Organon***, espone i principi del ragionamento logico, ossia le regole per creare nuove conoscenze a partire da alcuni dati acquisiti. Nella sezione intitolata ***Primi Analitici*** egli introduce il ***sillogismo***, un particolare tipo di argomentazione, che permette di trarre una ***conclusione*** da due ***premesse***. Ecco come Aristotele stesso introduce la trattazione:

*"Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla **scienza dimostrativa**; in seguito, bisogna precisare che cosa sia la **premessa**, cosa sia il **termine**, cosa sia il **sillogismo**, quale sillogismo sia **perfetto** e quale **imperfetto**; dopo di ciò, si deve definire che cosa sia, per un qualcosa, l'**essere contenuto** o il **non essere contenuto** nella totalità di un qualcos'altro, e che cosa intendiamo per venir predicato di ogni oggetto, oppure di nessun oggetto.*
*La premessa, ordunque, è un discorso che afferma o che nega qualcosa rispetto a qualcosa. Tale discorso, poi, è **universale**, o **particolare**, o **indefinito**. Con discorso universale intendo quello che esprime l'appartenenza ad ogni oggetto o a nessun oggetto; con discorso particolare, intendo quello che esprime l'appartenenza a qualche oggetto, o la non appartenenza a qualche oggetto; con discorso indefinito intendo quello che esprime l'appartenenza o la non appartenenza, a prescindere dalla forma universale o dalla forma particolare, per esempio il discorso, secondo cui i contrari sono oggetto della medesima scienza, oppure il discorso, secondo cui il piacere non è bene."*

Possiamo tradurre la distinzione tra universale e particolare nel moderno linguaggio della teoria degli insiemi.
Un esempio di discorso universale è la frase "**Tutti gli uomini sono mortali**": si tratta di un'enunciato della forma:

$$(\forall x \in U)\ (x \in M),$$

che si legge: **ogni** elemento dell'insieme degli uomini, è anche elemento dell'insieme dei mortali. Aristotele, in realtà, intende la relazione di appartenenza in maniera contraria: non come appartenenza di un elemento (uomo) ad un insieme di oggetti accomunati da una proprietà (mortali), ma come appartenenza di una proprietà (mortalità) ad un elemento (uomo). La differenza è solo

formale, non concettuale: Aristotele esprime, cioè, lo stesso concetto, però inverte l'ordine ed il significato delle parole.

Un esempio di discorso particolare è: "**Socrate è mortale**", che, in simboli, si scrive come

$$x \in M.$$

Nel linguaggio di Aristotele, la proprietà considerata appartiene non ad una universalità di elementi (tutti gli uomini), bensì ad un elemento particolare di tale universalità (l'uomo Socrate).

Aristotele considera particolare anche un discorso del tipo "**Qualche uomo è buono**", che, nel linguaggio insiemistico, assume la forma:

$$(\exists\, x \in U)\ (x \in B),$$

corrispondente a: esiste un elemento appartenente all'insieme degli uomini che appartiene anche l'insieme dei buoni.

Nel sillogismo aristotelico ogni premessa è formata da due ***termini***, uno è l'***oggetto*** (Socrate), l'altro è il ***predicato*** (mortale). Essi appaiono sempre legati dal verbo *è* oppure dalla sua negazione *non è*.

Sulla base delle diverse possibili relazioni esistenti tra i termini che compongono le due premesse, Aristotele distingue vari tipi di sillogismo, detti ***figure***.

Un esempio di sillogismo della prima figura, noto come *sillogismo del filosofo*, è:

PREMESSA: **Tutti gli uomini sono mortali.**
PREMESSA: **Ogni filosofo è un uomo.**
CONCLUSIONE: **Ogni filosofo è mortale.**

I termini sono: *A = mortale, B = uomo, C = filosofo.* Aristotele li chiama, rispettivamente, ***primo termine***, ***termine medio***, ***termine minore***. Il primo termine ed il termine minore vengono anche chiamati ***estremi***.
In questo tipo di sillogismo la conclusione trae origine dal seguente ragionamento:

"Orbene, quando tre termini stanno tra di essi in rapporti tali, che il minore sia contenuto nella totalità del medio, ed il medio sia contenuto, o non sia contenuto, nella totalità del primo, è necessario che tra gli

estremi sussista un sillogismo perfetto. […] In effetti, se A si predica di ogni B, e se B si predica di ogni C, è necessario che A venga predicato di ogni C."

Il sillogismo resta valido se la seconda premessa anziché essere universale, è particolare, come nell'esempio seguente:

PREMESSA: **Tutti gli uomini sono mortali.**
PREMESSA: **Socrate è un uomo.**
CONCLUSIONE: **Socrate è mortale.**

Se una delle relazioni di appartenenza viene sostituita da una relazione di non appartenenza, può, invece, diventare impossibile trarre una conclusione. Aristotele porta il seguente esempio:

PREMESSA: **Ogni** animale è un uomo.
PREMESSA: **Nessun** uomo è un cavallo.

Ragionando sul piano puramente logico, non è consentito dedurre che ogni cavallo è un animale. Il sillogismo non sussiste nemmeno nel caso seguente:

PREMESSA: **Nessuna** scienza è una linea.
PREMESSA: **Ogni** linea è un'unità.

Anche qui è impossibile trarre la conclusione, naturale, che nessuna scienza è un'unità.

Aristotele chiama il primo esempio un ***sillogismo perfetto***, mentre gli altri due sono ***sillogismi imperfetti***:

"Il sillogismo […] è un discorso in cui, posti taluni oggetti, alcunché di diverso dagli oggetti stabiliti risulta necessariamente, per il fatto che questi oggetti sussistono. Con l'espressione "per il fatto che questi oggetti sussistono" intendo dire che per mezzo di questi oggetti discende qualcosa, e, d'altra parte, con l'espressione "per mezzo di questi oggetti discende qualcosa" intendo dire che non occorre aggiungere alcun termine esterno per sviluppare la deduzione necessaria. Chiamo dunque sillogismo perfetto quello che oltre a quanto è stato assunto non ha bisogno di null'altro, affinché si riveli la necessità della deduzione, e chiamo invece imperfetto il sillogismo che ***esige l'aggiunta di uno o parecchi oggetti, i quali sono bensì***

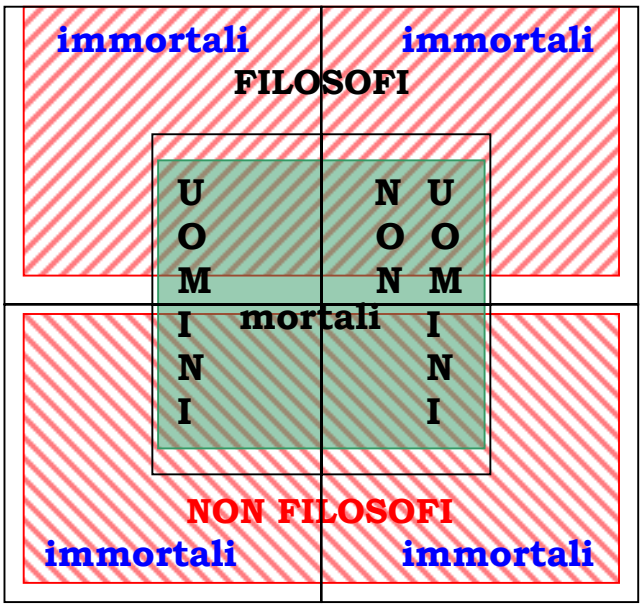
richiesti necessariamente dai termini posti alla base, ma non sono stati assunti attraverso le premesse.”

Per meglio chiarire il significato della frase in grassetto, creiamo *ad hoc* un ulteriore esempio:

PREMESSA: Tutti i delfini sono mammiferi.
PREMESSA: Tutti i mammiferi marini sono intelligenti.

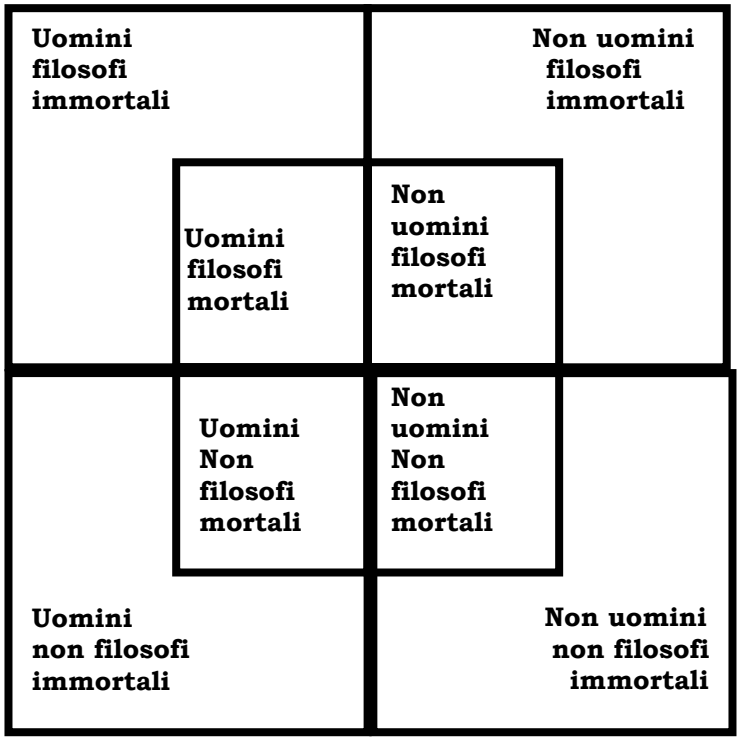
Non possiamo, come vorremmo, dedurre che i delfini sono intelligenti, perché la prima premessa non stabilisce che i delfini sono mammiferi *marini:* noi sappiamo che ciò è vero, ma questo, dal punto di vista delle regole del sillogismo, è irrilevante.

A conferma del carattere essenzialmente insiemistico del sillogismo aristotelico, il matematico e scrittore inglese Charles Lutwidge Dodgson - più noto con il nome di **Lewis Carroll**, con cui firmò il racconto fantastico *Alice nel paese delle meraviglie* - lo ripropose come un gioco da effettuare su di un tabellone suddiviso in vari rettangoli, molto simile ad un sistema di *diagrammi di Venn*. Ecco come esso viene predisposto per risolvere il sillogismo sul filosofo:

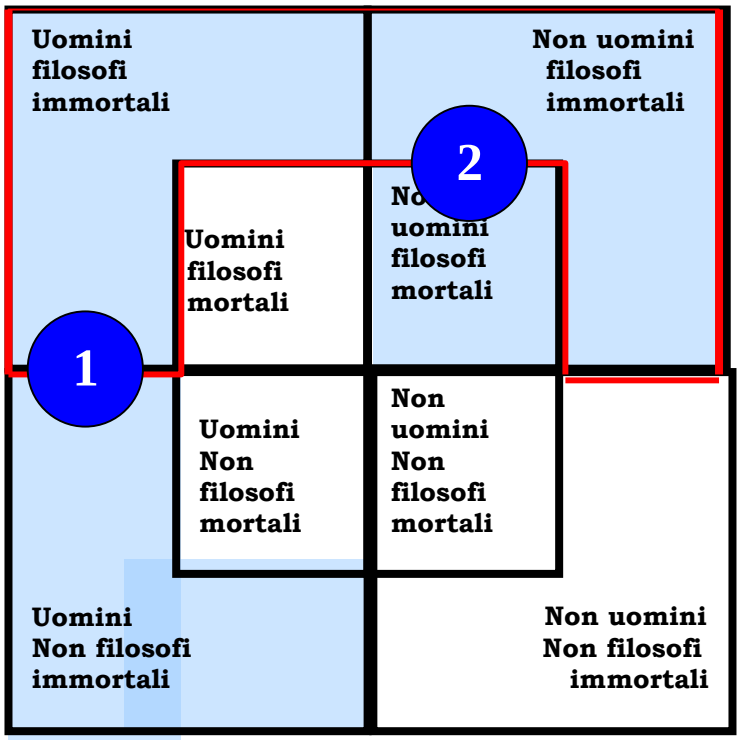


Il quadrato esterno è l’universo del discorso, l’insieme di tutti gli esseri viventi.
Il riquadro interno rappresenta l’insieme dei mortali, la cornice esterna l’insieme degli immortali. La metà superiore del quadrato

rappresenta l'insieme dei filosofi, quella inferiore il resto dell'umanità. Le metà destra e sinistra del quadrato, infine, rappresentano, rispettivamente, l'insieme degli uomini e quello dei restanti esseri.
In questo modo, ogni termine del sillogismo corrisponde ad una certa regione del tabellone, mentre un'altra regione corrisponde alla negazione del termine stesso.
Dalla sovrapposizione delle regioni scaturisce la seguente suddivisione logica:



Le premesse vengono registrate ponendo un gettone nelle regioni dichiarate vuote, che appariranno colorate.



Il gettone 1 traduce la prima premessa: è vuota la regione degli uomini immortali. Il gettone 2 traduce la seconda premessa: è vuota la regione dei filosofi non uomini. Se ne evince che è vuoto il quadrante che abbiamo bordato di rosso, che rappresenta l'insieme dei filosofi immortali.

Il sillogismo, oltre che dal punto di vista insiemistico, può essere letto in termini di operatori logici. Il sillogismo sul filosofo diventa allora un enunciato della forma

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) \qquad (*)$$

dove le lettere rappresentano proposizioni elementari, e precisamente:

p = "x è un filosofo"
q = "x è uomo"
r = "x è mortale"

Il senso del sillogismo, in fondo, è questo: se il fatto di essere un filosofo implica il fatto di essere un uomo, ed il fatto di essere un uomo implica il fatto di essere mortale, allora il fatto di essere un filosofo implica il fatto di essere mortale.

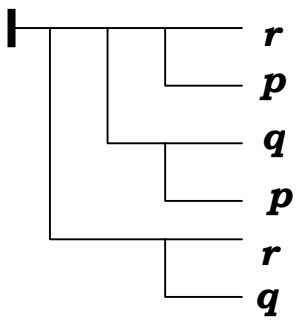
L'enunciato logico (*) è la traduzione di una delle regole su cui si regge il sistema logico formale correntemente usato in matematica. Si tratta, in pratica, di uno dei principi di ragionamento corretto (*regola d'inferenza)* che è lecito impiegare nelle dimostrazioni. È la conseguenza di due ***assiomi***, che corrispondono alle formule

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

e

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

La notazione impiegata in (*) è quella attualmente utilizzata nella maggior parte dei testi. A titolo di curiosità, riportiamo la scrittura ideata nell'Ottocento da **Frege**:



Il sillogismo aristotelico rimarrà per tutto il Medio Evo il pilastro portante della **logica**. Molti autori, tra cui **Severino Boezio**, vi dedicheranno interi trattati.
Galilei, pur non contestandone l'ineccepibile rigore, gli riserverà un ruolo del tutto secondario nell'indagine scientifica, considerandolo incapace di fornire quelle nuove conoscenze che, pur fondandosi sulla ragione, non possono fare a meno dei dati provenienti dall'esperienza sensoriale.

È inutile aggiungere che la logica aristotelica, con tutti i suoi principi, di cui il sillogismo è solo una manifestazione, rispecchia il comune buon senso. La matematica moderna ci insegna, però, che esistono mondi astratti, costruiti con la mente, e detti **sistemi formali**, in cui valgono altri modi di ragionare.

Il sillogismo secondo Eulero
Il sillogismo secondo Boole

La dimostrazione per assurdo *(reductio ad absurdum)*

Si voglia dimostrare un enunciato del tipo *"A implica B"* in cui, quindi, *A* è l'ipotesi, e *B* è la tesi. La tecnica dimostrativa per ***reductio ad absurdum*** fu forse inventata da **Ippocrate di Chio**, il matematico greco più noto per aver quadrato le **lunule**. Essa funziona come segue. Si suppone che valgano contemporaneamente *A* e *non B*, e se ne deduce una *contraddizione*, cioè una proposizione del tipo "*C* e *non C* sono vere"). Poiché dal vero non può essere dedotto il falso, se ne conclude che *"A e non B"* deve essere falso. In particolare, nel caso in cui *A* è vero, *non B* è necessariamente falso, cioè *B* è vero. In questo modo si è stabilito che dall'ipotesi segue la tesi, ed il nostro enunciato è un **teorema**. La validità di questo ragionamento presuppone l'accettazione di un principio, perfettamente naturale, che difatti appartiene alla logica classica, ma è rifiutato, ad esempio, dagli **intuizionisti**: il principio del terzo escluso *(tertium non datur).* Esso richiede che ogni proposizione sia vera o falsa (escludendo, dunque, il *terzo* caso, quello in cui essa non è né vera né falsa). Solo ammettendo questo principio, dalla falsità di *non B* si può dedurre la verità di *B.*

La contraddizione cui perviene una dimostrazione per assurdo può essere di vario tipo. Una di queste, denominata *consecutio mirabilis,* è un enunciato della forma *"A e non A"*. Nel metodo dimostrativo della *discesa infinita*, ideato da **Fermat** per il suo **Ultimo Teorema**, si deduce, come contraddizione finale, l'esistenza di una successione di numeri interi positivi che decresce indefinitamente, il che è evidentemente impossibile.

Esempi di dimostrazioni per assurdo:

- **Irrazionalità di √2** (dagli **Elementi** di **Euclide**)

- **Tassellatura di una sfera**

- Calcoli col **metodo di esaustione**:
- **Volume del cono e del cilindro** (**Euclide**)
- **Volume del paraboloide**
- **Baricentro del paraboloide** (dai ***Discorsi*** di **Galilei**)
- **Baricentro della calotta sferica** (**Torricelli**)

Il problema dell'uno e dell'unità

Il problema di applicare la matematica alla realtà, che oggi si impone come una delle principali questioni dell'insegnamento scolastico, ha radici filosofiche molto antiche. Intorno al significato della parola "uno" indagarono i pensatori greci e su di ciò rifletté anche, alla fine dell'Ottocento, il logico tedesco **Gottlob Frege**. È impossibile riassumere le varie opinioni che, nel corso dei secoli, sono state formulate su questo argomento. Ci limiteremo a ricordarne alcune.

Come ricorda **Platone** nell'omonimo dialogo, il filosofo **Parmenide** identificava l'uno con la realtà, lo vedeva come un ente che racchiudesse in sé tutto l'esistente, e fosse quindi, allo stesso tempo *"uno e molti, intero e parti, limitato e illimitato", "mobile ed immobile",* identico e diverso, simile e dissimile rispetto a se stesso.
Per **Pitagora** il cosmo era invece costituito secondo principi basati su tutti i numeri naturali, le coppie di termini antitetici corrispondevano al numero due, il numero sacro per eccellenza era il dieci.
Anche **Galilei** troverà nei numeri la chiave di lettura dell'universo, essi costituiranno il linguaggio più appropriato per misurare le qualità *oggettive* delle cose, le loro proprietà intrinseche, indipendenti dalla percezione umana. Galilei pare vivere ancora sotto la suggestione della visione antica del numero come proporzione tra grandezze geometriche, risalente alla **matematica babilonese**, da cui aveva tratto origine la **numerologia pitagorica**.

Frege, nei suoi ***Fondamenti dell'aritmetica***, riporta una posizione opposta a quella galileiana:

"OPINIONE CONTRARIA DI BAUMANN: SECONDO LUI GLI OGGETTI ESTERNI NON RAPPRESENTANO DELLE VERE UNITÀ. IL NUMERO CHE SPETTA A UN OGGETTO DIPENDE PALESEMENTE DAL NOSTRO MODO DI CONCEPIRE.
Baumann respinge l'opinione che i numeri siano concetti ricavati dalle cose esterne: "Infatti le cose esterne non presentano alcuna proprietà rigorosa; esse ci danno gruppi separati o punti sensibili, ma questi gruppi e punti possono a loro volta venire considerati come delle nuove molteplicità." In realtà, mentre nessuno è in grado di modificare sia pure minimamente il colore o la durezza di un oggetto, mutando solo il proprio modo di concepirlo, è invece possibile concepire l'Iliade vuoi come un unico poema, vuoi come ventiquattro canti, vuoi come un gran numero di versi.
Non si parla in modo completamente diverso quando si dice che le foglie di un albero sono 1000 e quando si dice che sono verdi? Il colore verde

è da noi attribuito ad ogni singola foglia, mentre così non si può dire del numero 1000. Né la cosa si chiarisce, raggruppando tutte le foglie dell'albero sotto l'unico nome di fogliame: anche questo è verde ma non è 1000. A chi spetta dunque, a rigor di termini, la proprietà 1000? Si direbbe quasi che non spetta né a ogni singola foglia né alla totalità delle foglie; forse non spetta proprio ad alcun oggetto del mondo esterno?
Se consegno ad una persona una pietra, e le dico "determinane il peso", le ho specificato con queste mie parole tutto l'oggetto della sua ricerca. Se invece le do in mano un mazzo di carte da gioco, e le dico "contalo", non è chiaro se voglio sapere il numero delle carte che compongono il mazzo, o dei giochi interi di carte in esso contenuti, ovvero quanto valgano queste carte contandone i punti in base alle regole di qualcuno dei giochi più in uso. Dandole in mano il mazzo di carte, non le ho ancora specificato l'oggetto della sua ricerca; devo aggiungere a tale scopo una parola, "carte", "giochi" o "punti". Nemmeno è possibile asserire che i diversi numeri stiano qui l'uno accanto all'altro come i diversi colori. Si può infatti additare una superficie colorata, senza aver bisogno di aggiungere alcuna parola per distinguerla dalle altre; invece, per indicare un numero, occorre proprio parlare.
Se un medesimo oggetto può, a pari diritto, venir chiamato verde o rosso, ciò prova nel miglior modo che esso non è, a rigor di termini, il vero portatore né dell'attributo verde né del rosso. L'attributo verde spetta soltanto a una superficie che sia esclusivamente verde. In modo analogo concluderemo che un oggetto, cui a pari diritto possono attribuirsi diversi numeri, non è il vero portatore di alcuno di essi.
C'è quindi una differenza sostanziale fra colore e numero, poiché un dato colore, per esempio l'azzurro, spetta a una superficie indipendentemente dal nostro arbitrio. Il colore è una capacità di riflettere certi raggi luminosi e di assorbirne, in grado maggiore o minore, certi altri; in ciò il nostro modo di concepire non può mutare proprio nulla. Invece non si può affermare che al mazzo di carte da gioco poco fa considerato spetti, in sé stesso, il numero 1 o 100, o un altro numero qualsiasi; gliene spetterà l'uno o l'altro, secondo il nostro modo di concepirlo, e nessuno gli potrà venir attribuito come predicato."

Salta all'occhio la differenza rispetto a quanto affermato da Galilei ne ***Il Saggiatore***, dove il colore di un oggetto è addotto proprio come esempio di proprietà *soggettiva*.

Il brano mette in discussione la convinzione galileiana che i numeri riflettano proprietà *oggettive* delle cose. Questa è la posizione empirista, sostenuta, nel corso dell'Ottocento, da vari filosofi, che

vedono nel numero un concetto ottenuto per astrazione dall'osservazione della natura, e che si applica ai nomi degli oggetti come un aggettivo. Tra questi Frege ricorda lo storico della matematica **Moritz Cantor** (da non confondere col logico **Georg Cantor**) ed il filosofo ed economista **John Stuart Mill**, secondo il quale il numero esprimerebbe una caratteristica fisica, poiché, ad esempio, *"due mele sono fisicamente diverse da tre"*. La sua idea è racchiusa in queste parole:

"Il nome di un numero denota una proprietà, spettante all'aggregato di oggetti, cui attribuiamo tale nome. Questa proprietà è il modo caratteristico secondo cui l'aggregato risulta riunito, o può venire scomposto in parti."

Frege contesta che il numero, ottenuto contando certi oggetti, si riferisca all'insieme di questi oggetti visto come *aggregato.* Egli ricorda un esempio di **Leibniz**, secondo il quale il numero quattro può essere realizzato anche immaginando di contare cose di varia natura, che appartengono a contesti diversi, come Dio, un angelo, un uomo e il movimento. Frege osserva che *"vi sono […] diversi modi, nei quali può venire scomposto un aggregato, e non ve n'è alcuno più caratteristico degli altri. Per esempio un fascio di paglia può venire scomposto: o tagliando in due tutti gli steli, o sciogliendo il fascio negli steli che lo costituiscono, o raggruppando questi steli in due fasci più piccoli. Possiamo forse dire che* ***un*** *mucchio di 100 granelli di sabbia risulta riunito come* ***un*** *fascio di 100 steli di paglia? Eppure all'uno e all'altro abbiamo attribuito il medesimo numero.*
Nell'espressione "uno stelo di paglia" il numero uno non ci dice proprio nulla circa la composizione di questo stelo a base di cellule o di molecole. Un numero ancor maggiore di difficoltà sorge dallo zero.
Sarà proprio necessario, per contare gli steli di paglia, riunirli in un fascio? È proprio indispensabile, perché abbia senso l'espressione "il numero dei tedeschi ciechi", raccogliere in un gruppo tutte le persone cieche esistenti in Germania? Dovremo dire che mille granelli di segale, dopo che sono stati seminati, non sono più mille? È noto che si enumerano, senza difficoltà, le varie dimostrazioni di un medesimo teorema, eppure non sembra possibile formare con esse un vero aggregato, nel senso preciso di questo termine. La stessa obiezione si può ripetere per gli eventi, e ciò malgrado essi vengono contati, tanto se sono simultanei, quanto se sono separati da migliaia di anni."

Contro l'oggettività del concetto di numero Frege adduce anche l'osservazione, basata sull'esempio di Leibniz, e condivisa dal filosofo

inglese **John Locke**, che tale concetto si applica anche agli esseri incorporei ed alle idee astratte. Citando Leibniz, Frege afferma: *"Ciò che non ha forza e potenza, non può venir pesato; ciò che non ha parti, non può venir misurato; nulla esiste però che non possa venir contato. Il numero è quindi, per così dire, la figura metafisica."*

Frege ne conclude che il numero non può appartenere al mondo del sensibile, visto che altrimenti non potrebbe avere alcun valore nel mondo del soprasensibile. D'altra parte, noi siamo sicuri che i lati di un triangolo sono tre allo stesso modo in cui siamo sicuri che le figure del **sillogismo** aristotelico sono tre: e questa seconda certezza non ci può provenire dai sensi.

Ciò non significa che al numero non possa venire riconosciuta un'oggettività. Frege concorda col matematico tedesco **Lipschitz** nel affermare che il numero non è un fatto psicologico, *"né può considerarsi come un risultato di processi psichici, proprio come non può considerarsi tale, per esempio, il mare del Nord. È ovvio che l'oggettività di questo mare non risulta minimamente scossa, per il fatto che è nostro arbitrio tracciare i limiti di quella parte di superficie acquea del globo, cui si vuole attribuire il nome di mare del Nord. Tale arbitrarietà non è un motivo perché si debba studiare il mare del Nord per via psicologica. Così anche il numero è qualcosa di oggettivo. […] Il botanico intende asserire qualcosa di altrettanto effettivo, sia quando accenna al numero dei petali di un fiore, sia quando accenna al colore di essi. L'una cosa non dipende dal nostro arbitrio né più né meno dell'altra. Qui vi è dunque, certamente, una qualche analogia fra numero e colore; ma non per il fatto che numero e colore siano entrambi proprietà degli oggetti percepibili coi sensi bensì per il fatto che sono entrambi oggettivi.*
Io faccio una netta distinzione fra ciò che è oggettivo, e ciò che è palpabile, reale e occupa uno spazio. Per esempio, l'asse terrestre e il baricentro del sistema solare sono oggettivi; eppure non potrei dire che sono reali come lo è la terra. Si afferma non di rado che l'equatore è una linea ideale; sarebbe però erroneo asserire che è una linea immaginaria. Essa infatti non viene creata dal pensiero, non è l'effetto di un processo psichico; il pensiero serve soltanto a riconoscerla, ad afferrarla."

Sostenendo l'oggettività del numero, Frege non può trovarsi d'accordo con **Schlömilch**, secondo il quale il numero non sarebbe che la rappresentazione mentale del posto occupato da un oggetto in una successione. Accettando questa ipotesi, infatti, il numero, e con esso

tutta l'aritmetica, diverrebbero i frutti di un atto psicologico soggettivo.
Convinto assertore dell'oggettività degli enti matematici era **Cartesio**. Citiamo il pensiero da lui espresso sulla natura del triangolo in una delle sue opere filosofiche, le ***Meditationes de prima philosophia***:

"Immagino un triangolo, malgrado questa figura magari non esista e non sia mai esistita nel mondo esterno al mio pensiero. Ciononostante questa figura ha una certa natura o forma o essenza determinata che è immutabile ed eterna, e che io non ho inventato e che in nessun modo dipende dalla mia mente. Ciò è evidente, perché io posso dimostrare varie proprietà del triangolo, per esempio che i suoi tre angoli interni sono complessivamente uguali a due angoli retti, che l'angolo maggiore è opposto al lato maggiore, e così via. Che io lo voglia o no, riconosco in maniera molto chiara ed evidente che queste proprietà sono nel triangolo benché io non vi abbia mai pensato prima, e anche se questa è la prima volta che immagino un triangolo. Tuttavia, nessuno può dire che io le abbia inventate o immaginate."

Quella che Cartesio descrive in questo brano è, essenzialmente, l'*idea* di triangolo come la concepiva Platone.

Facciamo ora un passo indietro, torniamo al problema del significato di "uno" e di "unità". Queste due nozioni appaiono confuse in **Euclide**, che sembra non porsi il problema di distinguere tra il numero "uno" ed i singoli oggetti che nell'atto del contare vengono considerati come "unità". Difficile definire la proprietà in base alla quale, dovendo contare due gatti, ciascuno di essi viene riconosciuto come "uno". L'"unità" dovrebbe in ogni caso essere una proprietà comune ai due gatti, che prescinde da tutte le loro differenze individuali, ad esempio dal fatto che uno è nero e l'altro bianco. Ma l'unità non può essere definita su questa base, perché anche la "gattità" è una proprietà di questo tipo. E d'altra parte, nel concetto di "gattità" i due gatti risultano unificati, sono uno e non due.

È quindi, paradossalmente, proprio la diversità tra due oggetti ad individuarli come unità da contare separatamente: l'aveva detto già Descartes. Diversità può significare anche solo separazione nello spazio o nel tempo: così le sbarre di un cancello, pur apparendo praticamente identiche, possono essere considerate singole unità.
D'altra parte, se le unità sono sempre diverse tra loro, come osserva **Jevons**, si pone un problema sostanziale per l'aritmetica:

“Allorché scrivo il simbolo 5, penso in realtà

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

ed è assolutamente fuori dubbio che ciascuna di queste unità è diversa dalle altre. Volendo essere preciso potrei scrivere

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.”$$

E Frege:

“È per certo necessario denotarle in modo diverso l’una dall’altra, se esse sono davvero diverse fra loro; altrimenti ne nascerebbe la più grande confusione. Ché, se bastasse il diverso posto occupato dai vari segni 1 a denotare questa diversità, bisognerebbe stabilirlo in forma ben chiara come regola senza eccezione; in caso contrario non si saprebbe se 1+1 debba significare 2 ovvero 1. Ammessa una tale regola, si dovrebbe però respingere l’uguaglianza 1=1, e si cadrebbe nella difficoltà di non poter mai indicare due volte di seguito la stessa cosa. Dunque la regola anzidetta non è ammissibile. Se ora si vuole stabilire che cose diverse vadano indicate con segni diversi, non si comprende più per quale motivo i segni suggeriti da Jevons mantengano una parte fondamentale comune; cioè non si comprende perché in luogo di

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

non si preferisca scrivere

$$a + b + c + d + e.$$

L’uguaglianza fu invero perduta una volta per sempre, e l’accenno a una certa rassomiglianza, non giova a nulla. Ma così l’unità ci sfugge dalle mani, e in luogo di essa rimangono i vari oggetti con tutte le loro particolarità.
Concludendo: i segni

$$1', 1'', 1''', \text{ecc.},$$

non sono altro che un’espressione parlante dell’imbarazzo in cui ci troviamo. Da un lato infatti ci occorre l’uguaglianza, e perciò usiamo il segno 1; dall’altro ci occorre la diversità, e perciò usiamo gli indici; questi però tornano purtroppo a distruggere l’uguaglianza precedente.”

C'è da dire che la definizione dell'unità che abbiamo dato sopra è di carattere relativo: un gatto è uno rispetto ad un altro gatto. Resta il problema di come riconoscere il singolo gatto come "unità" quando è solo. A questa domanda molti hanno risposto che unitario è ciò che appare indiviso, o, addirittura, indivisibile. Inutile obiettare che tale criterio, che forse è accettabile nel caso del gatto, è di certo insostenibile di fronte ad oggetti che siano composti di più parti staccabili o separate. Si potrebbe allora chiamare in soccorso la similitudine tra i pezzi che compongono l'unità (ad esempio le carte di un mazzo, i capelli di una chioma, ecc). Ma la similitudine non è uguaglianza, è pur sempre diversità, come quella tra le sbarre di un cancello. E allora? Il problema resta aperto.

(cit. da G. Frege, *I fondamenti dell'aritmetica*, in: *Logica ed aritmetica,* a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino 1977)

La definizione di numero negli *Elementi* di Euclide
Il numero secondo Cantor

L'intuizionismo in matematica

Questa teoria sui **fondamenti** della matematica fu creata negli anni venti dal matematico e filosofo olandese **J.L. Brouwer**, e venne successivamente sviluppata dal suo allievo **A. Heyting**. Secondo questa concezione, gli enti matematici esistono solo in quanto possono essere intuiti o costruiti mentalmente dal soggetto pensante (*costruttivismo*). I capisaldi dell'intuizionismo matematico secondo Heyting sono i seguenti:

1. *La matematica intuizionista consiste nell'attività mentale di costruzione dei sistemi matematici.*

2. *Essa non può far a meno dell'espressione linguistica con parole o segni, che però serve solo da supporto per la memoria e la comunicazione; le formule che non si fondano su una costruzione mentale non trovano posto in essa.*

3. *La comprensione tra i matematici è essenziale.*

4. *Le ipotesi filosofiche, in particolare quella che gli oggetti matematici esistano indipendentemente dal pensiero umano, non sono ammesse come mezzi di dimostrazione matematica.*

(cit. da A. Heyting, *L'intuizionismo in matematica,* in: C. Cellucci, *La filosofia della matematica,* Laterza, Bari 1967, pagg. 249-267)

L'infinito

La mente umana è finita, e come tale non può contenere una totalità infinita di enti matematici. Tuttavia noi siamo in grado di concepire l'infinito in maniera *potenziale*, ossia come la possibilità di perpetuare, un numero qualunque di volte, un determinato atto mentale. Così nasce il concetto di *successione che prosegue all'infinito:* una successione che può essere costruita passo dopo passo, trovando il successore ad ogni elemento. Questo può avvenire in maniera deterministica, ossia in base ad una legge generale, oppure liberamente, in virtù di scelte arbitrarie effettuate di volta in volta. In questo modo possiamo concepire la successione dei numeri naturali, ed anche ogni numero reale, identificandolo con la successione delle sue cifre decimali.

È interessante il confronto con quanto, nel Seicento, **Galileo** aveva affermato nel ***Dialogo sui due massimi sistemi*** a proposito della capacità umana di cogliere le verità matematiche:

"L'intendere si può pigliare in due modi, cioè intensive o vero extensive: e extensive, cioè quanto alla moltitudine degli intelligibili, che sono infiniti, l'intender umano è come nullo, quando bene egli intendesse mille proposizioni, perché mille rispetto all'infinità è come un zero; ma pigliando l'intendere intensive, in quanto cotal termine importa intensivamente, cioè perfettamente, alcuna proposizione, dico che l'intelletto umano ne intende alcune così perfettamente, e ha così assoluta certezza, quanto se n'abbia l'istessa natura, e tali sono le scienze matematiche pure, cioè la geometria e l'aritmetica, delle quali l'intelletto divino ne sa bene infinite proposizioni di più, perché le sa tutte, ma di quelle poche intese dall'intelletto umano credo che la cognizione agguagli la divina nella certezza obiettiva, poiché arriva a comprenderne la necessità, sopra la quale non par che possa esser sicurezza maggiore."

Galileo, contrariamente a Brouwer, crede nell'assolutezza della conoscenza umana, allorché questa avviene attraverso la matematica. È però concorde nel negare la possibilità di concepire direttamente l'infinito. D'altronde anche **Cartesio**, che pure aveva incentrato la propria filosofia sul potere della ragione, crede che l'infinità competa solo a Dio; la mente dell'uomo può, tutt'al più, contenere l'idea di oggetti *indefiniti.*

La teoria degli insiemi

Secondo Brouwer esistono due modi di definire un insieme. Il primo è quello detto *spiegamento*: gli elementi dell'insieme considerato vengono costruiti sotto forma di successione. Il secondo consiste nell'assegnare un insieme sulla base di una certa proprietà, detta *specie.* Questo approccio presuppone un universo preesistente di oggetti, tra i quali vengono selezionati solo quelli aventi le caratteristiche della specie fissata. Ad esempio: nell'universo dei numeri reali si può definire la specie *S* come la proprietà di ammettere una rappresentazione decimale finita o periodica. L'insieme dei numeri razionali può essere allora definito come l'insieme dei numeri reali corrispondenti alla specie *S*. Anche in questo caso l'insieme viene costruito effettivamente dal pensiero: l'atto mentale - potenzialmente ripetuto all'infinito - consiste nel verificare, per ogni singolo oggetto dell'universo, se esso possiede o no la proprietà richiesta.

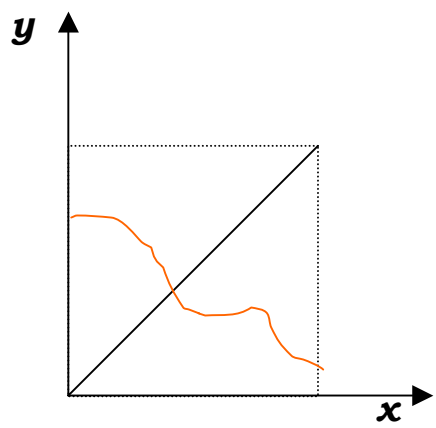
La logica proposizionale

L'intuizionismo nega alla matematica, che è prodotto della mente umana, ogni pretesa di pervenire ad una conoscenza certa ed assoluta. Le sue verità si basano esclusivamente sull'*evidenza*. Questa può essere intesa come immediatezza, tipica delle proposizioni che vengono comprese al volo, che convincono subito di per sé (*"se un insieme ha 5 elementi differenti, allora ha anche 4 elementi differenti"*), ma anche come chiarezza intuitiva dei passaggi mentali che costituiscono le dimostrazioni delle proposizioni più complesse. Una dimostrazione, per essere valida, deve soddisfare il ***principio di positività***: se *A* è una proposizione, questa sarà dimostrata soltanto una volta che essa sarà stata *costruita* a partire da altre proposizioni vere, ad esempio se si sarà trovata una concatenazione di implicazioni che, partendo da una proposizione vera (cioè, evidente o dimostrata), termini con *A*. Se *A* afferma l'esistenza di un certo oggetto, essa risulterà provata soltanto nel momento in cui l'oggetto sarà stato esplicitamente costruito. Le uniche dimostrazioni ammesse dagli intuizionisti sono le dimostrazioni *dirette* (***modus ponens***). Non è ritenuta valida la ***reductio ad absurdum***, in quanto non viene riconosciuto il principio del ***tertium non datur (principio del terzo escluso)***: una proposizione non è necessariamente vera se è falsa la sua negazione. Per gli intuizionisti una proposizione *A* è definita falsa se si può dimostrare che essa implica una contraddizione, e questa condizione è del tutto indipendente dalla verità di *non A*.

Il nome di Brouwer è rimasto legato ad un teorema estremamente importante, che ha conosciuto successive generalizzazioni, e che, nella sua formulazione originaria, è perfettamente intuitivo:

TEOREMA DEL PUNTO FISSO. Una funzione ***continua*** *di un intervallo chiuso e limitato in sé ha almeno un punto fisso.*

Per punto fisso si intende un valore che viene inviato dalla funzione su se stesso. La verità del teorema diventa lampante se si visualizza la sua traduzione geometrica, e si pensa al grafico della funzione: *una curva continua avente i due estremi sui lati opposti di un quadrato interseca la sua diagonale in almeno un punto (vedi figura).*



Il nominalismo in matematica

Il nominalismo è una corrente filosofica che, nata nell'Antica Grecia con gli Stoici, percorre tutta la storia del pensiero umano. Ebbe tra i suoi esponenti anche l'inglese **Thomas Hobbes**, che, nel Seicento, polemizzò violentemente col matematico **John Wallis**. Questa dottrina è basata sulla negazione della consistenza dei concetti generali, che non esisterebbero né negli oggetti concreti del mondo reale, né in alcuna dimensione trascendente. Essi vengono ridotti a semplici manifestazioni mentali (*nomi*). Questa posizione, radicalmente opposta al platonismo, fu sostenuta, intorno alla metà del Novecento, dai filosofi statunitensi **Goodman** e **Quine**, che la applicarono al problema dei **fondamenti** della matematica.

I brani che riportiamo qui di seguito, tratti da due loro articoli, rispettivamente del 1947 e del 1956, contengono i capisaldi della **teoria degli insiemi** nominalista. È evidente il netto contrasto con le idee di **Cantor**.

Rinuncia alle entità astratte

"*Noi non crediamo nelle entità astratte. Nessuno suppone che le entità astratte (classi, relazioni, proprietà, ecc.) esistano nello spazio-tempo. Noi però intendiamo dire molto di più: rinunciamo ad esse completamente. […]*

La rinuncia agli oggetti astratti ci può lasciare con un mondo composto di oggetti fisici od eventi, o di unità di esperienza sensoriale (in questa sede non è necessario fare una scelta precisa). Inoltre, anche quando si sostiene un tipo di empirismo che ammette oltre agli eventi sensoriali anche qualità sensoriali ripetibili, la filosofia della matematica si trova sostanzialmente di fronte allo stesso problema di quando si rifiutano tutti gli universali. Le sole qualità sensoriali non offrono una base adeguata per l'universo illimitato dei numeri, delle funzioni e delle altre classi, assunti come valori delle variabili della matematica classica.

*Perché ci rifiutiamo di ammettere gli oggetti astratti necessari alla matematica? Fondamentalmente questo rifiuto è basato su una intuizione filosofica che non potrebbe essere giustificata con niente di più fondamentale. Esso è rafforzato, tuttavia, da alcune considerazioni a posteriori. Quello che sembra il principio più naturale per ottenere per astrazione classi e proprietà conduce a **paradossi**. Apparentemente l'unica alternativa per sfuggire a questi consiste nel ricorrere a regole la cui artificiosità ed arbitrarietà fanno sorgere il sospetto che ci siamo smarriti in un mondo di finzioni."*

Rinuncia all'infinito

"Ci rifiutiamo di ammettere che la molteplicità degli oggetti sia infinita. Non solo la nostra esperienza è finita, ma non c'è accordo generale tra i fisici sull'esistenza nello spazio-tempo di un numero più che finito di oggetti fisici.

Se in realtà il mondo concreto è finito, per accettare qualsiasi teoria che presupponga l'infinito sarebbe necessario assumere che oltre agli oggetti concreti, che sono in numero finito, esistano anche delle entità astratte.

L'aritmetica classica presuppone un dominio infinito di numeri. Perciò se, nel tentativo di conciliare l'aritmetica con il nostro rifiuto delle entità astratte, tentassimo di identificare arbitrariamente i numeri con certe cose del mondo concreto, dovremmo mutilare drasticamente l'aritmetica classica, non essendo possibile assumere che esista un numero infinito di tali cose. […]"

(cit. da N. Goodman, W.V. Quine, *Verso un nominalismo costruttivo,* in: C. Cellucci, *La filosofia della matematica,* Laterza, Bari 1967, pagg. 269-298)

Individui e classi

"Per me nominalista, il mondo è un mondo di individui. Una amara esperienza mi ha però insegnato che questa semplice asserzione può essere fraintesa in innumerevoli modi. […]

Una certa quantità di confusione è dovuta alle emozioni suscitate dalla parola "individuo". Un autore la chiama una parola "onorifica"; e io sono stato criticato spesso per avere adoperato il termine "individuo" per questo o per quell'oggetto a cui esso non si addice. […] In qualche caso, ciò che io considero un individuo può risultare privo di molte caratteristiche che di solito vengono associate al termine "individuo", e pertanto non può essere considerato un individuo nell'uso comune. Ma per il termine "classe" la situazione è perfettamente analoga. Secondo l'uso prelogico profano, i bambini di un'aula scolastica, così come le persone di un dato livello sociale, costituiscono una classe, mentre Platone, questo foglio di carta e il Taj Mahal no. Il termine "insieme" nell'uso ordinario forse è ancora più restrittivo di "classe". Ma secondo l'uso dei logici, qualsiasi cosa può costituire una classe o un insieme. L'obiezione che un autentico complesso unitario o individuo non può consistere di parti sparpagliate in ogni direzione o completamente differenti fra loro è tanto poco pertinente quanto lo sarebbe l'obiezione che una autentica classe non può consistere di membri sparpagliati in ogni direzione e completamente differenti tra loro. […] Per **Boole** *una*

classe non ha necessariamente una coesione sociale; e per me un individuo non ha necessariamente un'integrità personale.

Il principio del nominalismo

In breve, mentre il nominalista può considerare qualsiasi cosa come un individuo, egli rifiuta di considerare alcunché come una classe. Ma qual è esattamente il principio su cui si basa questo rifiuto? Nel mio libro ho detto, approssimativamente, che il nominalista esita di fronte a una distinzione di entità senza una distinzione di contenuto [...] Il nominalista nega che si possano costruire due entità diverse a partire dalle stesse entità. Supponiamo, ad esempio, che un nominalista ed un platonista partano da due sistemi che hanno gli stessi minimi elementi atomici; al solo scopo di poter confrontare tali sistemi possiamo supporre che il numero di questi atomi sia 5. Il nominalista ammette anche tutti i complessi o somme di individui comprendenti tali atomi, e così ha un universo di 2^5-1, cioè 31, entità. Egli non può inventare niente altro; difatti sommando insieme due qualsiansi tra questi 31 individui, si ottiene ancora uno di essi. Possiamo supporre che il nostro platonista non ammetta somme di atomi, e che invece ammetta tutte le classi di essi. Così, senza contare la classe nulla e le classi unità, anch'egli ottiene 31 entità. Egli però ammette poi tutte le classi di classi di atomi, e con questo solo atto, accoglie nel suo universo 2^{31} –1, ovvero più di due miliardi, di nuove entità. Né pensa di fermarsi qui: ammette ancora tutte le classi di classi di classi di atomi, e così via all'infinito, fino ad approdare, attraverso un universo dotato di un'esplosiva capacità di espansione, ad un paradiso platonico prodigiosamente affollato. Egli estrae tutte queste entità extra dalle cinque originarie grazie a un procedimento magico che lo mette in grado di creare due o più entità distinte a partire esattamente dalle stesse entità. Ed è questo, appunto, che il nominalista rifiuta."

(cit. da N. Goodman, *Un mondo di individui,* in: C. Cellucci, *La filosofia della matematica,* Laterza, Bari 1967, pagg. 299-320)

Il nominalista rifiuta quindi, non solo i numeri transfiniti di Cantor in quanto espressioni dell'infinito, ma anche il principio che sta alla base della loro costruzione: questa è fondata su un procedimento ricorsivo, in cui ad ogni passo viene formato l'insieme delle parti dell'insieme precedente.

I paradossi dell'infinito

La nozione di infinito ha da sempre creato nell'uomo un grande imbarazzo: essa compare fin dall'epoca presocratica sotto forma di punto di arrivo ideale di un processo che può essere ripetuto un numero di volte grande quanto si voglia. Il moderno **calcolo infinitesimale** lo ha assunto come suo fondamento sotto forma di **limite** di una successione numerica. Nell'antichità lo troviamo accennato nel **metodo di esaustione** di **Archimede**. Ma esso qui compare solo in quella che **Cantor**, nell'Ottocento, chiamerà forma *potenziale:* il filosofo siracusano descrive un processo iterativo prolungabile indefinitamente, senza preoccuparsi, però, di dare significato al suo risultato "limite". Quest'ultimo è per Cantor il cosiddetto infinito *attuale*, che, nella sua visione, è concretamente presente nella matematica, e che egli considera un numero vero e proprio, dandogli il nome di primo ***ordinale transfinito ω***. Cosa avvenga al passo ω-esimo di un processo iterativo costituisce invece un problema per **Galileo**, che, come scrive nella prima giornata dei suoi ***Discorsi***, vede scaturire effetti apparentemente contraddittori, come quello di un cerchio che, in un caso, si trasforma in una retta e, in un altro caso, si ritrova equivalente ad un punto. L'esistenza dell'infinito attuale sta alla base della **teoria degli indivisibili** dei suoi allievi **Cavalieri** e **Torricelli**: *indivisibili* sono le particelle, di estensione infinitesima, ottenute sottoponendo un ente geometrico, come una linea o una figura, ad una serie di suddivisioni successive, e immaginando di portare questo processo al limite. Dopo di ciò, una quantità finita appare come il risultato della riunione di un'infinità di parti. Il fatto di non poterle contare sconcerta il Galilei, che non sa come confrontare quelle contenute in una retta con quelle racchiuse in un suo segmento.

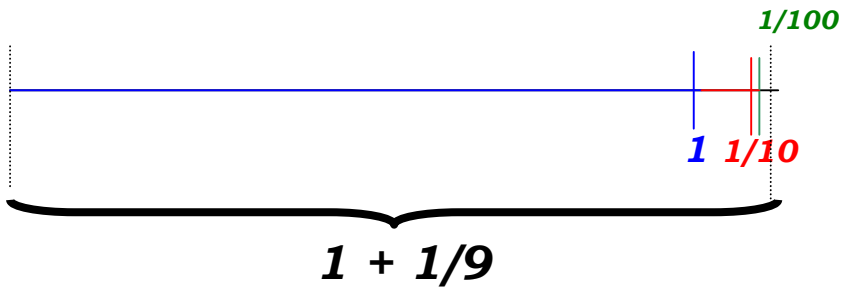
Per l'antico filosofo greco **Zenone di Elea** (sec. V a.C.) era completamente assurdo pensare che il finito potesse includere l'infinito, tant'è vero che egli si servì di questo paradosso per dimostrare l'impossibilità del moto. Il più famoso dei suoi argomenti è quello passato alla storia col nome di *"Achille e la tartaruga".* I due protagonisti disputano una gara di corsa: immaginiamo, tanto per fissare le idee, che il traguardo si trovi alla distanza di *100* metri dalla linea di partenza. Alla tartaruga viene concesso un certo vantaggio, diciamo di *10* metri. Supponiamo che i due contendenti percorrano il tracciato a velocità costante, e che Achille sia dieci volte più veloce della tartaruga. In un certo lasso di tempo Achille raggiungerà il punto da cui è partita la tartaruga; questa, nel frattempo, si sarà allontanata di *1* metro. Dopo un certo tempo Achille avrà percorso

anche questo metro, ma allora la tartaruga si troverà *1/10* di metro più avanti. Nell'istante in cui Achille sarà arrivato in questo punto, la tartaruga si sarà spostata di *1/100* di metro, e così via, all'infinito. Zenone ne trae la conseguenza che Achille non potrà mai raggiungere la tartaruga: ciò è assurdo e quindi la corsa, e, più in generale, il movimento, è una pura illusione. Utilizzando l'equazione del moto possiamo facilmente verificare che Achille sorpasserà la tartaruga a *11+1/9* metri dalla partenza. Per conciliare le due conclusioni, apparentemente contraddittorie, bisogna ricorrere al concetto di somma di una **serie**, una somma avente infiniti addendi, che per Zenone non poteva avere significato:

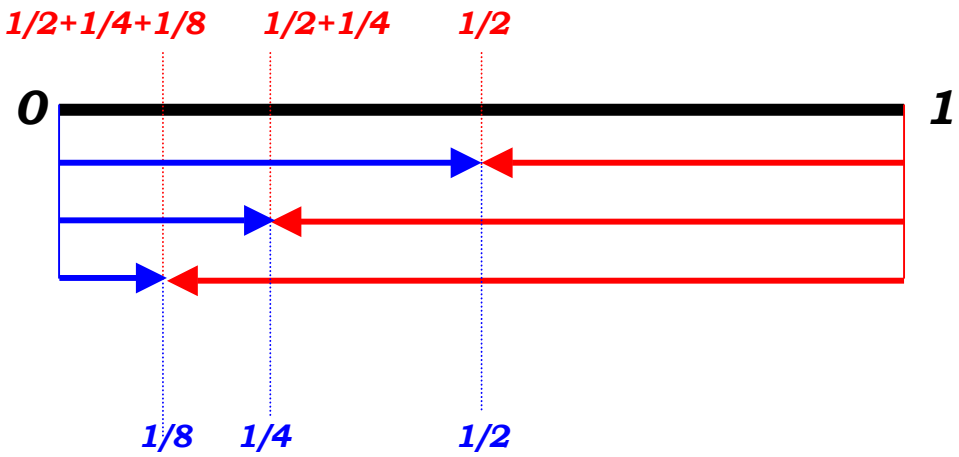
$$\sum_{n\geq 0} 1/10^n = 1 + 1/9.$$

Secondo la logica perfettamente intuitiva di Zenone, infatti, per percorrere una successione infinita di tratti di cammino (prima *1* metro, poi *1/10* di metro, quindi un *1/100* di metro, e così via) occorrerebbe un tempo infinito.
Lo stesso ragionamento è alla base di un altro importante paradosso di Zenone, detto della *dicotomia,* strettamente legato a quello che abbiamo appena esaminato. Un corridore non potrà mai percorrere un certo tratto di strada, perché prima di far ciò, dovrà avere percorso metà del cammino, e prima di ciò, un quarto del cammino, prima ancora un ottavo, e così via; dovrà, cioè, aver percorso un'infinità di tratti di strada.

Se nel caso di Achille e la tartaruga il paradosso consiste nell'immaginare che un segmento possa nascere dall'accostamento di infiniti segmenti,



nel caso della dicotomia l'assurdo si incontra al pensiero che un segmento possa contenere infiniti segmenti, contenuti uno nell'altro, come in un'infinita successione di scatole cinesi:



I segmenti in questione sono indicati in blu nella figura.
Il grande matematico e filosofo inglese **Bertrand Russell** così commenta questo paradosso nel capitolo 42 dei suoi ***Principia Mathematica***:

"Si può mettere questo argomento in forma aritmetica […]. Consideriamo una variabile x suscettibile di assumere tutti i valori reali (o razionali) tra due limiti assegnati, per esempio 0 e 1. La classe dei valori è un tutto infinito le cui parti sono logicamente anteriori ad esso: perché esso ha delle parti, e non può sussistere se manca qualcuna di tali parti. Così i numeri tra 0 e 1 presuppongono quelli tra 0 e ½, questi presuppongono quelli tra 0 e ¼, e così via. Sembrebbe quindi che nella nozione di un qualunque infinito si celi un ***regresso infinito****."*

(cit. da B. Russell, *I principi della matematica,* trad. di E. Carone e M. Destro, Newton & Compton, Roma 1989, pag. 376)

Il regresso infinito, nel caso della dicotomia di Zenone, non presenta problemi agli occhi del matematico moderno: è sufficiente, ad esempio, leggere il regresso al contrario, considerando, anziché i segmenti blu della figura, i loro complementari, tracciati in rosso. Essi corrispondono alle distanze che, nei vari istanti, rimangono da percorrere: quando il corridore aveva percorso ½ della strada ne rimaneva ancora ½, nel momento in cui ne aveva percorso ¼, ne rimaneva ancora ½ + ¼, e così via. Presi in quest'ordine, i segmenti blu costituiscono una successione crescente di intervalli, la cui

unione è l'intervallo di estremi *0* e *1*. Noi non abbiamo problemi ad immaginare un intervallo limitato come l'unione di una famiglia infinita, *filtrante superiormente,* di sottointervalli.
In alcuni casi, tuttavia, il regresso infinito può presentarsi in una forma logicamente inaccettabile, come rileva lo stesso Russell:

"Di solito, questa forma di regresso si ricava dalle definizioni circolari. Tali definizioni possono essere estese in modo analogo a quello seguito per sviluppare le ***frazioni continue*** *delle equazioni quadratiche. Ad ogni stadio apparirà però un termine che dev'essere definito, e non ne risulterà alcuna definizione. Prendiamo per esempio la seguente definizione: «Si dice che due persone hanno la stessa idea quando hanno idee simili, e le idee sono simili quando contengono una parte identica». Se un'idea può avere una parte che non sia un'idea, una tale definizione non va incontro a obiezioni logiche; ma se la parte di un'idea è sempre un'idea, allora la stessa definizione deve essere sostituita nel secondo punto, in cui si parla di identità di idee, e così via. Quindi, ogni volta che è in questione il significato di una proposizione, un regresso infinito non può essere ammesso, dato che non si raggiunge mai una proposizione che abbia un significato definito."*

(ibidem, pag. 377)

Quella appena descritta è la situazione del serpente che si morde la coda: due idee si dicono simili se esiste una parte dell'una che è identica ad un parte dell'altra. Ma se la parte di un'idea è a sua volta un'idea, dobbiamo, a questo punto riapplicare la stessa definizione da cui siamo partiti. Finiamo così in un ciclo infinito, che si può anche leggere anche come un regresso infinito: per sapere se due parti di idee sono identiche, dobbiamo andare a verificare la similitudine tra parti delle parti, e poi tra parti delle parti delle parti, e così via.

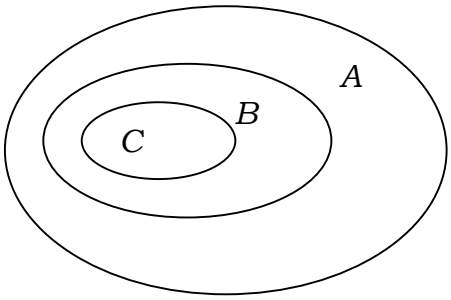
Russell prosegue la sua analisi, osservando, tuttavia:

"Molti regressi infiniti non sono però di questa forma. Se A è una proposizione il cui significato è perfettamente definito, e A implica B, B implica C, e così via, abbiamo un regresso infinito di tipo assolutamente indiscutibile. Questo dipende dal fatto che l'implicazione è una relazione sintetica, e che, anche essendo un insieme di proposizioni, implica qualunque proposizione che sia parte di A, non ne segue assolutamente che ogni proposizione implicata da A sia parte di

A. Non vi è quindi alcuna necessità logica, come era il caso precedente, di completare il regresso infinito prima che A acquisti un significato."

(ibidem, pag, 377)

In altri termini, la contraddizione in quest'ultimo caso si verificherebbe se *B* fosse parte di *A, C* parte di *B,* e così via per tutte le proposizioni successive, come avveniva per le definizioni nell'esempio precedente.



Russell propone anche, per il paradosso di Achille e la tartaruga, una lettura diversa da quella classica. Se Zenone la usa per negare la possibilità di una indefinita suddivisione del finito, Russell se ne serve per confutare la seguente affermazione:

"Gli elementi di un insieme non possono essere in corrispondenza biunivoca con gli elementi di una sua parte propria (*)".

Egli la include in un ragionamento che, applicato alla corsa, conduce allo stesso risultato contraddittorio dedotto da Zenone:

1. *Per ogni posizione della tartaruga ne esiste una ed una sola di Achille; per ogni posizione di Achille ne esiste una ed una sola della tartaruga.*
2. *Perciò la serie delle posizioni occupate da Achille ha lo stesso numero di termini della serie di posizioni occupate dalla tartaruga.*
3. *Una parte ha meno termini di un tutto in cui essa è contenuta e col quale è coestensiva.*
4. *Perciò la serie di posizioni occupate dalla tartaruga non è una parte propria della serie di posizioni occupate da Achille.*

Alla luce di questa argomentazione, supponiamo per assurdo che Achille raggiunga la tartaruga al termine di un certo tratto di strada. Il punto 1 è sicuramente vero, anche limitatamente a questo tratto. D'altra parte, in questo tratto, tutte le posizioni raggiunte dalla tartaruga sono raggiunte da Achille, sia pur in tempi diversi; la

tartaruga però, non percorre i primi *10* metri di strada, quindi l'insieme delle sue posizioni è una parte *propria* dell'insieme delle posizioni raggiunte da Achille. Ma ciò è in contraddizione con quanto asserito al punto 4. Ecco l'assurdo cercato.

Russell mette in evidenza l'assurdo anche per mezzo di un ragionamento aritmetico. Supponiamo che la tartaruga proceda con velocità unitaria. Trascorso il tempo *x* dall'inizio della corsa, Achille avrà raggiunto il punto *10x* del percorso, la tartaruga il punto *10 + x.* Tra l'istante 0 e l'istante in cui Achille raggiunge la tartaruga, Achille avrà percorso tutte le posizioni comprese fra *0* e *11+1/9,* la tartaruga tutte quelle comprese fra *10* e *11+1/9.* Il rapporto tra le lunghezze dei due intervalli è di *1/10:* dunque il numero di valori compresi nel secondo intervallo dovrebbe essere *1/10* del numero di quelli compresi nel primo, il che contraddice il punto 1.

Tutto questo ci insegna che la affermazione (*) presenta dei problemi: in effetti essa vale sicuramente per gli insiemi finiti, mentre non vale per gli insiemi infiniti come li intendiamo abitualmente: già Galileo, nella sua **trattazione dell'infinito** ci mostra, ad esempio, in maniera molto convincente, che sussiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e quello dei quadrati perfetti. Dedekind definirà gli insiemi infiniti proprio come quegli insiemi per i quali la (*) è falsa.

Il problema dell'infinito secondo Cantor

In una lettera del 4 novembre 1885, indirizzata al signor G. Eneström di Stoccolma, il grande logico tedesco **Georg Cantor** espone la storia recente del problema dell'**infinito**, confrontando le diverse teorie che allora erano oggetto di un vivace dibattito tra gli studiosi. In quell'epoca grande era l'interesse intorno alla questione dei **fondamenti della matematica**.

"Se si vogliono raggruppare in maniera leggibile le diverse opinioni, che si sono susseguite nel corso della storia, in relazione al nostro oggetto, **l'infinito attuale** *(in seguito, indicato, per brevità, con i.a.), si offrono diversi punti di vista, dei quali io oggi desidero evidenziare uno solo.*
Si può infatti porre la questione dell'i.a. in tre contesti principali: primo, in quanto in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante, *ove è detto* l'assoluto, *secondo, in quanto* in concreto seu in natura naturata, *ove io lo chiamo* transfinito, *e, terzo, l'i.a. può essere messo in discussione* in abstracto, *ossia, nella misura in cui esso può essere concepito dall'intelletto umano sotto forma di infinito attuale, o, come li ho chiamati io, di* ***numeri transfiniti****, oppure nella forma ancora più generale degli* ***ordinali transfiniti****.*
Se, per il momento, trascuriamo il primo di questi tre problemi e ci limitiamo agli ultimi due, emergono spontaneamente quattro diversi punti di vista, che sono stati realmente sostenuti nel passato e nel presente.
In primo luogo si può respingere l'i.a. sia in concreto, *sia* in astratto, *come, per esempio, avviene per Gerdil,* ***Cauchy****, Moigno […] e per tutti i cosiddetti positivisti.*
In secondo luogo si può asserire l'i.a. in concreto, *e respingerlo invece* in abstracto; *questo punto di vista, come io ho sottolineato alla pagina 16 dei miei* ***Fondamenti****, si trova in* ***Descartes****,* ***Spinoza****,* ***Leibniz****,* ***Locke*** *e molti altri. […]*
In terzo luogo l'i.a. può essere asserito in abstracto, *e negato* in concreto; *su questa posizione si trova una parte dei neoscolastici […].*
Infine l'i.a. può essere asserito sia in concreto *sia* in abstracto*; e questa posizione, che io ritengo la sola giusta, è sostenuta da pochi. Forse sono io il primo, in senso temporale, a sostenere questa posizione con piena determinazione e con tutte le sue conseguenze, però, lo so con certezza, non sarò l'ultimo a sostenerla! […]*

Se **l'infinito potenziale** o sincategorematico (indefinito) *non si presta ad alcuna classificazione, ciò è dovuto al fatto che esso ha importanza solo come concetto di riferimento, come sostegno alla nostra*

immaginazione, mentre di per sé non indica alcuna idea; in quanto tale esso ha comunque dimostrato il proprio grande valore come strumento di conoscenza per la nostra mente, tramite il calcolo differenziale ed ***integrale*** *inventato da* ***Leibniz*** *e* ***Newton****: esso, tuttavia, non può aspirare ad un significato che vada oltre.[…]*

Malgrado la sostanziale diversità dei concetti di infinito attuale *e* potenziale, *il primo dei quali significa una grandezza finita* variabile, *che cresce al di là di tutti i limiti finiti, il secondo dei quali significa una quantità* fissa e costante*, situata al di là di tutte le grandezze finite, troppo spesso avviene che i due concetti vengano confusi uno con l'altro. Su questa confusione si basa, ad esempio, la concezione, non di rado riscontrata, secondo cui i* ***differenziali*** *sarebbero determinate grandezze infinitamente piccole (mentre sono, in realtà, soltanto grandezze ausiliarie variabili, che possono essere assunte arbitrariamente piccole, che spariscono completamente dai risultati finali dei calcoli e, perciò, vengono caratterizzate da Leibniz come puri artifici).*
Se, però, dalla fondata avversione contro un simile, illegittimo i.a., si è sviluppato, sotto l'influsso dell'indirizzo epicureo-materialistico, in vasti strati del mondo della cultura, un certo horror infiniti *[…], così mi pare che la correlata avversione acritica dell'i.a.* legittimo *non sia meno grave delitto contro la natura delle cose, che vanno prese come sono, e questo atteggiamento può essere considerato anche una sorta di miopia, che sottrae la possibilità di vedere l'i.a., benché esso, nella sua incarnazione più alta ed assoluta, ci abbia creato e ci conservi, e ci circondi ovunque nelle sue forme secondarie e transfinite e alberghi persino nella nostra mente.*
Un'altra frequente confusione avviene tra le due forme dell'i.a., nel senso che il transfinito *viene mescolato con l'*assoluto*, mentre questi concetti sono rigorosamente distinti, in quanto il primo è da considerare come un qualcosa che è sì* infinito*, ma ancora* aumentabile*, mentre il secondo è da vedere come* non aumentabile *e quindi matematicamente* indeterminabile; *riscontriamo questo errore, ad esempio, nel panteismo, ed esso costituisce il tallone d'Achille dell'etica di Spinoza […]. Si noti anche che, da Kant in poi, si è diffusa tra i filosofi la falsa convinzione che l'*assoluto *sia il confine ideale del* finito*, mentre, in realtà, questo confine può essere pensato solo come un* transfinito*, e, precisamente, come il* minimo di tutti i transfiniti *(corrispondente al più piccolo numero transfinito, da me indicato con* ω*). […]*

*Herbart coglie la definizione di infinito in un modo tale che essa può designare solo l'*infinito potenziale*, per fondare su di essa una certa*

dimostrazione, che l'i.a. è, di per sé, contraddittorio. Egli avrebbe potuto, con uguale diritto, definire la ***sezione conica*** *come una curva i cui punti hanno la stessa distanza da un centro, per sostenere, su questa base, contro* ***Apollonio di Perga****, la seguente affermazione: "Non esistono altre sezioni coniche oltre al cerchio, ciò che tu chiami ellisse, iperbole e parabola sono nozioni contraddittorie."*

(cit. da G. Cantor, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche,* in: Gesammelte Abhandlungen, Georg Olms, Hildesheim 1962, pagg. 370 – 377)

L'infinito per Hilbert

In un articolo pubblicato nel 1925 dalla rivista tedesca "Mathematische Annalen" il matematico **David Hilbert** riassume lo stato del concetto di infinito nelle scienze agli inizi del Novecento. Ne riportiamo i brani più significativi.

*"Nella sua fondazione dell'**analisi**, **Weierstrass** accettò senza riserve ed adoperò ripetutamente forme di deduzione logica in cui entra il concetto di **infinito**, come quando si considerano tutti i numeri reali che hanno una certa proprietà o si afferma che esistono numeri reali che hanno una certa proprietà.*
*L'infinito perciò ricompare nella teoria di Weierstrass per un'altra via, sfuggendo così all'esigenza di precisione imposta dalla sua critica. Occorre quindi risolvere una volta per tutte il problema dell'infinito, nel senso ora indicato. Proprio come nei procedimenti di passaggio al **limite** nel contesto del **calcolo infinitesimale**, l'infinito, nel senso dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo, si è rivelato semplicemente un modo di dire, nello stesso modo dobbiamo renderci conto che l'infinito, nel senso di una totalità infinita, dove è ancora usato nei metodi deduttivi, è un'illusione. Proprio come le operazioni sull'infinitamente piccolo sono state sostituite da operazioni sul finito che danno luogo esattamente agli stessi risultati e alle stesse eleganti relazioni formali, così in generale i metodi deduttivi basati sull'infinito devono essere sostituiti con procedimenti finiti che diano gli stessi risultati, che cioè rendano possibili le stesse catene di dimostrazioni e gli stessi metodi per ottenere formule e teoremi. […]*
Da tempo immemorabile l'infinito ha suscitato le passioni umane più di ogni altra questione. È difficile trovare un'idea che abbia stimolato la mente in modo altrettanto fruttuoso; tuttavia nessun altro concetto ha più bisogno di una chiarificazione.
Prima di cercare di chiarire la natura dell'infinito, considereremo brevemente quale significato gli venga attribuito attualmente. Vediamo anzitutto che cosa possiamo imparare dalla fisica.

L'infinitamente piccolo e la fisica
La prima ingenua impressione che si trae dagli eventi naturali e dalla materia è un'impressione di permanenza, di continuità. Se si considera un pezzo di metallo o un certo volume di liquido, si ha l'impressione che essi siano divisibili illimitatamente, che le loro più piccole parti presentino le stesse proprietà del tutto. Ma da quando si sono sufficientemente perfezionati i metodi di indagine della fisica della

materia, gli scienziati hanno scoperto dei limiti di divisibilità che non dipendono dall'insufficienza dei loro sforzi ma sono nella natura stessa delle cose. Si potrebbe perciò addirittura affermare che la scienza moderna tende all'emancipazione dell'infinitamente piccolo, e al vecchio principio "natura non fecit saltus" potrebbe sostituirsi l'opposto "la natura compie dei salti".
È noto che la materia è composta di piccoli mattoni, detti atomi, dalla cui combinazione e connessione trae origine tutta la molteplicità degli oggetti macroscopici.
Tuttavia la fisica non si è fermata all'atomismo della materia. Alla fine del secolo scorso ha fatto la sua comparsa l'atomismo dell'elettricità che, a prima vista, sembra molto più bizzarro. L'elettricità, che fino ad allora era stata considerata un fluido ed il prototipo degli agenti ad azione continua, si è dimostrata costituita da "elettroni" positivi e negativi.
Oltre alla materia e all'elettricità, c'è in fisica un'altra entità per cui vale la legge di conservazione, cioè l'energia. Ma, come è stato stabilito, anche l'energia non ammette una divisibilità all'infinito, così, semplicemente e senza restrizioni: Planck ha scoperto i "quanti d'energia".
Perciò in nessuna parte della realtà si può trovare un continuo omogeneo che ammetta quel genere di divisibilità che è necessaria per ottenere l'infinitamente piccolo. […]"

La struttura atomica della materia, ipotizzata già in epoca presocratica dai filosofi greci **Democrito** e **Leucippo**, e poi da **Epicuro** (sec. IV-III a.C.), ripresa dal poeta latino **Lucrezio** (sec. I a.C.) nella sua opera *De rerum natura,* sostenuta dai chimici a partire dal Seicento, trovò una decisiva conferma sperimentale nelle osservazioni compiute da **Einstein** sul moto disordinato delle particelle in un fluido (1905) (**moto browniano**).

Nel testo di Hilbert, la parola "elettrone" significa semplicemente "carica elementare". Ecco perché ad essa viene attribuito indifferentemente valore positivo o negativo. Attualmente il nome "elettrone" è riservato a ciascuna delle particelle elementari a carica negativa, di massa piccolissima, che circondano il nucleo degli atomi.
L'esistenza degli elettroni era stata provata alla fine del XIX secolo. Gli studi degli inglesi Crookes, Kelvin e Thomson, del francese Perrin, dell'olandese Zeeman e del tedesco Lorentz permisero di concludere che i raggi catodici erano, in realtà, fasci di particelle con carica elettrica negativa. Le particelle elementari a carica positiva furono scoperte nel primo Novecento dal neozelandese Rutherford, che le

individuò nei raggi α, e le chiamò "protoni". La carica del protone è uguale ed opposta a quella dell'elettrone, ma la massa del primo è molto maggiore di quella del secondo. Cariche positive piccole come gli elettroni furono scoperte solo nel 1932 dall'americano Anderson: si tratta dei "positroni", a cui davvero calzerebbe la definizione di "elettroni positivi", ma che Hilbert, all'epoca dell'articolo, non poteva certo conoscere.

Max Planck (Kiel 1858 – Göttingen 1947) fu un fisico teorico tedesco. La sua scoperta della quantizzazione dell'energia (1900) gli valse nel 1918 il Premio Nobel per la Fisica.

L'infinitamente grande e l'astronomia

Ci imbattiamo per la seconda volta nella questione se l'infinito si trovi nella natura, quando studiamo l'universo nel suo complesso. Dobbiamo esaminare qui l'espansione dell'universo per stabilire se essa abbracci qualche grandezza infinita. […]

Anche in questo caso la scienza moderna, in particolare l'astronomia, ha riproposto la questione e si sforza di risolverla non coi mezzi difettosi della speculazione metafisica, ma con ragionamenti fondati sulla sperimentazione e sull'applicazione delle leggi della natura, e anche in questo caso si sono trovate serie obiezioni contro l'infinito. La ***geometria euclidea*** *conduce necessariamente al postulato dell'infinità dello spazio, ma quantunque essa sia un sistema concettuale coerente, non ne segue che valga effettivamente nella realtà. Solo con l'osservazione e l'esperimento si può stabilire se lo spazio reale sia o no euclideo. Il tentativo di dimostrare l'infinità dello spazio attraverso la pura speculazione contiene grossi errori. Dal fatto che al di là di una parte dello spazio ce n'è sempre un'altra segue soltanto che lo spazio è illimitato, non che è infinito. L'illimitatezza e la finitezza non sono incompatibili. Attraverso la cosiddetta* ***geometria ellittica*** *la ricerca matematica fornisce il modello naturale di un universo finito. […] Einstein ha dimostrato che la geometria euclidea deve essere abbandonata. […] Inoltre tutti i risultati dell'astronomia sono perfettamente compatibili col postulato che l'universo sia ellittico.*

Si è stabilito che l'universo è finito in due sensi, cioè in quello dell'infinitamente piccolo e in quello dell'infinitamente grande."

Nel testo di Hilbert il termine *illimitato* significa "privo di confine", mentre *infinito* è sinonimo di "infinitamente esteso". Il **piano ellittico**, ad esempio, è un piano illimitato, ma non infinito: per convincersi di ciò è sufficiente pensare al modello che lo identifica con un quoziente

della superficie sferica. Aggiungendo una dimensione, si ottengono analoghe considerazioni per lo ***spazio ellittico***. In effetti, secondo la **teoria della relatività generale** lo spazio avrebbe la forma della superficie di una sfera quadridimensionale **(geometria Riemanniana)** Secondo altri, la densità di materia nel cosmo sarebbe insufficiente a conferire allo spazio la curvatura di una sfera: l'universo possederebbe quindi una **geometria iperbolica** oppure, semplicemente, una **geometria euclidea**. In entrambi i casi sarebbe al contempo infinito e illimitato. Le osservazioni astrofisiche della primavera del 2000, scaturite da una collaborazione scientifica tra l'Italia e gli Stati Uniti, sembrano avvalorare l'ipotesi di un universo piatto.

L'infinito in matematica

Potrebbe darsi, tuttavia, che l'infinito occupi un posto giustificabile nel nostro pensiero, e che svolga un ruolo di concetto indispensabile. Vediamo qual è la situazione in matematica, e consideriamo anzitutto il prodotto più puro e genuino dello spirito umano, la ***teoria dei numeri****. Prendiamo una formula scelta nella ricca molteplicità delle sue formule elementari, per esempio la formula:*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6$$

Poiché possiamo sostituire n con un numero qualsiasi, per esempio con 2 o con 5, questa formula contiene implicitamente infinite asserzioni. Ciò costituisce la sua caratteristica essenziale, che le consente di rappresentare la soluzione di un problema aritmetico e per essere dimostrata richiede una particolare idea, mentre le singole equazioni numeriche:

$$1^2 + 2^2 = 1/6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1/6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

possono essere verificate semplicemente mediante il calcolo, e perciò singolarmente non hanno particolare interesse.

Una concezione completamente diversa e del tutto singolare, che consente una fondamentale comprensione del concetto di infinito, si incontra nell'importante e fecondo metodo degli "elementi ideali". Tale metodo è usato anche nella geometria elementare del piano. I punti e le rette originariamente sono degli oggetti reali effettivamente esistenti. Per essi vale, tra l'altro, ***l'assioma di connessione****: per due punti passa una ed una sola retta. Da questo assioma segue che due rette si*

intersecano al massimo in un punto, ma non esiste alcun teorema il quale affermi che esse si intersecano sempre in un punto, perché possono benissimo essere parallele. Sappiamo però che introducendo degli elementi ideali, per esempio punti all'infinito e rette prolungate all'infinito, possiamo fare in modo che il teorema secondo cui due rette s'intersecano sempre in uno ed uno solo punto risulti vero in generale.
Gli elementi ideali "all'infinito" hanno il vantaggio di rendere quanto più semplice e chiaro possibile il sistema delle leggi di connessione. Inoltre, per la simmetria tra punto e retta, si ottiene l'utilissimo ***principio di dualità*** *della geometria.*
Un altro esempio di uso degli elementi ideali è fornito dalle comuni ***grandezze "complesse-immaginarie"*** *dell'algebra, che servono a semplificare teoremi riguardanti l'esistenza e il numero delle radici di un'equazione. […]*
Passiamo ora alla struttura matematica più ingegnosa e meglio articolata, cioè l'analisi. Già sapete che l'infinito svolge in essa un ruolo essenziale. In un certo senso l'analisi matematica è una sinfonia dell'infinito.
Gli enormi progressi compiuti dal calcolo infinitesimale sono dovuti essenzialmente all'uso di sistemi matematici con un numero infinito di elementi. Poiché però sembrava plausibile identificare l'infinito col "molto grande", sorsero ben presto delle contraddizioni, i cosiddetti ***paradossi del calcolo infinitesimale****, che in parte erano già noti agli antichi sofisti.*
Ma il riconoscimento che molti teoremi che valgono per il finito (per esempio il teorema secondo cui la parte è minore del tutto, l'esistenza di un minimo ed un massimo, la commutatività dell'ordine dei termini di una somma o di un prodotto) non possono essere estesi immediatamente e senza restrizioni all'infinito, costituì un fondamentale passo in avanti. […] Oggi l'analisi non solo è infallibile nel proprio ambito, ma è diventata uno strumento di pratico impiego per l'uso dell'infinito.
L'analisi da sola, però, non ci dà la migliore comprensione della natura dell'infinito. Questa si può ottenere mediante una disciplina che si accosta di più ad un modo di pensare filosofico generale, e che fu concepita per fare nuova luce sul complesso delle questioni relative all'infinito: si tratta della ***teoria degli insiemi****, creata da* ***Georg Cantor****. […] Cantor ha sviluppato con notevole successo […] la teoria dei* ***numeri transfiniti****, ed ha inventato tutto un calcolo per essi. Così, grazie alla collaborazione tra i giganti* ***Frege****, Dedekind e Cantor, l'infinito fu posto sul trono e iniziò un'era di grandi trionfi. Osando il volo, esso ha raggiunto una vertiginosa vetta di successi. […] Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi. […]"*

(cit. da D. Hilbert, *Sull'infinito,* in: C. Cellucci, *La filosofia della matematica,* Laterza, Bari 1967, pagg. 161-183)

La nozione di quantità infinitesimale è già presente nella matematica di **Archimede**, che nel **metodo di esaustione** prevede la possibilità di creare aree piccole quanto si voglia. Questo principio compare, sia pure in maniera meno evidente, anche negli ***Elementi*** di **Euclide**. Esso corrisponde alla possibilità di suddividere un ente geometrico indefinitamente, ad esempio dimezzandolo, e poi continuando a dimezzare ognuna delle parti di volta in volta trovate, in un processo senza fine. In altri termini, gli enti geometrici non sarebbero costituiti da un aggregato di minuscole parti indivisibili (*atomi*), ma sarebbero, invece, oggetti *continui*. Aristotele credeva che ciò si estendesse anche alla materia, contrariamente a quanto sostenuto dai filosofi atomisti. Per lui la materia occupa completamente lo spazio, senza lasciare interstizi: egli nega l'esistenza del vuoto, che, tra l'altro, è un concetto scomodo per la sua fisica. Infatti, egli pensa che il sasso lanciato continui il suo moto, una volta staccatosi dalla mano, perché trasportato dall'aria circostante. Nel vuoto questo movimento sarebbe impossibile. Anche per **Cartesio** il vuoto è inaccettabile, ma per una ragione metafisica: egli considera contraddittoria l'esistenza del nulla. Egli, diversamente da Aristotele, concepisce la materia, compresa la luce, come composta da tanti piccoli corpuscoli, che, però, la riempiono senza soluzione di continuità. A questa visione si oppone il fisico francese Pierre Gassendi (1592-1655), per il quale l'universo è costituito di particelle che fluttuano nel vuoto. **Galilei**, avendo superato la teoria aristotelica del moto, non ha problemi ad includere il vuoto nella sua visione dell'universo. Talvolta egli si avvale della struttura atomica, ad esempio, nel ***Dialogo***, per descrivere l'attrazione tra il ferro e la calamita, oppure, nei ***Discorsi*** per spiegare la resistenza dei materiali. Egli non perviene tuttavia mai a formulare una teoria chiara e completa. Il suo allievo **Cavalieri** proporrà, in geometria, la **teoria degli invisibili**, che è una sorta di compromesso tra atomi e continuo: le linee, le figure ed i solidi sarebbero costituiti da un numero infinito di parti indivisibili, infinitamente piccole. L'area di una figura piana sarebbe, ad esempio, la somma infinita delle aree infinitesime di queste parti: nasce così il concetto di **integrale**. D'altronde, limitatamente alla matematica, lo stesso Galilei mostra la massima disinvoltura nel maneggiare quantità infinite e infinitesime, anticipando la trattazione del moto mediante il calcolo infinitesimale, che sarà compiuta da **Newton** e da **Leibniz**. Egli non esita a parlare di

una quantità che diminuisce *"doppiamente in infinito"*, che, in linguaggio moderno, è un infinitesimo di ordine due.

Nella scienza moderna vi è sempre stata grande incertezza circa la finitezza o infinitezza dell'universo. **Copernico** immagina, come Aristotele, un cosmo finito, racchiuso entro il cielo delle stelle fisse. Il filosofo cinquecentesco Giordano Bruno, invece, non solo crede che l'universo sia infinitamente esteso, ma vi immagina anche un numero infinito di mondi analoghi alla Terra, e finisce sul rogo per eresia. Galileo non darà mai una risposta a questo interrogativo, che Cartesio riterrà comunque inaccessibile ad una mente finita come quella dell'uomo. **Keplero** vedrà nell'ipotesi di infinitezza una duplice contraddizione: da un lato sarebbe impossibile fissare il centro dell'universo, ogni punto lo sarebbe e, al contempo, non lo sarebbe; d'altro lato la luce di infinite stelle sarebbe più forte di quella del Sole, e non si spiegherebbe il colore nero del cielo notturno.

D'altra parte l'universo potrebbe essere finito e limitato pur apparendoci infinito: esistono particolari geometrie, nelle quali i raggi di luce potrebbero percorrere diversi cammini *(geodetiche)* per spostarsi da un punto all'altro, producendo più immagini dello stesso oggetto.

La questione delle reali dimensioni del cosmo è tuttora irrisolta. L'ipotesi del *big bang* fa pensare ad un universo in espansione: la velocità impressa dal grande botto iniziale sarebbe, però, in diminuzione, per effetto dell'attrazione gravitazionale che tenderebbe a far convergere i corpi verso il centro dell'universo: la materia, infatti, è più densamente distribuita nelle zone più vicine al luogo dell'esplosione. Questo processo di decelerazione può essere infinito: la velocità può tendere a zero senza mai annullarsi. Oppure, diminuendo la densità della materia in virtù dell'espansione, l'effetto dell'attrazione può indebolirsi, facendo tendere a zero la decelerazione. In entrambi i casi l'universo continuerà ad espandersi in eterno. Ma può anche darsi che, prima o poi, l'attrazione prevalga sulla fuga dell'universo: allora quest'ultimo, raggiunta una massima espansione, si arresterà ed invertirà il suo moto, iniziando a contrarsi. Se così fosse, l'universo avrebbe dei confini ben delimitati.

L'Hotel Hilbert

Itinerario n. 2

Il Linguaggio Matematico e la sua evoluzione

Esistono termini, simboli e nozioni che, da moltissimo tempo, fanno parte del bagaglio minimo culturale di ogni persona di qualsiasi nazionalità. Si pensi per esempio ai simboli *5, 87, ..*; alle nozioni di triangolo, quadrato, cerchio; alla capacità di sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere numeri.
Tuttavia le relative operazioni sono rimaste a lungo prive di formalizzazione e quindi sono state descritte con termini del linguaggio naturale proprio di ciascun popolo.
Riportiamo, a titolo di esempio, da "*Sur les notations numériques et algébriques*" di **Léon Rodet**, Ernest Leroux Editeur, Paris 1881, il **problema n. 28** del papiro matematico di Rhind, di cui viene dato il testo in caratteri *ieratici* e quello in *geroglifici*. Esso è formulato in questi termini:
"2/3 en venant, 1/3 en s'éloignant, 10 résulte: fais 1/10 de 10, cela donne 1, excédant 9."
(*"2/3 venendo, 1/3 andandosene, risulta 10: fai 1/10 di 10, ciò dà 1, resta 9")*
Si tratta della risoluzione della equazione di primo grado:
$x + 2x/3 - 1/3 (x + 2x/3) = 10$ che ha come soluzione $x = 9$.
Gli Egiziani usavano spesso, per indicare l'attuale segno "-" (ovvero la sottrazione), un segno geroglifico che indicava i verbi "*andarsene, lasciare, sottrarsi*": esso era costituito da due gambe marcianti nel senso contrario a quello che, nel loro linguaggio ordinario, significava "*venire verso*" e quindi "*aggiungersi*", usato invece per indicare l'attuale segno "+".

Antichità e Medioevo

Relativamente pochi sono i documenti o testi originali del primo scorcio di questo periodo; di più si conosce attraverso le ricostruzioni fatte in epoca posteriore.
In ogni caso, il linguaggio è quello naturale di ciascun popolo. Pochi i simboli che poi dureranno stabilmente nel tempo: si pensi per esempio al modo di contare. **Greci** e **Romani** hanno utilizzato, completamente o in parte, le lettere del loro alfabeto, e solo il sistema romano è sopravvissuto, sia pure per indicare i secoli, per numerare le pagine di una prefazione o i capitoli di un libro, e non certo per eseguire le operazioni matematiche elementari. Più fortuna hanno

avuto le **cifre indo-arabiche** che ancora oggi tutti usiamo. Lo stesso è accaduto per le figure geometriche elementari. È noto che i Greci furono profondi conoscitori delle **coniche** (ellissi, iperboli e parabole) e le utilizzarono anche per determinare per via geometrica le soluzioni di alcuni tipi di equazioni di terzo grado.
Nel **IV** secolo a.C. **Menecmo**, discepolo di **Eudosso** da Cnido, risolve graficamente l'equazione $x^3 = a^2b$ cercando le ascisse positive delle intersezioni, diverse dall'origine, delle due parabole $y^2 = bx$ e $x^2 = ay$. Contributi in questo settore sono venuti anche da altri popoli.
Nel **XI** secolo d.C. **Omar Ibrahim Al Khayami**, poeta e matematico persiano, scrive un'algebra. Essa include problemi ed equazioni di terzo grado che egli risolve geometricamente, ricorrendo alla intersezione di due coniche, come avevano già fatto Menecmo ed **Archimede**. Il merito di Omar è di aver trovato un metodo grafico generale per tutti i casi di equazioni di terzo grado aventi radici positive.
Data l'equazione:

(1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

si pone

(2) $x^2 = 2py,\ p \neq 0$ (parabola)

e si ottiene

(3) $2pxy + 2apy + bx + c = 0$ (iperbole)

Risolvendo graficamente il sistema formato dalle equazioni (2) e (3), le ascisse positive dei punti intersezione delle due curve rappresentano le radici della equazione (1).
Si registra, in questo arco di tempo, un grande sviluppo dell'Aritmetica e della Geometria.
Sono però assenti i simboli, oggi ormai universali, come +, - , √ , = , per le operazioni. Infatti, il segno " **=** " sarà inserito per la prima volta in un'opera dell'inglese **Robert Recorde nel 1557**, ed i primi due segni compariranno per la prima volta in una aritmetica commerciale del tedesco **Johann Widmann nel 1489**. Il **Chasles**, però, attribuisce la paternità dei segni + , - , √ allo **Stifel**, monaco di Essingen, autore di una *"Aritmetica perfetta"* o teorica e di una *"Aritmetica compendiosa"* o pratica. Secondo il conte **Guglielmo Libri Carrucci della Sommaia**, invece, tali segni sarebbero stati introdotti da **Leonardo da Vinci** . Altri ritengono che siano stati semplicemente originati da deformazioni delle lettere "p" ed "m" usate come abbreviazioni delle parole "più" e "meno", e della lettera "r" iniziale della parola radice.
Questi segni entreranno nell'uso comune dopo quasi un secolo**.**

I numeri considerati sono quelli che oggi chiamiamo naturali, razionali e irrazionali (che oggi rientrano nei numeri reali) sempre solo positivi. Ancora **Cartesio** in pieno 1600 chiamava *falsi* i numeri negativi, che pure apparivano nella risoluzione delle equazioni e nella estrazione di radici. Sembra che l'unica eccezione si sia avuta con la **matematica degli Hindu**; **Brahmagupta** (598-665 d.C.) dà infatti, per equazioni quadratiche, un metodo quasi moderno di soluzione, che ammette quantità negative.

Dal 1500 alla fine del 1800

Questo è un arco di tempo eccezionale per l'evoluzione del linguaggio matematico e vede anche, in Italia, il passaggio dal latino al volgare italiano. Tuttavia, si noti che, sebbene la maggior parte dei libri sia scritta in volgare, si trovano opere interamente o parzialmente scritte in latino fino alla fine del 1700. Il latino resta infatti per molto tempo la lingua accademica (vedi il **Riccati**).
Un primo esempio del linguaggio di fine 1400 ed inizio 1500 si trova nell'opera di **Luca Pacioli** , matematico tenuto in grande considerazione dai suoi contemporanei, e ritenuto oggi il fondatore del metodo contabile della *"**partita doppia** o metodo italiano"*.
Nell'opera ***Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*** del **1494**, alla ***Distinctio Octaua-Tractatus Sextus***, ***al foglio 149***, vengono elencati otto tipi di equazioni di grado superiore al secondo, due delle quali erroneamente dichiarate impossibili. Prima di riportarle, con a destra l'attuale scrittura, si premette una legenda necessaria per la loro comprensione:

1500	significato	già nel 1800
Cosa	incognita	x
Censo	seconda potenza della cosa	x^2
Cubo	terza potenza della cosa	x^3
censo de censo	quarta potenza della cosa	x^4
primo relato	quinta potenza della cosa	x^5
censo de cubo cubo de censo	sesta potenza della cosa	x^6
secondo relato	settima potenza della cosa	x^7

censo de censo de censo (CE.CE.CE)	ottava potenza della cosa	x^8
Cubo de cubo	nona potenza della cosa	x^9
R.U.CU.	radice universale cubica del polinomio che segue il simbolo	

Il **Pacioli** scrive:

censo de censo equale nu.o	$ax^4 = b$
censo de censo equale a cosa	$ax^4 = bx$
censo de censo equale a censo	$ax^4 = bx^2$
imposibile censo de censo e censo equale a cosa	$ax^4 + bx^2 = cx$
imposibile censo de censo e cosa equale a censo	$ax^4 + bx = cx^2$
censo de censo e nu.o equale a censo	$ax^4 + b = cx^2$
censo de censo e censo equale a nu.o	$ax^4 + bx^2 = c$
censo de censo equale a nu.o e censo	$ax^4 = b\,x^2 + c$

Si noti che le equazioni di tipo **4 e 5**, come quelle di tipo **6**, **7**, **8** erano considerate diverse perché i coefficienti erano sempre numeri positivi.
Un secondo esempio del linguaggio del tempo si trova nei due problemi che, nel **1530**, un tale Zuanne de Tonini da Coi inviò a **Tartaglia** , perché li risolvesse:
1) *Trovatime un numero, qual multiplicato per la sua radice più tre, mi faccia cinque.*
Oggi diremmo: risolvetemi l'equazione $x^2(x+3) = 5$.
2) *Similmente trovatime 3 numeri, ma chel secondo sia 2 più del primo,et chel terzo sia pur 2 più del secondo, et che multiplicato el primo fia el secondo, et quel produtto fia el terzo, faccia 1000.*
Oggi diremmo: risolvetemi l'equazione:
$x(x+2)(x+4) = 1000$ ovvero $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$.

Secondo la **classificazione di Nesselmann**, questo modo di esprimersi rappresenta il primo stadio dell'evoluzione del linguaggio algebrico, che è detto ***algebra retorica***.
Ancora il **1500** vede la nascita dei **numeri complessi** . È infatti Rafael **Bombelli** che, in relazione al problema della risoluzione delle **equazioni algebriche di terzo grado**, introduce le dizioni
più di meno (p.d.m.) per indicare $+\sqrt{-1}$
meno di meno (m.d.m.) per indicare $-\sqrt{-1}$.
ed assegna le regole per effettuare le operazioni con tali entità. Molto più tardi, **Gauss** per primo userà abitualmente la lettera ***i*** per indicare $\sqrt{-1}$, che verrà in seguito chiamata *unità immaginaria.*

Nel **1600** cominciano ad apparire stabilmente il segno - ed il segno +, passando quest'ultimo attraverso varie forme. Nella ***Géométrie*** di **Descartes** compare una **piccola croce maltese** in luogo del +. Si noti anche il modo di scrivere il prodotto tra somme senza l'uso odierno delle **parentesi**. Un buon esempio della terminologia in uso in questo periodo si può trovare nel ***Dizionario Aritmetico*** di **G.A. Alberti**.
Tra il **1600** ed il **1800** si registrano tre eventi di vitale importanza per la Matematica:

- l'introduzione delle **coordinate cartesiane** , che porterà allo sviluppo della *Geometria Analitica,*
- la nascita del **Calcolo Infinitesimale**, con la formulazione sempre più precisa dei concetti di **funzione**, **continuità**, **limite**, **derivata** ed **integrale** , e con implicazioni anche di tipo filosofico,
- la scoperta delle **Geometrie non Euclidee**, a lungo discusse e in un certo senso psicologicamente rifiutate dopo 2000 anni di **Geometria Euclidea** .

A parte l'aspetto della equivalenza logica con quella Euclidea, queste geometrie (iperbolica ed ellittica) hanno avuto grande rilievo storico.
Il dibattito sul **V postulato di Euclide** ha contribuito nel corso degli anni, a fianco ad esigenze di natura filosofica, alla nascita dei **sistemi formali**, alla migliore comprensione del sistema assiomatico (fino alla presa di coscienza dei limiti imposti dai **teoremi di incompletezza** di **Gödel**) e, fatto non meno importante, alla nascita di nuove Geometrie (**Riemanniane**) nel cui ambito si svilupperà la **Relatività**.
In una bella opera, puntuale e ricca di riferimenti bibliografici, di **Umberto Eco**, ***La ricerca della lingua perfetta***, si vede come l'evoluzione del linguaggio matematico si leghi in qualche modo alla **ricerca di una lingua universale**, mostrando ancora una volta l'incidenza della matematica nel pensiero dell'uomo.
Colpisce l'utilizzazione della *Combinatoria* in **Lullo** ed ancora di più il coinvolgimento di **Leibniz**, che esaminando gli *esagrammi dei mutamenti cinesi, **I Ching***, vede una legge nascosta e scopre il calcolo binario anticipando di un secolo e mezzo la *Logica Matematica* di **Boole**.
È infatti la fine del 1800 che vede la nascita della **Logica Matematica** e dell'**Algebra Booleana**, da cui, come tutti sanno, prenderà le mosse l'**Informatica**.
Peano scrive un **dizionario logico-matematico** in cui adopera segni e simboli personalissimi; molti di essi però non corrispondono all'assetto definitivo che hanno oggi. Il linguaggio Matematico, naturalmente, non registra subito l'influsso della formalizzazione, ma

conserva il carattere discorsivo (**Dini**) anche agli inizi del 1900 (**Ruffini**).

Il Novecento

Con la scoperta dei **paradossi** e con il conseguente passaggio dalla **Teoria ingenua degli insiemi** di **Cantor** alle **teorie assiomatiche** di **Zermelo-Fränkel** (**ZF**) e di **Neumann-Bernays-Gödel** (**NBG**), si scopre che tutta la matematica può essere formalizzata ed espressa nella teoria degli insiemi e questa, a sua volta, in una **teoria formale** del primo ordine, sufficiente ad esprimere **l'Aritmetica**.
Ma la formalizzazione completa, che quindi non fa uso di parole, è poco economica e funzionale per un matematico, dal momento che le dimostrazioni di formule semplicissime diventano incredibilmente lunghe.
Nel primo scorcio del secolo, grazie a personalità di tutto rilievo come **Hilbert**, **Poincaré**, **Russell**, i legami tra Logica e Matematica vengono discussi ed approfonditi da posizioni anche molto distanti. Con il **contributo di Hilbert** sembra che si sia raggiunto un equilibrio, che, invece, risulterà presto precario. La *bomba* dei **teoremi** di incompletezza del venticinquenne **Gödel**, nel 1931, farà letteralmente saltare il programma di **Hilbert** ed aggraverà la crisi dei fondamenti. Ma i matematici continuano a lavorare; la teoria degli insiemi **ZF** (o **NBG**), anche se potrebbe non essere esente da contraddizioni ed antinomie nascoste, funziona bene per gli scopi dei matematici. Sembra dunque che l'atteggiamento mentale dei matematici di fronte alla crisi diventi più pragmatico e che il problema dell'esistenza di contraddizioni in un sistema formale sia relegato nell'ambito della logica più che della matematica.
La prima metà del **1900** conosce il fenomeno del *Bourbakismo* e, dopo punte di esasperato formalismo, il linguaggio matematico raggiunge un importante punto di equilibrio guadagnando in rigore, precisione ed universalità.
Del resto è logico aspettarsi che una materia portatrice di verità universali tenda naturalmente verso l'unificazione del linguaggio, e finisca necessariamente per ridurlo ad un insieme ristretto di **simboli** essenziali e facilmente riproducibili. Un'evidente conseguenza di questo processo di semplificazione è la prevalenza delle formule sulle parole nei testi matematici moderni.
In molti casi il contenuto matematico risulta comprensibile indipendentemente dalla lingua in cui il testo è stato redatto. Non v'è studente universitario, sia esso italiano, francese, tedesco, inglese,

cinese o arabo che non riconosca nelle seguenti formule A, B, C, rispettivamente, la nozione di *continuità in un punto* di una funzione reale, la definizione di *determinante* di una matrice, la nozione di *geodetica* su una varietà Riemanniana.

A) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x_o \in \mathbf{R},$

$(\varepsilon \in \mathbf{R}^*_+) \Rightarrow ((\exists\ \delta \in \mathbf{R}^*_+) \wedge (\ x \in\ ]\ x_o-\delta\ ,\ x_o+\delta\ [\ \Rightarrow f(x) \in\ ]\ f\ (x_o)-\varepsilon\ ,\ f(x_o)+\varepsilon\ [\ ))$

B) $a \in M(n,\mathbf{R}), \qquad a = (\ a^i_j\ )$

$$|\ a\ | = \ \Sigma_{\sigma\in Sn}\ \varepsilon(\sigma)\ \ a^1{}_{\sigma(1)}\ \ a^2{}_{\sigma(2)}\ \ \cdots\ \ a^n{}_{\sigma(n)}$$

C) $(M,g)\ ,\quad c : I \to M\ ,\quad I =]a\ ,\ b[\subset\ \mathbf{R},$

$\forall\ t \in I \qquad \nabla_{c'(t)}\ c'(t) = 0$

Infine, un breve cenno all'importanza assunta nei nostri giorni dal *Computer*, che rappresenta la conquista ultima, per il momento, del **Calcolo meccanico** iniziato con **Pascal**, e che, oltre ad effettuare all'istante calcoli che altrimenti richiederebbero tantissimo tempo, permette di visualizzare **superficie** difficili da immaginare.
Naturalmente, l'avventura non è finita: nuove istanze e suggestioni vengono dal mondo reale e dalla Fisica Teorica.
E la sfida continua.

La forza dei simboli

L'uso regolare dei simboli in Matematica è stato il passo fondamentale verso l'universalità del linguaggio. A parte l'evidente economicità del loro uso, sembra che essi acquistino una vita propria. Citiamo, a questo proposito, il seguente brano tratto da *La ribellione del numero* di **Paolo Zellini** (pagg. 172-176).

"Che i simboli matematici, una volta creati, siano provvisti di "potere ermetico", di una forza che spinge a nuovi atti creativi, pare non ci siano dubbi. Specie quando si designano con segni appropriati, i concetti (matematici) assomigliano a ciò che Hofstadter chiama "simboli attivi": sottosistemi di sistemi complessi che generano per via di reciproche attivazioni, che ne fissano anche le possibili valenze semantiche, altri sottosistemi diversi e via via più complessi.

È noto, ad esempio, il fatto che la teoria delle categorie e l'algebra omologica nascono e si sviluppano con l'osservazione che molte proprietà di sistemi matematici possono essere unificate e semplificate in virtù di speciali diagrammi di frecce, i quali, proprio per via di questa semplificazione "visuale", aiutano a trovare nuove costruzioni e nuove strutture concettuali.

Un esempio più elementare lo danno i ***numeri immaginari****. Quando* ***Cardano*** *si occupò della risoluzione delle* ***equazioni di terzo grado*** *questi numeri entrarono nell'"esistenza" matematica. Ma la loro introduzione non fu l'effetto di una immaginazione "libera" e sovrana che sa da sola quel che bisogna fare o non fare. Giustamente* ***Waismann*** *afferma che gli immaginari si introdussero* ***da sé*** *nei calcoli, per via di precise necessità algoritmiche, e addirittura in contrasto con la volontà e l'intenzione del matematico. Nonostante* ***Cardano*** *ottenesse la risoluzione di un'equazione cubica utilizzando radici quadrate di numeri negativi, e nonostante il buon senso consigliasse di respingere simili stranezze (nessun numero elevato al quadrato è negativo), i calcoli che ne facevano uso davano un esito giusto e sensato, e finivano per imporre il consiglio opposto: quello di considerare questi segni come nomi di nuove entità, fornite di uno speciale "status existentiae". Così, scrive* ***Waismann****, "sembra che proprio nell'operare con formule, cioè nell'algoritmo matematico stesso, si celi una forza autonoma che ci spinge innanzi nostro malgrado, forza che nel caso considerato portò i matematici a far uso dei numeri immaginari".*

Analogo il commento di ***Felix Klein****: "I numeri immaginari seguirono la loro strada [...] senza la ratifica e anche in opposizione ai desideri dei*

singoli matematici, e ottennero più larga diffusione solo gradualmente e nella misura in cui si dimostrarono utili ".

Oltre che essere il risultato di una ***necessità*** *algoritmica, il numero immaginario rappresentò anche l'occasione per ulteriori sviluppi algebrici e geometrici, nel senso di una progressiva astrazione della matematica. Alla crescita dell'algebra astratta contribuirono non poco, del resto, la stessa esistenza e le stesse proprietà combinatorie di segni operazionali della cui potenzialità euristica si poteva essere, sulle prime, legittimamente ignari. Questo contributo prese origine dall'uso dei segni introdotti da* ***Leibniz*** *per il calcolo differenziale e* ***integrale****, e dalla scoperta* ***a posteriori*** *che questi segni ubbidivano alle stesse proprietà combinatorie delle potenze (ad esempio il differenziale ennesimo di un prodotto era formalmente analogo alla potenza ennesima di un binomio). Questa sola analogia già portava* ***Lagrange*** *a concludere che molti nuovi teoremi, che sarebbe stato difficilissimo scoprire per altre vie, diventavano ora accessibili; e l'opportunità più conseguente diventava ben presto di considerare i simboli delle operazioni di derivazione e di differenziazione come quantità algebriche, alla stessa stregua delle x e delle y cui esse si applicavano.*

La tecnica della "separazione dei simboli" introdotta da ***Louis François Arbogast*** *nel 1800, le ricerche di* ***Fourier*** *e i lavori di* ***Cauchy*** *sul calcolo delle operazioni (1827) rafforzarono l'evidenza di una stretta analogia tra potenze e indici di differenziazione; e questa fu ben presto in grado di suggerire successive considerazioni sulla natura dell'algebra, e da ultimo sugli stessi fondamenti della matematica. Il "salto" speculativo prese spunto dalla scuola inglese di* ***Babbage****,* ***Herschel****,* ***Peacock****, che videro in tale scoperta il seme di una novità non sufficientemente riconosciuta dalle scuole continentali.* ***Boole*** *inventò una pura algebra di segni in base a proprietà combinatorie finalmente astratte dal particolare significato che i simboli potessero assumere nell'algebra o nel calcolo differenziale o funzionale. E questo stile ben si accordava con l'emergente* ***teoria dei gruppi algebrici****, che, spostando l'attenzione dagli* ***oggetti*** *(matematici) alle* ***leggi*** *cui questi soggiacciono, affrancava il ragionamento dalla necessità di una particolare interpretazione dei segni.*

Quanto questo processo possa addebitarsi a una specie di automatismo, di crescita spontanea dell'idea per svolte casuali, impreviste e per successive conquiste mentali imposte dall'analogia e dall'astrazione, può dedursi da un commento di ***Robert Woodhouse****, che risale al 1801.- "Sarebbe invero un singolare paradosso o una rara fortuna se la verità non sempre raggiunta dalla meditazione dovesse inaspettatamente risultare da operazioni non rispondenti all'idea, condotte senza principio, senza scopo o regolarità",*

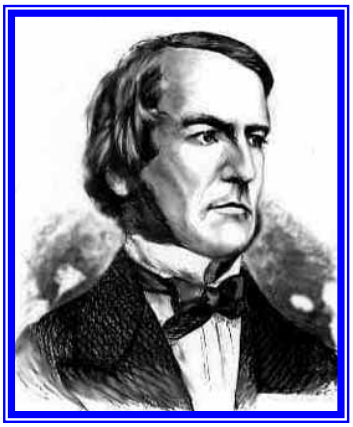
Hermite *sarebbe forse stato disposto a vedere in queste "operazioni senza principio" le mosse di un organismo vivente; proprio come esseri viventi egli considerava infatti, ci racconta* ***Poincaré****, gli enti più astratti. Nel suo strenuo realismo, anche quando non riusciva a vedere gli enti matematici in modo chiaro ed esauriente,* ***Hermite*** *percepiva comunque una loro unità interna, un principio di organizzazione che li rendeva dissimili da una morta composizione artificiale; o per lo meno era lecito pensare che lo stesso artificio non potesse essere altro che vita e movimento.*

Perfino ***Cantor****, cui* ***Hermite*** *rimproverava di creare gli oggetti matematici anziché di limitarsi a scoprirli, doveva presentire una finale rivincita dell'oggetto sulla presunta "libertà" del matematico. Per un attimo, è vero, il condizionamento esterno dei fatti non escludeva un'apparenza di "libertà", perché si rivolgeva contro il vincolo di un'abitudine e contro la forza carceraria di certi pregiudizi. (La "libertà", si direbbe, è "libertà" di opporsi a una costrizione precedente). Ma quand'era ormai vicino a scoprire nella successione degli indici di derivazione una nuova specie di numeri, i* ***numeri transfiniti****,* ***Cantor*** *dovette anche riconoscere la forza autonoma e antagonista dei concetti:*

*"****Qui vediamo una generazione dialettica di concetti, che porta sempre più innanzi, e rimane libera da ogni arbitrio e insieme necessaria e logica in sé****".*

Ciò che scrisse ***Ludwig Fleek*** *(in* ***Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache, 1935****) - che la conoscenza richiede la massima coazione e la minima arbitrarietà di pensiero - non è mai* ***così poco*** *evidente come nell'atto dell'invenzione. Ma perfino in quell'atto la necessità e la "coazione" si aggiungono all'arbitrio, perché non c'è dubbio che vi prenda corpo, al di là di una parvenza di "libera" scelta, qualcosa che compete alla stessa unità e strategia dell'oggetto."*

George Boole (1815-1864)



Questo matematico inglese è uno dei padri del moderno pensiero formale. Uomo di umili origini, frequentò le scuole del popolo, ma seppe costruirsi da sé una cultura, imparando anche il greco, il latino e varie lingue straniere. I suoi libri di matematica furono le opere di **Laplace** e **Lagrange**. Iniziò la sua carriera come maestro elementare, ma conseguì presto una cattedra universitaria grazie alle sue idee, geniali ed innovative, sulla natura astratta dell'**algebra** e della **logica**.

Boole pone l'accento sul simbolismo, che, seguendo il pensiero di **Peacock**, decide di svincolare da ogni significato particolare: le lettere cessano di indicare quantità numeriche indeterminate o proposizioni del linguaggio ordinario e cominciano ad essere entità autonome, soggette unicamente a regole di composizione appositamente formulate. In questo senso l'algebra e la logica finiscono per assomigliarsi, e vengono addirittura a fondersi nel calcolo proposizionale della **teoria degli insiemi**. Per Boole le lettere $x,y,z,\ldots$ rappresentano le parti di un insieme universale, la somma $x+y$ indica l'unione delle due parti, il prodotto $x \cdot y$ la loro intersezione. Il simbolo 1 indica l'insieme universale stesso, 0 la parte vuota (priva di elementi). Applicando le identità algebriche elementari si ottengono teoremi sugli insiemi. Ad esempio: $x \cdot 0 = 0$ esprime il fatto che la intersezione di qualunque insieme x con l'insieme vuoto è uguale all'insieme vuoto. Invece $x+0=0$ significa che l'unione di un insieme x con l'insieme vuoto è l'insieme x stesso. Anche altre proprietà della somma e del prodotto di numeri (commutativa, associativa, distributiva) si traducono in altrettante proprietà sull'unione e sulla intersezione di insiemi.
Questa sorprendente connessione tra due discipline che, fino ad allora, avevano avuto storie del tutto indipendenti, ha aperto la strada ad una nuova teoria matematica, culminata nella definizione

degli operatori logici *(**calcolo proposizionale**)* e nella creazione delle **macchine calcolatrici** elettroniche. Le prime tracce di questa evoluzione possono comunque essere fatte risalire a **Leibniz**, fondatore della aritmetica binaria e del **calcolo meccanico**.

Il lavoro iniziato da Boole fu proseguito, dopo la sua morte, da **De Morgan** e **Peirce** e venne, in seguito, perfezionato da **Peano**.

Le principali opere di Boole sono ***Analisi matematica della logica* (1847)** ed ***Esame delle leggi del pensiero* (1854)**: in questo secondo libro **Russell** volle vedere il primo germe della matematica pura.

Il sillogismo secondo Boole
Il simbolismo logico di Peano

Il sillogismo secondo Boole

Il matematico inglese **George Boole** è noto per aver dato alla **logica matematica** una veste algebrica (***calcolo proposizionale***).

Nel suo linguaggio, le *proposizioni* o *enunciati* elementari sono variabili, cui si assegna il valore di verità *1* o *0* a seconda che esse siano vere o false. Se *x* è una proposizione, la sua negazione sarà rappresentata da *1-x.* Data un'altra proposizione *y*, la proposizione "*x* e *y* " viene indicata dal prodotto *xy.* In questo modo l'aritmetica ci dice che "*x* e *y*" è vera (cioè *xy = 1*) se e solo se *x* e *y* sono entrambe vere (cioè *x=1* e *y=1*).

Le deduzioni avvengono per mezzo di opportune manipolazioni delle identità algebriche. Un esempio lampante è dato dalla soluzione dei **sillogismi**.

In un sillogismo le due premesse possono essere della forma:

Tutti gli X sono Y
Tutti gli Y sono Z

In altri termini:

Non è possibile che qualcosa sia X e non Y al contempo
Non è possibile che qualcosa sia Y e non Z al contempo

In formule:

x(1-y) = 0
y(1-z) = 0

Eliminando *y* da questo sistema di due equazioni si ricava:

x(1-z) = 0

che si legge:

Tutti gli X sono Z.

D'altra parte questa è l'ovvia conseguenza delle due premesse.

Vediamo un altro esempio:

Tutti gli X sono Y $x(1-y) = 0$
Nessuno Z è Y $zy = 0$

Nessuno Z è X $zx = 0$

Questo sillogismo ed il precedente sono risolubili, ossia, nel linguaggio aristotelico, sono *perfetti*. In altri casi nulla si può ragionevolmente dedurre dalle premesse: l'eliminazione di *y* dalle equazioni conduce ad un'identità banale.

Tutti gli X sono Y $x(1-y) = 0$
Tutti gli Z sono Y $z(1-y) = 0$

---------- $xz = xz$

Questo è un esempio di sillogismo *imperfetto*.

Le premesse che abbiamo visto sinora contengono affermazioni su "tutti" e "nessuno" degli appartenenti ad una certa classe: sono premesse *universali*. Si dicono particolari, invece, quelle che riguardano solo una parte degli individui, come, ad esempio:

Alcuni X sono Y

La traduzione algebrica di questo enunciato è

$vx = vy$,

dove si intende che la variabile *v* può assumere, indifferentemente, il valore *0* o il valore *1*. L'enunciato va infatti inteso in questo senso: *è possibile (non si esclude) che un X possa essere Y.*
Esso comprende quindi tutti i seguenti casi, che riportiamo in tabella:

		x	*y*	*v*
Non X	**Y**	**0**	***1***	***0***
X	**Y**	***1***	***1***	***0* oppure *1***
X	**Non Y**	***1***	***0***	***0***
Non X	**Non Y**	***0***	***0***	***0* oppure *1***

Possiamo adesso risolvere il sillogismo:

Alcuni X sono Y	***vx = vy***
Tutti gli Y sono Z	***y(1-z) = 0***
Alcuni X sono anche Z	***vx = vxz***

Vediamo, infine un esempio che necessita di un artificio formale. Se traduciamo le premesse seguenti in formule, nel solito modo,

Nessun X è Y	***xy = 0***
Nessuno Z è Y	***zy = 0***

ci accorgiamo di non poter eliminare la *y*. Conviene allora riscrivere la seconda premessa in un'altra forma, equivalente: *non si esclude che un non Z sia Y, però si esclude che Z sia Y.* I casi possibili questa volta sono:

		1-z	*y*
Non Z	**Y**	*1*	*1*
Z	**Non Y**	*0*	*0*
Non Z	**Non Y**	*1*	*0*

Essi sono tutti compresi nella scrittura

v(1-z) = y

che si legge, anch'essa:

Alcuni non Z sono Y

Procedendo in questo modo si perviene alla conclusione:

Alcuni non Z non sono X ***v(1-z)x = 0.***

Il linguaggio algebrico di Boole fu inizialmente ideato per la **teoria degli insiemi**. In effetti il sillogismo si presta ad essere trattato anche in termini di insiemi. Si denota con *1* l'insieme universo, che raccoglie tutti gli individui, mentre *0* indica l'insieme vuoto. Le variabili *x* e*y*

rappresentano gli insiemi degli individui che sono X e Y rispettivamente. Il prodotto di due simboli va interpretato come l'intersezione degli insiemi corrispondenti. Così, ad esempio, l'uguaglianza

$$xy = 0$$

esprime il fatto che gli insiemi *x* e *y* non hanno elementi in comune (*sono disgiunti*) ossia "nessun X è Y".

Se invece "tutti gli X sono Y", allora sono disgiunti l'insieme *x* e l'insieme ottenuto dall'insieme universo eliminando (*sottraendo*) l'insieme *y*, detto *complementare* di *y*, e denotato con *1-y*. Ecco perché in questo caso la formula è

$$x(1-y) = 0.$$

La dicitura "alcuni X" che compare negli enunciati particolari si traduce, nel linguaggio della teoria degli insiemi, nella nozione di *sottoinsieme* o *parte* di *x*. Questo sottoinsieme si ottiene intersecando *x* con un certo insieme *v* (che può essere anche vuoto, cioè uguale a *0*), ossia come prodotto *vx*.

Il sillogismo secondo Eulero

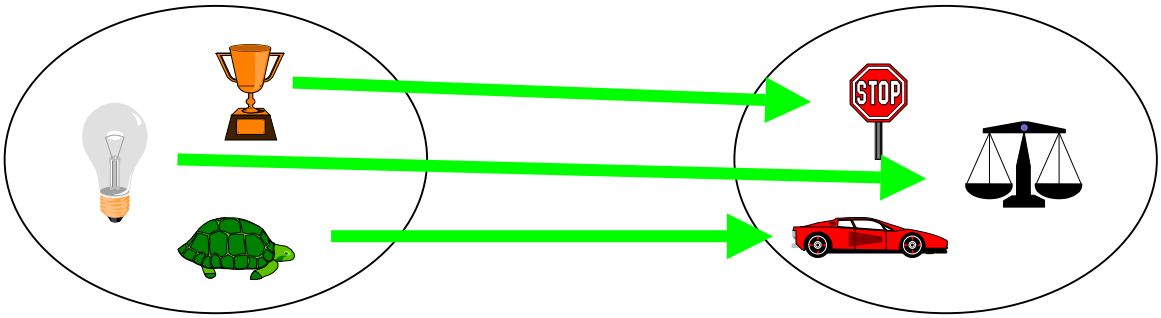
Georg Cantor (Pietroburgo, Russia, 1845 - Halle, Germania, 1918)



Il vero *leitmotiv* dell'opera di questo matematico fu l'idea di **infinito**. Intorno ad essa egli seppe sviluppare concezioni assai ardite per la matematica ottocentesca; Bell vuole vedere nella naturale inclinazione artistica della sua famiglia, popolata di musicisti e pittori, l'origine delle sue geniali intuizioni. La sua sensibilità non comune lo rese, allo stesso tempo, particolarmente fragile e suscettibile. Le testimonianze del tempo lo dipingono come un uomo amabile, allegro e generoso, ma anche dotato di un temperamento deciso e battagliero, di una personalità forte e trascinante, accentuata dall'imponenza del suo aspetto. Tuttavia la sua tenacia e la solidità delle sue convinzioni facevano sì che egli riversasse tutte le energie nella difesa delle proprie idee, lasciandosi coinvolgere emotivamente fino in fondo. Gli attacchi ed i rifiuti che il mondo accademico ad un certo punto cominciò ad opporre alle sue teorie finirono così per pregiudicare la sua salute mentale. A partire dall'età di quarant'anni, la depressione lo colpì ripetutamente, compromettendo la sua attività di ricerca. Nonostante i prestigiosi riconoscimenti che infine gli giunsero dalla comunità scientifica, egli non recuperò più l'equilibrio, e finì i suoi giorni in un ospedale psichiatrico.

Cantor aveva studiato a Zurigo, Göttingen e Berlino: qui, appena ventiduenne, aveva conseguito il dottorato con una tesi sulle ***Disquisitiones Arithmeticae*** di **Gauss**. Nel 1869 aveva ottenuto la docenza all'università di Halle, in Germania, dove aveva insegnato fino al 1905.

La domanda a cui Cantor volle dare una risposta riguarda il concetto di base del **calcolo infinitesimale**. I processi di passaggio al limite che danno luogo a derivate ed integrali racchiudono l'idea di un algoritmo che viene iterato indefinitamente: questo è ciò che aveva in mente già **Archimede** quando applicò il **metodo di esaustione** per il calcolo delle aree. Ogni passo produce una migliore approssimazione dell'area cercata: quest'ultima è solo un traguardo irraggiungibile a cui si può solo continuare ad avvicinarsi per l'eternità, oppure è il risultato effettivo di un *numero infinito* di passi?
L'infinito è un oggetto matematico vero e proprio, o è solo la vuota suggestione prodotta dal simbolo ∞? Cantor optò per la prima ipotesi, che, in fondo, aveva sempre aleggiato nella storia della matematica. Il **metodo degli indivisibili** di **Cavalieri** non era forse basato sull'idea di quantità *infinitamente piccola*? In un momento in cui era viva la discussione sui fondamenti, all'infinito occorreva una definizione formale rigorosa che ne garantisse la legittima cittadinanza all'interno di un sistema logico. Cantor la cercò nella **teoria degli insiemi**, (***Mengenlehre***, 1874) gettando le basi di un lavoro che sarebbe stato completato da **Frege**. L'idea fu quella di vedere l'infinito come la proprietà di quegli insiemi i cui elementi non sono contati da nessun numero naturale. Un insieme ha n elementi esattamente quando è possibile associare ad ogni suo elemento un numero da 1 a n, senza ripetizioni, ed esaurendo tutti questi numeri. Contare gli elementi da 1 a n significa stabilire una *corrispondenza biunivoca* tra l'insieme considerato e l'insieme dei primi n numeri interi positivi; n è detto **numero cardinale** dell'insieme. Chiaramente, due insiemi avranno lo stesso numero cardinale n se e solo se gli elementi dell'uno potranno essere messi in corrispondenza biunivoca con quelli dell'altro:



Cantor utilizza la corrispondenza biunivoca per generalizzare il concetto di numero cardinale, che egli definisce come la proprietà comune a tutti quegli insiemi che sono reciprocamente in corrispondenza biunivoca, e che egli chiama *equipotenti*. Il numero cardinale di un insieme infinito non sarà più un numero naturale, ma un **numero transfinito**. Il maggior merito di Cantor sta nell'aver

scoperto che esistono almeno due numeri transfiniti distinti: l'infinito non solo esiste, ma, addirittura, non è unico! Precisamente, il numero cardinale dell'insieme dei numeri naturali è diverso da quello dell'insieme dei numeri reali: non esiste corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi. Attenzione: ciò non ha nulla a che vedere col fatto che il primo insieme è una parte del secondo. Infatti, l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri razionali sono equipotenti, nonostante il primo sia strettamente contenuto nel secondo.

Cantor si chiese se esistessero numeri transfiniti intermedi tra i due citati. Questo problema, noto come **ipotesi del continuo**, entrò a far parte dei **problemi** presentati da **Hilbert** a Parigi nel 1900. La risposta venne solo nel 1963: Cohen provò che la questione è indecidibile all'interno della **teoria degli insiemi ZF**.

Cantor poté valersi della collaborazione di **Dedekind** e **Frege**, ed ebbe **Kronecker** come acerrimo avversario. Questi giunse perfino a negare ogni fondatezza a quanto non potesse essere costruito a partire dai numeri interi mediante un algoritmo finito. A lui sono attribuite lapidarie dichiarazioni che suonano quasi come professioni del **pitagorismo** più radicale: *"Dio ha creato i numeri interi. Tutto il resto è opera dell'uomo." "Tutti i risultati delle più profonde ricerche matematiche devono alla fine potersi esprimere sotto la semplice forma di proprietà dei numeri interi."*

Fu soprattutto il contrasto con Kronecker, che era stato il suo maestro, a pesare sulla vita e sulla carriera di Cantor. A noi piace credere che la polemica fra i due fosse di carattere scientifico, e priva di connotazioni personali. A costo di peccare d'ingenuità, vogliamo interpretare il loro contrasto alla luce di questa frase di Hilbert:

"L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente l'animo umano."

Le teorie matematiche di Cantor aprirono la strada al pensiero formale astratto: nello spessore filosofico dei suoi trattati si può vedere anche il frutto dei suoi studi umanistici. Egli conosceva profondamente le opere di **Platone**, **Aristotele**, **Sant'Agostino**, **Boezio**, **Descartes**, **Spinoza**, **Locke**, **Leibniz** e **Kant**, a cui dedicò vari saggi. **Fränkel**, in una nota biografica, dà ragione a **Klein**, secondo il quale la frequentazione della Scolastica da parte di Cantor non era certo dovuta al caso: contrariamente alle altre branche della matematica, che pongono in primo piano l'aspetto sintetico-

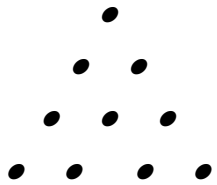
costruttivo oppure aritmetico, la teoria degli insiemi è basata su ragionamenti generali, sottili ed analitici come quelli della logica e della teologia dei Padri della Chiesa. La dottrina dell'infinito attuale ha gli stessi tratti audaci, e, d'altra parte, la scolastica condivide con la matematica l'ideale del rigore nelle conclusioni.

Il problema dell'infinito secondo Cantor

Cardinali ed ordinali transfiniti

Nella **teoria degli insiemi** di **Cantor**, un numero cardinale è la classe che riunisce tutti gli insiemi, che presi due a due, godono della seguente proprietà: è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'uno e gli elementi dell'altro. In questo modo i numeri cardinali *finiti* sono i numeri naturali: il numero naturale *n* è identificato con la classe di tutti gli insiemi aventi esattamente *n* elementi. Cantor, in uno dei suoi principali scritti, dà questi esempi:

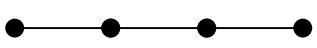
a) *"L'insieme dei colori dell'arcobaleno (rosso, arancione, giallo, verde, blu, indaco, violetto) e l'insieme delle note musicali (do, re mi, fa sol, la, si) sono insiemi equivalenti e cadono entrambi sotto il concetto generale di sette.*
b) *L'insieme delle dita delle mie mani e l'insieme dei punti nel cosiddetto* ***triangolo aritmetico***



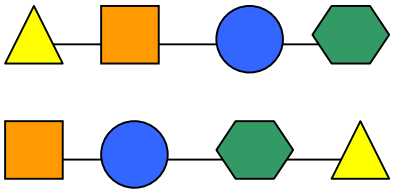
sono equivalenti; ad essi spetta il numero cardinale dieci."

(cit. da G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,* in: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Georg Olms, Hildesheim 1962, pag. 412)

Ora, il numero *n* nasce dall'operazione del contare: agli elementi dell'insieme si attribuiscono, uno dopo l'altro, i numeri da 1 a *n.* Non importa in quale ordine vengano scelti gli elementi, il risultato sarà sempre *n.* In effetti il concetto primitivo di insieme indica esclusivamente un raggruppamento di oggetti, privi di qualsiasi ordine. Ma, d'altra parte, proprio per effetto del contare, ogni insieme di *n* elementi dà luogo a tante diverse successioni di *n* elementi: in ognuna di esse, ogni elemento occupa una determinata posizione, v'è un primo elemento, v'è un ultimo elemento, ognuno degli altri ha esattamente un predecessore ed un successore. Raffiguriamo la struttura per *n=4:*



Tutte queste successioni hanno la stessa struttura: *sono essenzialmente, la stessa*, dato che si passa da una all'altra semplicemente cambiando posto agli oggetti.



La classe delle successioni di n elementi è per Cantor l'***n-esimo ordinale finito***.
Osserviamo che ogni insieme finito dà luogo ad un solo ordinale finito, quello corrispondente al numero dei suoi elementi: al numero cardinale n corrisponde il solo numero ordinale n. E questo numero individua la posizione dell'ultimo termine della successione, ossia di quel termine che non ammette successore. Queste considerazioni ci permettono di indicare, senza generare confusione, l'n-esimo numero ordinale semplicemente con n.

La definizione di ***ordinale transfinito*** è formalmente analoga a quella di ordinale finito. Si fissa un certo *cardinale transfinito*, e si considera la classe di tutte le successioni che possono essere formate con gli elementi di un insieme appartenente a quel cardinale. Prendiamo, ad esempio, il primo cardinale transfinito, ossia $\aleph_0$, il cardinale dell'insieme dei numeri naturali. La classe della successione

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

è chiamata da Cantor ***primo ordinale transfinito ω***. Si tratta della classe formata da tutte le successioni numeriche studiate dall'analisi matematica. Contrariamente a quanto avviene nel caso finito, queste successioni non hanno un ultimo termine: tutti i termini hanno, infatti, un successore. Ecco allora l'idea di creare *ad hoc* un ultimo elemento, che può essere identificato con ω stesso. Pensando alla successione dei numeri naturali, potremmo interpretarlo come il più "piccolo tra i numeri più grandi di tutti i numeri naturali". In questo senso, l'esito di un processo iterativo indefinito può essere visto come il risultato dell'ω-esimo passo; ad una successione numerica convergente il suo limite può essere naturalmente aggiunto come suo ω-esimo termine. In ciò vediamo una realizzazione dell'***infinito attuale***.

Un'altra differenza rispetto al caso degli ordinali finiti consiste nel fatto che al medesimo cardinale $\aleph_0$ corrispondono diversi ordinali transfiniti. Immaginiamo, ad esempio, di costruire idealmente una nuova disposizione dei numeri naturali, spostando il numero *1*: lo collochiamo dopo la successione dei numeri *2, 3, 4, 5, …* Quella che otteniamo non è più una successione nel senso usuale. Infatti, se percorrendo la consueta successione *1, 2, 3, 4, 5, …* ogni dato numero può essere raggiunto dopo un numero finito di passi, ciò non è più vero per il numero *1* della nuova successione. Le due successioni sono strutturalmente diverse: nella prima ogni numero ha un numero finito di predecessori, nella seconda ciò non vale per il numero *1*. Nella prima non v'è un ultimo termine, nella seconda l'ultimo termine è *1*. Nella prima ogni termine successivo al primo ha un immediato predecessore, mentre nella seconda il numero *1* non ne ha. Il nuovo ordinale transfinito può essere rappresentato nella forma:

$$\boldsymbol{\omega + 1}.$$

Questa scrittura ricorda che questo ordinale è il tipo delle successioni ottenute aggiungendo a destra di una successione di tipo ω un singolo elemento, cioè una successione di tipo 1.

In generale gli ordinali vengono sommati secondo la definizione seguente. Siano dati due ordinali α e β, siano *S* e *T* due successioni, appartenenti alla classe α ed alla classe β rispettivamente; l'ordinale $\alpha + \beta$ è la classe della successione ottenuta giustapponendo *S* e *T*, in quest'ordine.
Se α e β sono ordinali finiti, diciamo *n* e *m*, la loro somma è semplicemente l'ordinale $n + m$.

Come ulteriore esempio consideriamo la somma

$$\boldsymbol{1 + \omega}.$$

È la classe della successione ottenuta aggiungendo, a sinistra della successione *1, 2, 3, 4, 5,…* dei numeri naturali, un singolo termine, ad esempio il numero *0:* otteniamo la successione *0, 1, 2, 3, 4, 5,….* Questa è ancora di tipo ω. In particolare è diversa da $\omega + 1$. Dunque

$$1 + \omega \neq \omega + 1.$$

Abbiamo appena fatto una scoperta interessante: *la somma di ordinali non è, in generale, commutativa*.

Tra gli ordinali è anche definita un'operazione di moltiplicazione. Con le notazioni introdotte per la somma, l'ordinale $\alpha \cdot \beta$ è l'ordinale della successione ottenuta sostituendo, ad ogni termine t della successione T, una successione S_t del tipo α.
Esempio:

$$\boldsymbol{2 \cdot \omega}$$

è l'ordinale della successione

$$a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3;.....$$

Questa è stata costruita sostituendo ad ognuno dei numeri *1, 2, 3...* un successione di tipo 2, ossia una coppia di termini. Si tratta di una *successione di coppie.*
Invece

$$\boldsymbol{\omega \cdot 2}$$

è l'ordinale della successione

$$a_1, a_2, a_3,.....; b_1, b_2, b_3, ...$$

Si tratta di un nuovo tipo di successione: si tratta di una *coppia di successioni*. Essa nasce dalla giustapposizione di due successioni di tipo ω, ed è quindi uguale a $\omega + \omega$. È, però, diversa da 2ω. Le regole di calcolo per gli ordinali transfiniti sono quindi radicalmente diverse da quelle dell'usuale aritmetica. Come ultimo esempio consideriamo il prodotto $\omega \cdot \omega$, che è l'ordinale di una *successione di successioni*:

$$a_1, a_2, a_3,...; b_1, b_2, b_3, ...; c_1, c_2, c_3,...; d_1, d_2, d_3, ...; ...$$

Fin qui abbiamo visto quattro diversi tipi di successione costruiti a partire da un insieme di numero cardinale $\aleph_0$. Se consideriamo l'insieme dei numeri razionali, che, come sappiamo, è anch'esso di cardinale $\aleph_0$, abbiamo subito, in maniera naturale, una successione di altro tipo, quella formata dai numeri razionali disposti in ordine crescente.

Questa, però, non rientra tra quelle contemplate da Cantor, che restringe la sua attenzione alle successioni che godono della proprietà di *buon ordinamento:* in ogni parte non vuota della successione v'è un elemento più piccolo di tutti gli altri elementi della parte stessa ("la parte ammette minimo"). Ciò non è certamente vero per la successione dei numeri razionali: ad esempio, nella parte costituita da tutti i numeri razionali maggiori di $\sqrt{2}$, per ogni elemento ne esiste uno che lo precede.

Sono bene ordinate le successioni del tipo ω^n: ω^3 si ricava da ω^2, che abbiamo visto sopra, sostituendo ad ogni termine una successione di tipo ω. Si ottiene così una *successione di successioni di successioni.* Analogamente si costruisce, per ogni $n>3$, ω^n a partire da ω^{n-1}. Immaginando di applicare il procedimento ricorsivo all'infinito, si ottiene, naturalmente, al limite, l'ordinale ω^ω. A questo si aggiungono tutti gli altri ordinali costruiti come prodotti e somme di potenze degli ordinali finiti e di ω. Questi formano una classe di cardinale $\aleph_1$. Inoltre essi sono a due a due confrontabili, secondo la relazione d'ordine tra numeri ordinali, che Cantor introduce in maniera perfettamente analoga a quanto fatto per i numeri cardinali:

"Si dice che un numero ordinale α è maggiore del numero β se una successione (e quindi tutte le successioni) del tipo α contiene una successione di tipo β, mentre non avviene il viceversa."

Secondo questa definizione, ad esempio,

$$\omega < \omega^2 < \omega^3 < \ldots,$$

e, anche,

$$\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \ldots. < \omega + \omega < \omega^2.$$

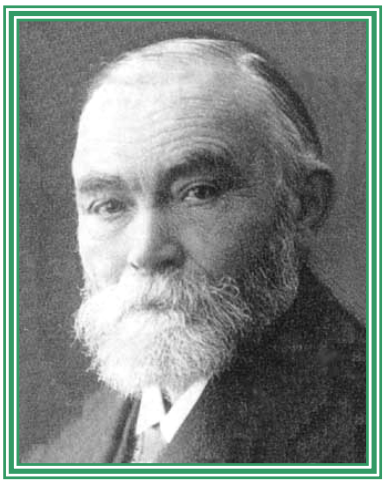
La successione ottenuta disponendo gli ordinali in esame in ordine crescente è di un tipo nuovo, che Cantor indica con $\boldsymbol{\omega_1}$. Proseguendo in maniera simile, si costruiscono i numeri ordinali $\boldsymbol{\omega_n}$, per $n>1$.

Questa breve esposizione è, in parte, ispirata alla trattazione proposta da **Russell** nel Capitolo 38 dei suoi ***Principia Mathematica***, e nel capitolo 9 della sua ***Introduzione alla filosofia matematica***. In quest'ultima opera, Russell così descrive la storia degli ordinali:

"L'aritmetica degli ordinali transfiniti fu sviluppata da Cantor prima dello sviluppo dell'aritmetica dei cardinali transfiniti; l'uso di certe tecniche matematiche ve lo portarono. Ma, dal punto di vista della filosofia matematica, l'aritmetica degli ordinali transfiniti è meno importante e fondamentale della teoria dei cardinali transfiniti. I cardinali sono sostanzialmente più semplici degli ordinali ed il fatto che essi si siano presentati prima come un'astrazione degli altri e che si sia proceduto gradualmente a studiarli per la loro intrinseca importanza è solo una curiosa coincidenza storica. Tutto questo non vale per il lavoro di ***Frege****, nel quale i cardinali, finiti e transfiniti, sono trattati del tutto indipendentemente dagli ordinali; fu però il lavoro di Cantor a far conoscere l'argomento, mentre quello di Frege rimase pressoché ignoto, probabilmente per la difficoltà del suo simbolismo. E i matematici, come tutti, provano maggiore difficoltà nel comprendere e nell'usare nozioni che sono «semplici» in senso logico che nel manipolare nozioni più complesse ma più vicine alla pratica ordinaria.*
Per queste ragioni, fu riconosciuta solo in modo graduale l'importanza reale dei cardinali nella filosofia matematica. L'importanza del concetto di ordinale, certo non piccola, è nettamente minore di quella di numero cardinale."

(cit. da B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica,* trad. di E.Carone, Newton & Compton, Roma 1970, pag. 102)

Gottlob Frege (1848-1925)

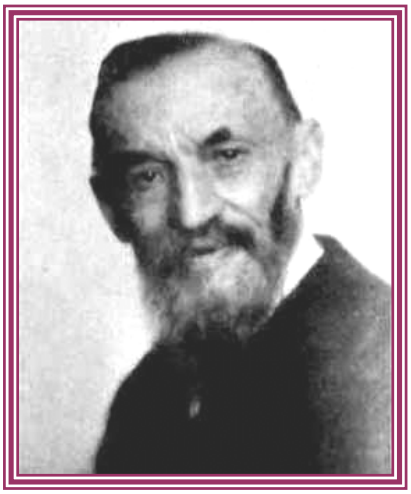


Le enciclopedie sono discordi nel classificare questo studioso tedesco, per alcune è "matematico e filosofo", per altre "logico e filosofo della matematica", per altre ancora "logico e matematico". Queste distinzioni appaiono però poco consistenti alla luce del suo pensiero. Da un lato la sua opera è incentrata sul tentativo di vedere la **logica** non solo come una parte della matematica, ma come il suo fondamento. D'altro lato egli afferma che *"una ricerca profonda del concetto di numero dovrà sempre risultare qualcosa di filosofico. Essa costituisce un compito comune alla matematica e alla filosofia."* E ancora: *"Ogni buon matematico è almeno per metà filosofo, ed ogni buon filosofo è almeno per metà matematico."* Dalla filosofia Frege si aspetta risposte sulla natura della conoscenza, dalla matematica strumenti rigorosi e sicuri di verifica. La necessità di stabilire certezze richiede l'uso di un linguaggio privo di ambiguità: e così le sue ricerche matematiche si intrecciano con quelle linguistiche. La sua ***Ideografia*** (1879), come dice il sottotitolo, vuole presentare *"un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello matematico"*. L'idea di creare un linguaggio razionalmente costruito, che aderisca alle strutture della mente umana, appare più volte nel corso della storia: se ne trovano tracce in **Descartes**, **Leibniz** e, successivamente, in **Peano**. Per tutti questi autori il principale scopo è la creazione di una lingua universale: il lavoro di Frege insegue, invece, una finalità puramente matematica. Egli vuole costruire le proposizioni della logica su di un sistema di assiomi. Il tema filosofico della lingua ritornerà in altre famose opere di Frege, ***Funzione e concetto*** (1891), ***Oggetto e concetto*** e ***Senso e significato*** (1892).

Il passo successivo è la costruzione della matematica come estensione della logica. Proseguendo l'opera di **Boole** e **Cantor**, Frege si propone di fondare l'aritmetica sulla **teoria degli insiemi**, partendo dall'idea che i numeri naturali possono essere definiti come ***numeri cardinali***. Si tratta, semplicemente, di identificare ogni numero con la classe di tutte le classi aventi quel dato numero di elementi. Questo è il principio sul quale poggiano le sue principali opere logiche, che sono ***I fondamenti dell'aritmetica*** (1884) e ***Le leggi fondamentali dell'aritmetica*** (1893-1903). Proprio mentre sta per uscire il secondo volume di quest'ultima, il lavoro di Frege subisce, però, un durissimo colpo. **Russell** comunica, infatti, di aver trovato una contraddizione (*antinomia o* ***paradosso***) nella teoria degli insiemi su cui Frege si era basato. Forte di questa scoperta, **Russell** darà un nuovo corso alla linea di ricerca aperta dal collega tedesco, impegnandosi in un progetto decennale: i suoi ***Principia Mathematica***. Questi, a loro volta, saranno ridimensionati dalla scoperta del ***teorema di incompletezza*** di **Gödel**.

Frege studiò alle Università di Göttingen e Jena. Si addottorò in matematica, ma si dedicò con grande interesse anche agli studi filosofici. Buona parte della sua teoria logica nacque come reazione alle tesi di pensatori come Kant, Mill e Husserl. A questi egli rimproverò di aver fondato, sia pur con connotazioni diverse, la verità della conoscenza su giudizi a priori, di natura metafisica o psicologica. A ciò Frege contrappose la verità fondata sul rigore dimostrativo, ovvero sull'analisi razionale compiuta a posteriori.

Giuseppe Peano (Cuneo 1858 - Torino 1932)



Frequentò l'Università di Torino, dove studiò la geometria algebrica con **D'Ovidio**, la geometria descrittiva con **Bruno** ed il **calcolo infinitesimale** con **Genocchi**. Nel 1890, alla morte di quest'ultimo, gli succedette alla cattedra.

Peano si dedicò, lungo tutta la sua vita di studioso, con enorme puntiglio ai problemi riguardanti i fondamenti della matematica. A guidarlo in questa impresa furono soprattutto il suo acuto spirito critico e la sua grande abilità nell'analizzare ed organizzare i concetti.

La profondità del pensiero di Peano si manifesta, ad esempio, nella sua capacità di andare oltre l'evidenza intuitiva: fu lui a costruire la prima curva continua del piano passante per tutti i punti di un quadrato. Un'altra curva avente questa proprietà fu successivamente inventata da **Hilbert**.

Dal suo desiderio di dare una sistemazione critica alla matematica scaturirono due ambiziosi progetti. Il primo, ispirato ai lavori di **Dedekind** e **Frege**, mirava a far derivare la teoria dei numeri reali da una serie di assiomi sui numeri interi positivi: esso fu realizzato nel trattato ***Arithmetices principia nova methodo exposita*** (1889). Lo stesso anno videro la luce i suoi ***Principii di geometria***, nei quali Peano proponeva un sistema di assiomi per la geometria euclidea.

Il secondo progetto era di carattere enciclopedico: lo scopo era quello di presentare tutta la materia in un'unica opera. Nacque così il ***Formulario Matematico***, un'opera in cinque volumi, la cui

compilazione tenne impegnato Peano dal 1895 al 1908. La parte riguardante la **logica** contiene un sistema di **simboli** per la teoria degli insiemi ed il calcolo proposizionale che è, sostanzialmente, quello ancor oggi in uso, e le cui radici affondano, tra l'altro, nei lavori di **Boole**.

Il contributo di Peano risultò decisivo per gli ulteriori sviluppi della logica simbolica. **Russell**, nel secondo capitolo dei suoi ***Principia Mathematica***, così riassume l'evoluzione della disciplina dalle origini:

*"La Logica Simbolica o Formale – userò questi termini come sinonimi – è lo studio dei vari tipi generali di deduzione. La parola simbolica denota l'argomento per una caratteristica marginale, l'uso di simboli matematici essendo infatti, qui come altrove, una semplice convenzione teoricamente irrilevante. Il **sillogismo** in tutte le sue forme appartiene alla Logica Simbolica, e formerebbe da solo l'argomento di questo capitolo se tutte le deduzioni fossero sillogistiche, come supponeva la tradizione scolastica. È dal riconoscimento dell'esistenza di deduzioni asillogistiche che la moderna Logica Simbolica, da **Leibniz** in poi, ha derivato il motivo del suo progresso. Dalla pubblicazione delle Laws of Thought (1854) di Boole l'argomento è stato analizzato con notevole rigore, raggiungendo sviluppi tecnici considerevoli. Tuttavia i risultati raggiunti non furono praticamente di alcuna utilità ai filosofi ed alle altre branche della matematica, finché non furono trasformati attraverso nuovi metodi dal Professor Peano. La Logica Simbolica è ora divenuta non solo essenziale per ogni logico, ma anche necessaria per la comprensione della matematica in generale, e per un corretto uso di alcune branche di essa."*

(cit. da B. Russell, *I principi della matematica,* trad. di E. Carone e M. Destro, Newton & Compton, Roma 1989, pag.30)

Peano ed il problema della lingua universale
Il sistema formale per l'aritmetica

(pp. 1-20)

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a*, sive *a plus* 1.
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in \mathrm{N}$.
2. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a = a$.
3. $a, b \in \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, = \,.\, b = a$.
4. $a, b, c \in \mathrm{N} \,.\, \supset \,\therefore\, a = b \,.\, b = c : \supset \,.\, a = c$.
5. $a = b \,.\, b \in \mathrm{N} : \supset \,.\, a \in \mathrm{N}$.
6. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a + 1 \in \mathrm{N}$.
7. $a, b \in \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, = \,.\, a + 1 = b + 1$.
8. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a + 1 \neq 1$.
9. $k \in \mathrm{K} \,\therefore\, 1 \in k \,\therefore\, x \in \mathrm{N} \,.\, x \in k : \supset_x \,.\, x + 1 \in k :: \supset \,.\, \mathrm{N} \supset k$.

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1 \,;\; 3 = 2 + 1 \,;\; 4 = 3 + 1$; etc.

Theoremata.

11. $2 \in \mathrm{N}$.

Demonstratio :

P 1 . ⊃ :	$1 \in \mathrm{N}$	(1)
1 [a] (P 6) . ⊃ :	$1 \in \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, 1 + 1 \in \mathrm{N}$	(2)
(1) (2) . ⊃ :	$1 + 1 \in \mathrm{N}$	(3)
P 10 . ⊃ :	$2 = 1 + 1$	(4)
(4) . (3) . (2, 1 + 1) [a, b] (P 5) : ⊃ :	$2 \in \mathrm{N}$	(Theorema).

Nota. — Huius facillimae demonstrationis gradus omnes explicite scripsimus. Brevitatis causa ipsam ita scribemus :

P 1 . 1 [a] (P 6) : ⊃ : 1 + 1 ∈ N . P 10 . (2 , 1 + 1) [a , b] (P 5) : ⊃ : Th.

vel

P 1 . P 6 : ⊃ : 1 + 1 ∈ N . P 10 . P 5 : ⊃ : Th.

12. 3, 4, ... ∈ N .

13. $a, b, c, d \in N . a = b . b = c . c = d : \supset : a = d .$

Dem. Hyp. P 4 : ⊃ : $a, c, d \in N . a = c . c = d$. P 4 : ⊃ : Thes.

14. $a, b, c \in N . a = b . b = c . a = = c : = \Lambda .$

Dem. P 4 . L 39 : ⊃ . Theor.

15. $a, b, c \in N . a = b . b = = c : \supset . a = = c .$

16. $a, b \in N . a = b : \supset . a + 1 = b + 1 .$

16′. $a, b \in N . a + 1 = b + 1 : \supset . a = b .$

Dem. P 7 = (P 16) (P 16′).

17. $a, b \in N . \supset : a = = b . = . a + 1 = = b + 1 .$

Dem. P 7 . L 21 : ⊃ . Theor.

Definitio.

18. $a, b \in N . \supset . a + (b + 1) = (a + b) + 1 .$

Nota. — Hanc definitionem ita legere oportet : si a et b sunt numeri, et $(a + b) + 1$ sensum habet (scilicet si $a + b$ est numerus), sed $a + (b + 1)$ nondum definitus est, tunc $a + (b + 1)$ significat numerum qui $a + b$ sequitur.

Ab hac definitione, et a praecedentibus deducitur :

$a \in N . \supset . \therefore a + 2 = a + (1 + 1) = (a + 1) + 1 .$
$a \in N . \supset . \therefore a + 3 = a + (2 + 1) = (a + 2) + 1 ,$ etc.

Theoremata.

19. $a, b \in N . \supset . a + b \in N .$

Dem. $a \in N$. P 6 : ⊃ : $a + 1 \in N$: ⊃ : 1 ∈ [b ∈] Ts. (1)

$a \in N . \supset :: b \in N . b \in [b \in]$ Ts : ⊃ : $a + b \in N$. P 6 : ⊃ : $(a + b) +$ 1 ∈ N . P 18 : ⊃ : $a + (b + 1) \in N$: ⊃ : $(b + 1) \in [b \in]$ Ts. (2)

PARTE 1ª — LOGICA MATEMATICA

In questo Dizionario hanno posto i termini generali che incontransi nelle pubblicazioni matematiche. Sono esclusi cioè i termini proprii dell'Aritmetica, della Geometria e delle altre parti della Matematica.

I termini sono accompagnati dalla loro etimologia e da spiegazioni o esempi intorno al loro valore, o ai loro valori, e dalla loro trasformazione nei simboli usati nel « Formulaire de Mathématiques » (1) quando la cosa è possibile. Questi termini non sono però accompagnati da una vera definizione, perchè l'esame di quali si possono definire e quali no, richiederebbe tutta la Logica simbolica.

(1) Abbreviato in Formul. Quì si citerà l'edizione dell'a. 1901, Paris, Carré et Naud.

Addizione logica. Vedi « Somma logica ».

Analisi, ἀνά-λυ-σις = so-lu-zione. Opposto a « sintesi ».

Al testo di Euclide, libro 13, secondo Heiberg t. 4 p. 364, furono aggiunte da qualche commentatore le definizioni di analisi e sintesi, ma poco chiare. La prima, come sta scritta, enuncia una forma di ragionamento errata. Lo stesso fa Pappo libro 7 p. 634.

In Archimede, *Della Sfera* libro 2 prop. 4, l'analisi del problema consta nel porre il problema in equazione, e nella sua risoluzione. La sintesi ne è una specie di verifica o prova.

Il ragionamento analitico consta d'una serie di sillogismi della forma $b \supset c \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \supset c$.

Invece nel ragionamento sintetico i sillogismi hanno la forma $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$.

Appartenere lat. adpertinere, ha assunto il valore di « essere parte » (vedi). Altre volte significa « è un ». (x *appartiene* alla classe a) = $(x \varepsilon a)$.

Arbitrio. « Presi ad arbitrio due numeri a e b » vale quanto « Se a e b sono numeri ». Vedi essere.

Articolo. Termine grammaticale.

Diversamente unito al verbo « essere » (vedi) gli dà i valori ε, $=$, $\supset$.

Assioma = ἀξίωμα da ἄξιος = degno. Vale « proposizione primitiva » indicata nel Formul. con Pp.

Alcuni A. fanno differenza fra assioma e postulato, a seconda del grado di evidenza.

Associativa. Essendo x, y degli individui d'una classe, sia $x\alpha y$ un individuo della stessa classe. Il segno α indica un'operazione. Quest'operazione dicesi « associativa » se qualunque siano x, y, z nella classe, si ha: $(x\alpha y)\alpha z = x\alpha(y\alpha z)$.

Sono associative le operazioni aritmetiche $+$ e $\times$, e le logiche $\cap$ e $\cup$.

Il nome « associativo » fu introdotto in questo senso da Hamilton, Cambridge J. a. 1846 t. 1 p. 50.

Assurdo lat. absurdus che in origine significava « che suona male ».

(la condizione p_x è in x assurda) = (non esistono degli x che soddisfacciano alla condizione p_x) = $(-\exists\, x \ni p_x)$.

Generalmente la condizione p_x è l'affermazione simultanea di più condizioni, e allora dire « il sistema è assurdo » vale quanto « le condizioni sono contradditorie ».

Astrazione. Dicesi in logica matematica « definizione per astrazione » la definizione d'una funzione φx, avente la forma:

$\varphi x = \varphi y \,.=.$ (espressione composta coi segni precedenti),

cioè non si definisce il segno isolato φx, ma solo l'uguaglianza $\varphi x = \varphi y$.

Avere si trasforma in « essere ». Es. « Se si *hanno* due numeri a e b » vale « Siano a e b dei numeri ».

(4 e 6 *hanno* per massimo comune divisore 2) = $[2 = D(4,6)]$.

Campo = classe.

Classe = classis, idea primitiva, indicata col simbolo Cls.

Coesistere. (Le condizioni d'un sistema coesistono) = (il sistema non è assurdo).

Coincidere vale « essere eguale ».

Commutativa. Sia $x\alpha y$ una funzione di x e di y. Si dice che l'operazione α è commutativa se $x\alpha y = y\alpha x$.

Sono commutative le operazioni logiche $\cap$ e $\cup$, e le aritmetiche $+$ e $\times$.

Dicesi poi che due operazioni f e g a eseguirsi su una sola variabile x sono commutabili fra loro quando $f(gx) = g(fx)$.

In analisi sonvi numerose coppie di funzioni commutabili,

Questo termine fu introdotto da Servois, Annales de Math. a. 1815 p. 50.

Compatibili = coesistenti (vedi).

Comune. (Classe comune alle classi a e b) = $a \cap b$.

Comunque = ad arbitrio (vedi).

Conclusione = Tesi (vedi).

Condizione = proposizione contenente variabili.

Se a è una classe, la proposizione « x è un a » in simboli « $x \varepsilon a$ », è una condizione in x.

Viceversa se p_x è una condizione in x, si può considerare la « classe degli x soddisfacenti alla condizione p_x » indicata col simbolo « $x \ni p_x$ », che si legge « x tale che p_x ». Si ha

$$x \ni (x \varepsilon a) = a \qquad x \varepsilon (x \ni p_x) = p_x .$$

Quindi data una classe, risulta determinata una condizione, e viceversa. Sicchè i termini « classe » e « condizione » esprimono la stessa idea sotto due aspetti diversi. Nel Formul. si usa il solo simbolo Cls.

Conseguenza. (La proposizione p è conseguenza della q) = $(q \supset p)$.

Contenere. (La classe a è contenuta in b) = (dall'essere a si deduce essere b) = $(a \supset b)$.

Contradditorio, Contrario. In logica scolastica il contradditorio del giudizio (proposizione) $a \supset b$ è $-(a \supset b)$, e il contrario è $a \supset -b$.

In matematica più proposizioni condizionali diconsi contradditorie, se il loro prodotto logico è assurdo (vedi).

Conversione. Regola di logica scolastica, per cui

dalla proposizione « qualche a è b » si passa alla « qualche b è a »

e dalla « nessun a è b » si passa alla « nessun b è a ».

Siccome in logica simbolica queste proposizioni si scrivono $\exists a \cap b$, e $-\exists a \cap b$, la conversione è una forma della regola di logica simbolica, detta « commutatività del prodotto logico ».

La conversione ora considerata dicesi pure « conversione semplice ».

Si converte la proposizione « ogni a è b » in « qualche b è a »; e questa operazione dicesi « conversione parziale, o per accidente ». Si noti però che in questo caso la proposizione « ogni a è b » non significa $a \supset b$, ma bensì « $a \supset b \,.\, \exists a$ ».

Corollario da corona, corolla, corollarium = appendice. Così Boezio *Consol.* 3·10 tradusse il greco πόρισμα = conseguenza immediata d'un teorema.

Costante. Alcune volte è un pleonasmo. « Sia a una quantità costante » vale quanto « $a \varepsilon Q$ ». Ogni lettera ha un valore costante in una stessa formola, e un valore variabile da formula a formula.

Applicata ad una funzione, la parola « costante » è tradotta con const, simbolo definito nel Formul. § 70.

Dare, è un pleonasmo. (Siano dati due numeri a e b) = (siano a e b dei numeri).

Deduzione. Se p e q sono proposizioni, la proposizione « da p si deduce q » chiamasi deduzione, e si indica con « $p \supset q$ ».

Se a e b sono classi, $a \supset b$ si suol leggere « ogni a è b »; e vale quanto « dall'essere a si deduce essere b ».

La deduzione si esprime nel linguaggio ordinario sotto più forme.

Vedasi condizione, necessario, sufficiente, conseguenza, ...

Definizione abbreviato in Def. Nel Formul. è un'eguaglianza il cui primo membro è il segno nuovo che si definisce, ed il secondo un gruppo noto di segni. Es. (Numero primo) = (Numero divisibile solo per sè stesso, e per l'unità).

Alcuna volta si definisce un'espressione contenente lettere variabili; e la definizione è preceduta da un'ipotesi. Es.

(Essendo a e b delle frazioni) $.\supset. a+b =$ (espressione composta con a e b e coi segni delle operazioni aritmetiche sui numeri interi).

« Definizione possibile » è un'eguaglianza che, per un possibile ordinamento della scienza, può essere assunta come definizione.

Data una P, si riconosce facilmente se essa sia una definizione possibile. Diventa o no una Def, a seconda della teoria e dell'arbitrio dell'autore.

Il segno = d'una definizione suol leggersi « dicesi, chiamasi, indica, significa, rappresenta ».

Dimostrazione. Una dimostrazione ha in generale per scopo di persuaderci della verità d'una proposizione.

Alcune volte la dimostrazione d'un sistema di proposizioni già chiare, o verificabili coll'esperienza, ha per scopo di analizzarne le mutue relazioni, e di ridurle a un sistema di proposizioni primitive.

Le dimostrazioni sono fatte quasi sempre colla sola logica naturale.

Furono però date delle dimostrazioni in cui si ottiene una proposizione dalle precedenti con una serie di trasformazioni logiche.

Diverso = differente = (distinto) = (non eguale) = $(-\iota)$.

Distributiva. Dicesi che l'operazione α è distributiva rispetto alla β se $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta(x\alpha z)$, e si indica con Distrib(α,β).

Sussistono le proprietà aritmetiche Distrib$(\times,+)$, Distrib$(\sqrt{},\times)$, Distrib(lim, +), Distrib(lim, $\times$), ecc.

e le logiche Distrib $(\varepsilon,\cap)$, $(\cap,\cap)$, $(\supset,\cap)$, $(\cap,\cup)$, $(\cup,\cap)$, e molte altre.

Il nome fu introdotto da Servois. Vedi *Commutativa.*

E, latino et. In molti casi indica il prodotto $\cap$.

(I numeri multipli di 2 *e* di 3 sono multipli di 6) = $(2\mathrm{N}\cap 3\mathrm{N}\supset 6\mathrm{N})$.

(I multipli di 6 sono multipli di 2 *e* multipli di 3) = $(6\mathrm{N}\supset 2\mathrm{N}\cap 3\mathrm{N})$.

Qualche volta significa $\cup$. Es.

(I multipli di 4 *e* i multipli di 6 sono multipli di 2) = $(4\mathrm{N}\cup 6\mathrm{N}\supset 2\mathrm{N})$.

Eguale. « È eguale » o « eguaglia » si indica col simbolo =.

La parola « eguale » quando si presenta sola, è indicata nel Formul. con ι (iniziale di ἴσος). Sicchè $\varepsilon\iota$ vale quanto =.

Nel Formul. si ha una sola eguaglianza, detta anche identità o coincidenza. Un'eguaglianza-identità della forma $\varphi x = \varphi y$ da alcuni autori si considera come una specie d'eguaglianza fra x e y, e si indica con nomi speciali.

Eguaglianza è una scrittura della forma $x=y$.

x dicesi il primo membro, y il secondo dell'eguaglianza.

Equazione è la forma latina di « eguaglianza ». Vedi identità.

Equipollenza. Altra forma di eguaglianza, usata da Bellavitis pei vettori. Dopo i lavori di Grassmann e di Hamilton, si indica semplicemente col segno =.

Equivalenza. Altra forma di eguaglianza. « Le condizioni p e q sono equivalenti » vale « $p = q$ ».

« Il solido a è equivalente al solido b » vale « Volume di a = volume di b ».

Elemento. Classe contenente un solo individuo.

(La classe a è un elemento) = $[\exists a : x,y\varepsilon a \,.\, \supset_{x,y} \,.\, x=y]$.

Esistere. Si indica con $\exists$.

Essere. A seconda dei casi ha i valori ε, =, $\supset$, $\exists$.

Es. (7 è *un* numero primo) = (7 ε Np)

(13 *è la* somma di due quadrati) = $(13\ \varepsilon\ \mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2)$

(5 e 7 *sono* numeri primi) = (5,7 ε Np)

(*Tutti* i multipli di 4 *sono* multipli di 2) = $(4\mathrm{N}\supset 2\mathrm{N})$

(*Ogni* multiplo di 4 *è* un multiplo di 2) = »

(*L'*uomo *è* mortale) = (uomo $\supset$ mortale)

(13 *è la* somma di 4 e 9) = (13=4+9)

(*Sia* a un numero primo; si ha...) = ($a \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . \ldots$)

(*Essendo* » » ») » » »

(*Sonvi* quadrati somme di due quadrati) = $[\exists\, \mathrm{N}^2 \cap (\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2)]$

Fissare è pleonasmo.

(Siano fissati due numeri a e b) = (Essendo a e b due numeri).

Funzione. (*) Siano a e b delle classi. Con bfa, che si legge «b funzione degli a» si intende ogni segno che premesso ad un individuo della classe a dà per risultato un b. Es. $\log \varepsilon \mathrm{qf}\mathrm{Q}$ « logaritmo è il segno d'una funzione reale di variabile positiva ».

Alcune volte il segno di funzione si scrive dopo la variabile, o si unisce diversamente.

Le funzioni d'una coppia di variabili si indicano spesso scrivendo il segno di funzione fra le due variabili. Es. $a+b$, $a-b$,...

Invece di « funzione » dicesi anche « operazione » o « corrispondenza ».

Generale o universale dicesi una proposizione, o giudizio, della forma $a \supset b$, ovvero $a - b = \wedge$, o sostituendo b a $-b$, $ab = \wedge$.

Giudizio *particolare* è la negazione d'un giudizio universale, cioè della forma $\exists\, a \frown b$.

Una proposizione A dicesi qualche volta *più generale* della B, e la B caso particolare di A, se aggiungendo alla ipotesi di A una nuova ipotesi, si deduce la B.

Per es. se nella prop. $a,b \varepsilon \mathrm{N} . \supset . (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ aggiungo all'ipotesi la condizione $b = 1$, e semplifico, ho il caso particolare $a \varepsilon \mathrm{N} . \supset . (a+1)^2 = a^2+2a+1$.

« In generale » alcuna volta significa « sempre » ed è un pleonasmo.

Altre volte dire che una proposizione « è vera in generale » significa che ha dei casi di eccezione, ossia che non è vera.

Alcuni A. dicendo che una funzione definita in un intervallo ha « in generale » una data proprietà, intendono che abbia sempre questa proprietà, tolto un numero finito di punti. E considerata in un campo piano ha « generalmente » una data proprietà, quando si debbano eccettuare solo delle linee in numero finito. Ma siccome con una linea si può coprire con continuità tutto il campo piano, questo concetto deve essere maggiormente precisato. Ad ogni modo questo valore del termine « in generale »

(*) In questo punto del lavoro n. 116′ (« Rivista di matematica », vol. VII, 1900-1901, p. 167) — ed anche nell'opuscolo derivatone (lavoro n. 116″, del dicembre 1901) — sono state dimenticate alcune righe, che ora sono state ripristinate (seguendo la prima edizione, lavoro n. 116, dell'agosto 1901). *U. C.*

esce dalla logica pura, perchè contiene idee di aritmetica o di geometria.

Gruppo, alcune volte significa Classe, in simboli Cls.

(Gruppo di funzioni, o operazioni) = (classe di operazioni, tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa). $a \in \text{Cls} . \supset .$ (Gruppo di operazioni in a) =

$$\text{Cls}'(a\text{F}a) \cap u\ni(x,y\in u . \supset_{x,y} . xy \in u)$$

Sottogruppo. Essendo a un gruppo, nel primo o secondo significato, la frase « b è un sottogruppo di a » significa $b \supset a$.

Identità. « Gli oggetti x ed y sono identici » vale « $x=y$ ».

Una proposizione p_x contenente la variabile, o sistema di variabili, x, è un'identità, o è identicamente vera, qualunque sia x in un campo a » significa « comunque si prenda x nel campo a, si ha p_x »; in simboli $x\in a . \supset_x . p_x$. Es. $x,y\in\text{N} . \supset . x+y=y+x$.

Alcuni A. chiamano identità un'eguaglianza della forma $x=x$.

Altri chiamano identità l'eguaglianza fra due espressioni, vera per tutti i valori delle lettere. Allora $x+y=y+x$ non è un'identità, perchè non è vera se x e y sono vettori sferici.

Equazione è un'eguaglianza contenente una variabile x, che sta per essere accompagnata dal segno $x\ni$. Sicchè un'eguaglianza si chiama equazione o identità, a seconda della sua posizione nell'enunciato, precisamente come un numero si chiama « termine » o « fattore » a seconda della sua posizione in una formola.

Ideografia, in tedesco « Begriffsschrift ». Scrittura in cui ogni idea è rappresentata con un segno. Sono ideografie più o meno complete la scrittura geroglifica degli antichi egiziani, come pure la cinese attuale. Ideografie parziali sono costituite dalle cifre dette arabiche, dai simboli della chimica, dai segni algebrici, ecc. L'ideografia completa, o pasigrafia, fu intravvista da Leibniz, col nome di « characteristica », che ne pose le fondamenta in scritti parzialmente da lui pubblicati, e che ora si vanno pubblicando. Vedasi specialmente:

L. Couturat — *La logique de Leibniz d'après des documents inédits,* Paris a. 1901 pag. 604.

L'unione dei simboli di logica cogli algebrici permise di esprimere completamente in simboli molte parti della matematica.

Tutte le idee generali, contenute nel presente Dizionario, sono riduttibili ai simboli ideografici

$$= \quad \text{Cls} \quad \varepsilon \quad \ni \quad \supset \quad \cap \quad \cup \quad - \quad \exists \quad \iota \quad ?$$

leggasi:

è eguale, classe, è, tale, dunque, e, o, non, esiste, eguale, quel.

Indipendente. (Due classi a e b sono indipendenti) $= (\exists a - b . \exists b - a)$.

Due condizioni p_x e q_x contenenti la variabile x sono indipendenti, quando lo sono le classi $x \ni p_x$ e $x \ni q_x$.

Due postulati, o proposizioni primitive, sono indipendenti, se considerando i segni che rappresentano idee primitive come variabili, esse sono in questi segni condizioni indipendenti.

Si prova l'indipendenza d'un sistema di n proposizioni primitive, portando n esempi o interpretazioni dei segni primitivi, che soddisfano a tutte le combinazioni a $n-1$ delle Pp e non alla eccettuata.

Insieme è lo stesso che classe = Cls.

Inverse (legge delle). Vedi negazione.

Ipotesi da ὑρό-θε-σις = Sup-po-sizione.

Essendo p e q condizioni, nella deduzione $p \supset q$, p è l'ipotesi.

Logica matematica è la scienza che tratta delle forme di ragionamento che si incontrano nelle varie teorie matematiche, riducendole a formole simili alle algebriche.

Essa ha comune colla logica d'Aristotele il solo sillogismo. Le classificazioni dei varii modi di sillogismi, quando sono esatte, hanno in matematica poca importanza.

Nelle scienze matematiche si incontrano numerose forme di ragionamento irreduttibili a sillogismi.

I principali teoremi di questa scienza si debbono a Leibniz (†1716), Lambert (†1777), Boole (†1864), McColl, Schröder, ecc. Nella RdM. t. 7, p. 3 si trova l'elenco di 67 memorie pubblicate su questo soggetto nell'ultimo decennio. Altre sono da aggiungere.

Legge associativa, commutativa, distributiva. Vedansi questi nomi.

Legge delle inverse, vedi negazione.

Lemma = λῆμμα da λαμβάνω = assumo.

In Archimede vale proposizione che si assume senza dimostrazione, cioè proposizione primitiva Pp.

Generalmente vale proposizione che si premette ad un teorema onde facilitarne la dimostrazione.

Membro d'un'eguaglianza (vedi).

Moltiplicazione logica vedi « Prodotto logico ».

Necessario. (La proposizione p è condizione necessaria della q) $= (q \supset p)$.

Negazione. Si indica col segno $-$ che si legge « non ».

Si ha: $a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . --a = a$

« Trasportare », in Logica matematica, significa applicare la

regola:

$$a,b\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, a\supset b \,.\supset.\, -b\supset -a$$

analoga a una regola algebrica.

Questa regola è anche chiamata da alcuni « legge delle inverse ». Chiamasi « proposizione inversa » di $a\supset b$ la $b\supset a$, e « contraria » della $a\supset b$ la $-a\supset -b$. Però, mentre il passaggio da una proposizione alla sua inversa o alla sua contraria è illegittimo, è solo legittimo l'accoppiamento delle due operazioni, che esprime la regola del trasportare.

Nome. Termine grammaticale.

Nome comune = Cls.

Si possono considerare in analisi come « nomi proprii » i segni 0,1,2,... e, i, π, ecc. Del resto ogni nome comune, o nome d'una classe, è il nome proprio della classe.

La differenza fra nome e aggettivo è puramente grammaticale. Si dice « 7 è un intero » come pure « 7 è un numero intero ». In simboli i nomi non hanno nè numeri nè casi.

Non vedi negazione.

Nulla. La classe nulla, classe non contenente individui, fu indicata con N (Nihil) da Leibniz, con 0 da Boole, con $\wedge$ nel Formul. Il suo uso è limitatissimo. Ivi si trasforma (la classe a è nulla) in (non esistono degli a), in simboli $(-\exists a)$.

O quando ha il valore del latino « vel » indica la somma logica $\cup$.

Quando ha il valore del latino « aut » fu chiamato « disgiunzione completa ». « a aut b » vale « $a-b\cup b-a$ ».

Ogni latino omnis. (ogni a è b) = $(a\supset b)$.

Parte. La classe a è parte di b significa $a\supset b$.

Altre volte significa « $a\supset b \,.\, a-=b$ ».

Particolare vedi « generale ».

Possibile si esprime con $\exists$ (esistono).

(è possibile determinare, o trovare, un numero quadrato somma di due quadrati) = $[\exists\, \mathrm{N}^2 \cap (\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2)]$.

Postulato = λαμβανόμενον, è indicato, insieme all'assioma (vedi), con Pp.

Prendere è pleonasmo.

(Siano a e b due numeri, presi ad arbitrio, ma fissi) = (Siano a e b dei numeri).

Preposizione. Termine grammaticale.

Le preposizioni del linguaggio comune nella traduzione in simboli si uniscono col segno di funzione, e qualche volta sono un segno di funzione.

Es. (Somma di 2 *con* 3) $= 2+3$
(2 moltiplicato *per* 3) $= 2\times 3$
(2 elevato *a* 3) $= 2^3$
(logaritmo *di* 2) $= \log 2$
(3 metri *al* secondo) $= 3\text{m/s}$
(3 metri *in* 2 secondi) $= 3\text{m}/(2\text{s})$
(3 lire *al* metro) $= 3\text{L/m}$.

Problema $=$ πρόβλημα da προβάλλω $=$ propongo.

Enunciato d'una condizione (o complesso di condizioni) p_x.

Risolvere il problema è trasformare la classe $x \ni p_x$ in un'altra in cui la lettera x sia scomparsa. Es. $\mathrm{q} \cap x \ni (x^2 - 3x + 2 = 0) = \iota 1 \cup \iota 2$.

Prodotto logico di due classi a e $b = a \cap b$, e rappresenta la classe comune agli a e ai b.

La moltiplicazione logica ha le proprietà

$$a \cap a = a \quad a \cap b = b \cap a \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \quad \text{ecc.}$$

Pronome. Termine grammaticale.

Questo, quello, ecc. sono spesso rappresentati da $a,b,\ldots x,y\ldots$

Es. (Un numero più un altro numero vale quanto il secondo numero più il primo) $= (a,b \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a + b = b + a)$.

Tale che si esprime con $\ni$.

Proposizione si abbrevia con P.

Alcune P hanno il carattere di definizioni possibili. In una teoria, cioè in un ordinamento delle P relative a un dato soggetto, si scelgono fra queste le definizioni.

Altre P sono indimostrabili; esse enunciano le proprietà delle idee primitive, e si chiamano « proposizioni primitive ».

Le altre P, a seconda delle circostanze, chiamansi teoremi, corollarii, lemmi.

In Logica matematica si opera solo su proposizioni condizionali, o condizioni (vedi).

Proprietà. Sia a una classe; l'« essere un a » suolsi chiamare una proprietà. Sicchè la differenza fra proprietà e classe è puramente grammaticale.

« a è proprietà caratteristica di b » vale « $a = b$ ».

Qualche. Essendo a e b delle classi, la proposizione particolare affermativa « qualche a è b » vale quanto « esistono degli a e b » in simboli « $\exists a \cap b$ ».

Quello ha alcune volte il valore di $\imath$.

(Essendo a e b due numeri, e b il maggiore, con $b-a$ si intende *quel* numero che aggiunto ad a dà per risultato b) $=$
$[a,b \varepsilon \mathrm{N} . b > a . \supset . b - a = \imath \mathrm{N} \cap x \ni (a + x = b)]$.

Relazione. Una relazione fra due enti è espressa da una condizione fra i due enti. Se x,y sono gli enti variabili, e $p_{x,y}$ è la condizione, risulta determinata la classe delle coppie $(x;y)$ che soddisfano a questa condizione; essa è indicata con $(x;y)\ni p_{x,y}$.

Quindi ogni relazione può essere rappresentata da una classe di coppie.

Ad es. $(x;y)\ni[x,y\varepsilon\mathrm{q}\,.\,x^2+y^2=1]$, se identifichiamo la coppia $x;y$ di numeri reali col punto avente le stesse coordinate, rappresenta la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1.

La condizione $p_{x,y}$ si può pure esprimere con una funzione. Pongasi $fy = x\ni(p_{x,y})$. Allora $p_{x,y}$ diventa $x\varepsilon fy$, cioè « x è un individuo della classe fy ».

Scolio = σχόλιον, vale nota, osservazione.

Se. Siano a e b delle proposizioni. « Se a, allora b » vale $a\supset b$.

Sempre. È un pleonasmo per rinforzare la deduzione.

Sintesi da σύν-θε-σις = com-po-sizione. Vedi « Analisi ».

Sillogismo. È la proposizione:

$$a,b,c\varepsilon\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\,b\supset c\,.\supset.\,a\supset c.$$

I logici scolastici considerarono più modi di sillogismi, che si trasformano fra loro colla conversione (vedi). Essi hanno poca importanza.

Sistema, qualche volta indica Cls.

Il sistema di due variabili x e y si indica con $(x;y)$ o (x,y).

Sistema di condizioni è l'affermazione simultanea o prodotto logico delle condizioni date. In Logica Matematica il prodotto di più condizioni è una condizione.

Soddisfare. (Gli x tali che *soddisfano* alla condizione p_x) = $(x\ni p_x)$.

Somma logica di due classi a e b è la classe formata dagli enti che appartengono ad una almeno delle classi a e b. Si indica $a\cup b$, e il segno $\cup$ si legge « o » (vedi).

Essa ha le proprietà

$$a\cup a = a \quad a\cup b = b\cup a \quad a\cup(b\cup c) = (a\cup b)\cup c \quad a\cap(b\cup c) = a\cap b\cup a\cap c \quad \text{ecc.}$$

Sufficiente. (La proposizione p è condizione sufficiente della q)=$(p\supset q)$.

Supposizione. Forma latina di ipotesi.

Tale. (Gli x *tali* che è soddisfatta la condizione p_x) = (Gli x *tali* che p_x) = $(x\ni p_x)$.

Teorema = θεώρημα, da θεωρέω = considero, indica una proposizione che si dimostra.

Tesi = θέσις. Nella deduzione $a\supset b$, b è la tesi.

Trasportare. Vedi « negazione ».

Tutto. La classe totale, o tutto, fu indicata in logica simbolica coi segni 1, ∞, V. Esso ha però poca importanza, e fu escluso dal Formulario.

Verbo. Termine grammaticale.

Corrispondono a verbi i simboli ideografici ε, $=$, $\supset$, $\exists$, $>$, $<$.

Verificare = soddisfare (vedi).

Vero. « La proposizione A è vera » vale « A ».

Euclide

Archimede

Sulla Sfera e sul Cilindro

Boezio

Il concetto di funzione

La numerazione egizia

La numerazione indo-arabica

Leibniz

La Logica Matematica

Il sillogismo

*L'***Interlingua** ***di Peano***

Intorno all'inizio del Novecento, il mondo scientifico pare vivere un momento di vera babele linguistica. Il matematico **Giuseppe Peano**, al pari di molti suoi contemporanei, è preoccupato per questo stato di cose che potrebbe compromettere la collaborazione internazionale tra i ricercatori: egli rileva, ad esempio, che i giapponesi ricorrono sempre meno all'inglese, preferendo pubblicare nella propria lingua.

Nel periodo dal 1903 al 1930 Peano dedica molti lavori all'argomento, proponendo una concreta soluzione del problema. Nel 1908 fonda l'**Accademia dell'Interlingua**, avente come scopo la diffusione di una lingua universale artificiale, sostanzialmente costituita dal latino, ma semplificata ed adeguata alle esigenze del mondo moderno. Peano la presenta come *latino sine flexione:* la grammatica è ridotta all'essenziale, spariscono i casi e la quasi totalità delle coniugazioni verbali, viene a cadere la distinzione tra i generi, come a voler imitare l'inglese.

Peano utilizza effettivamente questa *interlingua* in alcuni suoi scritti matematici. Eccone un saggio, tratto dalla sua recensione ai ***Principia Mathematica*** di **Russell** e **Whitehead** (1910): il testo riportato è il commento alla dimostrazione di un teorema sui numeri cardinali enunciato da **Cantor**.

"In demonstratione commune, occurre idea de numero naturale. Sed theorema es de logica, et non de arithmetica; ergo suo demonstratione debe es independente ab idea de numero, et in modo speciale, debe es independente ab principio de inductione; quod es facto ab plure auctore."

(cit. da G. Peano, *Opere Scelte,* vol. II, Ed. Cremonese, Roma 1958)

Il problema della lingua universale era stato affrontato, nel corso della storia, da molti altri studiosi, tra cui **Descartes**, **Leibniz** e **Leopardi**.

La formulazione delle regole dell'interlingua è frutto di un attento studio analitico della morfologia delle lingue neolatine. Peano dedica molti scritti al cosiddetto "calcolo grammaticale", che consiste nell'esprimere e trattare le regole di formazione delle parole mediante formule algebriche. Per dare un'idea del suo singolare modo di procedere, riportiamo un esempio di *algebra de grammatica,* tratto da

una sua omonima opera del 1930. Per maggiore chiarezza, lo traduciamo in italiano.

Con le lettere *A, V N* vengono denotati, rispettivamente, aggettivo, verbo e nome. L'identità di significato viene espressa dal segno uguale. Le uguaglianze

ardente = che arde = con ardore
arde = è ardente = ha ardore

possono essere riscritte nella forma:

A = che + V = con + N
V = è + A = ha + N.

Eseguendo i dovuti passaggi algebrici si deduce una nuova identità di significato:

con = A – N = (A - V) + (V - N) = che ha.

Peano non è il primo matematico ad interessarsi alle strutture grammaticali. Un illustre precedente è costituito da **Leon Battista Alberti**, autore di uno studio sulle regole della lingua toscana.

Logicae notationes.

I. *De punctuatione.*

Litteris $a, b, \ldots x, y, \ldots x' y' \ldots$ entia indicamus indeterminata quaecumque. Entia vero determinata signis, sive litteris P, K, N, ... indicamus.

Signa plerumque in eadem linea scribemus. Ut ordo pateat quo ea coniungere oporteat, *parenthesibus* ut in algebra, sive *punctis* . : ∴ :: etc. utimur.

Ut formula punctis divisa, intelligatur, primum signa quae nullo puncto separantur colligenda sunt, postea quae uno puncto, deinde quae duobus punctis, etc.

Ex. g. sint $a, b, c, \ldots$ signa quaecumque. Tunc $ab.cd$ significat $(ab)\,(cd)$; et $ab.cd : ef.gh \therefore k$ significat $(((ab)\,(cd))\,((ef)\,(gh)))\,k$.

Punctuationis signa omittere licet si formulae quae diversa punctuatione existerent eundem habeant sensum; vel si una tantum formula, et ipsa quam scribere volumus, sensum habeat.

Ut ambiguitatis periculum absit, arithmeticae operationum signis ., : nunquam utimur.

Parenthesum figura una est ( ); si in eadem formula, parentheses et puncta occurrant, primum quae parenthesibus continentur, colligantur.

II. *De propositionibus.*

Signo P significatur *propositio.*

Signum $\cap$ legitur *et*. Sint a, b, propositiones; tunc $a \cap b$ est simultanea affirmatio propositionum a, b. Brevitatis causa, loco $a \cap b$ vulgo scribemus $a\,b$.

Signum $-$ legitur *non*. Sit a quaedam P; tunc $-a$ est negatio propositionis a.

Signum $\cup$ legitur *vel*. Sint a, b propositiones; tunc $a \cup b$ idem est ac $- : -a \,.\, -b$.

[Signo V significatur *verum*, sive *identitas*; sed hoc signo nunquam utimur].

Signum Λ significat *falsum*, sive *absurdum*.

[Signum C significat *est consequentia;* ita $b \mathrel{C} a$ legitur *b est consequentia propositionis a.* Sed hoc signo nunquam utimur].

Signum $\supset$ significat *deducitur;* ita $a \supset b$ idem significat quod $b \mathrel{C} a$. Si propositiones a, b entia indeterminata continent $x, y, \ldots$, scilicet sunt inter ipsa entia conditiones, tunc $a \supset_{x,y,\ldots} b$ significat: quaecumque sunt $x, y, \ldots$, a propositione a deducitur b. Si vero ambiguitatis periculum absit, loco $\supset_{x,y,\ldots}$ scribemus solum $\supset$.

Signum $=$ significat *est aequalis.* Sint a, b propositiones; tunc $a = b$ idem significat quod $a \supset b$. $b \supset a$; propositio $a =_{x,y,\ldots} b$ idem significat quod $a \supset_{x,y,\ldots} b$. $b \supset_{x,y,\ldots} a$.

III. *Logicae propositiones.*

Sint $a, b, c, \ldots$ propositiones. Tunc erit:

1. $a \supset a$.
2. $a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : a \supset c$.
3. $a = b \,.=: a \supset b \,.\, b \supset a$.
4. $a = a$.
5. $a = b \,.=.\, b = a$.
6. $a = b \,.\, b \supset c : \supset \,.\, a \supset c$.
7. $a \supset b \,.\, b = c : \supset \,.\, a \supset c$.
8. $a = b \,.\, b = c : \supset \,.\, a = c$.
9. $a = b \,.\supset.\, a \supset b$.
10. $a = b \,.\supset.\, b \supset a$.

---

11. $ab \supset a$.
12. $ab = ba$.
13. $a(bc) = (ab)c = abc$.
14. $aa = a$.
15. $a = b \,.\supset.\, ac = bc$.
16. $a \supset b \,.\supset.\, ac \supset bc$.
17. $a \supset b \,.\, c \supset d : \supset \,.\, ac \supset bd$.
18. $a \supset b \,.\, a \supset c :=.\, a \supset bc$.
19. $a = b \,.\, c = d : \supset \,.\, ac = bd$.

David Hilbert (Königsberg, Germania 1862 – Göttingen, Germania, 1943)



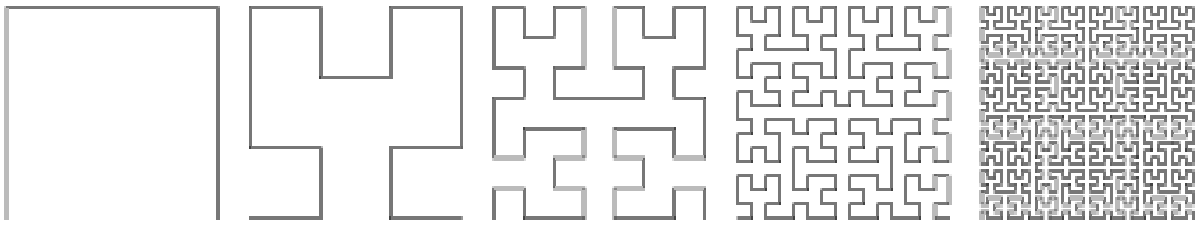
Un illustre concittadino di Kant, nativo di quella città che oggi si chiama Kaliningrad e fa parte della Russia. Questo eclettico matematico tedesco, professore a Göttingen, fu una delle figure trainanti della svolta di fine secolo XIX. Eccelse in vari campi, dal **calcolo infinitesimale** alla fisica matematica, dalla **logica** alla geometria. Fu, soprattutto, uno dei grandi protagonisti della ricerca intorno ai fondamenti della matematica. Nei ***Fondamenti della Geometria*** del 1899 propose, per la **geometria euclidea**, un sistema completo di 21 assiomi, divisi in cinque gruppi, uno dei quali costituito dal solo **postulato delle parallele**. Identificando, nel **piano cartesiano**, i punti con coppie di numeri reali e le rette con terne di numeri reali, tradusse i suoi fondamenti della geometria in termini aritmetici. Riuscì a dimostrare, anche se solo parzialmente, l'indipendenza dei suoi assiomi. Il suo principale scopo era però la prova della coerenza di questi ultimi: egli sperava di poterla dedurre dalla coerenza dell'aritmetica, una volta che questa fosse stata stabilita. **Gödel**, nel 1931, avrebbe dimostrato che tale progetto era del tutto inattuabile.

È passata alla storia l'enfasi profetica con cui, al II Congresso Internazionale dei Matematici, tenutosi a Parigi nel 1900, Hilbert proclamò i famosi 10 **problemi**, poi completati a 23, che, a suo avviso, avrebbero dovuto condizionare le linee di ricerca dei matematici del secolo XX. Tali questioni impegnarono, effettivamente, i maggiori cervelli del Novecento, ma ebbero destini diversi. La prima, nota come **ipotesi del continuo**, e formulata per la prima volta da

Cantor, si rivelò priva di risposta: nel 1963 Paul Cohen dimostrò che, all'interno di un certo sistema della **teoria degli insiemi**, non è possibile decidere sulla sua verità o falsità. Entrambe le opzioni sono compatibili con gli assiomi del sistema, ossia entrambe ne sono indipendenti. Altri problemi di Hilbert sono stati risolti, mentre ne rimangono alcuni aperti.

Curiosità

- Hilbert inventò una curva analoga a quella di **Peano**, che presenta una sorprendente proprietà: è continua e passa per tutti i punti di un quadrato. Essa è costruita iterando all'infinito il procedimento di cui il disegno descrive i primi passi:



Questa curva è un particolare tipo di **frattale**.

- Nell'aritmetizzazione della geometria effettuata da Hilbert lo storico della matematica E.T. Bell ha voluto vedere un metodo le cui radici affondano nella **filosofia pitagorica**.

- Hilbert concluse il suo **intervento** al Congresso di Parigi con queste ottimistiche parole: *"Wir müssen wissen. Wir werden wissen!"* (Dobbiamo sapere. Sapremo!) Le stesse appaiono ora incise sulla sua tomba.

- Una delle tante nozioni matematiche che portano il nome del nostro personaggio è quella di ***spazio di Hilbert***. Si tratta di un particolare tipo di spazio i cui punti sono funzioni, e nella definizione del quale confluiscono elementi di analisi, geometria ed algebra.

- Uno dei più importanti teoremi della geometria algebrica è il ***teorema degli zeri di Hilbert***, che caratterizza i polinomi definenti i luoghi geometrici dello spazio a n dimensioni. Esso

segna il culmine di un'evoluzione iniziata con la **geometria analitica** di **Descartes**.

- Nel 1909 Hilbert risolse il **problema di Waring**: egli dimostrò che, per ogni *n>1*, ogni numero intero positivo può essere decomposto nella somma di *N* potenze *n*-esime di numeri interi, ove *N* è un numero dipendente soltanto da *n*. Questo enunciato era stato intuito da **Fermat** per *n=2*: il matematico francese aveva asserito che ogni numero intero positivo può essere decomposto nella somma di *quattro* quadrati perfetti; in questo caso, cioè, *N=4*. La dimostrazione di questo caso particolare venne da **Lagrange** nel 1700.

- Nel 1891, per spiegare lo spirito dell'assiomatizzazione della geometria, ossia della sua costruzione come **sistema formale**, Hilbert avrebbe detto: *"Deve essere possibile sostituire in tutti gli enunciati geometrici punto, linea, piano con tavolo, sedia, boccale."*

- Nel 1928 gli organizzatori del Congresso Internazionale di Matematica a Bologna decisero di rompere l'isolamento scientifico cui i Tedeschi erano stati condannati dopo la Prima Guerra Mondiale. Ma gli inviti che essi fecero pervenire alle scuole ed università della Germania furono oggetto di un'estesa azione di boicottaggio, organizzata dal professor Bieberbach di Berlino, e sostenuta anche da **Brouwer**. Nonostante la malattia che l'aveva recentemente colpito, Hilbert si oppose con grande determinazione, e partì per l'Italia, portando con sé una significativa rappresentanza di suoi connazionali. Al Congresso prese la parola per dichiarare pubblicamente: *"La matematica non conosce razze… Per la matematica, l'intero mondo culturale è un'unica nazione."*

Nonostante le premesse drammatiche, l'esperienza bolognese di Hilbert si concluse con una nota spiritosa. Al momento di pagare il conto dell'albergo, gli venne comunicato che il comitato organizzatore aveva già provveduto, considerandolo suo gradito ospite. Allora Hilbert esclamò: *"Peccato. Se l'avessi saputo prima, avrei mangiato parecchio di più."*

- **Hermann Weyl**, ricordando il contributo di Hilbert ai fondamenti della geometria, in una memoria del 1944 scrisse: *"Qual è il materiale per costruire i modelli? Il **modello** di **Klein** di una **geometria non euclidea** potrebbe essere interpretato come una dimostrazione che colui che accetta la **geometria euclidea** con i suoi punti e le sue linee, e così via, può ottenere, con un semplice*

cambio di nomenclatura, anche le geometrie non euclidee. Lo stesso Klein preferiva un'altra interpretazione in termini di ***geometria proiettiva****. La* ***geometria analitica*** *di* ***Descartes*** *aveva da tempo fornito una risposta più generale e più soddisfacente, di cui* ***Riemann****, Klein e molti altri devono essere stati consapevoli: tutto ciò che ci occorre per la nostra costruzione è il campo dei numeri reali. Pertanto ogni contraddizione nella geometria euclidea deve apparire come una contraddizione negli assiomi aritmetici sui quali sono basate le nostre operazioni con i numeri reali. Nessuno l'aveva mai detto chiaramente prima di Hilbert."*

Il contributo di Hilbert in logica matematica
L'Hotel Hilbert
L'infinito per Hilbert

Il discorso di Hilbert al Congresso di Parigi

Il testo integrale fu pubblicato nel 1930, col titolo *"Naturerkenntnis und Logik"* (Conoscenza della natura e logica). Ne riportiamo alcuni brani.

"L'idea fondamentale si basa sul fatto, che solitamente anche nei più estesi campi del sapere sono sufficienti pochi enunciati – detti assiomi – per costruire poi in modo puramente logico l'intero edificio della teoria. Ma la loro importanza non si esaurisce in questa osservazione. Il metodo assiomatico può essere illustrato al meglio con degli esempi. L'esempio più antico e più noto è la geometria di ***Euclide****. Io preferisco, però, chiarire molto brevemente il metodo assiomatico mediante un esempio molto drastico tratto dalla biologia moderna.*
La ***drosofila*** *è una piccola mosca, ma grande è l'interesse che suscita; essa è l'oggetto dei più estesi, più accurati e più fruttuosi tentativi di allevamento. Questa mosca solitamente è grigia, con gli occhi rossi, priva di macchie, con le ali di una certa forma. Esistono però anche mosche dai caratteri anomali: anziché grigie sono gialle, hanno gli occhi bianchi anziché rossi, ecc. Normalmente queste cinque caratteristiche sono abbinate […]. Questo usuale abbinamento può subire però, nella prole, in seguito ad opportuni incroci, alcune modificazioni, in una certa percentuale costante. I numeri che si determinano sperimentalmente corrispondono agli assiomi euclidei lineari della congruenza […] e così emergono, come applicazione degli assiomi lineari sulla congruenza, ossia degli enunciati di geometria elementare sul confronto tra segmenti, le leggi dell'ereditarietà; in una maniera così semplice e precisa – e al tempo stesso così meravigliosa, che nemmeno la fantasia più audace avrebbe potuto immaginare."*

"Il nostro pensiero parte dall'unità e cerca di formare unità; osserviamo l'unità della sostanza nella materia, e constatiamo ovunque l'unità delle leggi di natura. La natura, in realtà, ci viene molto incontro nelle nostre ricerche, come se fosse disposta a svelare completamente i suoi segreti. La distribuzione rada della materia nell'universo consentì la scoperta ed il consolidamento della ***legge di Newton****. Michelson poté stabilire con certezza la falsità del principio di addizione delle velocità per la velocità della luce, nonostante il valore di quest'ultima, perché la nostra Terra compie il suo giro intorno al Sole in maniera abbastanza celere. […] E il raggio delle stelle fisse passa accanto al Sole giusto in modo da rendere osservabile la sua deviazione.*
Ma ancora più sorprendente è un fenomeno, che noi chiamiamo, in un senso diverso rispetto a ***Leibniz****, l'armonia prestabilita, che è persino*

un'incarnazione e realizzazione del pensiero matematico. Gli esempi più antichi sono le ***sezioni coniche****, che si studiavano molto tempo prima di immaginare che i nostri pianeti o addirittura gli elettroni si muovessero su orbite siffatte. Ma l'esempio più grandioso e meraviglioso di armonia prestabilita è la famosa* ***teoria della relatività*** *di* ***Einstein****. Qui vengono stabilite, in maniera matematica univoca, le equazioni differenziali per i potenziali gravitazionali […] e ciò sarebbe stato impossibile senza le indagini matematiche difficili e profonde di* ***Riemann****, che esistevano già da molto tempo. Negli ultimi tempi si moltiplicano i casi in cui le teorie matematiche che sono al centro dell'attenzione dei matematici sono al contempo quelle di cui necessita la fisica. Io avevo sviluppato la teoria delle infinite variabili per puro interesse matematico e avevo perfino adottato il termine "analisi spettrale", senza poter immaginare che esse sarebbero state un giorno realizzate nello spettro reale della fisica."*

I 23 problemi di Hilbert

I 23 problemi formulati da **Hilbert** all'inizio del secolo toccano un po' tutti i campi della matematica. Oltre all'**ipotesi del continuo**, che è il primo della lista, ne ricordiamo solo tre, gli unici dei quali sia possibile dare una formulazione del tutto elementare. A questi si aggiunge il PROBLEMA 18, la cui terza parte è il **problema delle palle di cannone** di **Keplero**.

PROBLEMA 3: *"Esibire due tetraedri di uguale base ed uguale altezza che non possano in alcun modo essere decomposti in tetraedri congruenti, e che non possano essere combinati con tetraedri congruenti per formare due poliedri che possano, a loro volta, essere decomposti in tetraedri congruenti."*

Dietro questo enunciato apparentemente complesso, si cela una richiesta concettualmente molto semplice. Hilbert ritiene che presi a caso due tetraedri aventi la stessa area della base e la stessa altezza, (e quindi lo stesso volume) non sia possibile dimostrare che essi hanno lo stesso volume attraverso un procedimento di "taglia-incolla": ossia, non è possibile, in generale, effettuare nessuno dei due procedimenti 1 e 2.

1. (a) Suddividere uno dei tetraedri in pezzi poliedrici.
   (b) Ricomporre i pezzi in modo da formare l'altro tetraedro.

Due poliedri per i quali sia possibile effettuare questo procedimento si dicono *equidecomponibili.*

2. (a) Suddividere entrambi i tetraedri nello stesso insieme di pezzi.
   (b) Aggiungere ad ogni insieme gli stessi nuovi pezzi.
   (c) Formare, con gli insiemi di pezzi così ottenuti, due poliedri equidecomponibili.

Questi procedimenti possono essere applicati, in vari modi, per provare il **teorema di Pitagora** (vedi **dimostrazione del tipo 1**, **dimostrazione del tipo 2**).

Il matematico M. Dehn risolse il Problema 3 di Hilbert a meno di un anno dalla sua proclamazione: egli dimostrò che esistono due tetraedri che non sono equidecomponibili, e che non possono essere completati a poliedri equidecomponibili. La situazione è ben diversa per le figure piane: infatti, come provò W. F. Bolyai nel 1833, due

poligoni di uguale area sono sempre equidecomponibili. In particolare, ogni poligono può essere trasformato in un quadrato mediante un procedimento "taglia e incolla". Ciò completa un risultato già noto ad **Euclide**, che, nella **Proposizione 14** del **Libro II** degli ***Elementi*** mostra come eseguire la trasformazione con riga e compasso.

PROBLEMA 7: *Se α è un numero reale algebrico diverso da 0 e da 1, e β è un numero irrazionale e algebrico, è vero che allora il numero*

$$\alpha^{\beta}$$

è trascendente?

Un numero reale si dice *algebrico* se è radice di un polinomio non nullo a coefficienti interi; altrimenti si dice *trascendente*. È chiaro che ogni numero trascendente è irrazionale. Il numero *e* di **Eulero** ed il numero π sono trascendenti.

Anche il Problema 7 è stato risolto: nel 1934 Gelfond dimostrò che la risposta è affermativa. Tuttavia non si sa ancora cosa accada quando *α e β* sono trascendenti. Sono stati trattati solo casi particolari: è stato provato, ad esempio, che

$$e^{\pi}$$

è trascendente. Però si ignora se lo siano anche i numeri

$$\pi^{\pi},\ \pi^{e},\ e^{e}.$$

PROBLEMA 10: *Esiste un algoritmo universale per stabilire la risolubilità di una qualunque* ***equazione diofantea*** *?*

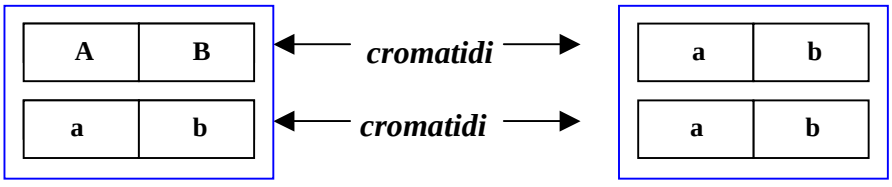
La risposta in questo caso è negativa: la dimostrazione è stata elaborata tra il 1960 ed il 1970 da Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson e Yuri Matyasevitch.

La drosofila e la genetica

La ***drosofila***, detta anche ***moscerino della frutta*** o ***mosca dell'aceto***, è un insetto, di probabile origine tropicale, che si presta alle indagini genetiche per un fatto molto semplice: possiede solo quattro coppie di cromosomi, che, per di più, nelle ghiandole salivari, assumono dimensioni macroscopiche.
Gli studi sulla drosofila iniziarono nel 1909, all'Università Columbia di New York, su iniziativa di **Thomas Hunt Morgan**. Gli esperimenti nel laboratorio chiamato "camera delle mosche" proseguirono per vent'anni, durante i quali le ricerche genetiche su questo minuscolo animale si diffusero in tutto il mondo. La drosofila è tornata recentemente ad un ruolo da protagonista nel settore dell'embriologia.
La drosofila è estremamente prolifica, presenta caratteristiche fisiche facilmente distinguibili (colore degli occhi, forma delle ali, ecc.), che, peraltro, sono soggette ad un elevato numero di mutazioni.

Ogni cromosoma è costituito da due filamenti di geni, suddivisi in settori, che denoteremo con lettere.
Nella riproduzione sessuata, i cromosomi di ciascun genitore si duplicano, generando due coppie di filamenti identici, detti *cromatidi fratelli.* I geni di questi si ricombinano, dando origine a due nuove coppie di cromatidi. Uno di questi ultimi passerà nel gamete, e si unirà al corrispondente cromatidio del gamete dell'altro genitore. Consideriamo, per semplicità, il comportamento dei geni relativi a due settori consecutivi. Le lettere maiuscole e minuscole indicheranno geni diversi.

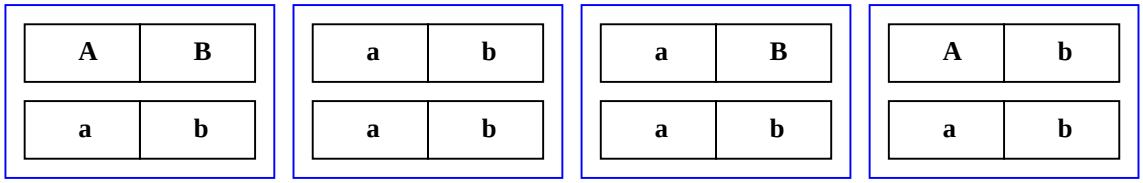
Cromosomi dei genitori



Possibili cromatidi dei gameti

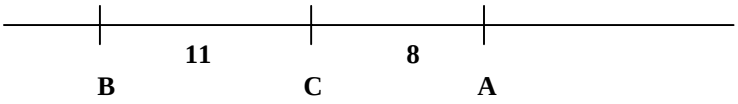


Possibili cromosomi dei figli



Le combinazioni che, come A b, nascono dall'unione di geni provenienti da due cromatidi diversi, si dicono *crossing over.*

I dati statistici sulle popolazioni di animali hanno suggerito, per lo studio dei cromatidi, un modello lineare, in cui i singoli settori sono disposti in riga. È possibile ordinare questi ultimi in modo tale che la probabilità di *crossing over* tra due settori fissati sia proporzionale alla loro distanza. Tale ordinamento può essere stabilito sperimentalmente. Supponiamo, per esempio, che le probabilità di crossing over tra i geni di tre settori *A, B, C* siano: *19%* per *A-B, 11%* per *B-C, 8%* per *A-C*. Se ne conclude che *C* è necessariamente posto fra *A* e *B,* in modo che *AC : CB = 8 : 11.*



Le probabilità di crossing over si comportano quindi come le lunghezze di segmenti consecutivi tracciati su di una retta, in particolare sono *additive*. L'esempio ha mostrato che la probabilità per *A-B* è la somma delle probabilità per *A-C* e *C-B.* La **geometria euclidea** della retta è dunque alla base delle leggi della trasmissione dei caratteri ereditari. Non a caso il grande matematico tedesco **David Hilbert**, nel suo famoso **intervento** al Congresso di Parigi del 1900, citò la drosofila come esempio della presenza della matematica in natura.

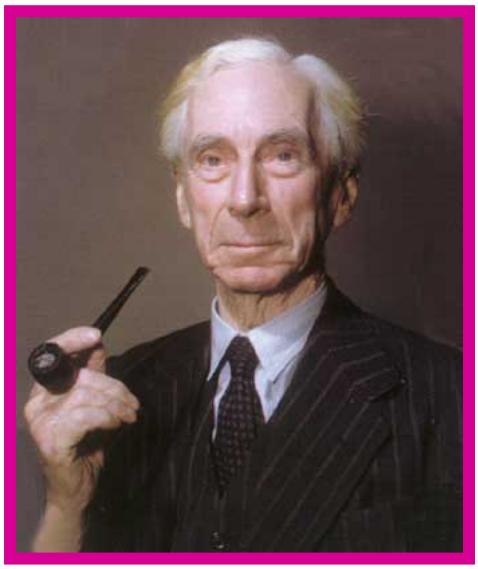
L'Hotel Hilbert

È dovuta ad **Euclide** la dimostrazione del fatto che i **numeri primi sono infiniti**. Tuttavia essi costituiscono solo una parte dei numeri naturali, anch'essi infiniti. Per chiarire il mistero dell'infinito **Hilbert** ideò un esempio noto come *Hotel Hilbert*.
Si tratta di un hotel con un numero infinito di camere, tutte occupate. Un giorno si presenta un nuovo cliente ed il portiere, **Hilbert**, dopo un attimo di esitazione, riesce a procurargli una camera. Egli chiede a tutti gli ospiti di spostarsi nella camera successiva; così chi alloggia nella n°1 si sposta nella n°2, chi alloggia nella n°2 si sposta nella n°3 e così via. Il nuovo cliente viene sistemato nella n°1 che si è liberata.
Dunque: *infinito più uno è uguale a infinito*.
La sera successiva, si presenta un numero infinito di nuovi clienti. Hilbert non si scompone ed ordina ad ogni ospite di passare dalla propria camera a quella che ha il numero doppio. Dunque dalla n°1 si passa alla n°2 , dalla n°2 alla n°4, dalla n°3 alla n°6 e così via. Si liberano tutte le stanze che sono contrassegnate da un numero dispari ed il problema è risolto.
Dunque: *il doppio di infinito è ancora infinito*.

In realtà, il ragionamento funziona sempre nel primo caso; infatti, per ogni **cardinale transfinito** $\aleph_\alpha$ e per ogni numero naturale n, si ha $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.
Nel secondo caso, il ragionamento funziona se l'infinito dei nuovi clienti non supera l' infinito delle camere dell'hotel; infatti, per numeri ordinali α, β tali che $\alpha \leq \beta$, si ha $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta$.

Finito ed infinito in matematica
L'infinito per Hilbert

Bertrand Russell (1872-1970)



Riassumere in poche righe la biografia di questo aristocratico gallese significherebbe ridurre ad un frettoloso resoconto un intero secolo di vita privata e pubblica ricchissima di eventi, un movimentato, a tratti avventuroso, intreccio di attività scientifica, letteraria e politica, a cavallo tra l'Europa e l'America, un appassionante percorso culturale segnato da una serie interminabile di pubblicazioni scientifiche, filosofiche e religiose e culminato con il conferimento del Premio Nobel per la letteratura nel 1950. Nella motivazione leggiamo: "*in riconoscimento della sua multiforme e importante opera nella quale si è sempre battuto per l'umanità e la libertà di pensiero.*"

Forse nessun altro uomo ha saputo cogliere e consegnare alla storia con tanto nitido acume i fermenti che hanno scosso l'umanità nel Novecento, e ai quali egli ha aderito con una partecipazione personale assai viva e profonda. Per quanto riguarda la matematica, il suo merito sta sicuramente nell'aver saputo individuare, e portare a maturazione, i frutti ancora incerti delle rivoluzioni avvenute nel secolo XIX: gli studi sulle **geometrie non euclidee** ed i primi tentativi di inquadrare ogni teoria matematica in un impianto logico astratto, sono due diversi aspetti di una nuova spinta alla ricerca, che questa volta mira a toccare i fondamenti stessi della conoscenza matematica.
Questo desiderio di sondare le "verità ultime" coincide con la speranza di poter dare una risposta alle grandi questioni rimaste ancora aperte: è in questo spirito che **Hilbert** proclama, durante il suo famoso **intervento** al Congresso di Parigi, nel 1900, i **problemi** che, nel

secolo appena iniziato, i matematici dovranno essere in grado di risolvere.
Russell seppe dare un contributo significativo a questa fase di revisione della matematica: scoprì infatti uno dei tanti **paradossi** nella teoria degli insiemi sulla quale molti, tra cui **Frege**, avevano creduto di poter fondare la **logica matematica**. La risposta di Russell a questo errore è contenuta nei tre volumi dei ***Principia Mathematica*** (1910-13), scritti in collaborazione con **Whitehead**.
Il progetto di costruire un sistema formale completo fu però a sua volta vanificato quando **Gödel** pubblicò il **teorema di incompletezza**.
Egli, come tutti coloro che lo hanno preceduto nel tentativo di dare alla matematica dei fondamenti assiomatici coerenti, è debitore nei confronti di **Boole**, **De Morgan**, **Peirce** che con i loro lavori, alcuni decenni prima, avevano aperto la strada al moderno pensiero formale (**sistemi formali**).

Kurt Gödel (Brno, attuale Repubblica Ceca, 1906 – Princeton, USA, 1978)



Gödel con Einstein

Originario della Moravia, all'epoca parte dell'Impero Austro-Ungarico, compì gli studi universitari a Vienna, dove ebbe diversi maestri, che lo avviarono allo studio della **logica** e della filosofia della matematica. Le sue principali fonti d'ispirazione furono le opere di **Russell**. Nel 1931 pubblicò il **teorema di incompletezza**, che lo rese famoso, nel saggio ***Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi correlati***: l'opera citata nel titolo è di Bertrand Russell. Aderì alla scuola positivista di Vienna.
Allo scoppio della Seconda Guerra Mondiale emigrò negli Stati Uniti. Gli fu conferita una cattedra all'Istituto di Studi Avanzati di Princeton, nel New Jersey. Nel 1940 diede alle stampe un altro importantissimo lavoro: *Consistenza dell'assioma della scelta e* dell'***ipotesi del continuo*** *generalizzata con gli assiomi della* ***teoria degli insiemi***.
Afflitto da problemi psichici, si lasciò letteralmente morire di fame.

Il Teorema di Gödel e il problema della conoscenza

D. R. Hofstadter
Gödel, Escher, Bach: Un'Eterna Ghirlanda Brillante

"È naturale cercare di delineare una corrispondenza tra persone e sistemi formali sufficientemente complessi i quali, come le persone, hanno un qualche tipo di "immagine di sé". Il ***Teorema di Gödel*** *mostra che i sistemi formali coerenti dotati di un'"immagine di sé" hanno limitazioni fondamentali. Ma questo fatto può essere generalizzato? Vi è, ad esempio, un "Teorema di* ***Gödel*** *della psicologia"?[…]*
Penso che tradurre il Teorema di Gödel in altri dominii possa valere come utile suggerimento, purché si specifichi in anticipo che le traduzioni sono metafore e non devono essere prese alla lettera. Una volta detto questo, vedo due modi principali di usare le analogie per riferire il Teorema di Gödel ai pensieri umani. Uno rimanda al problema d'interrogarsi sulla propria sanità mentale. In che modo ci si può rendere conto se si è sani di mente? […] Chiunque sa che un pazzo interpreta il mondo mediante una sua peculiare logica, dotata di una sua coerenza tutta particolare; come si può sapere se la nostra logica è "peculiare" o no, dal momento che ciascuno di noi ha solo la propria logica per giudicarla? Non vedo alcuna risposta. Mi viene solo alla mente il Secondo Teorema di Gödel per il quale le uniche versioni dell'aritmetica formale in grado di asserire la propria non contraddittorietà sono contraddittorie…

L'altro analogo metaforico del Teorema di Gödel che trovo stimolante suggerisce che in definitiva non possiamo capire la nostra mente e il nostro cervello.[…] Proprio come non possiamo vedere la nostra faccia con gli occhi che abbiamo in testa, non è ragionevole aspettarsi che non potremo rispecchiare integralmente le nostre strutture mentali con i simboli che ne sono il risultato?
Tutti i teoremi limitativi della metamatematica e della teoria della calcolabilità suggeriscono che, quando la capacità di rappresentare la propria struttura ha raggiunto un certo punto critico, si ha il bacio della morte: ciò significa che non si potrà mai rappresentare se stessi in modo totale. […]
Coerente o incoerente che sia, nessuno può sottrarsi al mistero di sé. Probabilmente siamo tutti incoerenti. Il mondo è veramente troppo complicato perché una persona possa permettersi il lusso di conciliare fra loro tutte le cose in cui crede. Tensione e confusione sono importanti in un mondo in cui molte decisioni devono essere prese rapidamente. Miguel de Unamuno una volta disse: "Se una persona non si contraddice mai, ciò deve dipendere dal fatto che non dice niente."

I Paradossi

Ramsey, nel 1931, ha distinto i paradossi in *paradossi o antinomie semantiche* e *paradossi o antinomie logiche.*
Sono paradossi *logici* quelli che implicano nozioni direttamente esprimibili in un linguaggio insiemistico, sono paradossi *semantici* quelli che coinvolgono nozioni come verità e definibilità che non possono essere formulate all'interno di un linguaggio formale sufficientemente ricco per esprimere le nozioni matematiche.

Paradossi semantici:

1. Il famosissimo **paradosso del mentitore**
Un uomo dice: "Io sto mentendo".
Ora, se egli sta mentendo, allora la frase è vera e quindi non sta mentendo.
Se egli non mente, allora la frase è falsa e quindi sta mentendo.
In ogni caso sta contemporaneamente mentendo e non mentendo.

2. Il **paradosso di Grelling (1908)**
Un aggettivo si dice "autologico" se la proprietà da esso definita si applica all'aggettivo stesso, si dice "eterologico" nel caso contrario.
Ad esempio polisillabico è autologico, mentre monosillabico è eterologico.
Consideriamo l'aggettivo "eterologico" e chiediamoci di che tipo è.
Se "eterologico" è eterologico, allora non è eterologico;
se "eterologico" non è eterologico, allora è eterologico.
In ogni caso si ha una contraddizione.

Paradossi logici:

1. Il **paradosso di Cantor (1899)**
Sia Y un insieme. Si dice *cardinalità* di Y, e si scrive $card(Y)$, l'insieme di tutti gli insiemi X che sono equipotenti a Y. Due insiemi X e Y si dicono equipotenti se esiste un'applicazione $f: X \to Y$ che sia una bigezione, cioè verifichi la seguente proprietà:
"Per ogni $y \in Y$ *esiste un unico* $x \in X$ *tale che* $f(x) = y$*".*

Si danno le seguenti definizioni:
$card(Y) \leq card(Z)$ se e solo se Y è equipotente ad un sottoinsieme (o parte) di Z.

$card(Y) < card(Z)$ se e solo se $card(Y) \leq card(Z)$ e $card(Y) \neq card(Z)$.

Esistono due risultati importanti:

- **Cantor** ha provato che per ogni insieme Y si ha
  $card(Y) < card(\wp(Y))$

dove $\wp(Y)$ è l'insieme delle parti di Y; cioè i suoi elementi sono i sottoinsiemi di Y.

- **Schröder e Bernstein** hanno dimostrato che:
  $card(Y) \leq card(Z)$ e $card(Z) \leq card(Y)$ implicano che Y e Z sono equipotenti e quindi $card(Y) = card(Z)$.

Sia ora C l'insieme di tutti gli insiemi, segue che $\wp(C)$ è un sottoinsieme di C e quindi deve essere:
(1) $card(\wp(C)) \leq card(C)$.
D'altra parte $card(C) < card(\wp(C))$ e quindi
(2) $card(C) \leq card(\wp(C))$ e $card(C) \neq card(\wp(C))$.
La conclusione è che da *(1)* e *(2)* si ottiene:
$card(C) = card(\wp(C))$ e $card(C) \neq card(\wp(C))$
cioè una contraddizione.

2. Il **paradosso di Russel (1902)**
Distinguiamo gli insiemi (o classi) in due tipi particolari: *normali* e *non normali.*
Un insieme si dice ***normale*** se non contiene se stesso come elemento, si dice ***non normale*** se contiene se stesso come elemento.
Ad esempio, l'insieme di tutti gli oggetti pensabili è un oggetto pensabile e quindi è non normale; invece l'insieme dei matematici non è un matematico e quindi è un insieme normale.
Indichiamo con S la classe di tutte le classi normali. Si ha che:
S normale implica che S appartiene a S e quindi S non è normale,
S non normale implica che S non appartiene a S e quindi S è normale.
Dunque S è normale se e solo se S è non normale.

L'infinito per Galileo: i paradossi

L'assiomatizzazione della matematica

La **Geometria** è stata per molto tempo l'unico ramo della matematica con una solida base assiomatica (**Euclide**). Nei secoli XVIII e XIX, ci si è convinti della possibilità di assiomatizzare tutti i rami della matematica e ciò ha portato i matematici ad affrontare problemi posti dai greci e rimasti a lungo insoluti come:

- **la trisezione di un angolo con l'uso solo di riga e compasso**,
- **la costruzione di un cubo di volume doppio di quello di un assegnato cubo**,
- **la costruzione di un quadrato di area uguale a quella di un cerchio assegnato**.

Lo studio di questi tre problemi ha stimolato profonde ricerche sulla natura del numero e sulla struttura del "continuo numerico". Furono date definizioni rigorose per i **numeri complessi**, fu costruita una base logica per il sistema dei numeri reali, fu iniziata la teoria dei numeri infiniti.

Sempre nel XIX secolo, fu aritmetizzata l'**algebra** e quello che si soleva chiamare il **Calcolo infinitesimale**, mostrando come le varie nozioni impiegate nell'analisi matematica siano definibili in termini esclusivamente aritmetici.

Per esempio, l'entità misteriosa $\sqrt{-1}$ divenne la coppia di numeri reali (0,1) e $\sqrt{2}$ fu definito come l'elemento di separazione tra la classe dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e la classe dei numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2.

In questo modo il problema fondamentale della matematica divenne quello della **coerenza dell'aritmetica** o di una teoria che contenga l'aritmetica, come è, ad esempio, la **teoria degli insiemi**.

I sistemi formali

Un **sistema formale** **S** è definito dai seguenti ingredienti:
1. Un alfabeto finito, Σ, formato da un numero finito di segni. Per ogni segno possediamo un qualsiasi numero d'esemplari e sappiamo distinguere un esemplare da un altro esemplare. Ogni sequenza finita di segni si chiama *espressione*.
2. Si privilegia un certo insieme di espressioni che si chiamano **formule ben formate** o semplicemente **formule**. Tale insieme viene indicato con $\boldsymbol{F}$ e deve essere **decidibile**, cioè deve esistere un metodo di decisione che consenta di stabilire se un'espressione è o non è una formula.
3. Si privilegiano particolari formule che si chiamano **assiomi**. Se l'insieme $\boldsymbol{Ax}$ degli assiomi è decidibile, nel senso che si possa stabilire se una formula è o non è un assioma, il sistema si dice **assiomatico**.
4. È assegnato un numero finito di relazioni tra formule, dette **regole di inferenza** o di deduzione primitiva. Generalmente si richiede che tali regole siano effettive.

La coppia $\boldsymbol{L = (\Sigma, F)}$ si dice **linguaggio** del sistema formale ed il suo studio si dice **morfologia**.

Ad ogni sistema formale si associa una struttura deduttiva mediante la seguente definizione di **teoremi logici** o semplicemente teoremi.

Definizione: **1. Ogni assioma è un teorema**.
2. Applicando le regole di inferenza a teoremi si ottengono teoremi.
3. Nient'altro è un teorema.

Una sequenza $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di formule si dice **dimostrazione** se ogni formula o è un assioma oppure è ottenuta da formule precedenti con l'applicazione delle regole di inferenza.
Una formula si dice *dimostrabile* se esiste una dimostrazione di cui è la formula finale.
Ogni teorema è la formula finale di una dimostrazione, è cioè una formula dimostrabile.
Segue che i teoremi sono tutte e sole le formule dimostrabili.

S'introduce l'operazione $\boldsymbol{D}$ di **derivazione** nel modo seguente:
Se Γ è un insieme generalmente finito di formule, dette **ipotesi** o premesse, una **derivazione da** Γ è una sequenza di formule, ognuna

delle quali o è un assioma, o è una formula di Γ, oppure è ottenuta dalle precedenti con l'uso delle regole di inferenza. S'indica con ***D* (*Γ*)** l'insieme delle formule derivabili da Γ, ottenibili cioè come formula finale di una derivazione da Γ.
Ovviamente, in assenza di premesse una derivazione è una dimostrazione.

La coppia **(*L*, *D*)** si dice **calcolo logico** ed il suo studio si dice **sintassi**.
Il calcolo logico si dice **consistente** o **non contraddittorio** se esiste almeno una formula che non è un teorema; si dice **decidibile** se l'insieme dei suoi teoremi logici è decidibile nel senso che si possa decidere se una formula è o non è un teorema; si dice **completo** se, comunque si consideri una formula A che non sia un teorema, il calcolo allargato che si ottiene aggiungendo A agli assiomi è contraddittorio.
Esempi di sistemi formali sono:
Il Calcolo Proposizionale o Logica degli Enunciati
Il Calcolo Predicativo puro
Le Teorie del primo ordine, tra le quali: il sistema formale per l'aritmetica elementare, le teorie assiomatiche degli insiemi ZF e NBG.

Modelli

Il metodo generale escogitato per provare la consistenza di una teoria si basa sull'idea fondamentale di trovare un *modello o interpretazione* per gli assiomi, in modo che ogni assioma si traduca in un'affermazione vera nel modello.

Esempio:

Consideriamo due insiemi di oggetti che indichiamo con K e L, ed assumiamo i seguenti assiomi:

A1. due oggetti di K sono contenuti in un solo oggetto di L,

A2. nessun oggetto di K è contenuto in più di due oggetti di L,

A3. gli oggetti di K non sono tutti contenuti in un singolo oggetto di L,

A4. due oggetti qualsiansi di L contengono un solo oggetto di K,

A5. nessun oggetto di L contiene più di due oggetti di K.

Da questo limitato numero di assiomi si possono dedurre molti teoremi con le usuali regole di deduzione; per esempio si prova che *K* possiede solo tre oggetti.

La coerenza di questa teoria sarà provata se si riesce a costruire un modello in cui gli assiomi risultino verificati.

Interpretiamo *K* e *L*, rispettivamente, come l'insieme dei vertici e l'insieme dei lati di un triangolo e l'espressione *"un oggetto di K è contenuto in un oggetto di L"* come *"il vertice che corrisponde all'oggetto di K appartiene al lato corrispondente all'oggetto di L"*.

Con un numero finito di osservazioni si verifica che ogni assioma si traduce in una affermazione vera nel modello.

Per altri esempi, relativi alle **geometrie non euclidee**, si vedano i **modelli del piano iperbolico**, i **modelli del piano ellittico**.

Questi ultimi modelli, però, spostano in realtà il problema della consistenza delle ***geometrie non euclidee*** a quello della consistenza della ***geometria euclidea*** (***Elementi***), e quindi la coerenza della geometria euclidea resta un punto fondamentale da chiarire.

Un tentativo di soluzione fu ideato da **Hilbert**, che fece ricorso alla geometria analitica di **Cartesio**. In questo modello gli assiomi di **Euclide** si traducono in proposizioni algebricamente vere. Ad esempio, ad ogni punto del piano si associa una coppia di numeri reali, ad ogni retta un'equazione di primo grado in due variabili, ad ogni circonferenza un particolare tipo di equazione di secondo grado in due variabili e così via.

Il primo postulato di Euclide: *per due punti distinti passa una sola retta,* diventa *due coppie distinte di numeri reali determinano in modo unico una relazione lineare in due incognite.*
Il teorema della geometria piana *sul numero di intersezioni di una retta con una circonferenza* si traduce nel teorema algebrico *sul numero di soluzioni di un sistema formato da una equazione lineare e da una equazione quadratica.*
Dunque, la coerenza della **geometria Euclidea** viene provata dimostrando che gli assiomi sono soddisfatti da un modello algebrico e l'argomentazione di **Hilbert** prova solo che *se l'algebra è consistente allora lo è anche la geometria euclidea.*
Ancora una volta la coerenza non è assoluta, ma dipende dalla coerenza di un altro sistema.

Nella costruzione di modelli c'è poi la difficoltà, generalmente presente, data dal fatto che un modello ha, nei casi più interessanti, infiniti elementi, il che rende impossibile la verifica degli assiomi con un numero finito di osservazioni. Il problema della coerenza di una teoria è definitivamente risolto solo se si riesce a trovare un *modello finito*, cioè con un numero finito di elementi, come avviene nell'esempio descritto inizialmente. Per contro, la maggior parte delle teorie interessanti dal punto di vista matematico (per esempio la teoria dei numeri) non può essere tradotta in modelli finiti e quindi con i modelli non si può dimostrare che tali teorie siano esenti da contraddizioni nascoste. Un ulteriore passo in avanti sarà compiuto da Hilbert stesso (**il contributo di Hilbert**).

Il contributo di Hilbert

Le limitazioni provenienti dall'uso dei **modelli** nelle dimostrazioni di consistenza e il timore che le formulazioni classiche contenessero contraddizioni più o meno nascoste esigevano un modo nuovo di affrontare il problema.
Hilbert propose come alternativa alle dimostrazioni relative di consistenza, l'idea di costruire dimostrazioni assolute, che cioè non facessero ricorso alla consistenza di un'altra teoria.
Il primo passo da compiere consiste per **Hilbert** nella completa formalizzazione di una teoria deduttiva. Si svuotano allora di significato le espressioni che vengono considerate come semplici sequenze di segni.
Il secondo passo è quello di enunciare un insieme di regole, chiaramente precisate, per sapere come combinare e manipolare tali segni. È questa l'idea alla base dei **sistemi formali**.
Si costruisce così un sistema di segni, detto **calcolo**, che non nasconde nulla e contiene solo ciò che viene esplicitamente introdotto in esso.
Postulati (assiomi) e teoremi sono sequenze di segni costruite con le regole date, ed in questo modo viene eliminato il pericolo di usare modi di ragionamento incontrollati.
Una pagina piena di simboli di una tale matematica non afferma nulla, e questa costruzione ricorda moltissimo il **calcolo cieco** di **Leibniz**. Tuttavia è possibile descrivere le configurazioni di un tale sistema e fare delle affermazioni su di esse e sulle relazioni che sussistono tra tali configurazioni, ottenendo così delle informazioni sul sistema formale stesso.
È chiaro che queste affermazioni non appartengono al sistema. Esse appartengono a quella che **Hilbert** chiama la *metamatematica* ovvero al linguaggio che descrive dall'esterno la matematica.
Per esempio:
l'espressione *7+5 = 12*
appartiene all'aritmetica ed è composta interamente da segni aritmetici elementari.
L'affermazione *"7+5=12 è una formula aritmetica"* asserisce qualcosa sull'espressione, non esprime un fatto aritmetico e non appartiene al linguaggio formale dell'aritmetica; essa appartiene invece alla metamatematica poiché attribuisce il carattere di formula ad una certa catena di segni aritmetici.
Si osservi che le proposizioni metamatematiche non contengono come parti costituenti segni e formule del sistema ma solo i loro nomi.

Questa distinzione è fondamentale perché quando non è stata rispettata sono sorti confusioni e paradossi.

Il tentativo di **Hilbert** si basa dunque sulla netta *distinzione tra un calcolo formale e la sua descrizione*. Egli pensò di sviluppare un metodo che fornisse prove di coerenza mediante l'analisi di un numero finito di caratteristiche strutturali delle espressioni presenti in calcoli completamente formalizzati. Tale analisi consiste in:

1. notare i vari tipi di segni che intervengono nel calcolo,
2. indicare in quale modo tali segni possono essere combinati in formule,
3. prescrivere la maniera con la quale si possono ottenere formule da altre formule,
4. stabilire se formule di un dato tipo sono derivabili da altre mediante regole esplicitamente enunciate.

Hilbert era convinto che ogni calcolo matematico avesse l'aspetto di una sorta di ***disegno di formule*** in cui le formule possedessero reciprocamente un ***numero finito di relazioni strutturali*** e sperava di poter dimostrare, dall'esame delle proprietà strutturali, l'impossibilità di dedurre dagli assiomi formule contraddittorie, il che avrebbe provato in modo assoluto la coerenza del sistema stesso.
Il dato essenziale nella concezione originaria del programma di **Hilbert** è proprio nella ricerca di *procedimenti che fanno appello ad un numero finito di proprietà strutturali e ad un numero finito di operazioni con le formule*. Questi procedimenti furono chiamati **finitistici**.
Il *Calcolo Proposizionale* è un esempio di sistema formale per il quale gli obiettivi della teoria Hilbertiana sono perfettamente realizzati.
Ma il Calcolo Proposizionale codifica una parte piuttosto piccola della logica formale e non è sufficiente per sviluppare neanche l'aritmetica elementare.
Tuttavia il programma di **Hilbert** può essere realizzato con successo per sistemi più ampi del Calcolo Proposizionale; si possiede per esempio una dimostrazione assoluta di coerenza di un sistema aritmetico che ammette l'addizione dei numeri cardinali ma non la moltiplicazione.
Hilbert fu personaggio di grande rilievo nel XIX secolo e la sua posizione spinse i matematici a cercare di assiomatizzare e formalizzare diversi rami della matematica. (**Assiomatizzazione della Matematica**).
Poiché il risultato di tanto lavoro fu che varie discipline matematiche sono esprimibili in termini aritmetici, la domanda fondamentale è dunque questa:

Il metodo finitistico di Hilbert è abbastanza potente da dimostrare la coerenza di un sistema logico adatto ad esprimere l'intera aritmetica e non solo un frammento di essa?

Numerosi tentativi furono fatti per costruire una tale dimostrazione, ma fallirono tutti.

Giungiamo così al **1931**, quando Kurt **Gödel,** con i suoi famosi teoremi, pose fine alla questione ***provando che tutti questi sforzi operanti nei limiti del programma originario di Hilbert sono destinati a fallire.***

Dai sistemi formali ai teoremi di Gödel

Uno degli effetti dirompenti per l'epoca (XIX secolo) della scoperta delle **Geometrie non Euclidee** fu quello di mettere in crisi il concetto classico di assiomatica.
Un assioma non acquista legittimità dalla sua apparente autoevidenza, ed il compito del matematico puro è quello di derivare teoremi da ipotesi postulate senza preoccuparsi di controllare che esse siano "vere" e che le conclusioni siano "vere". L'unica preoccupazione deve essere quella di verificare che le conclusioni siano, di fatto, le *conclusioni logiche necessarie* delle ipotesi iniziali.
Si profila così il carattere **astratto** e **formale** della matematica:
astratto perché in linea di principio si possono fare affermazioni matematiche su cose di natura assolutamente arbitraria;
formale perché la validità di una dimostrazione riposa sulla struttura delle affermazioni e non sul loro contenuto specifico.
Questo è il senso del famoso epigramma di **Russell** *"la matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di che cosa stiamo parlando o se ciò che diciamo è vero."*
Quindi, la *veridicità* o meno di una teoria perde di significato e deve essere sostituita da qualcosa di profondamente diverso. La scelta, in qualche modo più naturale, cade sulla nozione di *consistenza (o coerenza o non-contraddittorietà)*, cioè sulla necessità che in una teoria non debba essere possibile dedurre una proposizione e contemporaneamente la sua negazione. Questo perché si continua a rimanere nell'ambito di una *logica a due valori di verità*, convenzionalmente chiamati *vero* e *falso*, e si accettano i seguenti principi:
1. ***"tertium non datur"*** per cui una proposizione è vera oppure è falsa e non ci sono altre possibilità,
2. ***"ex falso quod libet"*** per cui è vera una proposizione che afferma "il falso implica il falso" o "il falso implica il vero",
3. ***"non contraddizione"*** per cui una proposizione non può essere vera e falsa contemporaneamente.

Ma la sostituzione della veridicità con la consistenza sposta semplicemente il problema alla dimostrazione della consistenza di una teoria, problema che non era stato avvertito per la geometria Euclidea, i cui assiomi erano stati ritenuti veri perché autoevidenti nello spazio fisico. Le **geometrie non Euclidee** sono in una posizione completamente diversa, perché i loro assiomi sono tutt'altro che

evidenti nello spazio fisico, e la soluzione del problema della consistenza è importante per la loro stessa esistenza.
Si giunge così alla ricerca della determinazione di **modelli** e, più tardi, all'introduzione dei **sistemi formali**.
Tuttavia, il problema della formalizzazione non era nuovo anche se, fino a quel momento, non era stato un problema solo della Matematica. Nell'opera *La ricerca della lingua perfetta*, (pagg. 8-9), **Umberto Eco**, nel considerare i progetti di lingue vere e proprie, li raggruppa nelle seguenti quattro categorie:

i) lingue storiche ritenute originariamente o misticamente perfette, come l'ebraico, l'egizio, il cinese.
ii) lingue postulate come originarie, ovvero lingue madri più o meno fantasmatiche, compreso quel modello da laboratorio che è stato l'indo-europeo.
iii) lingue costruite artificialmente, che possono avere tre fini:
1. Perfezione o per funzione o per struttura, come le lingue filosofiche a priori del XVII e XVIII secolo, che dovevano servire a esprimere perfettamente le idee e a scoprire eventualmente nuove connessioni tra gli aspetti della realtà.
2. Perfezione per universalità, come le lingue internazionali a posteriori del XIX secolo.
3. Perfezione per praticità, sia pure presunta, come le poligrafie.
iv) lingue più o meno magiche, siano esse riscoperte o costruite, le quali aspirano a una perfezione sia per effabilità mistica sia per segretezza iniziatica.
Inoltre, in quanto derivanti da progetti della categoria *iii)1.*, prende in considerazione le *lingue formali a ristretto ambito di impiego, come quelle della chimica, dell'algebra o della logica.*
Che il problema non fosse nuovo e che l'intreccio tra **Matematica e Filosofia** fosse profondo, è confermato dalla presenza di diversi contributi già a partire dal 1600. Vediamone alcuni a partire dal 1600:

Lettera di Cartesio a Mersenne,

Leibniz

Leopardi

Frege, **Boole**, **Peano**, **Russell**

Linguaggi spaziali ed Intelligenza artificiale

Teoria formale dei numeri o Teoria dei numeri del primo ordine o aritmetica elementare

Esponiamo il **sistema formale** introdotto da **Hilbert**.

Sia **S** la teoria del primo ordine così costruita:
L'*alfabeto* ha i segni del **calcolo predicativo puro**, cioè:
(,) x $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\Rightarrow$
una sola *costante individuale* denotata con *0;*
una sola *lettera predicativa binaria* P^2_1;
una *lettera funzionale unaria* f^1_1;
due *lettere funzionali binarie* f^2_1, f^2_2.

Si adottano le seguenti convenzioni:
si scrive

$x = y$	per	$P^2_1(x,y)$
$x \neq y$	per	$\neg P^2_1(x,y)$
x'	per	$f^1_1(x)$
$x+y$	per	$f^2_1(x,y)$
$x \cdot y$	per	$f^2_2(x,y)$
$\underline{1}$	per	$0'$
$\underline{2}$	per	$1'$
$\underline{3}$	per	$2'$

e così via.

Gli **assiomi propri** sono:
S1. $x = y \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$
S2. $x = y \Rightarrow x' = y'$
S3. $x' \neq 0$
S4. $x' = y' \Rightarrow x = y$
S5. $x + 0 = x$
S6. $x + y' = (x + y)'$
S7. $x \cdot 0 = 0$
S8. $x \cdot y' = x \cdot y + x$
S9. $(A(0) \wedge (x)(A(x) \Rightarrow A(x'))) \Rightarrow (x)A(x)$
dove (x) si legge *"per ogni x"* ed $A(x)$ è una formula con x variabile libera e $A(0)$ ed $A(x')$ sono ottenute da $A(x)$ per sostituzione di ogni occorrenza libera di x con 0 e x' rispettivamente.
Una variabile x si dice *vincolata* se è quantificata universalmente o esistenzialmente dai quantificatori *"per ogni"* od *"esiste"*. Si dice *libera* nel caso contrario.

Si noti che **S9** è uno *schema* di assiomi che dà quindi luogo ad un numero infinito di assiomi.
Le regole di inferenza sono quelle di ogni calcolo predicativo, cioè:

- il *modus ponens*, **MP**, *"da A , $A \Rightarrow B$ segue B"*
- la *regola di generalizzazione*, **Gen**, *"da $A(x)$ segue $(x)\,A(x)$"*.

Osserviamo che **S1** e **S2** mancano nel **sistema di Peano** perché in esso "=" è un segno logico (cioè l'uguaglianza è Leibniziana) e non una lettera predicativa. Analogamente qui mancano **P1** e **P2**, **S3** e **S4** coincidono con **P3** e **P4**, **S9** è più debole di **P5** perché $A(x)$ è una formula di **S**, mentre, in **P5**, K può essere una classe qualsiasi.
Tutti i teoremi dell'aritmetica sono formalizzabili in questo sistema formale ***S***.
Questo sistema formale è soggetto ai **teoremi di Gödel** e di **Gödel-Rosser**:
1. **Se *S* è *consistente*, allora *S* è *sintatticamente essenzialmente incompleto***.
Quest'incompletezza non deriva da un numero insufficiente di assiomi, ma è inerente al metodo assiomatico.
2. **S è *indecidibile* ovvero la classe dei suoi teoremi è indecidibile**.

La dimostrazione dei teoremi di **Gödel** e di **Gödel-Rosser**, in realtà, è stata effettuata per un sistema formale più debole di **S**, noto come sistema ***R*** o sistema di **Robinson**.

R ha lo stesso alfabeto, le stesse regole di inferenza e quindi le stesse formule di **S**.
Gli assiomi propri di ***R*** invece sono i seguenti:

R1. $x = y \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$
R2. $x = y \Rightarrow x' = y'$
R3. $x' \neq 0$
R4. $x' = y' \Rightarrow x = y$
R5. $x + 0 = x$
R6. $x + y' = (x + y)'$
R7. $x \cdot 0 = 0$
R8. $x \cdot y' = x \cdot y + x$
R9. $x = x$
R10. $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
R11. $x = y \Rightarrow z + x = z + y$
R12. $x = y \Rightarrow x \cdot z = y \cdot z$
R13. $x = y \Rightarrow z \cdot x = z \cdot y$
R14. $(x = 0) \vee (\exists z)(x = z')$ o equivalentemente $(x \neq 0) \Rightarrow (\exists z)(x = z')$

Poiché gli assiomi di ***R*** sono assiomi o teoremi di ***S***, allora ***R*** è una sottoteoria di ***S*** ed ogni teorema di ***R*** è un teorema di ***S***. Non vale il viceversa, infatti **S9** non è un teorema di ***R***.
R non ha **S9**, ma ha un numero finito di assiomi, quindi è una teoria finitamente assiomatizzata.
Poiché non c'è in ***R*** l'assioma **S9**, tutti i teoremi che si deducono in ***S*** usando **S9** non sono teoremi di ***R***. Per questo motivo le formule da **R9** a **R13**, che in ***S*** si dimostrano usando **S9**, sono assunte come assiomi in ***R***.
Ovviamente, se ***S*** è consistente anche ***R*** è consistente.

Il sistema formale per l'aritmetica elementare

Ogni teoria matematica usa una **teoria degli insiemi** ed una teoria dei numeri.
La teoria dei numeri si può trattare all'interno della teoria degli insiemi oppure come sistema formale.

Un primo tentativo risale a **Peano** e **Dedekind**, che hanno dimostrato che la teoria dei numeri si può sviluppare, almeno per l'aritmetica elementare, partendo dai seguenti simboli ed assiomi:

Segni logici: $\Rightarrow$, $\in$, $=$ che si leggono rispettivamente "implica", "appartiene", "uguale".
Termini non definiti: zero, successore, numero; **N** per la totalità dei numeri naturali, "*0*" per il termine zero, " ´ " per il successore, "$x \in \mathbf{N}$" per "*x è un numero*". Allora il successore di *0* è *0´* , il successore di *0´* è *(0´)´* e così via.

Assiomi:

P1. $0 \in \mathbf{N}$ "0 è un numero"

P2. $x \in \mathbf{N} \Rightarrow x' \in \mathbf{N}$ "il successore di ogni numero è un numero"

P3. $x' \neq 0$ " lo zero non è successore di alcun numero"

P4. $x' = y' \Rightarrow x = y$ "numeri diversi hanno successori diversi"

P5. $((0 \in K) \wedge (\forall x \in \mathbf{N})(x \in K \Rightarrow x' \in K)) \Rightarrow (\mathbf{N} \subset K)$ "Se una classe *K* contiene *0* e se dal contenere *x* si deduce che contiene *x'*, allora *K* contiene **N**"

L'assioma **P5** è noto come ***principio di induzione***. Si osservi che, in particolare, se *K* è la classe degli oggetti che godono di una certa proprietà *Q*, si ha:
"se *0* ha la proprietà *Q* e se dalla validità di *Q* per *x* si deduce la validità di *Q* per il successore *x'*, allora *Q* vale per ogni numero naturale."
Esso si applica per dimostrare formule per i numeri naturali: ne diamo un **esempio**.
Con questi assiomi si riesce a definire tutte le operazioni tra numeri, usufruendo della teoria degli insiemi.
La teoria di **Peano** non è però così semplice come appare, poiché richiede mezzi logici non tanto elementari della teoria degli insiemi.
Sulla falsariga degli assiomi di **Peano**, si può elaborare una **teoria formale dei numeri**.

La teoria degli insiemi

La nascita della teoria degli insiemi è legata al matematico tedesco Georg **Cantor**.
Nella sua teoria degli insiemi, nota oggi come *"teoria ingenua degli insiemi"*, c'è un principio fondamentale e cruciale per la costruzione di insiemi: ***la totalità degli oggetti che godono di una qualsiasi proprietà P costituisce un insieme***.
Un insieme A viene denotato con la scrittura $A = \{\ \}$ dove, all'interno delle parentesi, si scrivono gli elementi di A o la proprietà goduta dagli elementi di A.
Ma alla fine del XIX secolo si scoprirono diversi **paradossi**, tra cui quello noto come paradosso di **Cantor** che provava la contraddittorietà di questa teoria degli insiemi.
Se ogni proprietà permette di costruire un insieme, ciò vale anche per la proprietà
P(x) : "x non appartiene a x", che si scrive $"x \notin x"$
Poniamo $S = \{x;\ P(x)\} = \{x;\ x \notin x\}$.
Allora se $S \in S$ *si ha* $S \notin S$ *e viceversa se* $S \notin S$ *allora* $S \in S$.
In definitiva $S \in S$ *se e solo se* $S \notin S$ *e si ottiene una contraddizione.*
Questo è, in sostanza, il paradosso di **Russell**.
La comparsa di tali paradossi ha dimostrato inequivocabilmente che l'apparente chiarezza di un concetto così elementare come quello di insieme non garantisce la coerenza di un qualsiasi sistema costruito su di esso.
L'analisi dei paradossi ha portato a diverse proposte per evitarli, proposte che sono tutte ovviamente restrittive dei concetti "ingenui" che compaiono nella derivazione degli stessi paradossi.

- **Russell** ha notato che in ogni paradosso c'è un autoriferimento ed ha introdotto la **teoria dei tipi**, in cui non ha senso che un insieme appartenga a se stesso. Questo tentativo dovuto a **Russell** e **Whitehead**, negli anni **1910-1913**, riesce ad eliminare i paradossi noti, ma è macchinoso e presenta altri inconvenienti.
- Una seconda linea di critica, più fortunata, riguarda il principio di costruzione di insiemi nella teoria Cantoriana. D'altro canto insiemi di oggetti che soddisfano una determinata proprietà sono presenti e, in qualche modo irrinunciabili, nella pratica matematica. Occorre, allora, introdurre *nuovi assiomi per garantirne l'esistenza*. Ci sono in questo senso due direttive principali che hanno portato alla nascita di due **teorie assiomatiche degli insiemi**.
  Una è la **teoria degli insiemi**, denotata **ZF**, e dovuta a **Zermelo** e **Fränkel**.

L'altra è denotata **NBG** e risale a **von Neumann**, **Bernays** e **Gödel**.

- Una posizione più radicale è stata assunta da **Brouwer** e dalla sua scuola **intuizionista**. Gli **intuizionisti** contestano la validità universale di certe leggi fondamentali della logica, prima ancora che della matematica, come il *principio del terzo escluso* (***tertium non datur***), sostenendo che questa legge è certamente valida per insiemi finiti, ma non è corretto considerarla tale per insiemi non finiti. Parimenti non accettano che la negazione della formula $(\forall x)\ P(x)$ sia la formula $(\exists x)\ \neg P(x)$, ovvero che la negazione della frase *"per ogni x vale la proprietà P"* sia la frase *"esiste un x per cui non vale la proprietà P"*.

Gli Intuizionisti sostengono che possiamo affermare l'esistenza di un oggetto con una determinata proprietà solo se conosciamo un metodo *effettivo* per costruire o trovare tale oggetto. È chiaro che in questo contesto i paradossi non sono più derivabili, ma purtroppo la stessa sorte tocca a numerosi teoremi della matematica, poiché non sono più lecite, per esempio, le dimostrazioni per assurdo (***reductio ad absurdum***). Perciò la **logica intuizionista** non ha avuto molta fortuna.

Queste considerazioni mettono in luce il difficile problema filosofico e forse psicologico della natura delle creazioni o scoperte matematiche.

Che cosa si asserisce quando un matematico afferma che qualcosa esiste?

Quando i **Pitagorici** scoprirono che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele è incommensurabile con il cateto, essi tentarono di mantenere segreta questa scoperta, chiamando queste lunghezze "irrazionali".

Oggi non abbiamo sospetti su numeri tipo $\sqrt{2}$, la cui **irrazionalità** fu provata da **Euclide**. Analogamente i matematici si sono adattati a numeri tipo $i = \sqrt{-1}$, introdotti da Rafael **Bombelli**.

La posizione più *fondamentalista* nella filosofia della Matematica è stata quella di **Leopold Kronecker**, che ha dominato il mondo matematico tedesco alla fine del XIX secolo.

Secondo **Kronecker**:

"Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo."

Questa posizione fu più tardi contrastata da **Hilbert** che affermò:

"Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi."

Il riferimento di **Hilbert** è alla teoria Cantoriana dei **numeri cardinali transfiniti**.

Un altro grande dibattito s'incentra, infatti, sui concetti di **finito e infinito in Matematica**.

Le teorie assiomatiche degli insiemi

Le due principali teorie assiomatiche degli insiemi sono nate per superare la questione dei **paradossi**. La teoria di **Zermelo** e **Fränkel**, denotata **ZF**, limita l'uso del principio fondamentale adoperato da **Cantor** nel modo seguente:
la totalità degli oggetti che godono di una fissata proprietà P costituisce un insieme solo se gli oggetti in questione sono già elementi di qualche altro insieme.
È questo l'assioma dei sottoinsiemi.
Evidentemente in questo contesto le argomentazioni usate per dedurre i paradossi nella teoria Cantoriana non sono più ripetibili.
La teoria di **von Neumann**, **Bernays** e **Gödel**, denotata **NBG**, apporta una differente modifica. Si distinguono due nozioni: quella di *classe* e quella di *insieme*.
La totalità degli oggetti che godono di una proprietà P costituisce una classe.
Una classe si chiama insieme se è elemento di qualche altra classe.
Una classe che non sia un insieme si dice ***propria***.
In questa teoria è possibile dimostrare che la classe di tutti gli insiemi è una classe propria e quindi di nuovo i paradossi sono superati.

L'assioma della scelta (assioma di Zermelo)

La scoperta delle **Geometrie non Euclidee** liberò completamente la scelta degli assiomi dalla necessità che fossero "veri".
Naturalmente, i matematici non scelgono assiomi in modo del tutto arbitrario. Gli assiomi devono portare ad interessanti ed utili risultati. Tuttavia, assiomi che appaiono poco interessanti possono avere sorprendenti conseguenze, com'è avvenuto nel caso degli assiomi della geometria iperbolica, che furono virtualmente ignorati durante il periodo in cui vissero **Gauss**, **Bolyai** e **Lobachevsky**. Quando invece gli assiomi non danno interessanti risultati, finiscono per essere trascurati e dimenticati.
Riportiamo un celebre commento di **Hermann Weyl** a questo proposito:
"Le costruzioni della mente matematica sono allo stesso tempo libere e necessarie. Il matematico si sente libero di definire le sue nozioni e di stabilire i suoi assiomi come più gli piace.
Ma il punto è: riuscirà ad interessare i suoi colleghi matematici alle costruzioni della sua immaginazione?"

I sistemi d'assiomi, anche se utili, possono tuttavia essere controversi nel mondo matematico, come ad esempio è accaduto per gli assiomi per gli insiemi infiniti e quindi per i cardinali transfiniti sviluppati da **Cantor**, **Zermelo** ed altri.
Una controversia nasce perché alcuni matematici di rilievo (come **Weyl**, **Brouwer e Bishop** nel caso degli insiemi infiniti) semplicemente non credono a tali assiomi.
Oggi la ***teoria ingenua degli insiemi*** di **Cantor**, modificata poi da **Zermelo** e **Fränkel** per evitare il **paradosso** in essa contenuto, è stata accettata dai matematici come il fondamento di tutta la matematica.
Per un certo periodo, tuttavia, i matematici furono incerti su due assiomi della teoria degli insiemi: **l'assioma della scelta AS e l'ipotesi del continuo IC**, come in precedenza lo erano stati per il **postulato delle parallele** della **geometria Euclidea**.

L'assioma della scelta **AS** è formulabile in modi diversi, tutti equivalenti nella **teoria degli insiemi ZF** di Zermelo-Fränkel.

1) *Dato un insieme non vuoto A di insiemi non vuoti, esiste una funzione, detta funzione di scelta, che sceglie un elemento in ogni elemento di A.*

2) Ogni prodotto cartesiano (anche infinito) di insiemi non vuoti è non vuoto.

3) Ogni insieme è ben ordinato.

4) Tricotomia: Comunque si considerino due insiemi X, Y si ha una sola delle tre seguenti possibilità per le cardinalità dei due insiemi:
card (X) < card (Y), card (X) = card (Y), card (Y) < card (X).

5) Lemma di Zorn: Se S è un insieme parzialmente ordinato e se ogni sottoinsieme totalmente ordinato di S ha maggiorante, allora S ha un elemento massimale.

È importante osservare che sulla base degli assiomi di **ZF** si è già in grado, in casi particolari, di effettuare infinite scelte in modo costruttivo. L'**AS** afferma qualcosa di più e cioè che le scelte possono essere fatte senza rispettare necessariamente condizioni di carattere costruttivo.
Per questo motivo, questo assioma è fortemente respinto dai **Costruttivisti**.

La storia, dunque, si è ripetuta quando nel **1963** è stata provata *l'indipendenza reciproca* dei due assiomi **AS**, **IC** e *l'indipendenza di essi dagli altri assiomi* della teoria degli insiemi.
Accettarli o no è, di nuovo, solo una questione di *convenienza*.

- **Gödel** (1938) ha provato:

$$\textbf{\textit{Cons}}\ \textbf{(ZF)} \Rightarrow \textbf{\textit{Cons}}\ \textbf{(ZF + AS)}$$

cioè: se la teoria degli insiemi di Zermelo-Fränkel, **ZF**, è consistente, ovvero non contiene contraddizioni, allora anche la teoria **ZF + AS**, ottenuta aggiungendole l'**AS** come nuovo assioma, è consistente.
- **Cohen** (1963) ha provato:

$$\textbf{\textit{Cons}}\ \textbf{(ZF)} \Rightarrow \textbf{\textit{Cons}}\ \textbf{(ZF} + \neg\textbf{AS)}$$

cioè: se la teoria **ZF** è consistente, allora anche la teoria **ZF** + ¬ **AS**, ottenuta aggiungendole la negazione di **AS** come nuovo assioma, è consistente.

Dunque **AS** è *indipendente dagli altri assiomi di* **ZF**.

L'ipotesi del continuo

L'ipotesi del continuo **IC** fu introdotta da **Cantor** nel **1878**, ma la sua accettabilità rimase un problema insoluto per oltre mezzo secolo.
Il problema che spinse **Cantor** ad introdurlo fu quello di collocare la cardinalità dell'insieme delle parti di **N**, $\wp(\mathbf{N})$, nella scala dei cardinali transfiniti $\aleph_\alpha$.
Per un teorema di **Cantor**, per ogni insieme *E*, indicata con *card(E)* la sua cardinalità, si ha:

$$card(E) < card(\wp(E)) = 2^{card(E)}$$

e quindi:

$$\aleph_0 = card(\mathbf{N}) < 2^{\aleph_0}.$$

L'**IC** afferma $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

ovvero $card(\mathbf{R}) = \aleph_1$.

L'indipendenza di **IC** dagli altri assiomi della **teoria degli insiemi** e dall'**assioma della scelta** è stata provata da **Paul Cohen** nel 1963.

Esiste un altro assioma sul continuo, noto come **IGC**, ovvero **ipotesi generalizzata del continuo**. Esso afferma che nella scala dei cardinali transfiniti (numeri *aleph*), si ha

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha},$$

dove α denota un qualsiasi **numero ordinale**.
Evidentemente l'**IGC** implica l'**IC**.
Si prova anche che l'**IGC** implica l'assioma della scelta **AS**, mentre non vale il viceversa, cioè l'**IGC** è più forte di **AS**, (Sierpinski 1947, Specker 1954).

Finito ed infinito in Matematica

L'infinito è forse, comunque lo si consideri, uno dei misteri, se non il più grande mistero dell'esistenza, una sfida per la *razionalità* dell'uomo, e da sempre la volontà di definirlo, analizzarlo e maneggiarlo è stata il sogno, forse proibito ma necessario, di ogni buon matematico.
L'*infinito* appare subito nella storia della Matematica con il più elementare dei processi: il *contare*. Comunque si scelga un numero naturale è sempre possibile esibire un numero più grande di esso. D'altra parte, suddividendo ripetutamente un segmento si giunge al concetto inverso di *infinitesimo*. Infiniti ed infinitesimi percorrono tutta la vicenda matematica, da **Pitagora** ai giorni nostri, ed appaiono in due forme, ***potenziale ed attuale***, suggerite rispettivamente dalla **Aritmetica** e dalla **Geometria**.

Per **Pitagora** (VI secolo a.C.): *I segmenti sono costituiti da un numero finito di punti, entità ultime e indivisibili (infinitesimi attuali), per cui due segmenti qualsiansi sono commensurabili in quanto hanno un sottomultiplo comune.* Questa concezione crollò con la scoperta della **incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato**.
Per **Anassagora** (500 a.C.): La materia è infinitamente estesa ed infinitamente divisibile; "*rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza ma vi è sempre un più piccolo ...., così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande....".* Insomma, solo infinitesimi ed infiniti potenziali.
Per **Zenone** (470 a.C.): Se le grandezze geometriche sono costituite da unità elementari indivisibili (monadi), due ipotesi si possono fare:
1) *Tali monadi hanno grandezza zero ed allora ogni grandezza geometrica, essendo costituita da elementi nulli, sarebbe nulla.*
2) *Tali monadi hanno grandezza diversa da zero, e allora l'ente geometrico costituito da infinite parti aventi ciascuna grandezza data, risulterebbe avere grandezza infinita.*
Per **Aristotele** (IV secolo a.C.): Vi sono infiniti e infinitesimi *potenziali.*

Infiniti ed infinitesimi, sia potenziali sia attuali, compaiono nel calcolo delle aree con **Archimede** e successivamente nello sviluppo del **Calcolo Infinitesimale**, che **Cauchy** fondò sul concetto di **limite**, basato su infiniti ed infinitesimi *potenziali*. La versione *attuale* viene usata da **Leibniz** e tornerà, in tempi recenti, rigorosamente definita con l'**Analisi non standard**.

Ci sono due modi di introdurre le nozioni di **finito** e di **infinito** in matematica, nell'ambito della **teoria degli insiemi**:

1. Un insieme X si dice **finito** se esiste un numero $n \in \mathbf{N}$ $n \neq 0$ tale che X sia *equipotente*, cioè bigettivo, all'insieme $\{1,2,.....n\}$. Un insieme X si dice **infinito** se *non è finito*. Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali **N** è infinito.

2. Un insieme X si dice **D-infinito** o **infinito secondo Dedekind** se contiene un sottoinsieme proprio Y, cioè $Y \neq X$, che sia *equipotente* a X. Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali **N** è infinito secondo Dedekind perché è equipotente al suo sottoinsieme proprio P costituito dai numeri pari. Anche gli insiemi **Z** dei numeri interi e **Q** dei numeri razionali sono D-infiniti perchè contengono propriamente **N** stesso, cui sono equipotenti.
Un insieme si dice **D-finito** o **finito secondo Dedekind** se non è D-infinito.

Evidentemente si ha: *X finito implica X finito secondo Dedekind,*
e, di conseguenza: *X infinito secondo Dedekind implica X infinito.*

Le due definizioni di finito e di infinito ***non sono equivalenti***, cioè le due implicazioni precedenti non si invertono, se non si accetta **l'assioma della scelta** **AS**.
In altri termini, nella **teoria assiomatica degli insiemi**, ottenuta da **ZF** (o da **NBG**) aggiungendo come nuovo assioma **AS**, si ha:
infinito secondo Dedekind $\Leftrightarrow$ *infinito*
finito secondo Dedekind $\Leftrightarrow$ *finito.*

È facile convincersi che esistono *diversi finiti*. Se X e Y sono due insiemi, costituiti il primo da due oggetti ed il secondo da tre oggetti, è ovvio che essi sono finiti in modo diverso; se invece X e Y sono due insiemi costituiti entrambi da tre oggetti, allora sono finiti nello stesso modo. ***Dunque i numeri naturali forniscono una gerarchia del finito*** ed in questa veste sono chiamati **numeri cardinali finiti**.

Più delicata è la questione dell'infinito. Intanto bisogna in qualche modo legittimare *l'esistenza di insiemi infiniti*. Nella **teoria ingenua** di **Cantor** il problema non si pone, poiché ogni proprietà definisce un insieme e quindi i numeri naturali costituiscono un insieme **N**, evidentemente infinito. Ma questa teoria non è coerente, dal momento che dà luogo ai **paradossi**. Nella teoria assiomatica **ZF**

occorre, allora, assumere come *assioma* l'esistenza di un insieme infinito. Risolta così la questione della esistenza, ci si pone la domanda: *quanti infiniti esistono?*
Poiché **N** è infinito e poiché per gli insiemi **Z**, **Q**, **R** dei numeri interi, razionali e reali, si ha $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, anche tali insiemi sono infiniti. Tuttavia, mentre **N**, **Z**, **Q** sono tutti equipotenti tra loro, essi non lo sono con **R**. Dunque l'infinito di **N** (*numerabile*) è diverso ed in qualche senso più piccolo dell'infinito di **R** (*continuo*). Di qui la nascita dei **numeri cardinali transfiniti**, gli $\aleph_\alpha$ o **numeri aleph** di Cantor, che ***forniscono una gerarchia dell'infinito***.

C'è però una *differenza operazionale* fondamentale tra finiti ed infiniti: mentre i finiti sono raggiungibili uno dall'altro per addizioni e sottrazioni finite, ciò non accade per i transfiniti, come curiosamente descritto da **Hilbert** con l'**Hotel Hibert**; si ha infatti:
$n + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, per ogni $n \in \mathbf{N}$; $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$; $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta$
dove α e β sono **numeri ordinali** tali che $\alpha < \beta$.
Osserviamo infine che un cardinale transfinito è un *infinito attuale*, essendo più grande di ogni numero naturale, tuttavia la successione transfinita dei numeri *aleph* è un *infinito potenziale*.

L'infinito secondo Galileo
L'infinito secondo Cantor
L'infinito secondo Hilbert
L'infinito per gli intuizionisti
L'infinito per i nominalisti

I teoremi di Gödel

Il primo teorema di **Gödel**, successivamente modificato da **Rosser** e noto come teorema di **Gödel-Rosser**, riguarda i **sistemi formali dell'aritmetica** ***S*** e ***R*** ed afferma:
Se *S* (*R*) è consistente, allora *S* (*R*) è incompleto, cioè possiede un enunciato indecidibile.

Si costruisce in ***R***, e quindi anche in ***S***, una particolare formula **W** e si prova che:
se ***S*** (***R***) è consistente, allora non è dimostrabile in ***S*** (in ***R***) né la formula **W** né la sua negazione ⌝**W**. Ciò significa che **W** e ⌝**W** non sono teoremi di ***S*** (***R***).

La formula **W**, dunque, non è né dimostrabile né refutabile; si dice che **W** è *indecidibile* e la teoria ***S*** (***R***) è *incompleta.*

È interessante l'interpretazione standard della W.
Tale interpretazione afferma che "*non esiste in* **S** (***R***) *alcuna dimostrazione di* **W**", in altri termini **W** afferma la propria indimostrabilità in ***S*** (***R***).
D'altra parte, se si accetta l'interpretazione standard, ***S*** e ***R*** sono consistenti, la formula **W** è vera e quindi esiste una formula vera per i numeri naturali, nell'interpretazione standard, ma indimostrabile in ***S*** (***R***).

Una conseguenza di capitale importanza di questo teorema di Gödel-Rosser è la seguente:
Qualsiasi sistema assiomatico in cui possa essere sviluppata l'aritmetica, se è consistente, è essenzialmente incompleto.

Infatti, in relazione ai sistemi ***S*** o ***R***, si potrebbe pensare di rimuovere l'ostacolo costruendo un'estensione di ***S*** o ***R*** assumendo la formula **W** come ulteriore assioma. Allora però esiste una nuova formula **W′** vera e tale che sia **W′** sia ⌝**W′** non sono deducibili dai nuovi assiomi. Cioè ogni estensione assiomatica di ***S*** o ***R*** è soggetta al teorema di **Gödel-Rosser**. Questa proprietà si esprime dicendo che ***S*** e ***R*** sono *essenzialmente incompleti*, ovvero che l'aritmetica è *essenzialmente sintatticamente incompleta*.
La portata del risultato va ben oltre l'aritmetica. Si ha infatti che:
Ogni teoria assiomatica che contiene i simboli di S, ovvero ogni teoria in cui è sviluppabile l'aritmetica, se è consistente, allora

è essenzialmente sintatticamente incompleta e quindi non è completamente formalizzabile.
Si noti che questo problema coinvolge *tutta la matematica,* dal momento che essa è esprimibile in termini insiemistici e che la **teoria assiomatica degli insiemi** (**ZF**, **NBG**) contiene l'aritmetica.
Esiste dunque una limitazione inerente al metodo assiomatico.
Questo teorema di **Gödel-Rosser** risponde anche ad un altro problema:
è possibile costruire una macchina calcolatrice capace di fare concorrenza al cervello umano in termini di intelligenza matematica ?
Le macchine calcolatrici possiedono un insieme fissato di direttive immagazzinate, che corrispondono alle regole di inferenza stabilite nella procedura assiomatica.
Allora, assegnato un certo problema, è possibile costruire una macchina capace di risolverlo, ma non è possibile costruire una macchina che risolva ogni problema.
Sembra dunque che le risorse del cervello umano non possano essere formalizzate completamente e nuovi principi di dimostrazione attendano di essere inventati o scoperti.

Il secondo teorema di Gödel può essere espresso in questi termini:

È impossibile dare una dimostrazione finitistica della coerenza di un sistema formale abbastanza ricco da contenere l'aritmetica, dimostrazione che sia rappresentabile nell'ambito della stessa aritmetica.

Si costruisce in **S** una formula, denotata con **Cons**, che nell'interpretazione standard afferma: "**S** *è consistente*"

Il secondo teorema di Gödel dice:
Se S è consistente, allora la formula* Cons *non è dimostrabile in S.

Si noti che questo risultato non esclude la possibilità di trovare una dimostrazione di coerenza per **S**, esclude invece la rappresentabilità di una tale prova nell'aritmetica stessa.
Si possiede infatti una dimostrazione di coerenza della **teoria formale dei numeri** che utilizza *l'aritmetica ordinale*, (**Schütte 1951**).

I risultati di **Gödel** hanno suscitato molto scalpore e messo in crisi i matematici, rappresentando un notevole limite per il metodo

assiomatico. Tuttavia, forse, la seguente osservazione di **René Thom** è un'appropriata reazione al teorema di incompletezza di **Gödel**:
"Il matematico dovrebbe avere il coraggio delle sue personali convinzioni; egli dovrebbe affermare che le strutture matematiche hanno una loro esistenza indipendente dalla mente umana che pensa su di esse. La forma di questa esistenza è senza dubbio differente dalla esistenza concreta e materiale del mondo esterno, ma è, nondimeno, sottilmente e profondamente legata alla esistenza oggettiva.
Come spiegare altrimenti, se la matematica è un gioco gratuito ed il prodotto casuale della nostra attività cerebrale, il suo indiscutibile successo nel descrivere l'universo?
La Matematica si incontra non soltanto nelle rigide e misteriose leggi fisiche, ma in modo più nascosto, ma ancora indiscutibile, nelle infinite successioni delle forme del mondo animato ed inanimato, nel formarsi e nel distruggersi delle loro ***simmetrie****.*
Perciò, l'ipotesi di ***Platone*** *delle Idee che danno forma all'universo è, a dispetto delle apparenze, la più naturale e, filosoficamente, la più economica. Ma, in ogni istante, i matematici hanno solo una visione incompleta e frammentaria di questo mondo di Idee. Essi devono ricrearlo nella loro coscienza con una ricostruzione continua.*
Con questa fiducia nell'esistenza di un universo ideale, il matematico non si preoccuperà troppo dei limiti delle procedure formali, egli sarà capace di dimenticare il problema della consistenza.
Ciò, perché il mondo delle Idee supera infinitamente le nostre possibilità operative e l'ultima ratio della nostra fede nella verità di un teorema risiede nella nostra intuizione, poiché un teorema è soprattutto, in accordo con una a lungo dimenticata etimologia, 'l'oggetto di una visione'."

I Teoremi di Gödel e la psicologia

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Lombardini
Elementi di Matematica
ad uso degli studenti nella Ducale Università di Parma
Parma, 1828

Il libro, ideato per gli studenti della Università di Parma, presenta i fondamenti della matematica relativi all'aritmetica, alla geometria, all'algebra, alla trigonometria piana.
È ricco di esercizi, completi di soluzione, ed è integrato da tavole in cui viene illustrata la **costruzione di figure** nel piano e nello spazio.

Il **Capo Secondo** è dedicato alle *"operazioni aritmetiche sulle espressioni algebriche"*, ovvero a quello che è oggi più comunemente chiamato il *calcolo letterale*. Esso compare in questa forma nella **Storia dell'Algebra** tra il Cinquecento e il Seicento, grazie soprattutto a due matematici francesi: **François Viète** ne fu il vero fondatore e **René Descartes**, con la sua ***Géométrie***, affinò la notazione e le tecniche di calcolo, trovandone utili applicazioni allo studio dei luoghi geometrici.

Il calcolo letterale rappresenta, secondo la **classificazione di Nesselmann**, l'ultimo stadio dell'evoluzione del **linguaggio matematico**.

ELEMENTI

DI

MATEMATICA

AD USO

DEGLI STUDENTI

NELLA

DUCALE UNIVERSITÀ

DI PARMA

PARMA

DALLA STAMPERIA CARMIGNANI

MDCCCXXVIII.

Capo Secondo.

Delle operazioni aritmetiche sulle espressioni algebriche.

Somma.

§. 315. La somma delle quantità algebriche si eseguisce riducendo i termini simili, e scrivendo gli uni di seguito agli altri coi loro segni quelli che non si possono ridurre. Così la somma di $a+b$ con $a-b$ è $2a$; e quella delle quantità $2a^3c-3a^2c^2$, $4a^2c^2-4ax^3+2x^4$, $4ax^3-2x^4+2a^3c$ è $4a^3c+a^2c^2$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a^3c-3a^2c^2 \\ 4a^2c^2-4ax^3+2x^4 \\ 4ax^3-2x^4+2a^3c \\ \hline 4a^3c+a^2c^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} \frac{a^2b}{m} & + & \frac{a^2c}{n} \\ \frac{a^2c}{n} & - & \frac{2a^2b}{m} \\ \hline -\frac{a^2b}{m} & + & \frac{2a^2c}{n} \end{array}$$

§. 316. Se le quantità da sommarsi fossero in forma di frazione si opererebbe similmente. Raccogliendo $\frac{a^2b}{m}+\frac{a^2c}{n}$ ed $\frac{a^2c}{n}-\frac{2a^2b}{m}$ si ottiene $-\frac{a^2b}{m}+\frac{2a^2c}{n}$.

Sottrazione.

§. 317. La sottrazione delle quantità algebriche si opera cambiando i segni ai termini che si voglion sottrarre. Per tal modo se da a voglio levare

$b-c$, scrivo per residuo $a-b+c$, cambiando il segno $+$ di b in $-$, e il segno $-$ di c in $+$. Con questa regola si troverà che da $a^4+2a^3c+m^2n^2$ sottraendo $a^4-2a^3c+2m^2n^2$ risulta per residuo $a^4+2a^3c+m^2n^2-a^4+2a^3c-2m^2n^2$, ossia, fatta la riduzione, $4a^3c-m^2n^2$.

$$\begin{array}{l} a \\ b-c \\ \hline a-b+c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^4+2a^3c+m^2n^2 \\ a^4-2a^3c+2m^2n^2 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 4a^3c-m^2n^2 \end{array}$$

§. 318. La ragione di un tal metodo s'intenderà facilmente riflettendo, che, se da a debba sottrarsi $b-c$, non può aversi per residuo $a-b-c$, poichè allora verrebbero a sottrarsi tutto il b e tutto il c, mentre anzi non è da sottrarsi neppur tutto il b, ma soltanto b diminuito di c. La rimanenza vera perciò si otterrà levando il b, indi aggiungendo il c per correzione, e notando $a-b+c$, come prescrive la regola.

§. 319. La sottrazione dei rotti si eseguisce come quella degl'interi, onde per levare $\frac{abc+m^3}{n^2}$ da $\frac{abc-m^3}{n^2}$ si scriverà $\frac{abc-m^3-abc-m^3}{n^2}$ (§. 48.), ossia $-\frac{2m^3}{n^2}$.

$$\begin{array}{r} \frac{abc-m^3}{n^2} \\ \frac{abc+m^3}{n^2} \\ - \quad - \\ \hline -\frac{2m^3}{n^2} \end{array}$$

Qualche volta la sottrazione non si opera ma si accenna soltanto. Allora la quantità da sottrarsi

un' altra $+b$ dev'essere similmente $+ab$. Il prodotto di -4 per $+3$, ossia la somma di -4 preso 3 volte è -12; dunque in pari modo $-a \times +b = -ab$. Se $+4$ debba sottrarsi una volta, ossia prendersi -1 volta (§. 306.), si scrive -4 (§. 317.), se dunque debba sottrarsi 3 volte ossia moltiplicarsi per -3, dovrà scriversi -12; quindi $+a \times -b = -ab$. In fine, se -4 debba sottrarsi 3 volte, ovvero moltiplicarsi per -3, dovrà scriversi (§. 317.) $+12$; onde in generale il prodotto di $-a$ per $-b$ è $+ab$.

Venendo ai coefficienti è chiaro che $4a \times 3$, ossia $4a$ preso 3 volte, dà $12a$; quindi nella moltiplicazione delle quantità algebriche i loro coefficienti debbono moltiplicarsi.

Quanto alle lettere è noto (§. 308.) che basta scriverle di seguito perchè s'intendano moltiplicate tra loro. Che se poi sono uguali, e debba moltiplicarsi p. e. a^3 per a^2, riflettendo che a^4 è $= aaa$ (§. 310.), e che a^2 è $= aa$, s'intende che il prodotto debb'essere $aaaaa$, ossia a^5. Così quello di a^7 per a^4 sarà a^{11}, ecc.; tutto conforme alle regole.

§. 322. Vediamo un qualche esempio che rischiari questi precetti.

Vogliasi il prodotto di $3a^2b^3c$ per $2ab^2$. I segni dei termini essendo uguali il prodotto sarà positivo, i coefficienti 3, e 2

$$\begin{array}{r} 3a^2b^3c \\ 2ab^2 \\ \hline 6a^3b^5c \end{array}$$

si chiude fra parentesi e si fa precedere dal segno —. Onde per esprimere che $b - c$ va levato da a si scrive $a - (b - c)$.

Moltiplicazione.

§. 320. A comporre i termini di qualsiasi espressione algebrica concorrono i *segni*, i *coefficienti*, le *lettere*, e gli *esponenti*, e nella moltiplicazione conviene aver riguardo a tutti quattro questi elementi. Quanto ai segni, o i termini da moltiplicarsi hanno entrambi il segno stesso, o lo hanno diverso. Nel primo caso il prodotto è positivo, ed è negativo nel secondo. Passando ai coefficienti è da ritenere ch'essi debbono moltiplicarsi fra loro ponendo il risultato per coefficiente del prodotto dei termini che si moltiplicano. Quanto alle lettere ed agli esponenti conviene scrivere le prime le une di seguito alle altre coi rispettivi loro esponenti, ritenendo però che, se sono uguali, in vece di replicarle basta scriverle una volta sola con un esponente che sia la somma dei loro esponenti primitivi.

§. 321. L'esattezza di queste regole non è difficile da dimostrarsi.

E primieramente, riguardo ai segni, il prodotto di $+4$ per $+3$, ossia la somma di $+4$ preso 3 volte (§. 21.) è evidentemente $+12$; dunque in generale il prodotto di una quantità $+a$ per

moltiplicati danno 6 per coefficiente del prodotto, $a^2 \times a$ dà a^3, $b^3 \times b^2$ produce b^5; perciò il risultamento sarà $6a^3b^5c$.

Quello di $3a^2bcx$ per $-4ac^2x$ si troverà essere $-12a^3bc^3x^2$.

$$\begin{array}{r} 3a^2bcx \\ -4ac^2x \\ \hline -12a^3bc^3x^2 \end{array}$$

§. 323. La moltiplicazione di un polinomio per un monomio si eseguisce moltiplicando ad uno ad uno ciascun termine della prima quantità per la seconda. Sia da trovarsi il prodotto di $2x^2y - 3xy^2 - y^3$ per $4xy$. Si cominci dal moltiplicare il primo termine $2x^2y$ per $4xy$ e si scriva il prodotto $8x^3y^2$. Poi si moltiplichi per $4xy$ il secondo termine $-3xy^2$ e si noti $-12x^2y^3$. Finalmente $-y^3$ moltiplicato per $4xy$ dà $-4xy^4$ per ultimo termine del prodotto, che è perciò $8x^3y^2 - 12x^2y^3 - 4xy^4$.

$$\begin{array}{r} 2x^2y - 3xy^2 - y^3 \\ 4xy \\ \hline 8x^3y^2 - 12x^2y^3 - 4xy^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + 3b^2 \\ -2ab \\ \hline -2a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 \end{array}$$

Quello di $a^2 - 2ab + 3b^2$ per $-2ab$ risulta $-2a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3$.

§. 324. Se in fine debba moltiplicarsi un polinomio per un polinomio, conviene moltiplicare la quantità superiore per ciascun termine dell'inferiore, e la somma dei diversi prodotti parziali, ridotta se è possibile, darà il prodotto totale. Siavi la quantità $a + 2b$ da moltiplicarsi per $2a$

$-2b$. Si cominci dal moltiplicare $a+2b$ per $2a$, e si scriva il prodotto $2a^2+4ab$; poi si moltiplichi $a+2b$ per $-2b$, e si scriva il nuovo prodotto $-2ab-4b^2$. Fatta la riduzione di queste quantità si otterrà $2a^2+2ab-4b^2$ per prodotto totale.

$$\begin{array}{r} a+2b \\ 2a-2b \\ \hline 2a^2+4ab \\ \quad -2ab-4b^2 \\ \hline 2a^2+2ab-4b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+x^2y+x\,y^2+y^3 \\ x-y \\ \hline x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3 \\ \quad -x^3y-x^2y^2-xy^3-y^4 \\ \hline x^4-y^4 \end{array}$$

Operando in simil maniera si troverà che $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ moltiplicato per $x-y$ dà x^4-y^4 per risultamento.

§. 325. La moltiplicazione si fa sui rotti algebrici come sui numerici (§. 49.) cioè moltiplicando fra loro i numeratori, e fra loro i denominatori. Così

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} c-d \\ c+d \\ \hline c^2-cd \\ \quad +cd-d^2 \\ \hline c^2-d^2 \end{array}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a+b}{c-d}\times\frac{a-b}{c+d}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2};\text{ ecc.}$$

Questa regola e le seguenti per la divisione sono fondate sugli stessi principj spiegati già in Aritmetica intorno ai numeri.

§. 326. Come nel moltiplicare, così nel dividere le quantità algebriche conviene aver riguardo ai segni, ai coefficienti, alle lettere, ed agli esponenti. Pei segni hanno luogo le stesse regole date (§. 320.) nella moltiplicazione. Per riguardo ai coefficienti, devesi dividere quello del dividendo per quello del divisore, e notare il quoziente numerico per coefficiente del quoto algebrico che risulterà. Quanto alle lettere conviene scrivere al quoziente quelle che sono nel dividendo e non nel divisore, e cancellar quelle che trovansi in una quantità e nell'altra con uguale esponente. Che, se non abbiano ugual esponente, allora si dee notare al quoto la lettera stessa con un esponente il qual sia uguale al residuo che si ottiene sottraendo l'esponente del divisore da quello del dividendo.

§. 327. Queste regole risultano da quelle della moltiplicazione. In fatti, poichè dividendo un prodotto pel moltiplicatore dee tornare al quoto il moltiplicando (§. 37.), e poichè d'altronde $+a \times +b$ dà $+ab$, e $+a \times -b$ dà $-ab$, quindi $\frac{+ab}{+b}$ deve dare $+a$, e $\frac{-ab}{-b}$ deve similmente dare $+a$, cioè il dividendo e il divisore con segni uguali

danno il quoto positivo. Per la ragione stessa essendo $-a \times +b = -ab$, e $-a \times -b = +ab$, saranno le espressioni $\frac{-ab}{+b}$, e $\frac{+ab}{-b}$ entrambe uguali a $-a$, cioè il dividendo e il divisore con segni disuguali danno il quoto negativo.

Similmente, poichè $4a \times 3$ produce $12a$, $\frac{12a}{3}$ deve riprodurre $4a$, cioè il coefficiente del dividendo si dee dividere per quello del divisore.

La quantità ab moltiplicata per cd dà per prodotto $abcd$; dunque $\frac{abcd}{cd}$ deve dare ab, cioè le lettere a, b che sono nel dividendo e non nel divisore si debbono scrivere al quoto, e le altre c, d che sono in ambe le quantità con ugual esponente debbono cancellarsi.

Finalmente, essendo $a^5 \times a^2 = a^7$, sarà $\frac{a^7}{a^2} = a^5$; così pure, essendo $a^7 \times a^4 = a^{11}$, sarà $\frac{a^{11}}{a^4} = a^7$, cioè nella divisione di una lettera per se stessa si nota al quoto la lettera medesima mettendole per esponente l'eccesso dell'esponente ch'essa ha nel dividendo su quello che ha nel divisore.

§. 328. Vediamo l'applicazione di queste regole nella divisione di un monomio per un monomio.

Si abbia la quantità $6a^2bc^3d$ da dividere per l'altra $2abc^2$. Poichè queste due quantità hanno lo stesso segno, il quoto sarà positivo. Scrivo perciò +, ovvero nulla scrivo, perchè il + si sottintende (§. 306.). Il coefficiente 2 sta 3 volte in 6; noto 3 per coefficiente del quoto. Sottraendo l'esponente 1 che ha la lettera a nel divisore dall'esponente 2 ch'essa ha nel dividendo, resta 1, onde scrivo a^1 oppure a (§. 310.) al quoziente. Non segno la lettera b che è nel dividendo e nel divisore collo stesso esponente. Sottraendo l'esponente 2 di c dall'esponente 3 resta 1, onde scrivo c. Finalmente noto al quoziente la lettera d che è nel dividendo e non nel divisore. Un tal quoto è dunque $3acd$. In fatti il divisore $2abc^2$ moltiplicato pel quoto $3acd$ produce il dividendo $6a^2bc^3d$.

$$\begin{array}{r|l} 6a^2bc^3d & 2abc^2 \\ \hline & 3acd \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -4a^2x^3y^3 & 2a^2y^2 \\ \hline & -2x^3y \end{array}$$

Operando similmente si troverà che il quoto di $-4a^2x^3y^3$ diviso per $2a^2y^2$ è $-2x^3y$.

§. 329. Può darsi che nel divisore si trovi alcuna lettera, la quale o non sia nel dividendo o vi sia con esponente più picciolo. Una tal lettera si scrive sotto al quoto per denominatore, nel 1.° caso come sta, e nel secondo con un esponente uguale alla differenza de' suoi esponenti primitivi. Quindi

il quoto della quantità $-15a^2dx^3y$ divisa per $3acx^5y$ è $-\frac{5ad}{cx^2}$.

$$-15a^2dx^3y \mid 3acx^5y$$
$$-\frac{5ad}{cx^2}$$

§. 330. Se la quantità da dividersi è polinomia, ed è monomio il divisore, l'operazione si eseguisce dividendo ad uno ad uno i termini di quella. Siavi l'espressione $4a^2b^3c - 3ab^2c^3 - 2ab^2 + 10bc^6$ da dividersi per $2ab^2$. Si cominci dal dividere per $2ab^2$ il primo termine $4a^2b^3c$ notando al quoto il risultato $2abc$. Poi si prosegua dividendo il secondo termine $-3ab^2c^3$, e si noti $-\frac{3}{2}c^3$ al quoto. Si passi a dividere $-2ab^2$ per $2ab^2$, e si scriva il quoziente -1. In fine il quarto termine $10bc^6$ diviso per $2ab^2$ dà $+\frac{5c^6}{ab}$ per ultimo termine del quoto, che in conseguenza è $2abc - \frac{3}{2}c^3 - 1 + \frac{5c^6}{ab}$.

$$4a^2b^3c - 3ab^2c^3 - 2ab^2 + 10bc^6 \mid 2ab^2$$
$$2abc - \tfrac{3}{2}c^3 - 1 + \frac{5c^6}{ab}$$

§. 331. Si debba ora eseguire la divisione di un polinomio per un altro polinomio, p. e. di $11a^5c^3 - 10a^4c^4 - 8a^3c^5 - 2a^6c^2$ per $2a^3c - 3a^2c^2 - 2ac^3$. È raro che la divisione possa riescire senza residuo, pure, onde tentarlo almeno e scegliere la strada più breve, conviene *ordinare* per una qualche let-

tera il dividendo e il divisore, cioè, presa una qualche lettera che si trovi nelle due quantità, disporre i termini di esse in modo che sia primo quello dove una tal lettera ha il maggior esponente, secondo quello dove ha l'esponente prossimamente minore, e così dei successivi. Si può ordinare per qualunque lettera, ma sono da preferirsi quelle che non si trovano con esponenti ugnali in più termini, onde non resti dubbio quale di essi debba premettersi. Nel nostro caso è indifferente di ordinare per a, o per c, ed ordinando per a converrà scrivere $-2a^6c^2+11a^5c^3-10a^4c^4-8a^3c^5$ da dividere per $2a^3c-3a^2c^2-2ac^3$.

$$
\begin{array}{l}
11a^5c^3-10a^4c^4-8a^3c^5-2a^6c^2 \\
\hline
-2a^6c^2+11a^5c^3-10a^4c^4-8a^3c^5 \\
-2a^6c^2+3a^5c^3+2a^4c^4 \\
+\quad -\quad -\\
\hline
\quad +8a^5c^3-12a^4c^4 \\
\quad +8a^5c^3-12a^4c^4-8a^3c^5 \\
\quad -\quad +\quad +\\
\hline
\quad 0\quad 0\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
2a^3c-3a^2c^2-2ac^3 \\
\hline
-a^3c+4a^2c^2
\end{array}
$$

Per cominciare l'operazione si divida il primo termine $-2a^6c^2$ pel primo termine $2a^3c$ del divisore, e si scriva il quoziente $-a^3c$. Per $-a^3c$ si moltiplichi il divisore, e si sottragga il prodotto $-2a^6c^2+3a^5c^3+2a^4c^4$ dal dividendo, che si residuerà ad $8a^5c^3-12a^4c^4-8a^3c^5$. Il primo ter-

mine $8a^5c^4$ di questo residuo si divida pel primo termine $2a^3c$ del divisore, e il risultato $+4a^2c^2$ si scriva al quoto. Per $+4a^2c^2$ si moltiplichi il divisore, e il prodotto $8a^5c^5 - 12a^4c^4 - 8a^3c^5$ si sottragga dal dividendo. Se rimanesse un avanzo converrebbe proseguire nello stesso modo l'operazione dividendo il primo termine di tale avanzo pel primo termine del divisore, moltiplicando il divisore stesso pel quoto risultante, sottraendo il prodotto dal dividendo, e continuando così finchè tutti i termini da dividersi fossero esauriti. Nel caso presente, poichè nulla rimane, l'operazione è terminata, e il quoto esatto è $-a^3c + 4a^2c^2$.

Questa regola è analoga affatto alla divisione dei numeri di più cifre (§. 34.). Col mezzo di essa si troverà, che il quoto di $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ diviso per $a^2 - 2ab + b^2$ è $a^2 - 2ab + b^2$, e quello di $x^4 - y^4$ diviso per $x - y$ è $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & a^2 - 2ab + b^2 \\
\underline{a^4 - 2a^3b + a^2b^2} & \overline{a^2 - 2ab + b^2} \\
\quad - \quad + \quad - & \\
\hline
\quad - 2a^3b + 5a^2b^2 & \\
\quad - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 & \\
\quad + \quad - \quad + & \\
\hline
\quad + a^2b^2 - 2ab^3 & \\
\quad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 & \\
\quad - \quad + \quad - & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - y^4 & x - y \\
\hline
+x^4 - x^3y & \\
- \quad + & \\
\hline
\quad +x^3y & \\
\quad +x^3y - x^2y^2 & \\
\quad - \quad + & \\
\hline
\quad\quad +x^2y^2 & \\
\quad\quad +x^2y^2 - xy^3 & \\
\quad\quad - \quad + & \\
\hline
\quad\quad\quad +xy^3 & \\
\quad\quad\quad +xy^3 - y^4 & \\
\quad\quad\quad - \quad + & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0 & \\
\hline\hline
\end{array}
\qquad x^3 + x^2y + xy^2 + y^3
$$

§. 332. Quando la divisione non può riuscir senza resto, conviene o accennarla scrivendo le quantità in forma di rotto, o cominciarla proseguendola finchè vi è luogo e scrivendo come frazione il residuo. Così $a^3 - 2x^2$ diviso per $a - x$ dà per quoto $a + x - \frac{x^2}{a-x}$.

$$
\begin{array}{l|l}
a^2 \ldots\ldots - 2x^2 & a - x \\
\hline
+a^2 - ax & \\
- \quad + & \\
\hline
\quad +ax & \\
\quad +ax - x^2 & \\
\quad - \quad + & \\
\hline
\quad\quad - x^2 & \\
\hline\hline
\end{array}
\qquad a + x - \frac{x^2}{a-x}
$$

§. 333. Se le frazioni algebriche da dividersi hanno ugual denominatore, se ne dividono i numeratori (§. 51.); se lo hanno diverso, se ne

moltiplicano i termini in croce. Quindi il quoto di $\frac{a}{c}$ diviso per $\frac{b}{c}$ è $\frac{a}{b}$; e dividendo $\frac{3a^2}{b}$ per $\frac{b+c}{2ah}$ si ha $\frac{6a^3h}{b^2+bc}$ per quoziente.

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Eustachio Manfredi
Elementi della Geometria piana e solida e della trigonometria
Bologna, 1755
Opera postuma

L'opera è in gran parte dedicata alla **geometria piana euclidea** e contiene un compendio di trigonometria. A questo è annessa un'**appendice** contenente i principi dell'uso dei **logaritmi** nei calcoli.
È scritta in modo completamente discorsivo, con poche formule, mentre le figure sono raccolte in apposite tavole ad esse esclusivamente dedicate.
Curioso il modo di indicare le proporzioni:

$$a : c :: b : d$$

Esso è presente anche in altri autori del tempo. Lo ritroviamo ancora in un testo ottocentesco di **Giuseppe Bigoni**.

Frontespizio
Avvertenza al lettore

Il Linguaggio Matematico e la sua evoluzione

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
PIANA E SOLIDA
E DELLA
TRIGONOMETRIA

Opera Postuma

DEL DOTT. EUSTACHIO MANFREDI

Professore delle Matematiche, sovraintendente alle Acque, e Astronomo dello Instituto delle Scienze in Bologna, e Associato alle Regie Accademie di Londra, e di Parigi.



IN BOLOGNA

Nella Stamperia di Lelio dalla Volpe.)(1755.)(

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

LO STAMPATORE

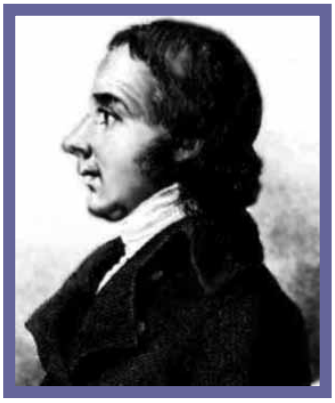
A chi legge.

MI conviene avviſarvi, o corteſe Lettore, che queſt' opera, che pubblico ora colle mie ſtampe quantunque riconoſca per ſuo autore il Sig. Euſtachio Manfredi, pure non è ſtata da lui interamente compita, e ridotta a quello ſtato, in cui preſentemente ſi trova. Mancavano alcune propoſizioni appartenenti alla dottrina de' ſolidi, e ſono quelle, che incominciano negli elementi della Geometria de' ſolidi pag. 116 num. 62, e ſeguono fino al fine di eſſi ſolidi. Queſte ſono ſtate aggiunte dal Sig. Eraclito Manfredi celebre Medico, e Profeſſore di Matematica in queſta Univerſità. Non era conveniente laſciare queſt'opera imperfetta per non pregiudicare al vantaggio de' Giovani ſtudenti, che così non avranno a cercare altrove quelle dottrine, che quivi mancavano; ed acciocche non rechi diſpiacere, che il Sig. Euſtachio abbia laſciato queſt' opera imperfetta, baſta riflettere, che eſſa è poi ſtata dal Fratello terminata.

Della Trigonometria.

38 Benchè colle regole fin' ora ſpiegate ſi poſſano ſciorre tutte le queſtioni della Trigonometria piana, nulladimeno conſiderando i moderni Geometri, che la pratica di queſte regole è ſpeſſe volte faticoſa per la neceſſità, che vi è di moltiplicare talvolta, e di dividere numeri aſſai grandi, hanno penſato, e trovato un metodo di facilitarla, col ſoſtituire a quei numeri, che ſi debbono maneggiare nelle operazioni trigonometriche, alcuni altri numeri, che chiamano logaritmi, col mezzo de' quali ſi ſchivano le moltiplicazioni, e le diviſioni; e in vece di eſſe ſi ſpediſcono i calcoli colle ſemplici addizioni, e ſottrazioni. Di queſti logaritmi [de' quali il primo inventore fu il Nepero ſul principio del ſecolo paſſato, e che poi ſono ſtati ridotti a maggior perfezione, e facilità da altri ſcrittori] diremo ora qualche coſa per compimento del preſente trattato, cioè quanto baſta a intenderne l' uſo nelle operazioni trigonometriche.

Lorenzo Mascheroni
(nato a Castagneta, Bergamo il 13 maggio 1750
morto a Parigi il 14 luglio 1800)



Questo matematico e poeta ricevette l'ordinazione a sacerdote in giovanissima età. Insegnò per alcuni anni retorica, finché non scoprì, quasi per caso, il suo interesse per gli studi scientifici. Nel Collegio Mariano di Bergamo, dove era professore dal 1774, egli introdusse, per la prima volta, la matematica tra le materie di studio. Questa disciplina era allora considerata avversa al buon apprendimento delle scienze umanistiche, per cui la scelta di Mascheroni venne fortemente osteggiata dalle autorità politiche ed ecclesiastiche della città. Infine abbandonò la scuola nel 1786, essendo stato chiamato a ricoprire la cattedra di matematiche all'Università di Pavia, di cui sarebbe in seguito diventato rettore.

I suoi primi saggi scientifici riguardano l'applicazione della matematica alla fisica: parlano di una bilancia di sua invenzione, dell'uso della bussola e dell'equilibrio delle volte. Per tutta la vita egli continuerà ad occuparsi di problemi pratici: costruirà una meridiana in ottone, oggi conservata presso una biblioteca di Bergamo, scriverà un trattato di agrimensura, farà parte di una commissione istituita dal governo francese per la riforma del sistema dei pesi e delle misure, comporrà uno scritto sul calendario repubblicano francese, che verrà pubblicato postumo.

Mascheroni si interessò ai **poligoni** ed al **calcolo infinitesimale** di **Eulero**: in particolare studiò il limite della successione

$$1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n \; - \; \log n,$$

che è un numero irrazionale:

0,577215664….,

ed è oggi noto come ***costante di Eulero-Mascheroni***.

Mascheroni è ricordato soprattutto per la ***Geometria del compasso*** (1797), un'opera in 12 volumi nella quale egli dimostrò la possibilità di effettuare tutte le costruzioni euclidee col solo uso del compasso, facendo a meno della riga. Questo risultato, in realtà, era già stato trovato molto tempo prima dal danese Georg Mohr, che lo aveva pubblicato in un trattato dal titolo *Euclides Danicus* (1672). Quest'opera venne però alla luce solo nel 1927.

Successivamente, nel 1833, il matematico svizzero **Jacob Steiner** realizzò le stesse costruzioni col solo uso della riga e di un cerchio precedentemente tracciato sul foglio, rendendo così superfluo il compasso.

Nel 1904 il grande matematico italiano Francesco Severi ha perfezionato il risultato di Steiner, dimostrando che il cerchio può essere sostituito da un suo arco di lunghezza qualunque.

A seguito della campagna d'Italia, il Mascheroni simpatizzò con i francesi ed iniziò a frequentare la corte di Napoleone, con il quale tenne anche conversazioni di argomento matematico. Le ricorda nella dedica della sua opera principale, con questi quattro versi, rivolti al grande imperatore:

"Io pur ti vidi coll'invitta mano
Che parte i regni e a Vienna intimò la pace,
Meco divider con attento guardo
Il curvo giro del fedel Compasso."

Dopo la cacciata dell'esercito del Bonaparte, Mascheroni si rifugiò in Francia, dove concluse i suoi giorni. Alla sua morte lo scrittore Vincenzo Monti compose, in onore del grande matematico, una lirica in cinque canti, detta ***Mascheroniana***, che si estende su più di mille versi. Nel primo canto il poeta descrive l'ascesa dell'amico al cielo, dove immagina che gli astri lo chiamino a sedere accanto alle anime di altri grandi scienziati, come **Galilei** e **Archimede**: del primo ricorda la **scoperta dei satelliti di Giove** e la cecità conseguente all'uso del **cannocchiale**, del secondo la quadratura della parabola, la determinazione dell'area del cerchio e l'invenzione degli specchi ustori, che secondo una leggenda, avrebbero incendiato le navi della

flotta di Marcello, respingendo così il suo primo tentativo di invadere la Sicilia.

"Vien, di Giove dicea l'astro lunato:
qui riposa quel grande che su l'Arno
me di quattro pianeti ha coronato.
Vien quegli occhi a mirar, che il ciel spiarno
tutto quanto e, lui visto, ebber disdegno
veder oltre la terra e s'oscurarno.
Tu, che dei raggi di quel divo ingegno
filosofando ornasti i pensier tui,
vien; tu con esso di goder se' degno.

Ma di rincontro folgorando i sui
tabernacoli d'oro apriagli il sole;
e – Vieni, ei pur dicea, resta con nui.
Io son la mente della terrea mole,
io la vita ti diedi, io la favilla
che in te trasfuse la giapezia prole.
Rendimi dunque l'immortal scintilla
che tua salma animò; nelle regali
tende rientra del tuo padre e brilla.
D'italo nome troverai qui tali
Che dell'uman sapere archimandriti
Al tuo pronto intelletto impennar l'ali;
colui che strinse ne' suoi specchi arditi
di mia luce gli strali e fe' parere
cari a Marcello di Sicilia i liti;
primo quadrò la curva del cadere
de' proietti creata, e primo vide
il contener delle contente sfere.

Un aneddoto su Mascheroni
I Problemi di Geometria

Mascheroni e il generale (1800)

*"Trovandosi in un salotto parigino, il **Mascheroni** fu coinvolto in una disputa sul merito dei matematici d'Italia e di Francia. Un generale francese, molto accaloratosi nel discorso, sfidò il Mascheroni a citare un italiano che uguagliasse il **Lagrange**. Il Mascheroni rispose semplicemente che il Lagrange era italiano, perché nato a Torino, il tal giorno tal mese tal anno. Punto sul vivo dalla prontezza della risposta, il generale dopo un po' pensò di gettare il ridicolo sul Mascheroni, che sapeva essere bergamasco, domandandogli se, visto che conosceva così bene la patria degli uomini illustri, sapesse della patria di Arlecchino: - Certamente – rispose calmo il Mascheroni: e raccontò quello che diceva aver letto in una vecchia cronaca; di un cavaliere francese di Arles, emigrato in Italia, nella Val Brembana, portando con sé un giovinotto suo concittadino, allegro, petulante e spaccone che fu detto dai bergamaschi, dal suo luogo d'origine, l'Arlesino, che l'accento gutturale proprio del dialetto locale trasformò rapidamente in Arlecchino. Volle il caso (consenziente forse la malizia del narratore) che quel generale fosse proprio un provenzale e nativo di Arles, sì che il ridicolo ch'egli credeva di gettare sul Bergamasco tornò centuplicato contro se stesso. La storiella fe' presto il giro di tutti i salotti di Parigi; e il suscettibile generale per ben due volte in una settimana dové trarre la spada per amor di Arlecchino. Finché Bonaparte per cavarlo d'impaccio gli diè un comando nella natia Provenza."*

(da: Sagredo, *Aneddotica delle Scienze,* Hoepli, Milano 1948, pag. 253)

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Lorenzo Mascheroni
Problemi di Geometria
(colle dimostrazioni del Capitano Sacchi)
Milano, 1832

Un trattato di geometria diviso in cinque parti. Le prime tre trattano della misura dei segmenti (v. **Problema I, 15 soluzioni**), della loro direzione, della misura degli angoli e delle aree. La quarta parte contiene la *poligonometria*, ossia il metodo di misurare le aree dei **poligoni** piani (v. **Problema XVII**). La quinta parte riguarda la misura del volume *(solidità)* dei **poliedri** (v. **Problema IX**).

Vita di Lorenzo Mascheroni

PROBLEMI
DI GEOMETRIA

LIBRO PRIMO
DELLA MISURA DELLE LINEE

PROBLEMA I.

Misurare una distanza AB *accessibile nei soli due estremi* A *e* B.

Soluzione 1. Preso qualunque punto C, dal quale si possa andare in A e B, cioè misurare le rette CA, CB (*fig.* 1), e portata sulla continuazione della AC la CD che le sia uguale, e parimente sulla continuazione della BC la CE sua eguale, si avrà $DE = AB$.

Soluzione 2. Preso colla stessa condizione un punto C (*fig.* 2), e portata sulla continuazione della AC la $CE = BC$, e sulla continuazione della BC la $CD = AC$; si avrà $DE = AB$.

Dimostrazione. *Due triangoli qualunque sono perfettamente uguali, allorchè hanno un angolo uguale, compreso fra lati rispettivamente eguali; dunque in ambedue i casi* ED = AB. Bossut, pag. 22, Teor. VIII.

Soluzione 3. Se da un punto *V* (*fig.* 3) si potrà andare in *A* e in *B*, se prendendo *VC* = *VA* anche da *C* si potrà andare in *A*; si avrà

$$AB = \sqrt{(AC^2 \frac{VB}{VC} + BC^2)}$$

Dimostr. *Si cali sopra* BV *la perpendicolare* AN, *e si denomini*

AV = CV = a
BC = d
AC = b
BV = c
VN = x
AB = z

sarà CN = a − x
BN = c − x
AN = y.

Essendo AN *cateto comune ai due rettangoli* ANV, ANC, *per loro proprietà s'avrà*

$y^2 = a^2 - x^2$, $y^2 = b^2 - (a - x)^2$

eguagliando i due valori si ha l'equazione

$$a^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2,$$

da cui fatto il quadrato, e ridotta si ha

$$x = \frac{2a^2 - b^2}{2a}.$$

Dal triangolo retto ANB *si ha*

$z^2 = y^2 + (c - x)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$,

per costruzione di figura si ha $y^2 + x^2 = a^2$, *e sostituito al residuo* x *il suo valore si ha*

$$z^2 = c^2 + a^2 - \frac{2ca^2 - cb^2}{a},$$

essendo poi per costruzione d = c − a, *e* $d^2 = c^2 + a^2 - 2ac$, *sostituendosi questi equivalenti valori nell'equazione* z^2 *si ha*

$$z^2 = d^2 + \frac{b^2 c}{a}.$$

Sostituendo alle lettere le linee, ed estraendo la radice si ha

$$AB = \sqrt{(AC^2 \frac{VB}{VC} + BC^2)}.$$

Soluzione 4. Se dal punto *V* si potrà andare in *A* e *B*, e se prendendo sopra le *VA*, *VB*, le *VD*, *VE* si potrà andare da *D* in *E* (*fig.* 4); si avrà

$$AB = \sqrt{\left\{AV^2 + BV^2 - \frac{AV \cdot BV}{DV \cdot EV}(DV^2 + EV^2 - DE^2)\right\}}$$

Dimostr. *Calate le perpendicolari* AN, DM *sopra il lato* VB, *e sia*

$$VB = c$$
$$DV = m$$
$$VE = n$$
$$DE = b$$
$$DM = y$$
$$ME = x$$
$$MV = n \pm x$$
$$AB = z.$$

Dall'analogia dei due triangoli simili AVN, DVM *si ha*

$$VN = \frac{(n \pm x)}{m} a,$$

$$AN = \frac{a}{m} y,$$

$$BN = c - \frac{(n \pm x)}{m} a.$$

Dai due triangoli rettangoli DVM, DEM *si ha doppio valore di* y;

cioè 1.° $y^2 = m^2 - (n \pm x)^2$,

2.° $y^2 = b^2 - x^2$;

questi valori ragguagliati si ha l'equazione

$$m^2 - (n \pm x)^2 = b^2 - x^2,$$

da cui $x = \frac{\mp b^2 \mp n^2 \pm m^2}{2n}$.

Ora dal triangolo rettangolo ANB *si ha*

$$z^2 = \frac{a^2}{m^2}(m^2 - (n \pm x)^2) +$$

$$c^2 - 2ac\frac{(n \pm x)}{m} + \frac{(n \pm x)^2 a^2}{m^2} =$$

$$a^2 + c^2 - \frac{2ac}{m}(n \pm x),$$

ove sostituito il valore di x *si ha*

$$z^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac}{2mn}(n^2 + m^2 - b^2),$$

rimesse alle lettere le linee si ha

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - \frac{AV.BV}{DV.EV}(DV^2 + EV^2 - DE^2)}$$

Soluzione 5. Se nel triangolo *ABV* (*fig.* 4) si potranno misurare due angoli e il lato *AV*, si avrà

$$AB = AV \frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } B}$$

Se si potranno misurare due angoli e il lato *BV*, si avrà $AB = BV \frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } B}$.

Dimostr. *Il noto teorema di Trig. che i lati d'un triangolo stanno come i seni degli angoli opposti, dimostra le precedenti due soluzioni.* Bossut, pag. 124, Teor. III.

Soluzione 6. Se si potrà misurare l'angolo *V*, ed i due lati *AV*, *BV*, si avrà

$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV.BV.\text{cos. } AVB)}$.

Dimostr. *Calata la perpendicolare* AN *sul lato* BV, *si avrà*

$$AB^2 = AN^2 + BN^2$$
$$= AV^2 - VN^2 + (BV - VN)^2,$$

onde $AB^2 = AV^2 + BV^2 - 2BV.VN$;

ma $VN = AV \text{ cos. } V$;

dunque

$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2BV.AV.\text{cos. } V)}$.

Si potrà ancora trovare *AB* in questa maniera.

Coll'equazione $\text{tang.}\frac{A-B}{2} = \frac{BV-AV}{BV+AV}\text{tang.}\frac{A+B}{2}$

si verrà a conoscere $\text{tang.}\frac{A-B}{2}$, e per conseguenza $\frac{A-B}{2}$; la quale semi-differenza degli angoli *VAB*, *VBA* aggiunta alla semi-somma $\frac{A+B}{2}$ darà l'angolo maggiore *A* opposto al lato *BV* che si suppone maggiore di *AV*, e sottratta alla medesima semi-somma darà il minore, e si avrà poi *AB* per via della soluzione 5.

Vedi *Bossut*, Teor. IV, ove dice che in ogni triangolo rettilineo si ha questa proporzione. *La somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semi-somma dei due angoli opposti a questi lati, sta alla tangente della loro semi-differenza.*

Soluzione 7. Se si potrà fare che l'angolo *V* (*fig.* 5) sia retto, e misurare *AV* e *BV*, si avrà

$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2)}$.

Bossut, pag. 76, Teor. I.

Soluzione 8. Se potendosi fare retto l'angolo *V* (*fig.* 5) si potrà misurare anche uno degli angoli *A* e *B*, ed uno dei lati *AV* e *BV*, si avrà

o vero $AB = AV.\text{ sec. } VAB = \frac{AV}{\text{cos. } VAB}$

$AB = BV.\text{ sec. } VBA = \frac{BV}{\text{cos. } VBA}$.

Dimostr. *In ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa sta al raggio, come un lato al coseno dell'angolo adiacente. Dunque* AB : 1 : : AV : cos. A,

onde $AB = \frac{AV}{\text{cos. } A} = AV.\text{ sec. } A$ *essendo*

$\text{sec. } A = \frac{1}{\text{cos. } A}$.

Bossut, 119. Corol. I. *Così per altro valore.*

Soluzione 9. Se si potrà fare retto l'angolo A, e misurare AV, VB (*fig.* 6), si avrà

$$BA = \sqrt{(BV^2 - AV^2)} = \sqrt{(BV + AV)(BV - AV)}.$$

Si procede nell'istessa maniere quando si può fare un angolo retto in B.

Soluzione 10. Se si potrà fare un angolo retto in A, e misurare uno degli altri due angoli V e B, ed uno dei due lati AV, BV (*fig.* 6), si avrà

$$AB = AV.\ \text{tang.}\ AVB,$$

o vero $AB = BV.$ sen. AVB

Vedi *Bossut*, pag. 123, Teor. II, ecc.

Soluzione 11. Se si potrà fare un angolo retto in A, e semi-retto in V (*fig.* 6), si avrà

$$AB = AV \text{ o vero } AB = \frac{BV}{\sqrt{2}}.$$

Dimostr. 1.° *Sarà pure semi-retto il terzo angolo, e perchè ad angoli uguali s'oppongono lati eguali*, sarà AB = AV. Bossut, pag. 14, Teor. II.

2.° *L'espressione* $AB = \frac{HV}{\sqrt{2}}$.

Si ha dalla soluzione 10, *cioè*

$$AB = BV.\ \text{sen.}\ AVB = BV\ \text{sen.}\ 45°$$

per costruzione della presente figura. Essendo poi

$R^2 = \text{sen.}^2\ 45 + \text{cos.}^2\ 45 = 2\ \text{sen.}^2\ 45 = 1$ (*valore del raggio*) *si avrà*

$\text{sen.}\ 45° = \text{cos.}\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; *dunque* $AB = \frac{BV}{\sqrt{1}}$.

Soluzione 12. Se si potrà fare un agolo semi-retto in A e in B, e retto in V, si avrà

$$AB = AV.\sqrt{2} = BV.\sqrt{2}.$$

Dimostr. $AB : 1 = AV : \text{cos.}\ 45° \left(= \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

onde $AB = AV.\sqrt{2}$,

così pure $AB : 1 = BV : \text{cos.}\ 45°$

ed $AB = BV.\sqrt{2}$.

Soluzione 13. Se si potranno fare retti i quattro angoli A, B, C e V (*fig.* 7), si avrà $AB = VC$.

Dimostr. *Allora il quarto pure sarà per necessità retto, e la figura sarà un quadrilatero rettangolo, in cui i quattro lati saranno paralleli ed eguali.*

Soluzione 14. Se si potrà fare semi-retto l'angolo V, e misurare AV, BV (*fig.* 4), si avrà

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - AV.BV.\sqrt{2})}.$$

Dimostr. *La soluzione presente è eguale alla* [illegible] *colla semplice mutazione nel caso attuale* [illegible] AVB *in* cos. $45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *dunque*

$$AB = \sqrt{\left(AV^2 + BV^2 - \frac{2AV.BV.}{2\sqrt{}}\right)},$$

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - AV.BV.\sqrt{2})}.$$

Soluzione 15. Preso un qualche punto V (*fig.* 8) donde collo squadro si possa traguardare in A, e B, e presa sulla continuazione di un lato dell'angolo retto AVB, per esempio sulla continuazione del lato AV la VN, eguale allo stesso lato AV, si avrà $AB = NB$.

Dimostr. *Chiaramente apparisce essere allora i due triangoli perfettamente uguali.*

PROLEMA II.

Misurare la CZ, *della quale non è accessibile altro che il punto* C.

Soluzione 1. Si prenda un punto A che sia in linea retta coi due punti C, Z (*fig.* 5), e condotte ad un qualunque punto B fuori di questa retta le AB, CB, e divisa la AB per metà in M, e notato sulla BC il punto P dove è tagliata dalla MZ, si avrà

$$CZ = \frac{AC.CP}{BP - GP}.$$

Dimostr. *Tirisi la* MS *parallela al* AZ *sino all'incontro di* CB, *allora si avranno i due triangoli* ACB, MSB *simili, onde*

$$AB : AC :: MB : MS = \frac{AC.MB}{AB} = \frac{1}{2}AC,$$

essendo il punto M *preso alla metà di* AB, *si avrà pure*

$$BS = CS = \frac{1}{2}BC, PS = BP - BS = BP - \frac{1}{2}.BC,$$

onde

$$PS = \frac{2.BP - BC}{2} = \frac{BP - PC}{2}.$$

Ora dai due triangoli simili CZP, MPS *si ha l'analogia seguente:*

$$CZ : CP = MS : PS,$$

$$CZ = \frac{CP.MS}{PS} = \frac{\frac{CP.AC}{2}}{\frac{BP - PC}{2}}.$$

$$CZ = \frac{CP \,.\, AC}{BP - PC}.$$

Soluzione 2. Si prenda il punto P alla metà della CB, e per esso si traguardi in Z da un punto M della AB; si avrà

$$CZ = \frac{MB \,.\, AC}{MA - MB}.$$

Dimostraz. *Costruita la medesima figura di*

$$= \tfrac{1}{3}\, cgf \sqrt{\left(\text{sen.}\frac{p+q+r}{2}\,\text{sen.}\frac{p+q-r}{2} \times \text{sen.}\frac{p-q+r}{2}\,\text{sen.}\frac{q+r-p}{2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{6} cgf \sqrt{[(\cos.(r-p)-\cos.q)(\cos q-\cos.(r+p))]}.$$

Dimostr. *Dalla Dimostr. del Prob. VII, Lib. V fatti i debiti cangiamenti, si ha*

$$AO = \frac{\sqrt{(AC^2 \text{sen.}^2 r - CN^2 - CM^2 + 2CN\,CM\cos. r)}}{\text{sen. r}};$$

pei triangoli retti ANC, AMC *si ha*

$CN^2 = AC^2 \cos.^2 q$,

$CM^2 = AC^2 \cos.^2 p$; *dunque*

$$AO = \frac{AC}{\text{sen. r}} \sqrt{(1 - \cos.^2 r - \cos.^2 q - \cos.^2 p + 2 \cos. r \cos. p \cos. q)},$$

e la solidità della piramide

$$= \frac{1}{2.3} AO \,.\, BC \,.\, CD \text{ sen. r}$$

fatte le sostituzioni diverrà =

$$\tfrac{1}{6} gfc \sqrt{(1 - \cos.^2 p - \cos.^2 q - \cos.^2 r + 2 \cos. p \cos. q \cos. r)} \ldots. =$$

$$\tfrac{1}{6} cgf \sqrt{\left(\text{sen.}\frac{p+q+r}{2}\,\text{sen.}\frac{p+q-r}{2} \times \text{sen.}\frac{p-+r}{2}\,\text{sen.}\frac{q+r-p}{2}\right)}.$$

Da qui deducesi, che di tre angoli piani componenti un angolo solido due presi assieme sono sempre maggiori del terzo.

COROLLARIO.

Se sarà $p = q = r$, la solidità sarà =

$$\tfrac{1}{6} gfc \sqrt{(1 - 3 \cos.^2 p + 2 \cos.^3 p)} =$$

$$\frac{gfc}{12} \sqrt{2 (\cos. 3p - 3 \cos. 2p + 3 \cos. p - 1)} =$$

$$\frac{gfc}{3} \sqrt{\text{sen. } 3\,\frac{p}{2} \,.\, \text{sen.}^3 \frac{p}{2}}.$$

PROBLEMA IX.

Misurare la solidità d'un corpo che ha due basi opposte ABCD, abcd (*fig.* 100) *parallele cogli angoli tutti sporgentisi, e quattro facce laterali* ABba, BCcb, CDdc, DAad *piane poste comunque.*

Soluzione 1. Si misurino due angoli opposti nelle basi, per esempio *B* e *D*, che saranno rispettivamente eguali agli angoli *b* e *d*; e misurino pure tutti i lati nelle due basi, e l'altezza

del corpo, ossia la distanza delle basi parallele; la quale si chiami *P*. Si avrà la solidità

$$= \tfrac{1}{6} P \text{ sen. } ABC\,[\,AB(BC + \tfrac{1}{2}bc) + ab(bc + \tfrac{1}{2}BC)\,] + \tfrac{1}{6} P \text{ sen. } ADC\,[\,CD(DA + \tfrac{1}{2}da) + cd(da + \tfrac{1}{2}DA)\,].$$

Dimostr. *Facciansi le due sezioni* MNPQ, mnpq *parallele alle basi, ed infinitamente vicine, s'abbassino dall'ongolo* b, *o qualunque le due* bX, bZ *una perpendicolare sopra la base, l'altra perpendicolare sopra il lato* AB *della medesima. I due punti, ove la base, e cadauna sezione è incontrata da queste due linee s'uniscano colle parallele* ZX, ϕu, ΦU *nei detti piani. Per costruzione del solido essendo ciascuna faccia laterale del medesimo un trapezio, si avrà il valor analitico di ciascun lato della sezione* MNPQ *così. Nel tropezio* ABab, bZ *sarà la distanza dei due lati paralleli* AB, ab, *perciò*

$(AB + ab)\,\frac{1}{2} \cdot bZ = (MN + ab)\,\frac{1}{2} \cdot bU + (MN + AB)\,\frac{1}{2}\,UZ$ . . . . *da qui*

$$MN = \frac{AB \cdot bU + ab \cdot UZ}{bZ}, \text{ ovvero, poichè}$$

$(bZ : bU : UZ :: bX : b\Phi : \Phi X)$,

$$MN = \frac{AB \cdot b\Phi + ab \cdot \Phi X}{bX}, \text{ e così degli altri lati.}$$

Si chiami AD = G, DC = F, CB = E, AB = K, ad = g, dc = f, cb = e, ab = k, bX = P, b Φ = y, $\Phi\phi$ = dy, ΦX = P − y, *onde*

$$MN = \frac{Ky + k(P - y)}{P} = \frac{y(K - k) + kP}{P}$$

$$PQ = \frac{Fy + f(P - y)}{P} = \frac{y(F - f) + fP}{P}$$

$$NP = \frac{Ey + e(P - y)}{P} = \frac{y(E - e) + eP}{P}$$

$$MC = \frac{Gy + g(P - y)}{P} = \frac{y(G - g) + gP}{P}.$$

Supposto ora il quadrilatero MNPQ *diviso in due triangoli* MNP, MQP. *Dal num.* 2, *Prob. I, Lib. III, s'avrà area*

$$MNPQ = \tfrac{1}{2}\,MQ.PQ \text{ sen. } MQP + \tfrac{1}{2}\,MN.NP \text{ sen. } MNP$$

ove sostituiti i valori analitici dei lati, s'avrà nuovamente area

$$MNPQ = \tfrac{1}{2} \text{ sen. } MQP\,[\,\frac{y(G-g)+gP}{P}\,]\,[\,\frac{y(F-f)+fP}{P}\,] + \tfrac{1}{2} \text{ sen. } MNP\,[\,\frac{y(K-k)+kP}{P}\,]\,[\,\frac{y(E-e)+eP}{P}\,];$$

quest' area moltiplicata per l'altezza infinitesima $\Phi\phi$ = dy *darà la solidità del prismetto infinitesimo* MNPQmnpq, *ossia differenziale del*

solido abcdMNPQ =

$$\tfrac{1}{2}\frac{\text{sen. MQP}}{P^2}[y^2dy(G-g)(F-f)+ydy(F-f)gP$$
$$+ydy(G-g)fP+fgP^2dy]$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{\text{sen. MNP}}{P^2}[y^2dy(K-k)(E-e)+$$
$$ydy(E-e)kP+ydy(K-k)eP+ekP^2dy].$$

Solido abcdMNPQ

$$=\tfrac{1}{2}\text{sen MQP}\left[\frac{(G-g)(F-f)}{P^2}\int y^2dy+\right.$$
$$\left.\frac{(F-f)eP}{P^2}\int ydy+\frac{(G-g)fP}{P^2}\int ydy\ \frac{fgP^2}{P^2}\int dy\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{sen. MNP}\left[\frac{(K-k)(E-e)}{P^2}\int y^2dy+\right.$$
$$\left.\frac{(E-e)kP}{P^2}\int ydy+\frac{(K-k)eP}{P^2}\int ydy+\frac{ekP^2}{P^2}\int dy\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\text{sen. MQP}\left[\frac{(G-g)(F-f)y^5}{3P^2}+\right.$$
$$\left.\frac{(F-f)gP}{2P^2}y^3+\frac{(G-g)fP}{2P^2}y^3+\frac{fgP^2}{P^2}y\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{sen MNP}\left[\frac{(K-k)(E-e)y^3}{3P^2}+\right.$$
$$\left.\frac{(E-e)kPy^2}{2P^2}+\frac{(K-k)ePy^2}{2P^2}+\frac{ekP^2y}{P^2}\right]$$

non s'aggiunge costante, poichè svanendo la y, svanisce pure il solido, dunque cost. = o. *Facendo* y = P, *riducendo i termini, e sostituendo le linee alle lettere, e ricordandosi, che*

ang. MQP = ang. ADC,

ang. MNP = ang. ABC, *avremo solido*

$$\text{abcdABCD} = \tfrac{1}{2}\text{P sen. ADC}[\text{CD}(\text{DA}+\tfrac{1}{2}\text{da})$$
$$+\text{cd}(\text{da}+\tfrac{1}{2}\text{DA})]+\ldots.$$
$$\tfrac{1}{2}\text{P sen. ABC}[\text{AB}(\text{BC}+\tfrac{1}{2}\text{bc})+\text{ab}(\text{bc}+\tfrac{1}{2}\text{BC})].$$

Scolio I.

Se si concepisce che la diagonale che passa per *a* e *c*, radesse le due *aA*, *cC* stando sempre in un piano parallelo alle basi finchè venisse in *AC*; essa dividerebbe il solido in due parti, delle quali quella che contiene l'angolo *ABC* avrebbe per misura della sua solidità

$$\tfrac{1}{2}P\,\text{sen.}\,ABC[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)]$$

e l'altra che contiene l'angolo *ADC* sarebbe misurata dall'altra espressione

$$\tfrac{1}{2}P\,\text{sen.}\,ADC[CD(DA+\tfrac{1}{2}da)+cd(da+\tfrac{1}{2}DA].$$

Se le *Aa*, *Cc* non sono nello stesso piano, la superficie descritta dal movimento della diagonale *ac* non sarà un piano.

Quindi si ha un metodo di misurare la solidità d'una specie di piramide triangolare troncata, che

Problema si ristringerà a dividere uno dei tre triangoli in una data ragione; sicchè basterà dividere in quella ragione la sua base in Q o in E, ovvero in T.

PROBLEMA XVII.

Misurare l'area d'un quadrilatero ABCD (*fig.* 84) *che ha un angolo retto in* A.

Soluzione. Sia $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$, sarà l'area del quadrilatero

$$= \tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b-c+d)\times (a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 4a^2d^2 - 8abcd]}.$$

Dimost. *Si tiri la diagonale* BD, *si avrà diviso il quadrilatero in due triangoli, uno rettangolo,* DAB, *e di cui l'area sarà* $= \frac{1}{2}$ ad; *l'altro obliquangolo* DCB, *di cui cui si cerchi l'area per via dei lati* CD = c, BC = b,

$$DB = \sqrt{(a^2 + d^2)},$$

la quale pel n.° 4, Prob. I, Lib. III, sarà

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[c+b+\sqrt{(a^2+d^2)}][c+b-\sqrt{(a^2+d^2)}]\times [c-b+\sqrt{(a^2+d^2)}][-c+b+\sqrt{(a^2+d^2)}]}$$

effettuata la moltiplica, e ridotta l'equazione s'avrà

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2d^2 + 2b^2d^2 + 2b^2c^2 - 2a^2d^2 - a^4 - b^4 - d^4 - c^4)}$$

aggiungendo i termini $4a^2d^2 + 8abcd$ *e poi sottraendo, l'equazione varierà di formula, non di valore; dunque*

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2d^2 + 2b^2d^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd) - 4a^2d^2 - 8abcd]}.$$

Svolgendo quest'equazione nei suoi fattori coi metodi dell'algebra, e sommando l'aree dei due triangoli avrò quella del quadrilatero

$$= \tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b-c+d)\times (a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 4a^2d^2 - 82abcd]}.$$

PROBLEMA XVIII.

Misurare l'area d'un quadrilatero ABCD (*fig.* 84), *nel quale la somma di due angoli opposti è eguale a due retti; ossia il quadrilatero si può iscrivere nel cerchio.*

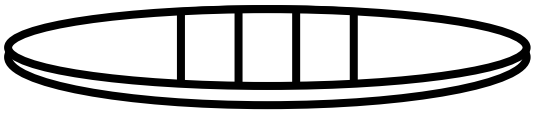
Soluzione. Denominando i lati come nel Prob. XVII, sarà l'area del quadrilatero

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)\times (a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

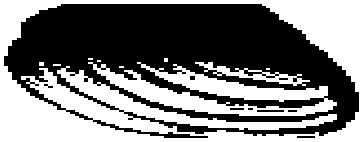
Dimostr. *Dall'angolo* C *s'abbassi* CE *perpendicolare sopra il lato* AD *prolungato, e* CF

La numerazione Maya

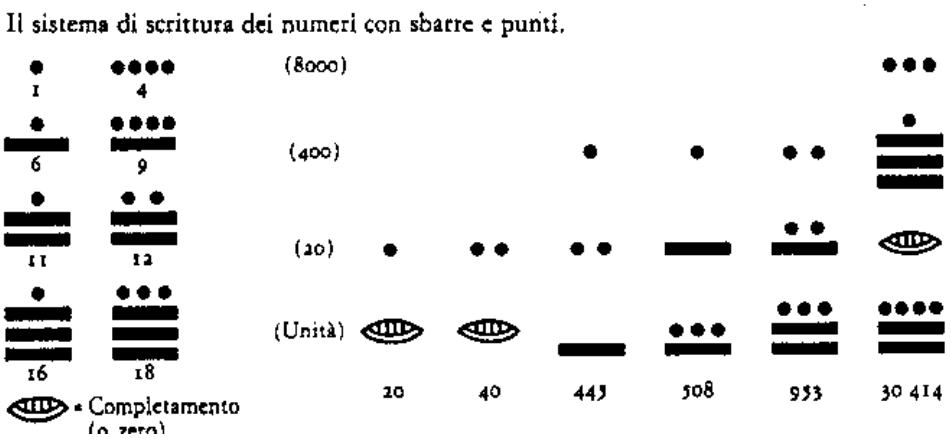
Gli antichi abitanti della penisola dello Yucatan, nell'attuale Messico, usavano un sistema di numerazione in base 20. La notazione era posizionale: utilizzavano un puntino • per l'unità, una barretta orizzontale ▬ per le cinquine, e… il simbolo



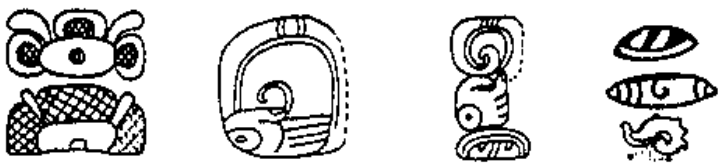
(probabilmente una conchiglia stilizzata)



per indicare lo zero! Questo simbolo, insieme a molte sue varianti, esisteva in America molti secoli prima che gli Arabi lo portassero in Europa, avendone appreso l'uso dagli Hindu. Ecco alcuni esempi di numeri scritti alla maniera dei Maya:



Nella nostra scrittura, la successione delle cifre di un numero indica, da destra verso sinistra, le unità, le decine, le centinaia, le migliaia, le decine di migliaia, e così via. Dove noi sottintendiamo 1, 10, 100, 1000, 10000,…che poi sono le potenze di 10, i Maya sottintendevano 1, 20, 400, 8000, 160000, ecc., ossia le potenze di 20. La notazione era additiva, nel senso che ogni numero coincideva con la somma delle quantità espresse dai segni che lo rappresentavano. A differenza della nostra numerazione e della **numerazione babilonese**, i segni erano disposti verticalmente.
Alcuni numeri ammettevano anche delle notazioni alternative, come lo zero



ed anche il 20: 

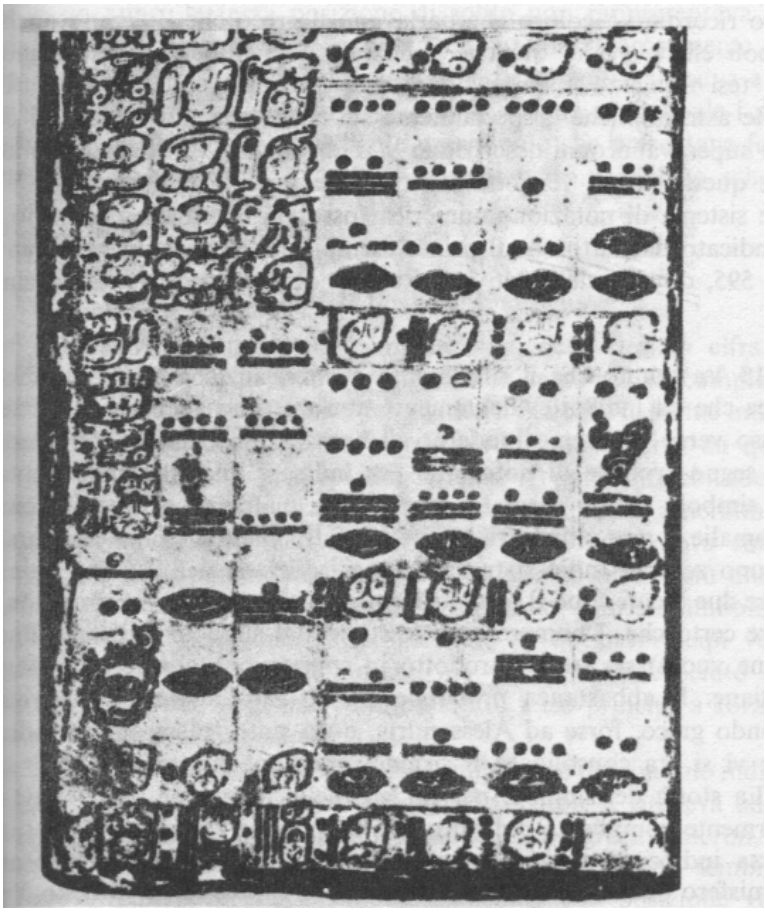
I numeri da 1 a 13, inoltre, erano divinizzati, e talvolta i Maya li raffiguravano sotto forma di volti. Ecco diverse rappresentazioni della cifra 1 nel 10, nel 19, e come unità.



Un sistema leggermente diverso veniva usato per scrivere le date. L'anno dei Maya (come quello dei **Babilonesi**!) durava 360 giorni (cui si aggiungevano 5 giorni "infausti"). La terza cifra dal basso indicava allora $360 = 18 \times 20$ anziché $400 = 20 \times 20$.

La numerazione indo-arabica
La matematica indiana e araba

Un frammento del codice di Dresda



Il calendario Maya – un frammento dal Codice di Dresda



Matematica e Informatica

John von Neumann
Collected Works
Volume V: Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis
Oxford-London-New York-Paris, 1963

(*Raccolta di Scritti*
Volume V: Progettazione di Computers, Teoria degli Automi ed Analisi Numerica
Oxford-Londra-New York-Parigi, 1963)

Citiamo dal paragrafo **Logica ed Automi:** *"È stato osservato da A. M. Turing nel 1937 e da W.S. McCulloch e W. Pitts nel 1943 che la logica effettivamente costruttiva, cioè la **logica intuizionistica**, può essere studiata in termini di automi. Quindi le proposizioni logiche possono essere rappresentate come reti elettriche o sistemi nervosi (idealizzati); mentre le proposizioni logiche sono costruite combinando certi simboli primitivi, le reti sono formate collegando le componenti di base, come i relais nei circuiti elettrici ed i neuroni nei sistemi nervosi. Una proposizione logica è allora rappresentata come una "scatola nera" che ha un numero finito di input (fili o fasci nervosi) e un numero finito di output. L'operazione eseguita dalla scatola è determinata dalle regole che definiscono quali input, se stimolati, danno origine a quali risposte in quali output, proprio come una funzione proposizionale è determinata dai suoi valori per tutte le possibili assegnazioni di valori alle sue variabili."*

Le macchine descritte da von Neumann realizzano gli operatori logici del **calcolo proposizionale** ideato da **George Boole** nell'Ottocento: i componenti fondamentali di questi dispositivi sono gli **organi elementari di calcolo**.

Concatenando varie operazioni si ottiene un ***programma***: la successione delle operazioni è rappresentata schematicamente dal cosiddetto ***diagramma di flusso***. Questo va tradotto in una serie di comandi propri di un ***linguaggio di programmazione***

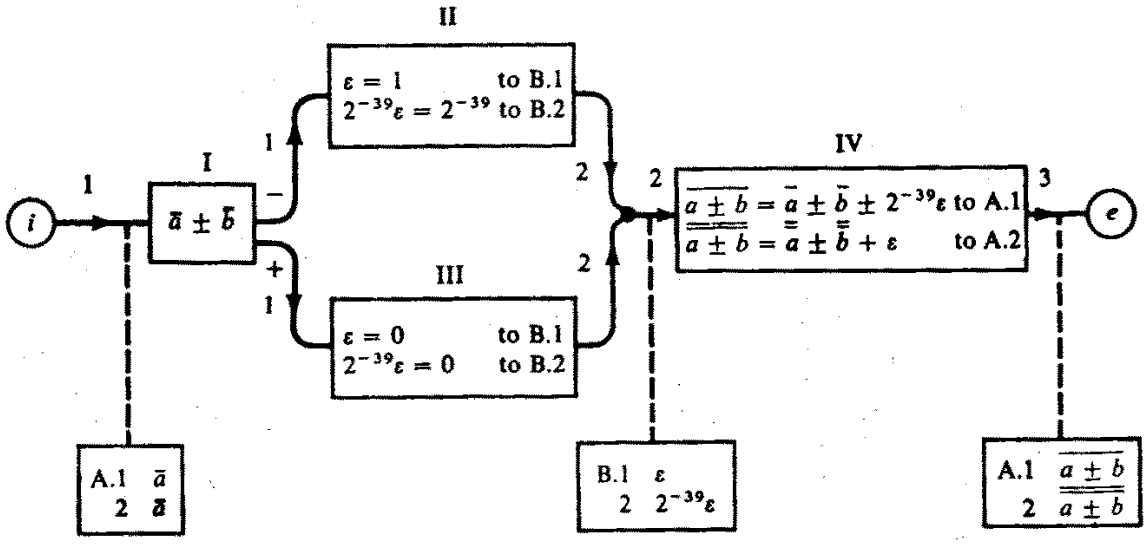
che l'elaboratore elettronico sia in grado di capire. Un linguaggio molto diffuso per le applicazioni in matematica è il **PASCAL**. Negli ultimi anni sono stati sviluppati ***pacchetti applicativi*** in grado di risolvere problemi matematici di vario genere. Uno di questi è **MATHEMATICA**, che consente, tra l'altro, di tracciare curve e superficie (**superficie romana di Steiner**).

John von Neumann è passato alla storia anche come creatore della ***Teoria dei Giochi***, una nuova disciplina matematica che studia le strategie e trova applicazione in economia e politica.

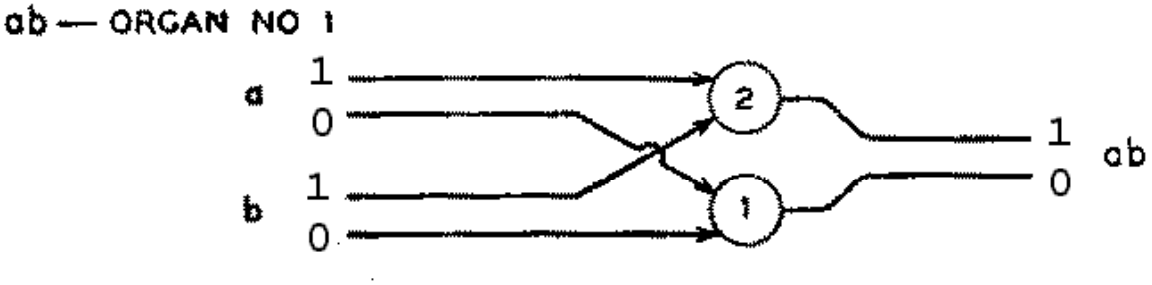
Diagramma di flusso della divisione tra polinomi

Programma in PASCAL per l'algoritmo euclideo

Il diagramma di flusso per calcolare la somma e la differenza di due numeri *a* e *b* mantenendo la precisione di due cifre dopo la virgola



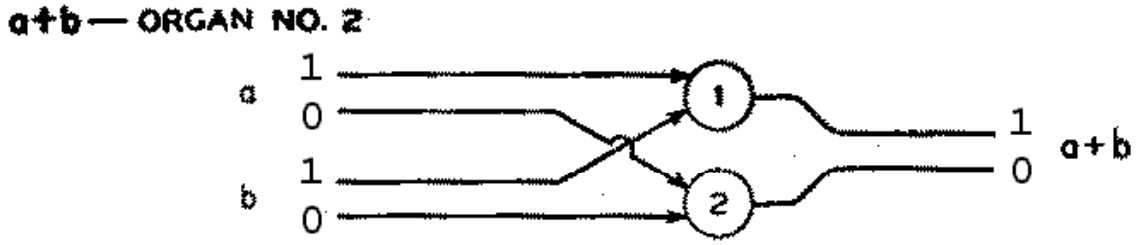
Organi elementari di calcolo



Questo è lo schema di un dispositivo logico ideato da **John von Neumann**: *a* e *b* sono due proposizioni, che, secondo la **logica booleana**, possono assumere valore di verità *1* o *0*. Questi dati *(input)*, una volta immessi nella macchina, vengono trasmessi, sotto forma di impulsi elettrici, a due congegni (indicati da cerchi) attraverso linee indipendenti. Il congegno indicato dal numero *2* si accende (dando origine all'output *1*) solo se vi arrivano due stimoli, mentre basta un solo impulso per accendere il congegno indicato dal numero *1* (che fornisce l'output *0*).

In questo modo l'output è sempre il valore di verità della proposizione *"a* e *b"*, ovvero del prodotto *"ab"* nel linguaggio di **Boole**. Infatti si ottiene *1* se e solo al congegno *2* giungono due impulsi, cioè se e solo se le proposizioni *a* e *b* sono entrambe vere. Nel moderno linguaggio informatico, la macchina illustrata corrisponde all'operatore elementare ***AND***.

La macchina seguente riproduce invece il funzionamento dell'operatore ***OR*** (qui rappresentato dal segno +), ossia fornisce il valore di verità della proposizione *"a* o *b"* in funzione dei valori di verità di *a* e *b*.



Il corpo dei Quaternioni

Un **quaternione** è, per definizione, una coppia di numeri complessi.
Poniamo $\mathbf{H} = \mathbf{C} \times \mathbf{C} = \mathbf{R}^4$ e definiamo due operazioni + e · ponendo:
$(z, w) + (u, v) = (z + u, w + v)$
$(z, w) \cdot (u,v) = (z\,u - v\bar{w}, v\,z + w\,\bar{u})$
dove z, w, u, v sono numeri complessi, le operazioni eseguite nei termini a destra sono la somma ed il prodotto tra numeri complessi e il soprassegno indica il passaggio da un numero complesso al suo complesso coniugato in **C**.
È evidente l'analogia con le corrispondenti definizioni per i numeri complessi.
Come i numeri reali si ritrovano tra i complessi come coppie $(a, 0)$, così sia i reali sia i complessi si ritrovano in **H** rispettivamente come le coppie di complessi $((a, 0), (0, 0))$ e $((a, b), (0, 0))$, ovvero come quaterne di numeri reali $(a, 0, 0, 0)$ ed $(a, b, 0, 0)$ sulle quali le operazioni + e · in **H** restituiscono + e · tra numeri reali e tra numeri complessi rispettivamente. Se si pone:
$1 = (1, 0, 0, 0) = ((1, 0), (0, 0))$; $i = (0, 1, 0, 0) = ((0, 1), (0, 0))$;
$j = (0, 0,1, 0) = ((0, 0), (1, 0))$; $k = (0, 0, 0,1) = ((0, 0), (0,1))$;
un elemento q di **H** si scrive $q = (a, b, c, d) = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, o più semplicemente $a + bi + cj + dk$, con a,b,c,d numeri reali.
È facile verificare che $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$; $i \cdot j = -j \cdot i = k$; $j \cdot k = -k \cdot j = i$; $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

Inoltre (**H**, +, ·) è un **corpo** poiché (**H**, +) è un gruppo abeliano con elemento neutro $0 = (0, 0, 0, 0)$, la moltiplicazione è distributiva a destra ed a sinistra rispetto all'addizione e (**H***, ·) è un gruppo con elemento neutro 1 ed ogni quaternione $q \neq 0$ ha inverso $q^{-1} = (a - bi - cj - dk) / (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.
Questo gruppo è **non commutativo** poiché, per esempio, $i \cdot j \neq j \cdot i$.

Si definisce **coniugato** di $q = a + bi + cj + dk$ il quaternione $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ e si dice **norma** di q il numero reale $\|q\| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}$ e quindi q^{-1} si può scrivere come $\bar{q} / \|q\|^2$. Un quaternione q è *reale* se e solo se coincide con il suo coniugato, e si chiamano *quaternioni puri* i q tali che $q = -\bar{q}$. Essi sono del tipo $q = bi + cj + dk$.

Particolarmente importante è $\mathbf{H_1} = \{q \in \mathbf{H};\ \|q\| = 1\}$. Questo insieme è ancora un gruppo per · ed $1, -1$ sono gli unici quaternioni reali che appartengono a $\mathbf{H_1}$.

Anche in questo contesto c'è un'analogia con **C**; infatti l'insieme dei numeri complessi di norma *1* costituisce un gruppo che può essere descritto come $\mathbf{S^1} = \{(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ a^2 + b^2 = 1\}$, cioè come la circonferenza di raggio *1* e centro *0* in $\mathbf{R^2}$. Tuttavia, mentre $\mathbf{S^1}$ è abeliano, $\mathbf{H_1}$ non lo è, poiché *i* e *j* sono in $\mathbf{H_1}$, ma $i \cdot j \neq j \cdot i$.
Se si considera $\mathbf{S^3} = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R^4}\ ;\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$, la sfera di raggio *1* e centro *0* in $\mathbf{R^4}$, essa è identificabile con $\mathbf{H_1}$ e quindi ha una struttura di gruppo **non** commutativo.

Gli Ottoniani o numeri di Cayley

Ripercorrendo formalmente la costruzione che fa passare dal campo complesso al **corpo dei quaternioni**, è possibile introdurre gli ottoniani.

Un **ottoniano** o **numero di Cayley** è per definizione una coppia di quaternioni.
L'insieme degli ottoniani viene denotato con **Ca** = **H** × **H**.
Le due operazioni + e · vengono definite ponendo:
$(p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$
$(p_1, p_2) \cdot (q_1, q_2) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2, q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1)$
dove p_1, p_2, q_1, q_2 sono quaternioni.

Si ottiene che (**Ca**, +) è un gruppo abeliano.
La moltiplicazione è distributiva a destra ed a sinistra rispetto all'addizione, però *non è associativa*.

Si chiama **coniugato** di $c = (p, q)$, l'ottoniano $\bar{c} = (p, -q)$. Si ha $c\,\bar{c} \in$ **R**, $c\,\bar{c} \geq 0$ e si definisce la **norma** di c come $\|c\| = (c\,\bar{c})^{1/2}$.
Si ha $\|c\| = 0 \Leftrightarrow c = 0$.
(**Ca***, ·) è dotato di elemento neutro $(1,0) \in$ **H** × **H** ed ogni $c = (p, q) \neq 0$ ha inverso in $c^{-1} = \bar{c} / \|c\|^2$, ma ovviamente, mancando l'associatività, (**Ca***, ·) non ha struttura di gruppo.
Inoltre se $c\,d = 0$, si ha $0 = \|c\,d\| = \|c\|\,\|d\|$ da cui $\|c\| = 0$ oppure $\|d\| = 0$, e quindi $c = 0$ oppure $d = 0$. Questa proprietà significa che **Ca** *non ha divisori dello zero* e (**Ca**, +, ·) rientra in un tipo di struttura algebrica che prende il nome di ***algebra con divisione***.

Infine, poiché, come insieme, **H** = $\mathbf{R}^4$, si ha che **Ca** = $\mathbf{R}^8$ e l'insieme dei numeri di Cayley di norma 1, identificabile con la sfera $\mathbf{S}^7$ di raggio 1 e centro 0 in $\mathbf{R}^8$, non ha struttura di gruppo, sempre perché non vale la proprietà associativa della moltiplicazione.

I numeri complessi

Denotiamo con **R** l'insieme dei numeri reali. Si sa che ogni numero reale positivo ammette due radici quadrate: ad esempio, *2* ha come radici quadrate $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Come è noto, in **R** non è invece possibile estrarre la radice quadrata di un numero negativo. Quindi, ad esempio, l'equazione di secondo grado

$$X^2 = -1 \qquad (1)$$

non ammette radici reali.

Le cose cambiano completamente se si arricchisce il campo **R**, aggiungendo nuovi numeri, che oggi vengono chiamati *complessi:* si ottiene in questo modo un campo più grande, denotato con **C**, nel quale da tutti i numeri, compresi quelli negativi, è possibile estrarre la radice quadrata. In **C** troviamo ad esempio il numero **i**, detto *unità immaginaria,* che è radice quadrata di -1. L'equazione di secondo grado (1) ha allora in **C** due radici complesse: **i** e **–i**. Più in generale, ogni equazione del tipo

$$X^2 = -a,$$

dove a è un numero reale positivo, ha due radici complesse, ossia $\sqrt{a}\,\mathbf{i}$ e $-\sqrt{a}\,\mathbf{i}$, che sono poi le due radici quadrate (complesse) di $-a$. Infatti:

$$(-\sqrt{a}\,\mathbf{i})^2 = (\sqrt{a}\,\mathbf{i})^2 = (\sqrt{a})^2\ \mathbf{i}^2 = a\,(-1) = -a.$$

Ricordiamo che, data la generica equazione di secondo grado:

$$aX^2 + bX + c = 0 \qquad (2)$$

con coefficienti a,b,c appartenenti a **R**, $a \neq 0$, si definisce *discriminante* il numero $\Delta = b^2 - 4ac$. Sappiamo che quando $\Delta \geq 0$, le radici dell'equazione (2) sono date dalle ***formule di Newton***:

$$x_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a \qquad \text{e} \qquad x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a \qquad (3)$$

coincidenti se $\Delta = 0$. Ora, in **C** sappiamo estrarre le radici quadrate anche dei numeri negativi. Quindi possiamo applicare le formule (3) anche quando $\Delta < 0$. In questo caso otterremo due radici complesse distinte.

Esempio: l'equazione

$$X^2 - 2X + 13 = 0$$

ha le radici complesse:

$$x_1 = 1 + 2\sqrt{3}\boldsymbol{i} \qquad \text{e} \qquad x_2 = 1 - 2\sqrt{3}\boldsymbol{i}.$$

Riassumendo: Un'equazione di secondo grado ha:
1. due radici reali distinte se $\Delta > 0$,
2. una radice doppia se $\Delta = 0$,
3. due radici complesse non reali distinte se $\Delta < 0$.

In ogni caso le radici sono date dalle formule (3).

Osservazione Nel caso 3. le radici sono del tipo $a + b\boldsymbol{i}$ e $a - b\boldsymbol{i}$, con a,b numeri reali, $b \neq 0$.

Il campo **C** è definito come l'insieme dei numeri del tipo $z = a + b\boldsymbol{i}$, con a,b numeri reali. Questo insieme comprende anche tutti i numeri reali: infatti z è il numero reale a se si sceglie $b = 0$. In questo senso, i numeri reali sono particolarissimi numeri complessi. Se invece $a = 0$, allora $z = b\boldsymbol{i}$ e z si dice numero ***immaginario puro***. In generale, quali che siano i numeri a e b, a si dice la ***parte reale*** di z e b si dice la ***parte immaginaria*** di z.

Si può dimostrare che, dato un numero $a + b\boldsymbol{i}$, esiste sempre un'equazione di secondo grado a coefficienti reali che lo ha come radice. Quindi **il campo C è l'insieme di tutti i numeri che sono radici di qualche equazione di secondo grado a coefficienti reali**. In particolare:
- l'insieme dei numeri reali è il sottoinsieme di **C** formato dai numeri che sono radici quadrate di numeri reali maggiori o uguali zero;
- l'insieme dei numeri immaginari puri è il sottoinsieme di **C** formato dai numeri che sono radici quadrate di numeri reali minori di zero.

Osservazione conclusiva
Abbiamo osservato prima che ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali ammette in **C** due radici distinte oppure una radice doppia. Questo fatto si estende alle equazioni di secondo grado a coefficienti complessi.

Esempio: L'equazione

$$X^2 = \boldsymbol{i}$$

ha due radici complesse distinte:

$$x_1 = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} \quad \text{e} \quad x_2 = -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}.$$

Quindi, a patto di contare ogni radice con la sua molteplicità, un'equazione di secondo grado a coefficienti in **C** ha sempre due radici in **C**.

Questo fatto si generalizza come segue: un'equazione di grado n a coefficienti in **C** ha sempre n radici in **C** (contando ogni radice secondo la sua molteplicità). Questo è l'enunciato del **teorema fondamentale dell'algebra**, dimostrato per la prima volta da **Gauss** nel 1799.

Esempio: l'equazione di grado 5

$$X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1 = 0,$$

che si può riscrivere come:

$$(X - 1)^3 (X + \boldsymbol{i}) (X - \boldsymbol{i}) = 0$$

ha $x_1 = 1$ come radice tripla (molteplicità 3), $x_2 = \boldsymbol{i}$ e $x_3 = -\boldsymbol{i}$ come radici semplici (molteplicità 1). Sommando le molteplicità:

$$3 + 1 + 1 = 5.$$

Nota L'unità immaginaria fu introdotta nel Cinquecento da **Rafael Bombelli**, che se ne servì nella **risoluzione di un'equazione di terzo grado** secondo le **formule di Tartaglia**.

Storia dei numeri complessi
Il piano di Gauss
Gli interi di Gauss

Regole di calcolo per i numeri complessi

Dati due **numeri complessi** $z = a + b\boldsymbol{i}$ e $w = c + d\boldsymbol{i}$ (con a,b,c,d numeri reali), la loro somma ed il loro prodotto sono dati dalle seguenti formule:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\boldsymbol{i}$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)\boldsymbol{i}$$

Queste formule sono di immediata verifica: per la seconda è sufficiente tenere presente che $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Una formula per il prodotto più facile da ricordare si ottiene utilizzando la **forma trigonometrica** dei numeri complessi.

Se $z \neq 0$, cioè a e b non sono entrambi nulli, allora il reciproco di z è dato dalla formula:

$$1/z = a/(a^2+b^2) - \boldsymbol{i}b/(a^2+b^2)$$

Da quest'ultima formula risulta che se z è un **intero gaussiano**, $1/z$ è ancora un intero gaussiano se e solo se z è uno fra 1, -1, $\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{i}$. Questi quattro numeri sono dunque le sole *unità* di $\mathbf{Z}[\boldsymbol{i}]$ (le uniche unità di $\mathbf{Z}$ sono, come noto, 1 e -1).

Le operazioni fra numeri complessi possono essere realizzate anche geometricamente nel **piano di Gauss**.

Il piano di Gauss

Fissiamo nel piano euclideo un sistema di assi cartesiani *X* e *Y*, come in figura. Dato un generico punto *P* del piano, di coordinate *(a,b)*, associamo ad esso il **numero complesso** $z = a + b\boldsymbol{i}$. Ad ogni punto del piano corrisponderà così un numero complesso, e viceversa. Quindi il piano diventerà una raffigurazione geometrica del campo **C** dei numeri complessi, detto ***piano di Gauss***.

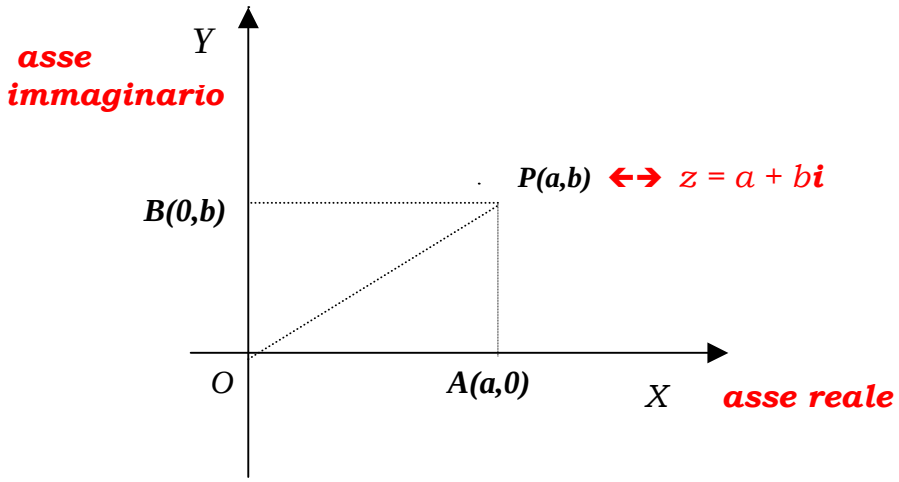


Figura 1

I punti dell'asse *X* sono quelli le cui coordinate sono del tipo *(a,0)*, quindi corrispondono ai numeri complessi aventi parte immaginaria uguale a zero, cioè ai numeri reali. Per questo l'asse *X* è detto ***asse reale***.
Similmente, i punti dell'asse *Y* sono quelli le cui coordinate sono del tipo *(0,b)*, e quindi corrispondono ai numeri complessi aventi parte reale uguale a zero, cioè ai numeri immaginari. Per questo l'asse *Y* è detto ***asse immaginario***.

Questa visualizzazione del campo **C** fu ideata, inutile dirlo, da Gauss, che la confidò, senza pubblicarla, al suo amico **Bessel** in una lettera del 1811. Non si tratta però del primo tentativo di interpretazione geometrica dei numeri complessi. Alcuni anni prima, nel 1799, il norvegese **Caspar Wessel**, che era topografo di professione, e si dilettava di matematica, pubblicò un articolo intitolato *Om directionens analytiske Betegning* (Sulla rappresentazione analitica della direzione) nelle memorie dell'Accademia Reale di Danimarca. La sua idea era quella di identificare, nel piano coordinato, il numero complesso $z = a + bi$ con il segmento orientato *(vettore) OP*, essendo *P*,

come sopra, il punto di coordinate *(a,b)*. Questa rappresentazione era sostanzialmente analoga a quella proposta da Gauss: quest'ultimo, però, non era venuto a conoscenza del lavoro di Wessel, che, in effetti, rimase ignoto al mondo scientifico fino al 1897, anno in cui ne uscì una traduzione in francese.

Il modulo di un numero complesso

Si definisce ***modulo* o *norma*** del numero complesso $z = a + b\boldsymbol{i}$ il numero reale

$$| z |= \sqrt{a^2 + b^2}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo *OAP* della Figura 1 si vede che $|z|$ è proprio la lunghezza del segmento *OP*.

Le operazioni

Nella sua opera **Wessel** descrive come determinare nel piano di Gauss, per via geometrica, la somma ed il prodotto di due numeri complessi z_1 e z_2 dati.

La somma viene realizzata secondo la ben nota ***regola del parallelogramma***:

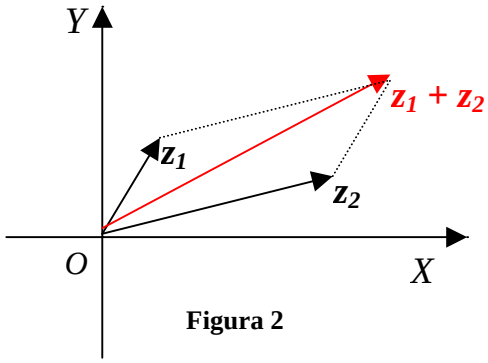


Figura 2

Ed ecco come si costruisce il prodotto:

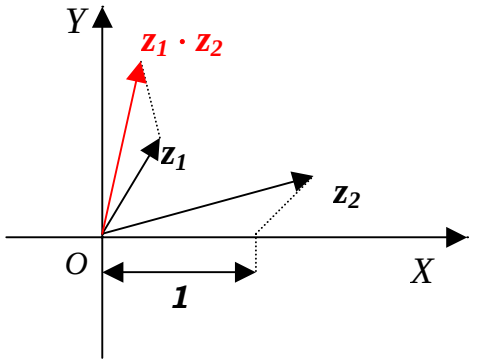


Figura 3

Si intende che i due triangoli raffigurati sono simili. Se ne deduce (facile esercizio) la seguente identità per i moduli:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad (1)$$

L'argomento di un numero complesso

Si definisce ***argomento*** del numero complesso la misura ϑ in radianti ($0 \leq \vartheta < 2\pi$) dell'angolo orientato $\angle AOP$ della Figura 1. Detti ϑ_1 e ϑ_2 gli argomenti di z_1 e z_2 rispettivamente, e ϑ_{12} l'argomento di $z_1 \cdot z_2$, dalla costruzione del prodotto (Figura 3) si deduce subito la seguente identità per gli argomenti:

$$\vartheta_{12} = \vartheta_1 + \vartheta_2 \qquad (2)$$

Riassumendo: La moltiplicazione del numero complesso z_1 per il numero complesso z_2 trasforma il vettore associato a z_1 in un nuovo vettore (quello associato a $z_1 \cdot z_2$), ottenuto mediante le seguenti due trasformazioni:

1. la dilatazione (*omotetia)* di un fattore $|z_2|$;
2. la rotazione intorno ad O di un angolo ϑ_2 in senso antiorario.

Le due trasformazioni possono essere applicate indifferentemente in quest'ordine, oppure nell'ordine inverso: il risultato non cambia.

Esempio: la moltiplicazione di un numero complesso per ***i*** corrisponde ad una rotazione del vettore associato di $\pi/2$ (cioè $90°$) in senso antiorario.

L'interpretazione "operativa" dei numeri complessi che abbiamo appena descritto fu data per la prima volta dallo svizzero **Jean-Robert Argand**, che nella vita faceva il contabile, e nel 1806 pubblicò un libriccino intitolato *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Saggio su di un modo di rappresentare le quantità immaginarie nelle costruzioni geometriche). Ancor oggi si dice a volte ***diagramma di Argand*** anziché *piano di Gauss*.

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi viene utilizzata per una particolare scrittura, detta ***forma trigonometrica*** di un numero complesso, che già compare negli scritti di **Eulero**.

Concludiamo con una considerazione di carattere filosofico, dovuta a

Duilio Gigli: *"[…] bisognava riconoscere che il concetto di numero complesso è l'estensione di quello di numero reale, corrispondente al passaggio dalla considerazione dell'ordine ad una dimensione a quella di un ordine doppio, cioè a due dimensioni."* (cit. da A. Natucci, *Sviluppo storico dell'aritmetica generale e dell'algebra*, Pellerano – Del Gaudio, Napoli)

Storia dei numeri complessi

Forma trigonometrica di un numero complesso

Sia dato il **numero complesso** $z = a + b\boldsymbol{i}$, che rappresentiamo col punto P nel **piano di Gauss**:

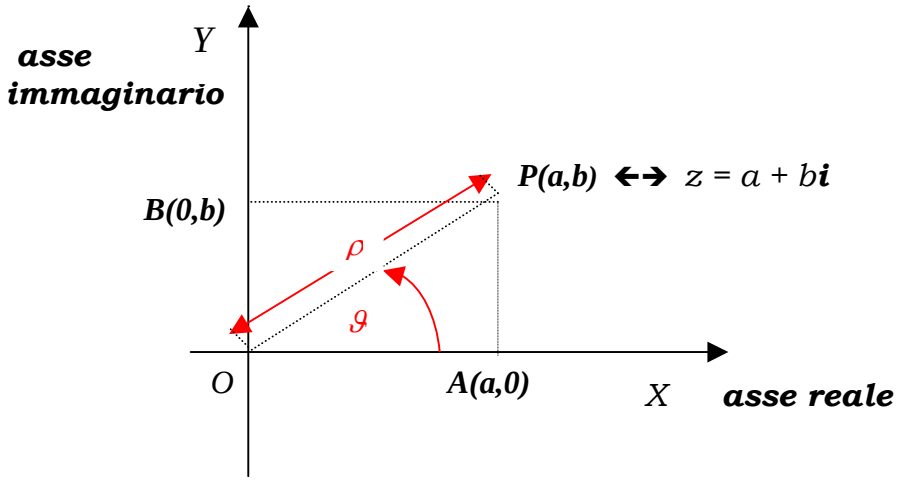


Figura 1

Nella Figura 1 ρ è il modulo, e ϑ è l'argomento di z. Applicando le funzioni trigonometriche al triangolo rettangolo OAP si ricavano le identità:

$$a = \rho \cos \vartheta \qquad \text{e} \qquad b = \rho \operatorname{sen} \vartheta,$$

da cui

$$z = \rho (\cos \vartheta + \boldsymbol{i} \operatorname{sen} \vartheta)$$

che è detta la ***forma trigonometrica*** del numero complesso z.
Essa consente di esprimere in maniera particolarmente efficace la **regola del prodotto** di due numeri complessi: dati

$$z_1 = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + \boldsymbol{i} \operatorname{sen} \vartheta_1) \qquad e \qquad z_2 = \rho_2 (\cos \vartheta_2 + \boldsymbol{i} \operatorname{sen} \vartheta_2),$$

si ha che

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \boldsymbol{i} \operatorname{sen} (\vartheta_1 + \vartheta_2)).$$

Per la dimostrazione si veda **Il piano di Gauss**.

La forma trigonometrica era già usata ben prima che **Wessel** e **Argand** sviluppassero la teoria geometrica dei numeri complessi. In particolare la si trova presso **Eulero** e **De Moivre**. Quest'ultimo la utilizza, fra l'altro, nelle sue **formule** per le radici n-esime di un numero complesso.

Le radici *n*-esime di un numero complesso

Dato un numero complesso z, e dato un numero naturale $n>1$, si dice ***radice n-esima*** di z ogni soluzione dell'***equazione binomia***

$$X^n = z.$$

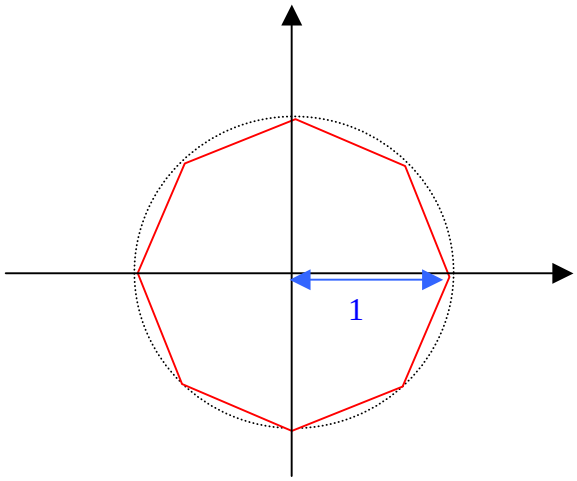
In virtù del **teorema fondamentale dell'algebra** questa equazione ha esattamente n radici nel campo **C** dei numeri complessi: la radice 0 di molteplicità n se $z = 0$, altrimenti n radici distinte. Sia

$$z = \rho(\cos \vartheta + \mathbf{i} \operatorname{sen} \vartheta)$$

la **forma trigonometrica** di z. Allora le radici n-esime di z sono date dalla ***formula di De Moivre***:

$$x_k = \sqrt[n]{\rho}\,[\cos((\vartheta + 2k\pi)/n + \mathbf{i} \operatorname{sen}((\vartheta + 2k\pi)/n], \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Nel **piano di Gauss** i punti corrispondenti a $x_0, x_1,\ldots, x_{n-1}$ sono i vertici di un poligono regolare a n lati, iscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Ad esempio, così si raffigurano le radici ottave di 1:



Secondo la ***teoria di Galois***, la **costruibilità** con riga e compasso di un poligono regolare a n lati è, in effetti, legata alle proprietà delle radici n-esime dell'unità.

Gli interi gaussiani

Si dice ***intero gaussiano*** ogni **numero complesso** $z = a + b\boldsymbol{i}$, con a,b numeri interi. In particolare ogni numero intero è un intero gaussiano: precisamente è un intero gaussiano avente parte immaginaria nulla. L'insieme dei numeri interi è solitamente indicato con $\boldsymbol{Z}$, l'insieme degli interi gaussiani è talvolta denotato con $\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{i}]$. Utilizzando le **regole di calcolo** per i numeri complessi è facile vedere che sommando o moltiplicando due interi gaussiani si ottiene ancora un intero gaussiano. Quindi in $\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{i}]$ sono definiti somma e prodotto. In $\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{i}]$ è anche definita la nozione di **primo gaussiano**, del tutto analoga a quella ben nota di **numero primo** che si dà nell'insieme $\boldsymbol{Z}$.
Gli interi gaussiani prendono il nome dal grande matematico tedesco **Gauss**, che fu il primo a studiarli in maniera approfondita (essi furono però introdotti nella teoria dei numeri da **Eulero** e **Lagrange**). Il merito di Gauss è quello di aver esteso a tutto $\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{i}]$ il **teorema fondamentale dell'aritmetica** *(o teorema di fattorizzazione unica),* che, fin dai tempi di **Euclide**, tutti noi sappiamo essere valido nell'insieme $\boldsymbol{Z}$.

Storia dei numeri complessi

Tutti gli alunni delle scuole medie sanno che da un numero negativo non è possibile estrarre la radice quadrata. Questo fatto fu ufficialmente riconosciuto, per la prima volta, dal matematico indiano **Mahavira** nel secolo IX. Da allora, per molti secoli, le radici dei numeri negativi furono trascurate come concetti estranei alla natura delle cose. Finché nel Cinquecento, alcuni matematici italiani che studiavano la risoluzione delle equazioni algebriche, furono posti davanti al problema di dare un significato a queste strane quantità. Uno dei primi ad occuparsene fu **Cardano**, che nella sua opera ***Ars Magna*** (1545) presentò le **formule** per la risoluzione per radicali delle equazioni di terzo grado, dovute a **Tartaglia**, e le **formule** per la risoluzione per radicali delle equazioni di quarto grado, trovate da **Ferrari**. Queste formule contengono le radici quadrate di espressioni che, in alcuni casi, corrispondono a numeri negativi. Nelle formule di Tartaglia compare il radicale

$$\sqrt{q^2/4 - p^3/27}$$

che è uguale a -1, ad esempio, per $q = 0$ e $p = 3$. Cardano non riusciva a darsi ragione di espressioni come $\sqrt{-1}$, e finì per chiamarle quantità *sofistiche.* Così nel capitolo XXXVII della stessa opera egli risolse l'equazione di secondo grado

$$X\,(10 - X) = 40$$

scrivendo le soluzioni nella forma

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \qquad \text{e} \qquad x_2 = 5 - \sqrt{-15},$$

ma si rifiutò di dare un significato a $\sqrt{-15}$, considerandolo niente più che un vuoto formalismo. Egli infatti commentò il risultato dicendo: *"Così progredisce la sottigliezza aritmetica il cui fine, come si dice, è tanto raffinato quanto inutile."*

Successivamente **Bombelli**, nella sua ***Algebra*** (1572), riprese il concetto di numero immaginario. Egli introdusse le notazioni *p.d.m. (più di meno)* per $\boldsymbol{i}$ e *m.d.m. (meno di meno)* per $-\boldsymbol{i}$, da cui la scrittura

Rc⌊2 p.d.m. 2⌋ per indicare $\sqrt[3]{2+2i}$

Egli inoltre, pur non riconoscendo ai complessi la dignità di numeri, definì per essi le quattro operazioni, e formulò le fondamentali **regole di calcolo**: si trattava, però, di una cieca manipolazione di simboli cui egli non sapeva dare un significato.

Anche **Cartesio** respinse le radici complesse e coniò per esse il termine *immaginarie.* Lo stesso imbarazzo di fronte a queste quantità provarono anche **Newton** e **Leibniz**. Quest'ultimo, nel 1702, arrivò a parlare del numero $\sqrt{-1}$ addirittura come di *"quel mostro dell'analisi, quel portento del mondo ideale, quell'anfibio fra essere e non essere che chiamiamo radice dell'unità negativa".* Ancora nel 1847 **Cauchy** dichiarava, in maniera molto categorica: *"[noi respingiamo] il segno simbolico $\sqrt{-1}$, che ripudiamo completamente, e che possiamo abbandonare senza rimpianti, perché non si sa cosa questo presunto segno significhi, né quale significato gli si dovrebbe attribuire."* (trad. da E.T. Bell, *The Development of Mathematics,* McGraw-Hill, New York, London 1945, pag. 175).

Già Cardano, a suo tempo, aveva tentato di concretizzare il concetto di numero complesso mediante quello di segmento, ma il suo tentativo era fallito. Solo nel 1811 **Gauss**, in una lettera al suo amico **Bessel**, diede una valida e semplice interpretazione geometrica dei numeri complessi: il numero complesso $a+b\boldsymbol{i}$ può essere visto come un punto del piano, di quello che oggi viene detto **piano di Gauss**. Il norvegese **Wessel** e lo svizzero **Argand**, entrambi matematici autodidatti, avevano presentato, alcuni anni prima, idee non lontane da quella di Gauss. Del resto già **Eulero**, nel Settecento, aveva in parte anticipato la visualizzazione creata da Gauss. E ad Eulero risale anche l'invenzione del simbolo $\boldsymbol{i}$ per indicare $\sqrt{-1}$, simbolo che fu ripreso e diffuso da Gauss. Fu lo stesso Gauss ad introdurre il termine *numero complesso:* prima di allora la denominazione corrente era *numero immaginario.*

Sui numeri complessi si basa il **teorema fondamentale dell'algebra**, dimostrato dallo stesso Gauss nel 1799. Gauss è anche ricordato per i suoi importanti contributi all'**analisi delle funzioni di variabile complessa**.

Smilla racconta la storia dei numeri

Citiamo un bellissimo passo del best-seller *"Il senso di Smilla per la neve"* di Peter Høeg (Mondadori, Milano 1994), che con grande poesia e sensibilità spiega lo sviluppo del sistema numerico alla luce della psicologia umana. A parlare è la protagonista, appassionata studiosa di matematica e profonda conoscitrice delle terre artiche:

"…il sistema numerico è come la vita umana. Per cominciare ci sono i ***numeri naturali****. Sono quelli interi e positivi. I numeri del bambino. Ma la coscienza umana si espande. Il bambino scopre il desiderio, e sai qual è l'espressione matematica del desiderio? […] Sono i* ***numeri negativi****. Quelli con cui si dà forma all'impressione che manchi qualcosa. Ma la coscienza si espande ancora, e cresce, e il bambino scopre gli spazi intermedi. Fra le pietre, fra gli spazi di muschio sulle pietre, fra le persone. E fra i numeri. Sai questo a cosa porta? Alle* ***frazioni****. I numeri interi più le frazioni danno i* ***numeri razionali****. Ma la coscienza non si ferma lì. Vuole superare la ragione. Aggiunge un'operazione assurda come la radice quadrata. E ottiene i numeri irrazionali. […] È una sorta di follia. Perché i* ***numeri irrazionali*** *sono infiniti. Non possono essere scritti. Spingono la coscienza nell'infinito. E addizionando i numeri irrazionali ai numeri razionali si ottengono i* ***numeri reali****. […] Non finisce. Non finisce mai. Perché ora, su due piedi, espandiamo i numeri reali con quelli immaginari, radici quadrate dei numeri negativi. E quando aggiungiamo i* ***numeri immaginari*** *ai numeri reali abbiamo i* ***sistemi numerici complessi****. Il primo sistema numerico all'interno del quale è possibile dare una spiegazione soddisfacente della formazione dei cristalli di ghiaccio. È come un grande paesaggio aperto. Gli orizzonti. Ci si avvicina a essi e loro continuano a spostarsi. È la Groenlandia, è ciò di cui non posso fare a meno! È per questo che non voglio essere rinchiusa."*

I cristalli

I primi gaussiani

Definizione Un **intero gaussiano** $z = a + b\boldsymbol{i}$ è detto *composto* se è prodotto di due interi gaussiani diversi da 1, -1, $\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{i}$. Altrimenti z si dice un ***primo gaussiano*** (cfr. **I numeri primi**).

Esempio: L'intero gaussiano $1 + 3\boldsymbol{i}$ è composto, infatti

$$1 + 3\boldsymbol{i} = (1 + \boldsymbol{i})\,(2 + \boldsymbol{i}),$$

mentre si può dimostrare che $1 + \boldsymbol{i}$ è un primo gaussiano.

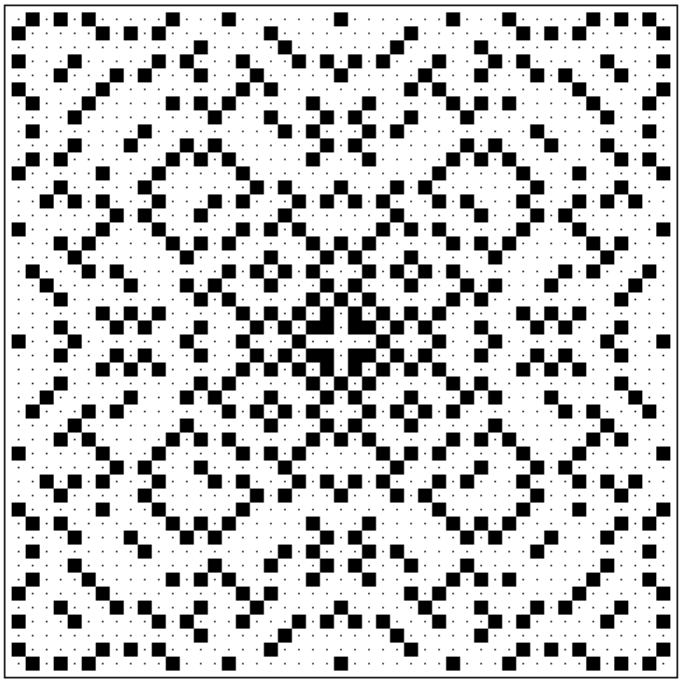
Osservazione Un numero intero primo può non essere un primo gaussiano. Ad esempio, 2 ammette la decomposizione

$$2 = (1 + \boldsymbol{i})\,(1 - \boldsymbol{i}).$$

Invece 3 è un primo gaussiano. In generale si dimostra:

Un intero primo p è un primo gaussiano se e solo se è della forma
$p = 4k - 1$, per qualche intero positivo k.

Quindi gli interi primi che sono anche primi gaussiani sono $3, 7, 11, 19, \ldots\ldots$



Se sulla retta dei numeri reali disegniamo un piccolo punto in corrispondenza di ogni numero primo minore di 100, otteniamo un disegno molto irregolare: provare per credere. Se invece si disegna, nel **piano di Gauss**, un puntino in corrispondenza di ogni intero gaussiano $z = a + bi$, ad esempio con a,b minori di 24, si ottiene un motivo dotato di simmetrie, quasi un motivo artistico… (Nella figura i punti sono sostituiti da quadratini).

Il teorema di fattorizzazione unica

Tutti conoscono il teorema di fattorizzazione unica per i numeri interi, più noto come **teorema fondamentale dell'aritmetica**,

dimostrato già da **Euclide** nei suoi ***Elementi***. **Gauss** ha provato un teorema analogo per gli interi gaussiani. Eccone l'enunciato:

primi gaussiani. I fattori che compaiono in questa decomposizione sono unici a meno di moltiplicazione per -1, $\boldsymbol{i}$ *oppure* $-\boldsymbol{i}$.

I numeri complessi

Luca Pacioli (Borgo San Sepolcro, Arezzo, 1445 - dopo il 1509)



Il suo cognome si trova scritto sotto varie forme: *Paciolo, Paciuolo*, e gli scrittori contemporanei o posteriori lo chiamarono spesso *Luca di Borgo* o *Fra Luca di Borgo*. In Venezia ebbe come maestro un Domenico Bragadino, pubblico lettore di Matematiche della Repubblica, che l'istruì nell'aritmetica e nell'algebra. Giovarono poi certamente ad aumentare le sue conoscenze matematiche i viaggi che egli compiva per conto del commerciante veneziano Antonio Rompiasi, che lo aveva al suo servizio.
Nel 1470, istruendo i figli del Rompiasi, compilò il suo primo trattato matematico. Tra il 1470 ed il 1476 lasciò l'attività di mercante per vestire l'abito francescano e dedicarsi all'insegnamento delle matematiche, che impartì in varie città italiane.
Nel 1476 si trovava a Perugia, dove compose per gli allievi un trattato di algebra; nel 1481 scrisse, a Zara, un altro trattato. Insegnò anche a Roma e a Napoli; a Milano fu, insieme con ***Leonardo da Vinci***, alla corte di ***Ludovico Maria Sforza***.
Nel 1501-1502 era iscritto tra i lettori dello Studio bolognese.
Nel **1494** pubblicò a Venezia un grosso volume, che ebbe soltanto una seconda edizione nel **1523**, intitolato ***Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalità***, nel quale certamente coordinò e completò i trattati che aveva precedentemente composti e che non furono mai dati alle stampe (uno di questi si trova *manoscritto* nella *Biblioteca Vaticana*). Gli esemplari delle due edizioni sono piuttosto rari e si trovano presso la *Biblioteca Marciana di Venezia.*

Amico del suo conterraneo ***Piero della Francesca***, di ***Leon Battista Alberti*** e di ***Leonardo da Vinci***, sentì l'influenza di questi sommi artisti componendo nel **1496** la ***De Divina Proportione***, opera dedicata al Duca di Milano Lodovico Sforza, nella quale volle dedurre da una certa proporzione i principi dell'architettura, le proporzioni della figura umana e perfino quelle delle lettere dell'alfabeto.
Fu a lungo dimenticato dai suoi concittadini, che solo nel 1878 lo ricordarono con la seguente lapide apposta alla casa in cui nacque:

A Luca Pacioli
che ebbero amico e consultore
Leonardo da Vinci e Leon Battista Alberti
che primo diè all'algebra
linguaggio e struttura di scienza
avviò il gran trovato
d'applicarla alla geometria
insegnò la scrittura doppia commerciale
dettò opere di matematica
base e norma invariate
alle postere lucubrazioni
Il popolo di San Sepolcro
vergognando 370 anni di oblio
al gran cittadino
poneva
1878

Matematica ed Economia

Luca Pacioli
Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalità.
Venezia, 1494

In questa opera, (**sommario**), il **Pacioli** certamente coordinò e completò i trattati che aveva precedentemente composti e che non furono mai dati alle stampe (uno di questi si trova *manoscritto* nella *Biblioteca Vaticana*). Gli esemplari delle due edizioni del 1494 e del 1523 sono piuttosto rari ed alcuni si trovano presso la *Biblioteca Marciana di Venezia.*
Anche se questa opera ha il titolo, la dedica e la denominazione delle parti in latino, tuttavia essa è scritta in italiano o più esattamente in una lingua che è il più delle volte mezza italiana e mezza veneziana.
Il libro è importante nella storia della matematica, perché è il primo trattato generale di aritmetica, di aritmetica pratica e di algebra che sia stato stampato, e perché in esso, per la prima volta, è trattata la tenuta dei libri a **partita doppia**; vi si trovano i primi esempi del calcolo delle probabilità e il primo esempio di un **logaritmo** neperiano calcolato prima del **Napier**.
Nel frontespizio dell'opera non appare il nome dell'autore, ma alla fine dell'opera si trova scritto che *Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulchri ordinis minorum et sacre theologie humilis professor* ha pubblicato questo compendio di aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalità col suo poco ingegno per compassione degli ignoranti.
Il nome di Paciolo non viene mai indicato, probabilmente perché, essendo monaco, firmava con le sole parole Fra Luca aggiungendo semplicemente il luogo di nascita, l'ordine cui apparteneva e la sua occupazione.

L'opera è divisa in due parti principali: **l'Aritmetica e la Geometria**; ogni parte è suddivisa in *distinctiones*, che a loro volta si suddividono in *tractatus* per l'aritmetica ed in ***capitula*** per la Geometria. Nella Parte prima, nella *Distinctio Nona - Tractatus XI* è contenuto il ***Tractatus de computis et scripturis*** che contiene le norme che regolano la tecnica delle scritture doppie, e nella *Distinctio Octaua-Tractatus Sextus*, *al* ***foglio 149***, sono elencati i seguenti otto tipi di ***equazioni di grado superiore al secondo***, di cui due dichiarati impossibili e poi risolti dal **Tartaglia**:

censo de censo equale nu.o
censo de censo equale a cosa
censo de censo equale a censo
imposibile censo de censo e censo equale a cosa
imposibile censo de censo e cosa equale a censo
censo de censo e nu.o equale a censo
censo de censo e censo equale a nu.o
censo de censo equale a nu.o e censo

L'autorevolezza di Luca Pacioli era tale che l'affermazione di impossibilità per le equazioni del quarto e quinto tipo (riconducibili ad equazioni di terzo grado) fu accettata dagli algebristi del tempo e costituì un freno nella ricerca delle soluzioni delle **equazioni di terzo grado**.

Il calcolo digitale

Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni & Proportionalita.

Continentia de tutta lopera.

De numeri e miſure in tutti modi occurrenti.
Proportioni e pportiõalita anotãia del. 5°. de Eucli de e de tutti li altri ſoi libri.
Chiaui uero euidentie numero. 13. p le q̃tita contínue pportiõali del. 6°. e. 7°. de Euclide extratte.
Tutte le pti delalgoriſmo: cioe releuare. ptir. multiplicar. ſũmare. e ſotrare cõ tutte ſue ꝑte ĩ ſani e rotti. & radici e progreſſioni.
De la regola mercanteſca ditta del. 3. e ſoi fõdamenti con caſi exemplari per c°m°. &. G. guadagni: perdite: tranſportationi: e inueſtite.
Partir. multiplicar. ſummar. e ſotrar de le proportioni e de tutte ſorti radici.
De le. 3. regole del catayn ditta poſitiõe e ſua origie.
Euidentie generali ouer concluſioni n°66. abſoluere ogni caſo che per regole ordinarie nõ ſi podeſſe.
Tutte ſorte binomij e reciſi e altre linee irratiõali del decimo de Euclide.
Tutte regole de algebra ditte de la coſa e lor fabriche e fondamenti.
Compagnie ĩ tutti modi. e lor partire.
Socide de beſtiami. e lor partire
Fitti: peſciõi: cottimi: liuelli: logagioni: egodimenti.
Baratti ĩ tutti modi ſemplici: compoſti: e col tempo.
Cambij reali. ſecchi. fittitij. e diminuti ouer comuni.
Meriti ſemplici e a capo danno e altri termini.
Reſti. ſaldi. ſconti. de tempo e denari e de recare a un di piu partite.
Ori. argẽti. ellor affinare. e carattare
Molti caſi e ragioni ſtraordinarie varie e diuerſe a tutte occurentie commo nella ſequente tauola appare ordinatamente de tutte.
Ordine a ſaper tener ogni cõto e ſcripture e del quaderno in vinegia.
Tariffa de tutte vſanze e coſtumi mercanteſchi in tutto el mondo.
Pratica e theorica de geometria e de li. 5. corpi regulari e altri dependenti.
E molte altre coſe õ grandiſſimi placeri e frutto cõmo diffuſamente per la ſequente tauola appare.

Tractatus Geometrie. Pars secunda principalis huius operis 7 primo eius diuisio.



IN ra col nome d Jesu. Segue la secõda pte pricipale dela pſẽte opa. In la q̃l (cõmo i pricipio pmettẽmo) ſe tracta dela q̃ᵗᵃ cõtinua: cioe geometria q̃to ala pratica ſe aſpecti: e ãco la theorica de tutte le opatõi ſepze cõ degni fõdamẽti de pbi chiari e apti p litterati e vulgari cõmo nel pceſſo vederaſſe. E q̃ſta tutta chiamaremo tractato. E diuideremola i. 8. altri pti ptiali a reuerẽtia dele. 8. britudie. E ciaſcũa ſia dẽa diſtictõe: e q̃lle poi ſubſeq̃nter diſtiguremo i capituli. Nela pria voglio dimoſtrare cõme le figure q̃drate etriãgolari ſõno da eſſere recate a q̃ᵗᵃ di bracci q̃dri o de altra meſura. Nela ſeconda voglio moſtrare q̃do vn põto e dato fuor o dẽtro duno triãgolo e da q̃llo ſi muoui vna linea a ſape la ſua q̃ᵗᵃ. Nela terça del mõ de trouare larea delle ſupficie di. 4. lati col mõ de miſurare le figure di piu di. 4. faccie. Nela q̃rta del mõ di meſurare li cerchi: ele ſupficie i mõte. Nela quita del mõ de diuidere le ſupficie i pti. Nela ſexta el mõ di trouare larea corpale d li corpi. Nela ſeptia del mõ de miſurare col viſo cioe col vedere. Nela octaua e vltia: alcũo caſo trattaremo de geometria belli e gẽtili e coſi faremo fine laſciãdo lo mendare del ſuperfluo o mancamento achi leggi 7c.

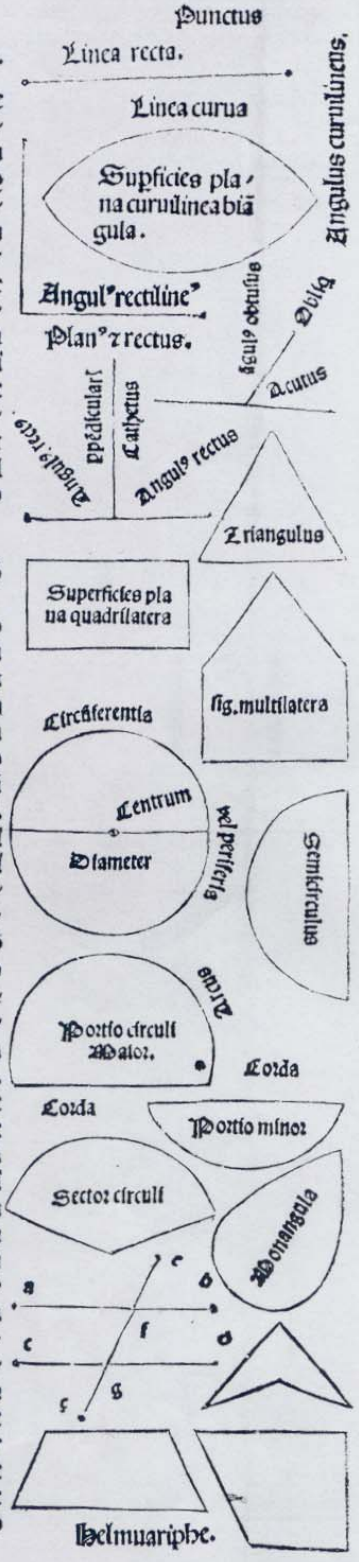
Diuiſio 7 continentia prime diſtinctionis.



Ettamẽte volẽdo tractare e di biſogno accio ch̃ pticularmẽte ſia trouato q̃llo ch̃ deſideri: diuidere q̃ſta diſtictõe i. 8. capᵗ. Ddi q̃li il pᵐ cõtera certe diffinitiõi. El. 2ᵒ certe demoſtratõi e pclõni del pꝛio d Eucli. El. 3ᵒ certe pcluſiõi e demoſtratõi del. 2ᵒ de Euclide. Quarto certe dimoſtratõi ecõcluſiõi del ſexto de Euclide. Quito i ch̃ mõ ſe vſa amiſurare ſecõdo loſtrumẽto fiorẽtino ſecõdo el q̃le in q̃ſto tractato al piu ci reggemo. Sexto cõme ſe miſurano le figure q̃drate. Septio cõmo ſe miſurano li triangoli de ciſcuna ſorte. Octauo e vltio cõme ſi truouano lichatetti: ouer ppẽdiculari dei triãgoli e cõme ſecõdo vn mõ vulgare ſuſa in ſul terreno amiſurare. E coſi veniamo ala pma pte. De q̃ntq̃ circa q̃ pricipaliter pratica geometrica verſatur et ad bonũ agrim̃ſorẽ ſpectãt. Et de coꝛ declaratõe cũ pricipijs p ſe notis. Capitulũ pᵐ pᶜ diſtictiõis.



Jnq̃ coſe ſõno neceſſarie a ſape achi vuole eſſere pfectamẽte pratico nel larte di geometria. Delle q̃li la pma e pũcto. Secõda linea. Terça ãgolo. Quarta ſupficie. Quita e vltia coꝛpo. E p ch̃ noi ſeguitiamo p la magioꝛ pte. L. piſano Jo itẽdo dechiarire ch̃ q̃do ſi pozza alcũa ꝓpoſta ſẽça autoꝛe q̃lla ſia di detto. L. E q̃do daltri ſia q̃ui ſara lautoꝛita aducta. Adũche diffinẽdo diremo i q̃ſto mõ. Pũcto e q̃llo ch̃ nona pte. La linea e vna lũghezça ſẽça ãpieça q̃ſi vna via imagiata: della q̃le li termini ſõno 2. pũcti. E ſõno di doi maniere linee. Una e detta linea recta. L altra e detta linea curua. Linea recta e q̃lla ch̃ da vn põto a vnaltro e mẽata diritta. Linea curua e q̃lla ch̃ fa arco. Langolo e il toccamẽto di doe linee. E poſſõſi cõporre gliãgoli de lineo recte: e di linee curue. E langolo de linee recte ſi dice Angolo retti lineo. E langolo di due linee curue ſi dice curui lineo. Lãgolo de rette linee puo eſſere i. 3. modi. De q̃li vno e q̃llo ch̃ e facto dalla ſq̃dra e chiamaſe ãgolo retto. Unaltro ſe dice ãgolo obtuſo. E q̃ſto e q̃llo ch̃ e magioꝛe chel retto. E vnaltro ſe dice ãgolo acuto: e q̃ſto e q̃llo ch̃ e minoꝛe chel retto. Quãdo vna linea retta ſtara ſopza vna linea retta: egli due ãgoli fieno ifra loꝛo iguali ciaſcũo di q̃gli ãgoli ſe dice ãgolo retto. E la linea ch̃ ſta ſopza laltra ſe dice chatetto: ouer ppẽdiculare. El termine e fine dela coſa. La figura e q̃lla ch̃ ſotto a vno o piu termini e ꝓſtituita. La figura dirette linee: e q̃lla ch̃ e circũdata da linee rette. La ſupficie e q̃lla ch̃ a lũghezça e larghezça: della q̃le li termini ſõno le linee. La figura di. 3. lati e q̃lla ch̃ da. 3. linee rette e fatta. La figura q̃drilatera e q̃lla ch̃ e fatta da. 4. linee rette. La figura multi latera e q̃lla che e fatta da molte linee. Cerchio e vna figura piana cõtẽta da vna ſola linea ch̃ e noiata circũferentia ouer piferia. Dẽtro ala q̃l linea e vno ponto detto, centro di cerchio. dal quale tutte le linee che ſonno menate alla circunferentia ſonno equali fra loꝛo. Diametro di cerchio e vna linea recta ch̃ paſſa ſopza il cẽtro: e da ciaſcũ lato tocca la circũferẽtia e diuide il cerchio i due pti equali. Semi circulo cioe meço cerchio e vna figura piana cõtẽta dal diametro del cerchio e dala mita dela circũferẽtia. Portiõe di cerchio e vna figura cõtẽta duna linea retta e dela pte dela circũferẽtia magioꝛe: ouer minoꝛe del semi circulo. Settoꝛe di cerchio e vna figura piana cõtenuta da doi linee recte producte dal cẽtro ala piferia; e cõpreſo da q̃lla barcho: cioe pte deſſa piferia. Le linee equediſtãti ſõno

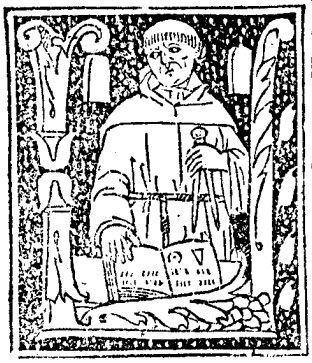


Commo se debiano saldare tutte le partite del quaderno vechio: e ĩ chi: e per che e de la sũma sũmarum del dare e delauere ultimo scontro del bilancio. ca°.34
Del modo e ordie a saper tenere le scripture menute cõmo sõno scripti de manolse familiari poliçe: ꝓcessi: sentẽtie e altri ĩstrumẽti e del registro de le lettere ĩportãti. ca°.35
Epilogo o uero sũmaria recolta de tutto el presente tractato: acio con breue subſtãtia se habia mandare a memoria le cose dette. ca°.36

Distinctio.nona. Tractatus.xi°. ꝑticularis de cõputis ⁊ scripturis.

De quelle cose che sõno necessarie al uero mercatante: e de lordine a saꝑe bẽ tenere vn q̃derno cõ suo giornale ĩ vinegia e anche ꝑ ognaltro luogo. Capitolo primo.

figura



I reuerenti subditi de. V. D. S. Magnanimo. D. acio a pieno de tutto lordine mercantesco habino el bisogno: deliberai (oltᵃ. le cose dinançe ĩ q̃sta nr̃a opa ditte) ancora particular tractato grandemẽte necessario cõpillare. E in q̃sto solo lo iserto: ꝑ che a ogni loro occurrẽça el ꝑsente libro li possa seruire. Si del modo a conti e scripture: cõmo de ragioni. E per esso intendo darli norma sufficiente e bastante in tenere ordinatamente tutti lor conti e libri. Pero che. (cõmo si sã) tre cose maxime sõno oportune: a chi uole con debita diligẽtia mercantare. De le q̃li la potissima e la pecunia numerata e ogni altra faculta su stantiale. Juxta illud phy vnũ aliquid necessariorũ ẽ substantia. Sẽça el cui suffragio mal si po el manegio traficante exercitare. Auẽga che molti gia nudi cõ bona fede cõmençando: de grã facẽde habio fatto. E mediante lo credito fedelmẽte seruato ĩ magne richeçe siẽno peruenuti. Che asai ꝑ ytalia discurrẽdo nabiamo cognosciuti. E piu gia nele grã republiche non si poteua dire: che la fede del bon mercatante. E a quella si fermaua lor giuramento: dicẽdo. A la fe de real mercatante. E cio nõ deuessere admiratione: cõciosia che ĩ la fede catolicamẽte ognuno si salui: e sença lei sia ĩpossibile piacere a dio. La secõda cosa che si recerca al debito trafico: sie che sia buon ragioneri: e ꝓmpto cõputista. E ꝑ questo cõsequire. (disopra cõmo se ueduto) dal pricipio alafine: hauemo ĩducto regole e canoni a ciascuna oꝑatione requisiti. In modo che da se: ogni diligẽte lectore. tutto potra ĩprendere. E chi di questa ꝑte non fosse bene armato: la sequẽte in uano li serebbe. La.3ª. e vltima cosa oportuna sie: che cõ bello ordie tutte sue facẽde debitamẽte disponga: acio con breuita: possa de ciascũa hauer notitia: quanto alor debito e anche credito: che circa altro non satẽde el trafico. E q̃sta ꝑte fra laltre e aloro utilissima: che ĩ lor facẽde altramẽte regerse: seria ĩpossibile: sẽça debito ordine de scripture. E sẽça alcũ reposo la lor mẽte sempre staria in gran trauagli. E ꝑo acio con laltre q̃sta possino hauere. el ꝑsẽte tractato ordiai. Nel q̃le se da el mõ a tutte sorti de scripture: a ca°. ꝑ ca°. ꝓcedẽdo. E bẽ che nõ si possa cusi apõto tutto el bisogno scriuere. Nõ dimeno ꝑ q̃l che se dira. El ꝑegrino igegᵒ a q̃lũcaltro laplicara. E seruaremo ĩ esso el mõ de vinegia: q̃le certamẽte fra glialtri e molto da cõmẽdare. E mediante q̃lllo ĩ ogni altro se porra guidare. E q̃sto diuiderẽmo ĩ.2. ꝑti ꝑncipali. Luna chiamaremo iuẽtario. E laltra dispõne. E pª. de luna: e poi de laltra successiuamẽte se dira scdo lordie ĩ la ꝓposta tauola contenuto. Per la q̃l facilmente el lectore porra le occurrentie trouare secondo el numero de suoi capitoli e carti.

Chi cõ lo debito ordie che saspecta uol saꝑ bẽ tenere vn q̃derno cõ lo suo giornale a q̃l che qui se dira con diligẽtia stia a tẽto. E acio. bẽ sintẽda el ꝓcesso ĩdurremo ĩ cãpo vno che mo dinouo comẽçi a traficare cõmo ꝑ ordie deba procedere neltenere soi conti e scripture: aciochе sucitamẽte ogni cosa possi ritrouare posta al suo luogo ꝑ che nõ asettando le cose debitamẽte a li suoi luoghi uerebbe ĩ grandissimi trauagli e cõfusiõi de tutte sue facẽde. Juxta cõe dictũ vbi nõ ẽ ordo ibi est cõfusio. E pero a ꝑfecto documẽto dogni mercatante de tutto nr̃o ꝓcesso faremo cõmo di sopra e ditto.2. ꝑti ꝑncipali. Leq̃li aꝑtamẽte q̃ sequẽte chiariremo: acio fructo salutifero sabia ĩprẽdere. E ꝑria dimostrando ch̃ cosa sia iuẽtario e cõmo sabia fare De la pª ꝑte ꝑncipale de q̃sto tractato detta iuẽtario. E che cosa sia iuẽtario: e cõme fra mercatanti sabia fare. ca°.2 Cõmense adonca pªmẽte ꝓsupponere e ĩmaginare che ogni oꝑante e mosso dalfine. E ꝑ poter q̃llo debitamẽte cõseq̃re fa ogni suo sforço nel suo ꝓcesso. vnde el fine de q̃lũche traficante e de cõsequire licito e cõpetẽte guadagno ꝑ sua substẽtatiõe. E ꝑo sempre con lo nome de meser domenedio: debiano cõmençare loro facende. E ĩ nel ꝑnº. dogni lor scripture: el suo sancto

Fra LUCA PACIOLO



più volte habiamo ditto) che larte de nūeri e de miſure ſōno iſinite. E p cōſequēte lor cāoni harebono a eſſere iſiniti. Ma lhomo ſeqda q̄to finora ſe pſeruitato dali noſtri pꝛiſchi an teceſſori. Li q̄li tutte lor forze opatiue hāno ſtrette i li ditti. 6. ca⁹. aſegnati. Alliq̄li poi (ꝓpoꝛtionabiliter) iſiniti altri ſi poſſano formare: cōmo p q̄lche caſo diſotto ſe idurra. E tal formatiōe ſemp̄ pſuppone lordine de li ditti. 6. Cōmo adire. 1. ce. ce. eq̄le a. 16. p n°. pticeſti li n⁹. i li cēſi de cēſi: e la. R̄. R̄. de lo auenimēto varria la coſa. Sich. R̄. R̄. 16. ſeria la. R̄. del cēſo. cioe 2. Perche tal ꝓportiōe po hauere. 1. ce. ce. a vn n°. q̄l che. 1. co. a vnaltro n°. E. 1. ce. a vnaltro n°. zc. E po ptēdo el n°. nelli cēſi de cēſi neuē la valuta de. 1. ce. ce. ſi cōmo a ptire el n°. p le coſe neuē la valuta de la coſa. E ptēdolo p li cēſi neuē la valuta de. 1. ce. Onde tal ꝓportiōe fia da lauenimēto del cēſo de cēſo a. 1. ce. ce. Qual che da lauenimēto de. 1. co. a. 1. co. E de. 1. ce. a 1. ce. E pero poſſiamo dire queſti capitoli. videlicet.

	Cenſo de cenſo.	equale.	a nūo.
	Cenſo de cenſo.	equale.	a coſa.
	Cenſo de cenſo.	equale.	a cenſo.
Impoſsibile	Cenſo de cenſo. ecēſo	equale.	a coſa.
Impoſsibile	Cenſo de cenſo. e coſa.	equale.	a cenſo.
	Cenſo de cenſo. e nūo.	equale.	a cenſo.
	Cenſo de cenſo. e cēſo.	equale.	a numero.
	Cenſo de cenſo.	equale.	a numero e cenſo.

De li q̄li aguaglimēti ſi dāno r⁹. ordiarie ſi cōmo de li. 6. altri ſopra fo detto. In li q̄li ſe ben hai amēte le. 3. q̄ª. i q̄lli cōtenute: cioe n°. coſa: e cēſo: i ſei modi fra lor ſi poſſano aguagliare. De q̄li aguagli ſe formano poi le. 6. r⁹. ciaſcūa al ſuo aguaglio cōreſpōdēte: cōmo itēdeſti: mediāte la euidētia de la. 5ª. c. 6ª. del. 2°. Q 2 coſi acade q̄ i ꝓpoſito de q̄ſte tre altre q̄ª. cioe n°. cēſo: e cēſo de cēſo. Che i altri ſei modi fra lor ſi poſſano areguagliare: e de ciaſcūo aguaglimento ſi da regola e p̄ma. p^m.

Dando li cēſi ō cenſi ſōno eq̄li ali cenſi. Se die ptir li cenſi per li cenſi de cenſi: e la. R̄. de lo auenimento varra la coſa. Exemplū trouame. 1. n°. che q̄drato del ſuo quadrato faccia q̄to el ſuo quadrato mēcato p. 4. Poni che q̄l n°. ſia. 1. co. mēca i ſe fa. 1. ce. Qual ācora quadra fa. 1. ce. ce. E ſira equale a. 4. via. 1. ce. cioe a. 4. ce. Parti 4. p. 1. neuen quel medeſimo: cioe. 4. La cui. R̄. che e. 2. val la coſa. E ſo el q̄ſito nūero: Onde. 2. via. 2. fa. 4. e. 4. via. 4. fa. 16. p lo quadrato del quadrato. E ācha p. 4. via el q̄drato. 2^m.

Uando li cenſi de cenſi ſōno equali ale coſe ſe die partir le coſe per li cenſi ō cenſi e. R̄. cuba de quel che neuen varra la coſa. Exemplū trouame vn nūero ch̄l ſuo quadrato faccia quanto el numero mēcato per. 8. Poni che l n°. ſia. 1. co. el ſuo quadrato fa. 1. ce. E queſto ancora in ſe mēcato fa. 1. ce. ce. E queſto fia equale a. 1. co. via. 8. cioe a. 8. co. Parti. 8. p. 1. neuen. 8. E. R̄. cuba de. 8. val la coſa e ſo el dimādato n°.

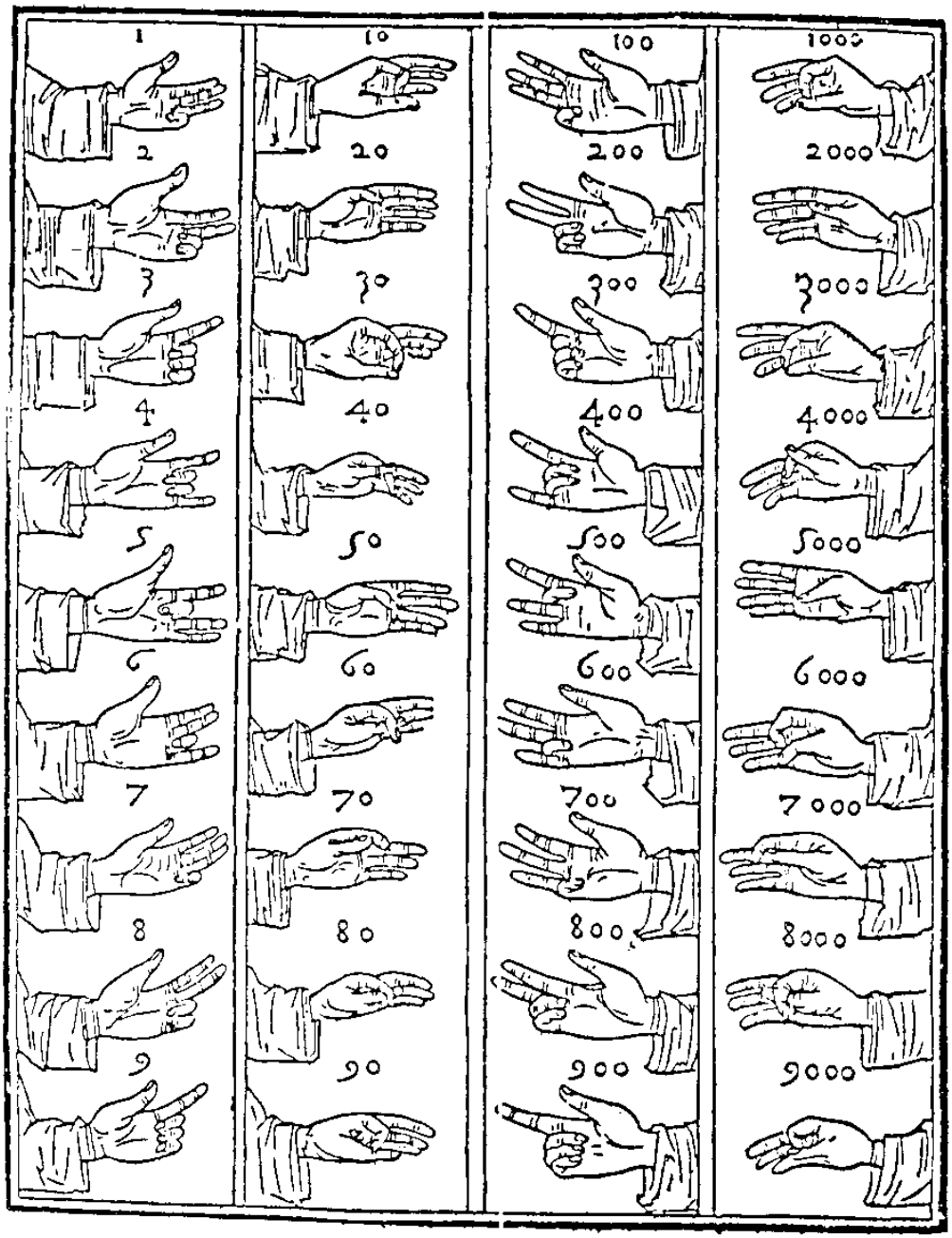
Uando li cenſi de cenſi ſonno equali al numero ſe parte li numeri per li cenſi de cenſi e la. R̄. R̄. de lo auenimento val la coſa. Exēplu trouame vn n°. che l quadrato del ſuo quadrato faccia. 81. Poni che ſia. 1. co. recala a cenſo de cenſo. Harai. 1. ce. ce. Equale a. 81. la cui. R̄. R̄. cioe. 3. val la coſa. El cenſo. 9. el cenſo de cenſo. 81. 3^m.

De tribus alijs capitulis cōpoſitis ad inſtar trium pꝛecedentium. ar. tertius. 4^m.

Dādo li cēſi di cēſi e li cēſi ſōno eq̄li al nūero. Alora ſe deue recare la eq̄tiōe tutta a. 1. ce. ce. Partēdola nella q̄ª. de li cēſi de cēſi magiore ſua vnita. E poi demeçare li cēſi. E luna mita mēcare i ſe. E a q̄l che fa giōgnerci el nūero. E ō la. R̄. ō la ſūma cauarne el dimeçamēto ō li cēſi. E poi la. R̄. de queſto rimanēte ſira valuta dela coſa. Exēplū troua vn n°. che ſopra el q̄drato del ſuo q̄drato: poſtoui el ſuo q̄drato: faccia. 20. Poni che l nūero ſia. 1. co. El q̄drato del ſuo q̄drato ſira. 1. ce. ce. El ſuo quadrato ſira. 1. ce. che giōti iſiemi fa. 1. ce. ce. p̄. 1. ce. E q̄le a. 20. S meçça li cēſi neuē. ½. Mōca in ſe fa. ¼. Giōgnici el nūero fa. 20 ¼. Be la. R̄. de q̄ſto caua el dimeçamēto de cenſi. Reſtara. 20 ¼. m. ½. E la. R̄. di q̄ſto reſto ſira la valuta de la coſa: cioe. R̄. v. R̄. 20 ¼. m. ½. cioe p̄ſa la. R̄. ō. 20¼. che e. 4 ½. E di quella cauato. ½. reſta. 4. E di queſto preſo la. R̄. che e. 2. fia lo dimandato numero: e valuta de la coſa. 5^m.

Dādo li cēſi de cēſi ſōno equali ali cēſi: e al nūero. Se deue p⁹. recare la eq̄tione a. 1. ce. cc. E poi dimeçare li cēſi. E luna mita mēcare i ſe. E a q̄l che fa giōgnerci el nūero. E ſopra la. R̄. di q̄lla ſūma: ponerd laltra mita de li cēſi. E la. R̄. di qu:

Il calcolo digitale nel Rinascimento

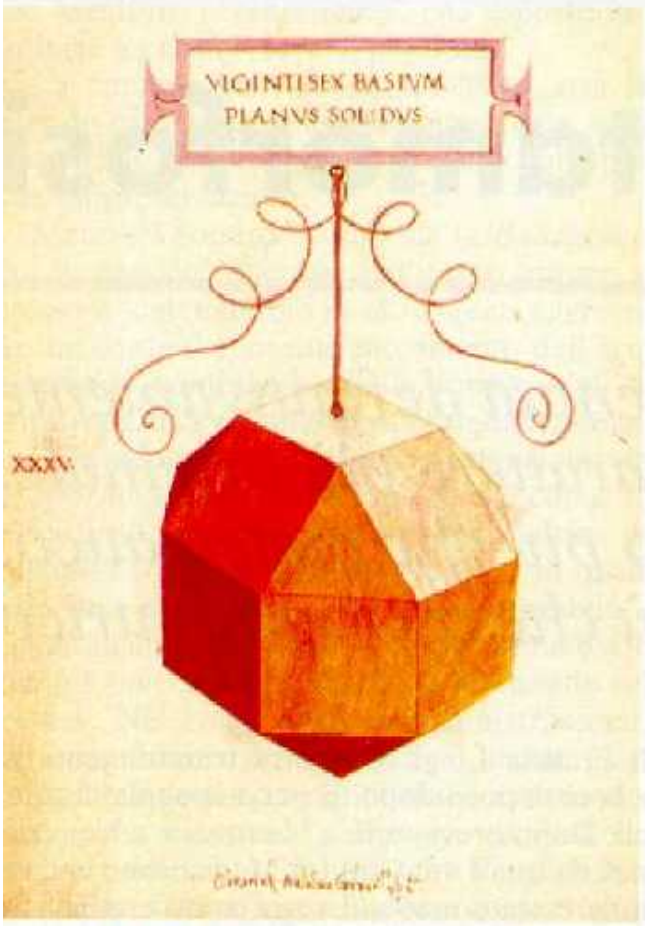


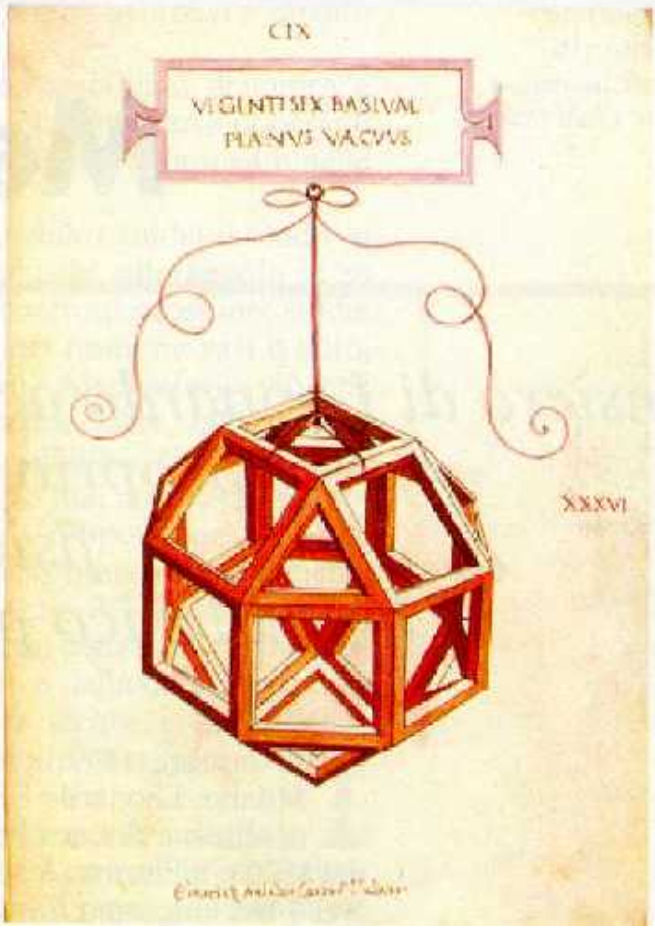
Metodo di rappresentazione gestuale per i numeri fino a 10.000. Da una illustrazione del «Summa de Arithmetica» di Luca Pacioli (1494).

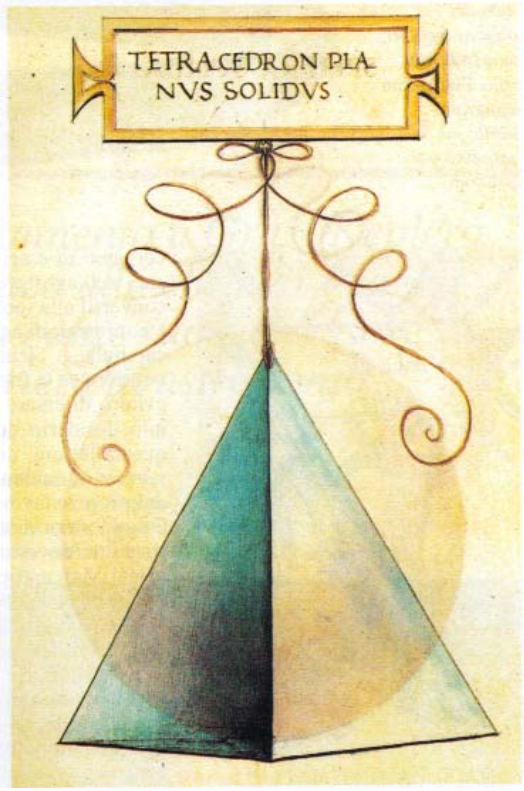
Alcune immagini dal De Divina Proportione

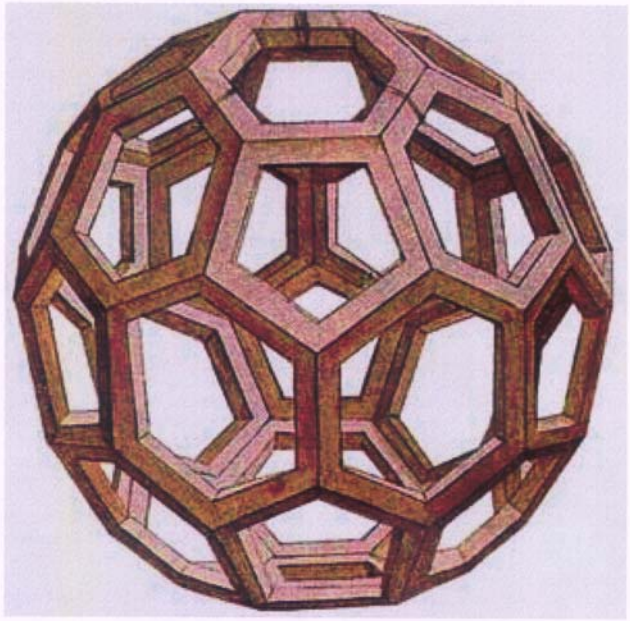
La più famosa opera di **Luca Pacioli** presenta l'idea, risalente al mondo classico, di applicare la matematica all'arte, formulando canoni estetici in termini di rapporti numerici, tra cui, in primo luogo, la **sezione aurea**. Questa proporzione, cui si riferisce il titolo, era già presente nella filosofia di **Pitagora** e venne ripresa da **Vitruvio**. Essa compare anche in molti **poligoni regolari** e **poliedri regolari** ed **archimedei**.

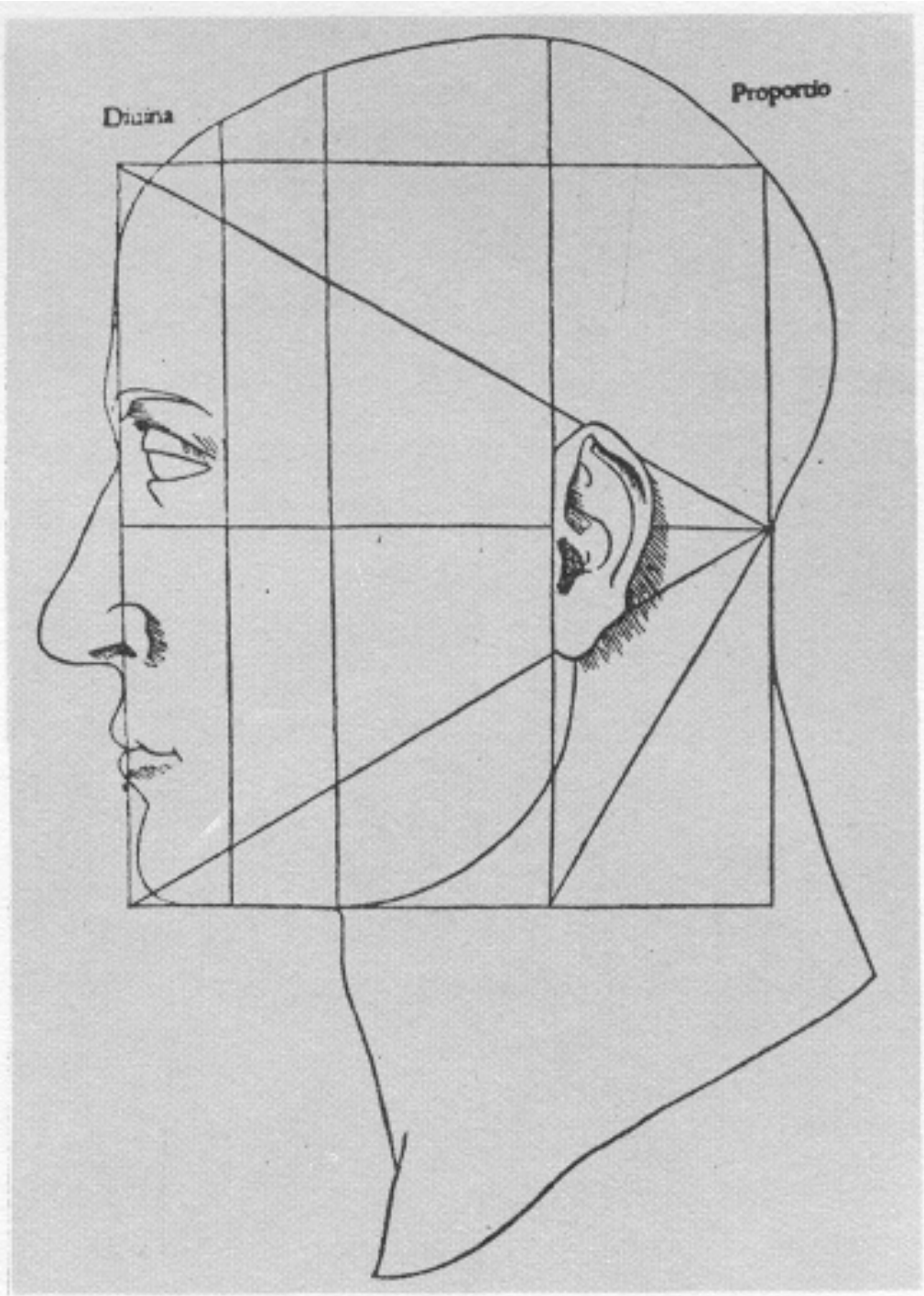
I poliedri disegnati da Leonardo da Vinci
Le proporzioni del viso
Le proporzioni dei caratteri tipografici


VIGINTI SEX BASIVM
PLANVS SOLIDVS
XXXV

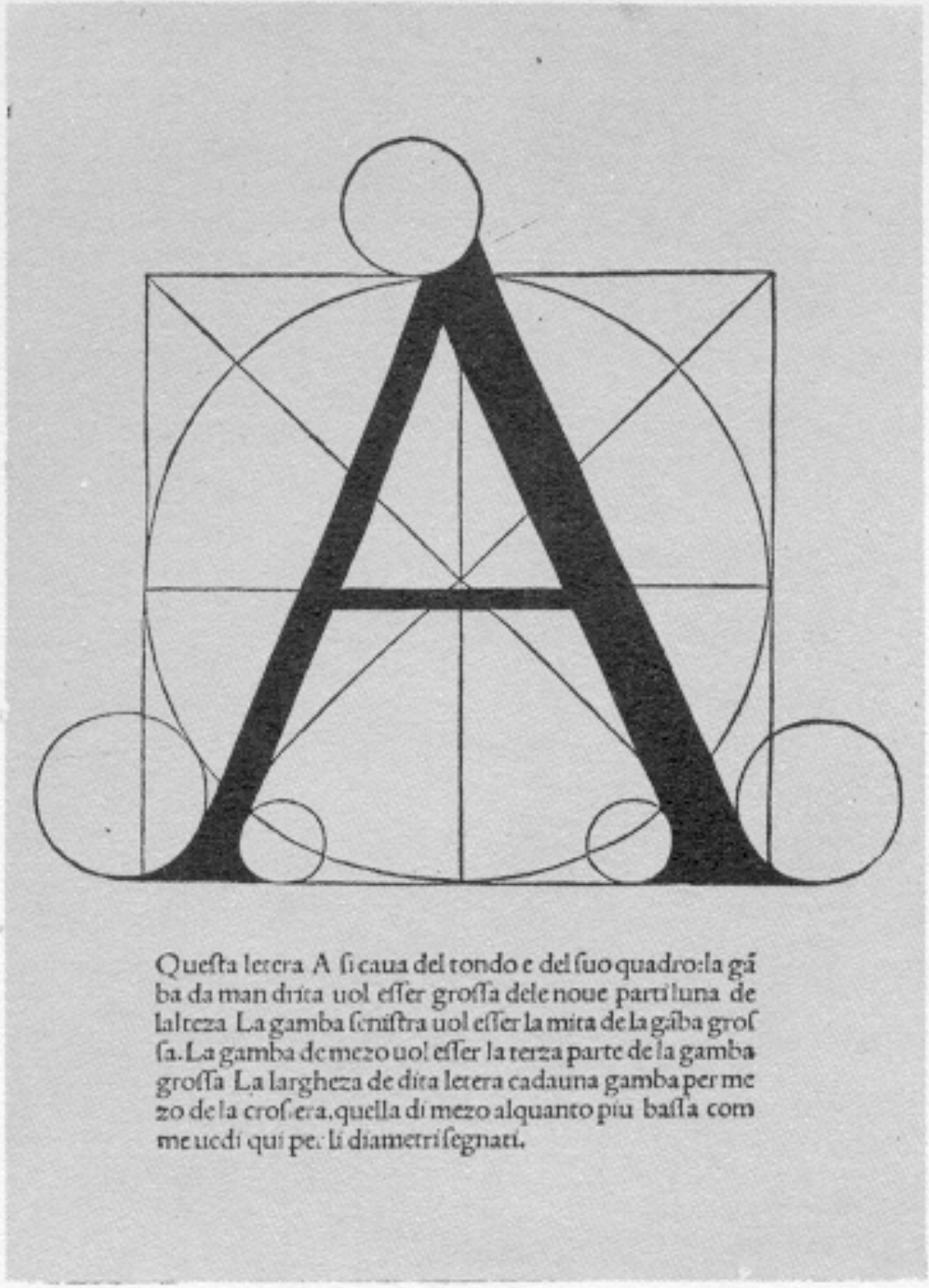

CIX
VIGINTI SEX BASIVM
PLANVS VACVVS
XXXVI


TETRACEDRON PLA
NVS SOLIDVS





Un'illustrazione da
De divina proportione di Luca Pacioli
(Venezia 1509).



La lettera *A* da
De divina proportione di Luca Pacioli
(Venezia 1509).

Curiosità

Mario Francesco Pagani
Arithmetica pratica, utilissima, artificiosamente ordinata da M.F. Pagani da Bagnacauallo.
Nella quale si contiene il vero e facile modo di conteggiare. Con molti quesiti importanti e necessari a ragionieri, a mercanti e ad ogni persona in tutti i paesi.
Ferrara, MDXCI

Il libro presenta un **frontespizio** particolare, è suddiviso in due parti e dotato di errata corrige.
Nella prima parte vengono illustrati vari metodi per eseguire le operazioni con numeri naturali e frazionari, mentre nella seconda sono riportati e risolti quesiti tratti dalla vita pratica.
Il testo si presenta sostanzialmente come un manuale, un vero e proprio testo di utilizzazione pratica, ricco di curiosità. Esso risulta tuttavia una interessante lettura per il linguaggio in cui è scritto e per i nomi particolari dati agli argomenti.

Esempi:
- Pagani spiega cosa sia un numero: cinque atti sono necessari: numerare, sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere (*partire, sì dei sani, come dei rotti*), **pagg.38-39**.
- Spiega come si opera la somma, cosa sia una prova e dopo aver chiarito in cosa consistano sia quella del **sette** sia quella del **nove**, le dichiara entrambe fallaci. L'autore suggerisce anche come mandare a memoria le suddette prove, **pagg.4-7**.
- Spiega come si sottraggono i numeri, e nell'ultima parte, come applicare questa operazione e l'addizione a casi reali: *"pesi, lire, et onze, carra, corbe e quarti"*.
- Nello spiegare come deve essere eseguita la moltiplicazione, elenca numerosi metodi di calcolo fra cui: *per scacchiero, per crocetta, a castelluccio, **per quadretto**, **per gelosia**, a repiego, a scapezzo,* illustrando i relativi schemi.
- Vari metodi vengono elencati anche per la divisione: *per colonna, **a danda**, **a galera**, a repiego, a scapezzo.*
- Pagani spiega cosa sia il *rotto,* ossia il numero frazionario, ed elenca ed illustra le varie operazioni con i rotti. Particolarmente curiose sono le **pagg. 33-34**, dal titolo: *del modo di schisare dei rotti, overo di trovare il maggiore comune repiego,* ossia come semplificare le frazioni.
Sono poi presentati e risolti diversi *quesiti sui guadagni e le perdite dei mercanti e sulle compagnie,* **pag. 87**, **pag. 98**.

Caratteristiche particolari: i caratteri illustrati con cui è stata scritta la **prima lettera** di ogni capitolo e le **annotazioni a margine** delle pagine (**pagg. 19-20, 26-28, 38-39**) consistenti in calcoli, intere equazioni risolte, complete di semplificazioni o schemi di risoluzione.

La moltiplicazione per crocetta secondo Fibonacci
La moltiplicazione a calice, graticola, quadrilatero
La divisione a galea

ARITHMETICA

PRATTICA VTILISSIMA,

ARTIFICIOSAMENTE ORDINATA

Da M. FRANCESCO PAGANI da Bagnacauallo,

Nella quale si contiene il vero, & facile modo di conteggiare.

Con molti Quesiti importanti, & necessarij à Ragionieri, à Mercanti, & ad ogni persona, in tutti i Paesi.

AL MOLTO ILLVSTRE SIGNOR

RAFFAELE RASPONI, &c.



IN FERRARA,

Appresso Vittorio Baldini.

Con licenza de' Superiori. M. D. XCI.

lir. 7572 ſono 19. ch'è vna decina di mig
2356 ti rimpetto alle centenara ſotto
256 gliara & dirai 2. e 7. fa 9. e vna ch
356 ſere in fine della ſomma, ſi ſegna detto 10. ſotto la linea co-
352 me vedi quà in margine, & ſe piu ve ne fuſſe ſtato delle quan-
33 tità da ſommare coſi ſi ſeria con il detto ordine andato ſino
35 in capo, ſi che dirai, che le dette quantità di libre ſommano
35 tutte inſieme lir. 10995. & coſi ſerà riſoluta beniſsimo.

li. 10995

CHE COSA E PROVA.

SArà noſtra particolare profeſsione prouar'in queſto tutte le noſtre attioni, ma auanti che ſi venga a prouare ſe la ſudetta ſomma ſta bene, ò nò, vogliamo prima moſtrare che coſa è proua, onde diciamo che proua non è altro, ſe non vna dimoſtratione, ouero vn'auertimento della verità, ouero falſità, e non intendiamo proua eſſere altro, ſe non verbi gratia volendo la proua per 9 che della quantità che volemo prouare, cauato tutti li 9. che dentro vi ſono, il reſtante è detto proua, & ſe nulla reſtaſſe, nulla ſarebbe proua, ſi come la proua di 19. per 9. e vno è di 16. e 7. e di 26. e 8. che tratto li nouenari, che dentro vi ſono, reſta 8. coſi la proua di 9. è zero, di 18. è zero, di 27. è zero, & ſimile, perche tratto li nouenari di eſsi numeri reſta zero. Et coſi la proua di alcun numero per 7. s'intende, che gettato via gli ſettenari che dentro ſi trouano ad eſſo numero il reſtante eſſere proua, cioè come la proua per 10. e 3. di 16. e 2. e di 25. e 4. perche tratto li ſettimi reſta 4. & ſe nulla reſtaſſe, come diſsi di ſopra, nulla ſarebbe proua, come la proua di 7. è zero, di 14. è zero, di 21. è zero, & ſimili, perche tratto li ſettimi reſta zero. Et auerti quantunque habbiamo dato eſſempio in materia di dette proue, di 9. & di 7. nondimeno ogni numero diſparo puol'eſſere proua, ma gli noſtri primi Autori ſi ſono formati ſopra queſti doi numeri, per eſſere queſti li maggiori numeri ſemplici diſpari.

COME

COME SI MANDA A MEMORIA la proua del Noue.

LA proua del 9. s'intende ſommato le quantità inſieme, che ne voi pigliare la proua, & cauato gli noui, che dentro vi ſono, il reſtante ſerà la detta proua, come ſeria à dire, la proua di 48. che ſommato 4. & 8. inſieme fanno 12. che tratto di eſſo gli 9. reſta 3. & eſſo 3. diremo eſſere proua di 48. per 9. & coſi la proua di 265. che ſommato inſieme 2. e 6. e 5. fanno 13. che di eſſo tratto pur 9. reſta 4. & coſi diremo che eſſo 4. ſerà proua di 265. per 9. & mandaſi a memoria in queſto modo dicendo, di 9. è zero, di 18. è zero, di 27. è zero, di 36. è zero, di 45. è zero, di 54. è zero, di 63. è zero, di 72. è zero, di 81. è zero, & di 90. è zero. Ondebeniſsimo vedi come ſi mandi a memoria la detta proua di 9. & anco come ſi pigli di qual ſi voglia numero, ſeguita, il ragionare ſopra la proua del ſette.

COME SI MANDI A MEMORIA la proua del Sette.

CON l'eſſempio della ſopra detta proua, hauendolo bene a memoria, facilmente con breuità te ne farai poſſeſſore della preſente, quantunque il modo di pigliare la proua di vn numero ſia differente pigliādola per 7. dal 9. perche pigliando la proua per 9. di vn numero, hai inteſo che ſi ſommino le quantità inſieme di detto numero, & dipoi ſi gettano via tutti li noue, che dentro vi ſono, il reſtante è detto proua di tal numero per 9. ma volendo pigliare di tal numero la proua per 7. e non ſommarai altrimenti inſieme le quantità, ma eſſo numero lo diuiderai per 7. l'auanzo ſerà proua di detto numero per 7. come, per eſſempio, la proua di 26. parti 26. per 7. auanza 5. & eſſo ſarà detto proua di 26. per 7. coſi la proua di 256. ſi parte eſſo 256. per 7. auanza 4. & eſſo 4. ſerà proua di 256. per 7. & detta proua mandaſi a memoria in queſto modo dicendo, di 7. è zero, di 14. è zero, di 21. è zero, di 28. è zero

di 35.

di 35. è zero, di 42. è zero, di 49. è zero, di 63. è zero, di 70. è zero, & non più auanti. Che habbiamo à ſufficienza parlato intorno alle proue, circa che coſa ſiano, & come ſi mandano a memoria, reſta il dimoſtrare quale ſia più ſicura delle due.

DIMOSTRATIONE COME L'VNA SIA PIV *fallace dell'altra proua.*

CONſiderato come ſi mandino a memoria le ſopranominate proue, reſta che moſtriamo quale ſia mẽ fallace dell'altra, onde diremo che quella ſarà piu fallace, che manco errori chiariſce, & queſto chiaramente ſi vede eſſere nella proua del noue, perche ogni proua che viẽ chiarita per 7. non vien chiarita per 9. & queſto procede per dui gran mancamenti, che ſi contengono in detto 9. il primo de' quali è, che non fa dimoſtratione delli zeri diſmenticati, & il ſecondo è, che non fa diſmoſtratione delli numeri riuoltati; delli zeri diſmenticati ſeria come ſe voleſsi la proua di 60. per 9. quantunque laſciaſti il zero, & pigliaſti ſolo la proua di 6. ch'è pur 6. tanto ſarebbe, quanto ſe pigliaſti la proua di 60. ch'è ſimilmẽte 6. & pure è grande errore coteſto a conſiderare alla differenza, ch'è da 6. a 60. & nondimeno la detta proua non ne da auertimento alcuno. Ma la proua per 7. farà diuerſo effetto, perche ſe gli darai diuerſi numeri, & eſſa ti darà diuerſe proue, come per eſſempio, ſe pigli la proua di 60. per 7. ſerà 4. ma ſe pigli la proua di 6. ſolo ſenza zero ſerà pur 6. onde hauerai variate proue, per riſpetto de i numeri, che ſono differenti. Per li numeri riuoltati poi s'intende, che ſe di vn 58 faceſti vn 85. come per eſſempio, ſe pigli la proua de 58. per 9. ſerà 4. ſimilmente ſe la pigli de 85. ſarà pur 4. onde quantunque il numero ſi ſia riuoltato, non per queſto la detta proua te ne hà dato ſegno alcuno; ma ſe la pigli detta proua di 58. per 7. ſarà 2. & di 85. ſerà vno, doue che ſi come varierai numeri, ſimilmente hauerai variate proue. Onde concluderemo, che la proua del 7. chiariſſe gli errori, che tiene occulti quella del 9 & per queſto diremo, che quella ſia men fallace.

DI-

delle due figure che auanza auanti al detto 2 faranno 1065400
qual metterai sotto l'altre come vedi, poi moltiplicarai il 4.
via il detto numero nel medemo modo, verrati 213c8.che
aggiontoli vn zero per rispetto di vna figura, ch'auanza
auanti al 4. faranno 213080. qual metterai sotto gl'altri co-
me vedi, poi moltiplicarai il 6. via il detto numero, nel me-
demo modo di sopra verrati 31962. & perche non vi auan-
za niuna figura auanti al 6. metterai detto numero senza ac-
crescimento di zeri, & cosi sarai in capo di detta moltiplica-
tione, resta solo il sommarla, & cominciando a man'
dritta seguitarai l'ordine mostrato auanti nel somma-
re, & verrati 43926442. onde dirai che a moltiplicare
8246. via 5327. ne viene 43926442. a castelluccio, & cosi
sarà benissimo risoluta come poi vedere per via delle
proue.

8246
5327
42616000
1065400
213080
31962
43926442

DEL MOLTIPLICARE PER QVADRETTO.

IL moltiplicare per quadretto si fa in questo modo, in prima si forma vn quadro di-
uiso nel modo che si vede in margine, poi se
per essempio hauessi a moltiplicare 564. via
327. moltiplicarai il 7. da man dritta del nu-
mero minore, via tutto il numero maggiore, farà 3948.
il qual segna per ogni quadretto vna figura, poi moltipli-
carai il 2. del num. minore, via tutto il maggiore farà 1128.
il qual segna nelli quadretti come di sopra, poi moltiplica il
3. del numero minore via similmente tutto il maggiore fa-
rà 1692. & segnati nelli quadretti come disopra serà fornita
la moltiplicatione, resta solo il sommarla, ma nota che a vo
ler sommare detto quadretto si comincia a man' dritta, al
quadretto di sopra & si dice 8; qual segna sotto vna linea, poi
a l'altro quadretto si dice 8. e 4. fa 12; segna 2. & salua la decina
poi a l'altro quadretto dirai 2. e 2 fa 4, e 9 fa 13. & uno che sal-
uasti fa 14; che segna 4. & salua la decina, poi a l'altro quadret
to dirai 9. e 1. fa 10. e 3. fa 13, & 1. che gia saluasti fa 14; segna 4.
salua la decine; a l'altro dirai 6. e 1. fa 7; & vno che saluasti fa 8
segnalo sotto la linea, poi all'ultimo quadretto dirai vno, &

564
327

3	9	4	8
1	1	2	8
1	6	9	2

184428

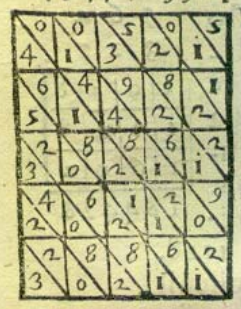
cosi lo segna rai sotto la linea, & sarà fornito di sommare, &
moltiplicare detto quadretto, onde dirai che a moltiplicare
564 via 327. per quadretto ne viene 184428. & sarà fornita
come potrai vedere per le proue.

DEL MOLTIPLICARE PER GELOSIA.

IL moltiplicare a gelosia, è quasi simile al moltiplicare a quadretto, eccetto che nel quadretto si tiene in mano le decine, & nella gelosia non si tengano; & fassi in questa maniera come se hauessi a moltiplicare 82743. via 43475. in prima si forma vn quadro diuiso in tanti quadretti, quante figure sono nel numero che voi moltiplicare, si che il presente lo diuiderai in cinque quadretti, & ogni quadretto lo partirai per meggio come vedi quà segnato, poi cominciarai a man dritta & dirai 3. via 5. fa 15. qual segna nel primo quadretto poi 4. via 5. fa 20. similmente segnalo nel suo loco, poi 5. uia 7. fa 35. qual segnalo nel suo loco, poi 2. uia 5. fa 10. similmente segnalo al suo loco, poi 5. uia 8. fa 40. che similmente segnalo al suo loco, & cosi andrai facendo fino in capo, per ciascheduna figura del numero di sotto, via tutto il numero di sopra, mettendo le moltiplicationi nelli quadretti di mano in mano fino in capo, & cosi fatto resta solo il mostrare il modo di sommarlo, & sommasi in questo modo cioè, si comincia alla prima figura a man dritta di sopra nel primo quadretto, & si dice 5. il qual segna sotto vna linea, poi si viene di mano in mano per ogni quadretto sommando nel modo mostrato nel moltiplicare per quadretto, & cosi hauerai che à moltiplicare 82743. uia 43475. fanno 3597251925. per gelosia, & cosi sarà benissimo rissoluta come poi vedere per le proue.

9
proua 3/3

82743
43475



3597251925

7
proua 1/1

DEL PARTIRE A DANDA.

PArtire à danda è assai bello,& vago,& fassi in questa maniera,come,se hauessi a partire 93838373. per 832. prima metterai il numero come vedi quà in margine con il partitore a man manca, poi dirai il 832. partitore nel 938. parte de numero gl'è vna uolta,il qual 1. segna auanti al numero come vedi, poi con esso uno moltiplica il partitore cioè 832. fa a punto 832. qual caua di 938. resta 106. al qual aggiongi il 3. seguente dirà 1063. poi di nouo dirai l'832. nel 1063. gl'è vna uolta, il qual 1. segna dietro all'altro,& con esso uno moltiplica 832. partitore fa a punto 832. il quale caua di 1063. resta 231. al qual aggiongeli 8. seguente del numero dirà 2318. poi dirai 832. partitore è gl'è nel 2318. due volte, il qual segna come uedi quà al suo loco, e con il qual 2 moltiplica 832. partitore ne uiene 1664. qual caua di 2318. resta 654. al qual aggiongi 3. del numero seguente dirà 6543. poi di nouo dirai l'832. partitore nel 6543. e gl'è 7. uolte,il qual 7. metti al suo loco, poi con esso 7. moltiplica 832. ne uiene 5824. qual caua di 6543. resta 719. al qual aggiongi lo 7. del numero seguente dirà 7197. poi similmente dirai l'832. nel 7197. gl'è 8. uolte il qual segna al suo loco poi moltiplica 8. uia 832. fa 6656. che tratto di 7197. resta 541. al qual aggiongi il 3. numero seguente, & ultimo dirà 5413. si che dirai l'832. nel 5413. gl'è 6. uolte il qual segna al suo loco poi moltiplica 6. uia 832. fa 4992. che tratto del 5413. resta 421. & così sarà finito detto partire, si che dirai che a partire 93838373. per 832. a danda, ne uiene 112786. & auanza 421. & così sarà finito di risoluere detto partire a danda.

Partitore 832

93838373 | 112786
832
1063 9
832 proua 8
8
2318
1664
6543
5824 7 6
7197 proua 6
6656
5413
4992
421

DEL PARTIRE A GALERA.

IL partire a Galera e molto piu sicuro & legiadro al mio giudicio ch'ogn'altro partire, quantunque sia in disputa fra molti qual sia piu difficile delli dui, molti dicano il partire a galera, & argomentano

tano con dire che nel partire a danda si uede manifesto lo so
trare, & nel partire a galera non si uede, & di quì cauano la
loro opinione, cosa in uero che a me molto nō piace, & par-
mi che nel partire a danda gl'interuenghi molto più disturbo per rispetto del mutare li numeri da un loco all'altro, & con quella infinità di linee, che apunto è un intricare il ceruello, & massime alli principianti, onde concludo quanto al mio parere, che il partire a galera è molto più sicuro, & legiadro, & è di piu prestezza assai che non è il partire a danda, & fassi in questa maniera, come per essempio hauendo a partire 89838395. per 75432. imprimamente segnarai il numero come vedi quà in margine segnandoli sotto il partitore a man manca cominciando dal 8. & così seguitando fino all'ultimo 8. del numero, che deue essere partito, così a figura, per figura, poi cominciarai a man manca dicendo dicendo il 7. nel 8. egl'è una uolta, qual segna come uedi quà in margine poi moltiplica in questo modo cioè 1. uia 7. fa 7. che tratto di 8, resta uno qual segna sopra l'8. poi 1. uia 5. fa 5. che tratto di 9. resta 4. qual segna sopra il 9. poi 1. uia 4. fa 4. che tratto di 8. resta 4. qual segna sopra l'8. poi 1. uia 3. fa 3. che tratto di 3. resta zero, il qual segna sopra il 3. poi 1. uia 2. fa 2 che tratto di 8. resta 6. qual segna sopra l'8. tagliando sempre sotto le figure come uedi. & fatto questo portarai auanti vna figura il partitore così di grado, in grado, come uedi quà in margine, poi di nouo dirai il 7. nel 14. e gl'è una sol uolta, in questo caso per rispetto delle altre figure, il qual uno segna al suo loco, poi moltiplica come di sopra cioè 1. uia 7. fa 7. qual caua di 14. resta 7. qual segna sopra il 14. poi 1. uia 5. fa 5. qual caua di 4. non gli puole onde al detto aggiongeli una decina dice 14 del qual caua 5. resta 9. il qual segna sopra il 4. & la decina caua di 7. resta 6. il qual segna sopra il 7. poi moltiplica 1. uia 4. fa 4. che tratto di zero non li puole, al qual aggiongi una decina dirai 10 del qual caua 4. resta 6. qual segna sopra il zero, & la decina caua la del 9. resta 8. il qual segna sopra il 9. poi moltiplica 1.

9
proua 8/8

11910

7
proua 3/3

uia 3. fa 3. che tratto de 6 resta 3. qual segna sopra il 6. poi
1. uia 2. fa 2. tratto di 3. resta uno il qual segna sopra il 3. & sa-
rà finita tutta la detta moltiplicatione, di nouo portarai auanti una figura il partitore, & poi andrai facendo così fino in capo, che per non essere, prolisso non mi stenderò in parole, trouarai che partito 89838395. per 75432. ne viene 1190. & auanza 74315. & così sarà benissimo rissoluta.

DEL MODO DI SCHISARE DE ROTTI, OVERO *di trouare il maggiore comune Repiego.*

SChisar de rotti non è altro, che trouare vn numero, col quale partito ciaschedun numero che uo gli schisare non auanzi nulla, & esso sarà detto maggior comune repiego, ouero schisatore, & schisasi in due modi, il primo de quali si fà sotrando l'vn numero dall'altro, si che si troui, il numero eguale come per essempio hauendo a schisare li $\frac{36}{48}$ imprima si caua il numero di sopra la linea, da quello di sotto la linea, cioè 36. di 48. resta 12. il quale si caua pure del detto 36. resta 24. dal quale si caua pur 12 resta similmẽte 12 ch'è eguale a detto 12. & questo diremo essere il comune maggiore repiego, ouero schisatore da noi cercato, & però uolendo schisare il sopradetto numero, bisogna uedere il schisatore, cioè 12. quante uolte entri in 36 numeri di sopra la linea, che vi entrarà tre uolte, il quale segna similmente sopra vna linea, in questo modo 3 poi conuiene anco vedere quante volte il detto repiego, o uero schisatore entri in 48. numero di so alla linea, che vi entrarà 4. volte il quale metti sotto la der linea, & il 3. di sopra & dirai che a schisare $\frac{36}{48}$ esimi ne uiene $\frac{3}{4}$. & questo è quanto si puo vedere intorno al schisare per via del sotrare. L'altro modo di schisare, ouero di sotrare il commune repiego è molto più legiadro, che non è il sopra nominato, & questo si troua col partire, cioè partendo l'vn numero per l'altro sino che si troua vn numero che parti l'altro & non auanza nulla, & quello sarà detto repiego, ouero schisatore, come per essempio se haueisi à schisare $\frac{3988}{8988}$. in prima deui partire 8988. ch'è sotto la linea per 3988. ch'è sopra la linea, ne uiene 2. & auanza 1012. con il quale si parte 3988. ne viene 3. & auanza 976. con il quale si parte 1012. ne viene 1. & auanza 36. con il quale si parte 976 ne viene 27. & auanza 4. con il quale si parte 36. ne uiene 9. & non auanza nulla. Onde diremo che 4. è il cercato schisatore, ouero maggiore comune repiego, & uolendo schisare $\frac{3988}{8988}$. primamente partirai 3988. qual è sopra la linea per 4. ne uiene 997. il quale metti similmente sopra vna linea così 997 poi partirai 8988. qual è sotto la linea ne verrà 2247. che metterai sotto la linea & il 997. di sopra & starà così $\frac{997}{2247}$. così dirai che schisato $\frac{3988}{8988}$. ne viene $\frac{997}{2247}$. esimi, & così parmi hauere dimostrato breuemente, & facilmente il modo di schisare de rotti, ouero di trouare il maggiore commune repiego.

DEL PARTIRE DE ROTT

$\frac{3}{4}$ X $\frac{2}{5}$ — $\frac{15}{8}$

7 | 1
8

1 $\frac{7}{8}$

HAuendo con ogni breuità parlato ſopra il moltiplicare de rotti, ne ſeguita il parlare ſopra il partire. Onde ſe haueſti a partire $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$ ſempre per regola quello, che voi partire ſi mette a man manca, & quello con che voi partire ſi mette a man dritta, di poi ſi moltiplica in croce, in queſto modo cioè 3. via 5. fa 15. il quale metti da vn lato, poi per l'altra croce ſi dice 2. uia 4. fa 8. con il quale parti il 15. ne uiene vno, & auanza 7. il qual metti ſopra vna linea, & l'8. ſotto, & dirà 1 $\frac{7}{8}$ Onde dirai che a partire $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$ ne uiene 1 $\frac{7}{8}$ & ſarà riſſoluta beniſsimo.

$\frac{9}{1}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{30}{3}$

30 | 10
3

fa 10.

Hauendo a partire ſano per rotto, ſempre per regola ſi mette il ſano ſopra una linea, con l'vnità di ſotto, la quale denota la ſua integrità, poi moltiplicati in croce come di ſopra; come per eſſempio ſe haueſsi a partire 6. intiero per $\frac{3}{5}$ metterai come vedi quà in margine il 6. ſopra vna linea, con l'vnità di ſotto, poi moltiplicarai in croce con li $\frac{3}{5}$ in queſto modo cioè 5. via 6. fa 30. il quale ſalua da vna banda, poi per l'altra croce dirai vno via 3. fa 3. con il quale parti 30. ne uiene $\frac{10}{3}$. Onde dirai che a partire 6. ſano per $\frac{3}{5}$ ne uiene $\frac{10}{3}$ & ſarà riſſoluta.

4 $\frac{1}{2}$

$\frac{9}{2}$ X $\frac{2}{6}$ — $\frac{54}{4}$

1 2
9 4 | 13
4 4

fa 13 $\frac{1}{3}$

Hauendo a partire ſano è rotto, per rotto, ſempre per regola ſi riduce il ſano a rotti, poi ſi moltiplica in croce come di ſopra, per eſſempio ſe haueſsi a partire 4 $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{6}$ imprimamente ridurai il 4 $\frac{1}{2}$ a mezzi, ſaranno $\frac{9}{2}$ hora poi parti $\frac{9}{2}$ per $\frac{2}{6}$ moltiplicando in croce in queſto modo, cioè 6. uia 9. fa 54, qual ſalua, poi per l'altra croce dirai 2. uia 2. fa 4. con il quale parti 54. ne uiene 13. & auanza 2. che ſchiſato con 4. ne uiene $\frac{1}{2}$ hora dirai che a partire 4 $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{6}$ ne uiene 13 $\frac{1}{2}$ & ſarà riſſoluta.

6 $\frac{1}{2}$ uia 3 $\frac{2}{3}$

$\frac{13}{2}$ X $\frac{11}{3}$ — $\frac{39}{22}$

17 |
39 1
22

fa 1 $\frac{17}{22}$

Hauendo a partire ſano, e rotto, per ſano, e rotto, ſempre per regola ſi riduce li ſani a rotti, come ſe haueſsi a partire 6 $\frac{1}{2}$ per 3 $\frac{2}{3}$ imprimamente ridurai li ſani a rotti che per li 6 $\frac{1}{2}$ hauerai $\frac{13}{2}$ & per li 3 $\frac{2}{3}$ hauerai $\frac{11}{3}$ hora poi hai da partire $\frac{13}{2}$ per $\frac{11}{3}$ moltiplicando in croce in queſto modo cioè 13.

uia

ual ſalua,poi per l'altra croce 2.uia 11.fa 22.con il quale parti 39. ne uiene 1. & auanza 17. & perciò dirai che a partire $6\frac{1}{2}$ per $3\frac{2}{3}$ ne uiene $1\frac{17}{22}$ eſimi & così ſarà beniſsimo riſſoluta.

Hauendo a partire rotto di rotto per rotto, ſempre per regola il rotto di rotto ſi riduce a una iſteſſa natura poi ſi parte come di ſopra come ſe haueſsi a partire $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ per $\frac{4}{6}$ imprimamente delli $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ ne farai vn ſol rotto che hauerai $\frac{15}{32}$ il qual parti per $\frac{4}{6}$ nel modo di ſopra, moltiplicando in croce in queſto modo, cioè 6. uia 15 fa 90. qual metti ſopra una linea, poi per l'altra croce 4. uia 32. fa 128. quali metti ſotto detta linea ſtarà in queſto modo cioè $\frac{90}{128}$ che ſchiſato ne uiene $\frac{45}{64}$ eſimi. Onde dirai ch'a partire $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ per $\frac{4}{6}$ ne uiene $\frac{45}{64}$ eſimi, & ſarà beniſsimo riſſoluta.

$\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ // $\frac{15}{32}$

$\frac{15}{32} X \frac{4}{6}$

$\frac{90}{128}$ fa $\frac{45}{64}$

Hauendo a partire rotto di rotto, per rotto di rotto ſempre li rotti de rotti ſi riducano a una ſol natura, come ſi è moſtro di ſopra, per eſſempio ſe haueſsi a partire $\frac{4}{6}$ de $\frac{6}{7}$ per $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$ imprimamente delli rotti de rotti ſi riducano a vn ſol rotto, che delli $\frac{4}{6}$ de $\frac{6}{7}$ hauerai $\frac{24}{42}$, & per li $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$ hauerai $\frac{15}{32}$ hora reſta a partire $\frac{24}{42}$ per $\frac{15}{32}$ nel modo come di ſopra moltiplicando in croce in queſta maniera cioè 24. via 32. fa 768. il quale ſalua, poi per l'altra croce dirai 15. uia 42. fa 630. con il quale parti 768. ne uiene vno & auanza 138. il quale ſchiſa con 630. ne uiene $\frac{25}{105}$ eſimi, onde dirai che a partire $\frac{4}{6}$ de $\frac{6}{7}$ per $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$ ne uiene $1\frac{25}{105}$ eſimi, & ſarà beniſsimo riſoluta.

$\frac{4}{6}$ de $\frac{6}{7}$ // $\frac{24}{42}$

$\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$ // $\frac{15}{32}$

$\frac{24}{42} X \frac{15}{32}$

13
768 | 1 $\frac{25}{105}$
630

Hauendo a partire ſano e rotto di rotto, per rotto, ſempre li rotti de rotti ſi riducano a vn ſol rotto, & di poi li ſani ſimilmente ſi riducano a rotti, come ſe haueſsi a partire $8\frac{2}{4}$ de $\frac{4}{6}$ per $\frac{5}{9}$ imprimamente ſi deue ridure a vn ſol rotto gli $\frac{2}{4}$ de $\frac{4}{6}$ hauerai $\frac{8}{24}$ dipoi delli 8 e $\frac{8}{24}$ ridurai a rotti che hauerai $\frac{200}{24}$ reſta a partire $\frac{200}{24}$ per $\frac{5}{9}$ nel modo detto di ſopra moltiplicando in croce in queſto modo cioè 9. uia 200. fa 1800. qual ſalua, di poi per l'altra croce 5. uia 24. fa 120. con il quale parti il 1800. ne viene 15. & nō auanzarà nulla, ſi che a partire $8\frac{2}{4}$ de $\frac{4}{6}$ per $\frac{5}{9}$ ne uiene 15. & ſarà riſſoluta.

$8\frac{2}{4}$ de $\frac{4}{6}$ // $\frac{8}{24}$

$8\frac{8}{24}$ // $\frac{200}{24}$

$\frac{200}{24} X \frac{5}{9}$

x
x60
x800 | 15
2250
22
ne uiene 15

Hauendo

MODO DI CONOSCERE SE SI PERDE, *ò guadagna, & quanto per cento.*

I.

IO compro la libra della ſeda per lire 12. & riuendo l'onza ſol. 18. Dimando s'io perdo, ouer guadagno,& quanto per cẽto, a ſoluer queſta imprimamente ſi deue vedere quanto coſtò l'onza a lire 12. la libra trouarai che coſtò l'onza ſol.20 doue che a riuenderla a ſol. 18. l'onza, chiaramente ſi vede che ſi perde,però volendo vedere quanto per cento trarai di 20. 18. ne reſtarà 2. dipoi dirai ſe d'ogni ſol. 20.ſi perde 2. quanto ſi perderà ogni cento moltiplica 2.uia 100. fa 200. quale parti per 20.ne uiene 10. & tanto dirai che ſi perde per cento, & ſarà riſſoluta.

II.

Io compro la libra del cinabrio lire 10. & riuendo l'onza ſol.18. dimando ſe guadagno ouer perdo, & quanto per cento a ſoluer queſta imprimamente vedrai quanto coſtò l'onza di prima a lire 10. la libra,trouarai che coſtò ſol. 16. din.8. doue che chiaramente ſi vede che ſi guadagna, però cauarai ſol.16.din. 8. de ſol. 18. reſtarà ſol.1.din. 4. Onde dirai ſe d'ogni ſol.16.din. 8. ſi guadagna ſol. 1. din. 4. quanto ſi guadagnarà ogni 100. reſta a fare delli ſol.16. din. 8. tutti denari ne venerà din.200. ſimilmente delli ſol. 1. din. 4. ne farai denari ne venerà din. 16. dipoi moltiplicarai 16. uia 100. ne viene 1600. che partiti per 200. ne uiene 8. & tanto dirai che ſi guadagna per cento, ſimilmẽte in queſto caſo potrai dire in queſto modo cioè ſe d'ogni ſol. 16. din.8. ſi fanno ſol. 18. che ſi farà din. 100. operando trouarai che ſi guadagnarà 8.per cento, & ſarà beniſsimo riſſoluta.

III.

Io compro la canella libre 32.ſol.12. il cento,& la riuendo la libra ſol.4.din.10.Dimando s'io guadagno ò perdo,& quãto per cento, a ſoluer queſta imprimamente ſi deue vedere quanto coſtò la libra della canella a lire 32.ſol. 12. il cento, trouarai che coſtò la libra ſol. 6. din. 6. Onde chiaramente ſi

vede

apunto fa lire 700. onde chiaramente si vede che è benissimo rissoluta.

IIII.

Sono tre compagni che hanno fatto compagnia insieme & hanno messo in detta compagnia fra tutti tre lire 420. & in fine si sono trouati di guadagno libre 100. del qual guadagno al primo tocca lire 330. al secondo lire 350. Dimando quanto tocca al terzo, & quanto misse ciascheduno delli compagni in detta compagnia, a soluer questa imprimamente vedrai quanto tocca al terzo compagno di detto guadagno, sommando insieme quello che tocca al primo compagno & quello tocca al secondo cioè lire 330. & lire 350. fanno 680. quale tratte delle lire 1000. restano lire 320. e tanto dirai che tocca al terzo compagno di detto guadagno resta similmente a vedere quanto misse ciascheduno delli compagni nella compagnia, perche chiaramẽte sai che le lire 1000. furono guadagnate da lire 420. però dirai se lire 1000. furono guadagnate da lire 420. da che furono guadagnate lire 330. opera trouarai che furono guadagnate da lire 138. sol. 12. & tanto dirai che misse il primo compagno nella compagnia, similmente dirai se lire 1000. furono guadagnate da lire 420. da che furono guadagnate lire 350 opera similmente trouarai che furono guadagnate da lire 147. & tanto dirai che misse il secondo compagno nella compagnia, vltimamente dirai se lire 1000. furono guadagnate dalle lire 420. da che furono guadagnate le lire 320. opera come di sopra trouarai che furono guadagnate da lire 134. sol. 8. & tanto dirai che misse il terzo compagno in detta compagnia, & così sarà benissimo rissoluta.

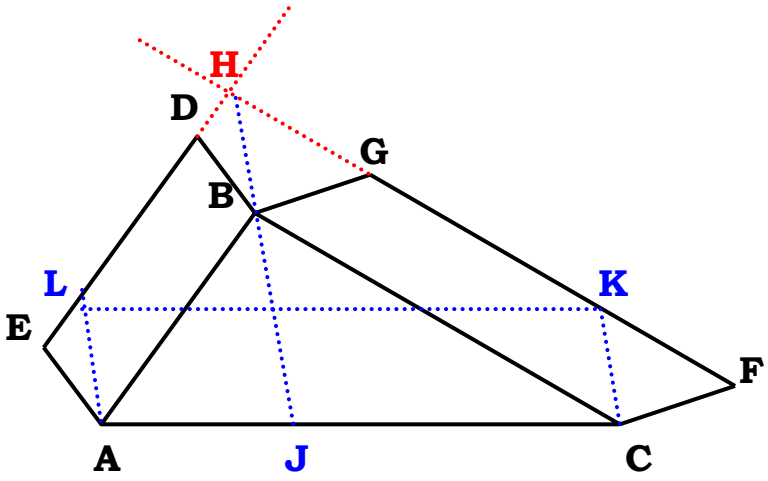
V.

Vno si troua hauer tre creditori, al primo deue dare lire 322. al secondo deue dare lire 400. al terzo deue dare lire 400. al terzo deue dare lire 450. costui occorre che falisse, & se ne fuggì, & essi creditori trouorono tanto del suo, per valuta di lire 500. le quali la raggione vuole che si debbano partire alla ratta delli denari che prima essi haueuano d'hauere. Dimando quanto tocca per huomo d'essi denari, & quanto perdono del credito, a soluer questa imprimamente somma

insieme

Pappo di Alessandria (sec. III d.C.)

È uno dei principali commentatori della matematica greca ed alessandrina. La sua ***Collezione Matematica***, in otto libri, è, insieme al ***Commentario*** di **Proclo** (sec. V d.C.), una delle più ricche e dettagliate fonti per quanto riguarda la storia di questa disciplina da **Euclide** a **Tolomeo**. I temi trattati sono la geometria piana e solida, la meccanica, l'astronomia e l'ottica; a teoremi di autori precedenti si affiancano risultati originali, tra cui il noto **Teorema** che da Pappo ha preso il nome. Viene citata l'opera di **Zenodoro**, vissuto in un periodo compreso fra il sec. II a.C. ed il sec. I d.C., che aveva trovato alcuni interessanti risultati sull'area massima di figure piane a parità di perimetro, e sul volume massimo di solidi a parità di superficie: il cerchio ha area maggiore di tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro, la sfera ha volume massimo fra tutti i solidi aventi la stessa superficie.
Pappo ci propone anche una generalizzazione del **Teorema di Pitagora**, che forse era già nota ad **Erone**: al triangolo rettangolo si sostituisce un triangolo qualunque, ai quadrati costruiti sui lati si sostituiscono parallelogrammi qualsiansi. L'enunciato è: dato un triangolo *ABC* qualunque, e dati due parallelogrammi qualsiansi *ABDE* e *BCFG*, costruiti sui lati *AB* e *BC* rispettivamente, è possibile costruire sul lato *AC* un terzo parallelogramma, *ACKL*, la cui area sia la somma delle aree dei primi due. La costruzione, semplicissima, è quella evidenziata dal disegno:

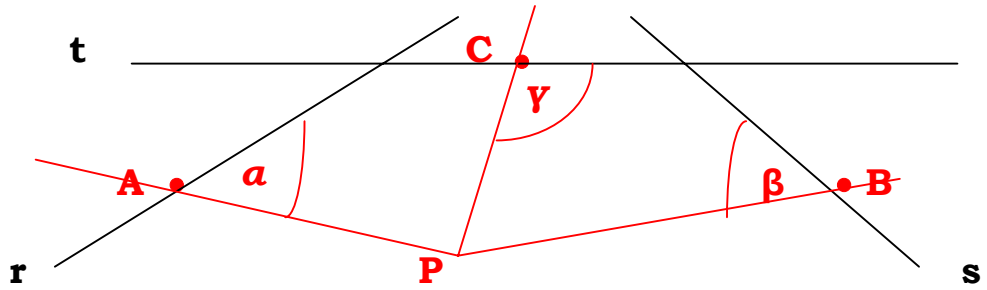


La ***Collezione Matematica*** contiene anche il noto **Teorema di Guldino**, che dà una formula per il calcolo del volume V del solido ottenuto ruotando una figura piana, di area A, intorno ad un asse che non la interseca:

$$V = A \cdot c,$$

dove c è il perimetro del cerchio descritto dal baricentro della figura.
Il risultato ha preso il nome dal matematico **Paolo Guldino** (1577-1643), che lo ripropose.

Il problema di Pappo
Questo problema venne affrontato già da Euclide ed **Archimede**, e fu poi ripreso e generalizzato da **Descartes**. Eccone la formulazione nel caso più semplice:



Date tre rette r,s,t del piano, fissato un numero reale positivo σ, e fissati tre angoli α,β,γ, si cerca il luogo dei punti P del piano tali che, condotte da P tre rette che:
1. formino con r,s,t gli angoli α,β,γ, e
2. intersechino r,s,t nei punti A,B,C,

si abbia l'identità: $|PA|^2 = \sigma \cdot |PB| \cdot |PC|$

Questo problema può essere riformulato, in maniera analoga, per un numero qualunque di rette. **Apollonio** risolse per primo il problema per 3 e 4 rette, provando che in entrambi i casi il luogo cercato è una **conica**: la dimostrazione utilizza ben cinquanta proposizioni contenute nel Libro III del suo trattato ***Sulle sezioni coniche***. Pappo ripropose il risultato e suggerì una generalizzazione per i casi con più di quattro rette. Occorrerà aspettare il secolo XVII per vedere, con i metodi introdotti da Descartes, la prima dimostrazione concisa del risultato. **Newton** ne darà, successivamente, la prima elegante prova geometrica.

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.

A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ

In Latinum Conuerſæ, & Commentarijs
Illuſtratæ.



VENETIIS.
Apud Franciſcum de Franciſcis Senenſem.

M. D. LXXXIX.

Frontespizio di un'edizione latina del 1589

Matematica e Tecniche di Misurazione

Ludovico Perini
Geometria Pratica,
in cui oltre i principi di essa, vi sono molti insegnamenti intorno alle varie misure di terre, acque, fieni, pietre, grani, fabbriche ed altro
Bassano: a spese Remondini di Venezia, 1791

Di qualche interesse è il **frontespizio**.
L'opera, di evidente utilità pratica, contiene una prima breve parte in cui vengono riportate le definizioni dei principali enti geometrici: punto, linea, angolo, superficie, corpo.
Fa seguito la descrizione di alcuni strumenti come lo *squadro* (o *bussolo*), e la *tavola mobile*, utili per la misurazione dei terreni, dei boschi, accompagnata da una minuziosa spiegazione del modo in cui tali strumenti vanno fabbricati ed usati.
Nella parte centrale (cap IV), l'autore illustra **diversi metodi** che permettono di misurare altezza, lunghezza e profondità: per mezzo di raggi visuali, specchi, ombre.
Il capitolo V contiene metodi di misurazione dei corpi solidi di diversa specie, regolari e irregolari.
Interessante è il **brano** sulla misurazione dell'altezza dei piani di un fabbricato.

La misura delle distanze secondo **L.B. Alberti**
La **diottra** del **Tartaglia**

GEOMETRIA
PRATICA,

IN CUI OLTRE I PRINCIPJ DI ESSA, VI SONO MOLTI INSEGNAMENTI INTORNO ALLE VARIE MISURE DI TERRE, ACQUE, FIENI, PIETRE, GRANI, FABBRICHE, ED ALTRO,

SECONDO L'USO DI VERONA, E DI TUTTE L'ALTRE PRINCIPALI CITTA' D'ITALIA,

Raccolti dalle Opere di molti Autori, e dall' Esperienza a comodo degli Studiosi di tal Professione

DA LODOVICO PERINI

PUBBLICO INGEGNERE, ED ARCHITETTO VERONESE.

NONA EDIZIONE,

Nella quale, oltre la divisione de' Terreni, si sono aggiunte ora per la prima volta da un dotto Professore Critiche Annotazioni, nuovi calcoli, e curiose pratiche, e particolarmente un Istromento comodo e facile per misurare il pendio de' monti con Pertica andante.



BASSANO, MDCCXCI.

A SPESE REMONDINI DI VENEZIA

CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

CAPITOLO IV.

DEL MODO DI MISURARE ALTEZZE, LUNGHEZZE, ED ANCHE PROFONDITA'.

SIccome non poco di utilità, e diletto ridonda, (cosa che appreso fin qui abbiamo) dalla Planimetria; così non minore ne apporta pure l'Altimetria, di cui siamo per discorrere.

L'Altimetria tratta delle misure d'una quantità secondo una sola divisione: cioè solamente secondo la sua lunghezza. Con essa adunque in tre cognizioni specialmente potremo esercitarci: la prima intorno le misure delle altezze, la seconda intorno le misure de' piani, e la terza intorno le misure delle profondità. Di tutte tre i principj generalmente sono gl'istessi, ed in ogni altezza, ovvero lunghezza, oppure profondità ci viene in acconcio di dover sempre con linee diritte operare; quindi anche l'altezza col sottoposto piano un angolo retto sempre manifesta.

E per proceder col solito ordine veniamo ora agli esempj delle altezze.

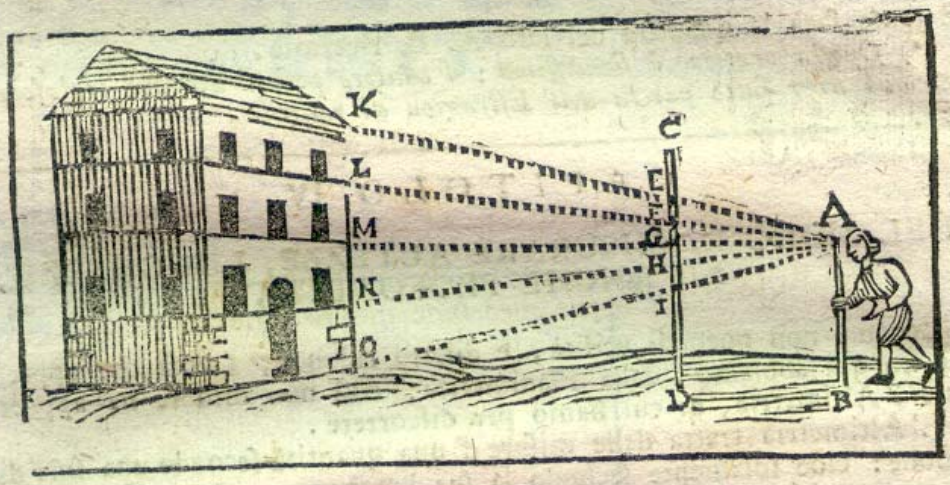
DEL MISURARE LE ALTEZZE COL MEZZO DE' RAGGI VISUALI.

Divisione Prima.

Volendo misurare l'altezza degli appartamenti, finestre, porte, ed altre parti della facciata di qualsisia fabbrica, quando ci venga il caso di dover far tal misura senza poter approssimarci a tutte le altezze medesime, con somma facilità stando in terra lo faremo; imperciocchè senza strumento veruno meccanico, ma solamente con due aste di legno, una mag-

giore dell'altra, far potremo l'operazione, come qui nella ſeguente Figura.

Collocheremo l'aſta più picciola A B, la qual ſia però dall'altezza in circa di quattro piedi, quanto ci piacerà diſtante dalla fabbrica, per eſempio nel punto B, ma che ſtia però a perpendicolo, ed a ſquadra col piano della terra. Lungi poi dalla medeſima per lo meno piedi tre pianteremo parimente a perpendicolo l'altra aſta maggiore C. D, come in punto D; indi col mezzo d'una riga, oppure verga dritta, l'un capo della quale ſi fermerà nella cima dell'aſta minore A.B. in punto A, e l'altro ſi terrà mobile, e che vada a poggiare, ed interſecare al traverſo dell'aſta C. D, in modo che poſſa comodamente alzarſi, o abbaſſarſi, come tornerà il biſogno.



Col mezzo di queſta riga, cioè a lungo della medeſima fiſſando l'occhio nel punto A, ſi miri ad ognuna delle altezze dell'edificio K. O. ſegnando ſopra dell'aſta maggiore C. D. ciaſcun ſegno, che formerà il raggio delle linee viſuali: e le parti, o pur diſtanze E. F. G. H. I. ſaranno corriſpondentemente eguali, come le parti K. L. M. N. O.

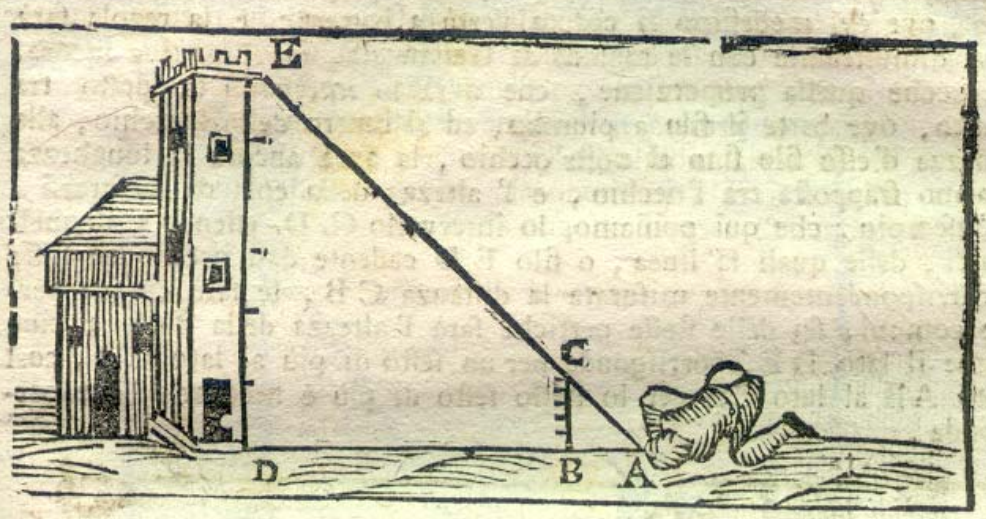
Conſeguentemente con il piede ordinario ſi miſurerà la parte inferiore della fabbrica medeſima, cioè la N. O., alla quale ſarà facile di accoſtarſi, e ſuppoſto, che ſi trovi eſſere piedi 8, divideſi lo ſpazio della maggior aſta contenuto tra H. I. in otto parti eguali: queſta diviſion ſervirà di ſcala per miſurar ciaſcun'altra parte dell'aſta medeſima, dalla quale tutta intiera l'altezza della fabbrica, ed anco ciaſcheduna parte nelle miſure ſue proprie verrà dimoſtrata.

Un altro modo abbiamo ancora, che ſi uniforma al già dato di ſopra, ed è queſto:

Mediante una ſola aſta, o baſtone apparecchiato a ciò poter fare, che ſia dirittiſſimo, di moderata lunghezza, diviſo, e compartito in parti eguali, il quale ſi rizzerà a perpendicolo, e ad angoli a ſquadra, e ſi fermerà ſopra il piano, che fa angoli retti con la Torre D. E, la quale proponiamo qui di miſurare.

Po-

Posto dipoi l'occhio in terra ci accosteremo, o discosteremo dal bastone B. C. fino a tanto, che passando il raggio della veduta per la cima del bastone istesso, si scorga la suprema parte di detta Torre, e poniamo di fermarci nel punto A, siccome s' insegna nella seguente Figura.



Ciò fatto si misuri lo intervallo A. B. interposto fra l' occhio A, ed il piede dell' asta B. con quelle medesime misure, con le quali si è già compartita l'asta B. C., e se l' asta, ed il sopraddetto intervallo saranno fra loro corrispondentemente eguali; cioè (*per esempio*) se l' asta B. C. fosse sei parti, ed anco lo intervallo A. B. sei di quelle medesime parti conteneſſe, misurata con le misure ordinarie del piede la distanza A. D, dovendo essa in tutto esser eguale all' altezza D. E, ci dimostrerà quanti piedi d' altezza istessa contenga.

Ma se accadesse, che l' intervallo del piano fosse minore dell' asta, in quella proporzione, che il piano corrisponderà all' asta, corrisponderà anco la distanza all' altezza della Torre, che si misura: cioè se il piano A. B. tra l' occhio e l'asta sarà per lo terzo di più dell' asta B. C, ancora il piano della distanza A. D. sarà per lo terzo maggiore dell' altezza D. E.

Questa regola, come dissi, è uniforme, ed ha le stesse ragioni della prima, le quali dipendono da una sola proporzione di angoli, e lati fra di loro eguali; nè in altro discorda che nella pratica.

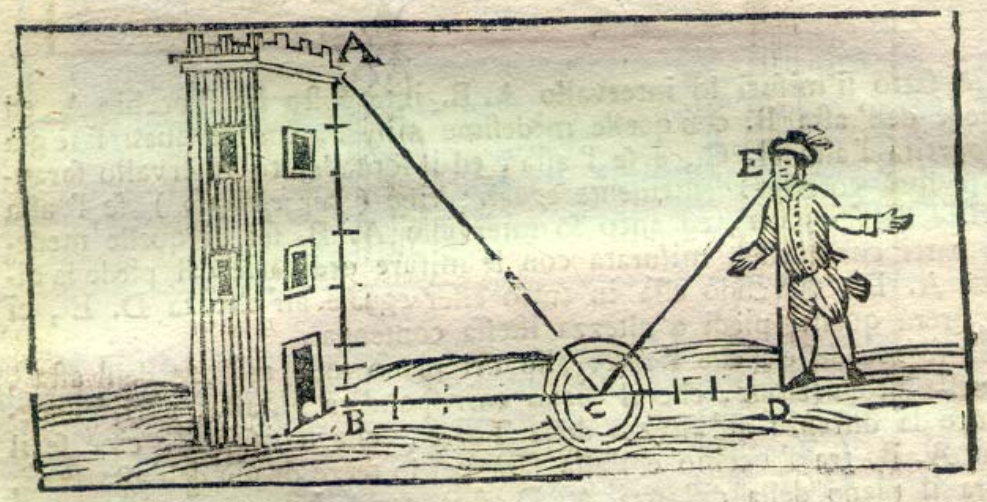
Ma per esser tanto chiara l'operazione, ad ulterior spiegamento non mi dilato.

DEL MISURARE CON UNO SPECCHIO QUALUNQUE ALTEZZA.

Divisione Seconda.

Bellissima invenzione, come molti insegnano, fu la ritrovata forma di misurare le altezze mediante il raggio della veduta ribattuto da uno specchio, che qui per lo terzo esempio mi cade a proposito.

Si prenda uno ſpecchio piano, e ſopra della terra alquanto lontano dalla coſa, di cui cerchiamo di ſapere l'altezza, orizontalmente ſi collochi. Al quale poi ci anderemo tanto accoſtando, o diſcoſtando, che d'eſſa in detto ſpecchio la cima ci ſcorga. Ciò ritrovato, ivi conviene di laſciarſi poi cadere dall'occhio un filo col perpendicolo, notando il punto, ove del medeſimo la caduta verrà a battere; e la regola ſarà queſta dimoſtrabile con le ragioni di Geometria, e proſpettiva ancora. Imperocchè quella proporzione, che avrà lo intervallo frappoſto tra il punto, ove batte il filo a piombo, ed il centro dello ſpecchio, alla lunghezza d'eſſo filo ſino al noſtr'occhio, la avrà ancora la lunghezza del piano frappoſta tra l'occhio, e l'altezza della coſa da miſurarſi. Nell'eſempio, che qui poniamo, lo intervallo C. D. eſſendo 5. di quelle parti, delle quali la linea, o filo E D cadente dall'occhio ne foſſe 6, corriſpondentemente miſurata la diſtanza C B, ſe ſarà cinque pertiche comuni, ſei delle ſteſſe pertiche ſarà l'altezza della Torre: cioè ſiccome il lato D E, corriſponde per un ſeſto di più al lato C D, così il lato A B al lato C B per lo ſteſſo ſeſto di più è neceſſario che corriſponda.



Sicchè il ſuddetto ordine ſi tenga nel miſurare li due triangoli provenienti dall'operazione inſegnata; indi eſattamente le corriſpondenti proporzioni ſi contrappongano, e ne avremo l'intento.

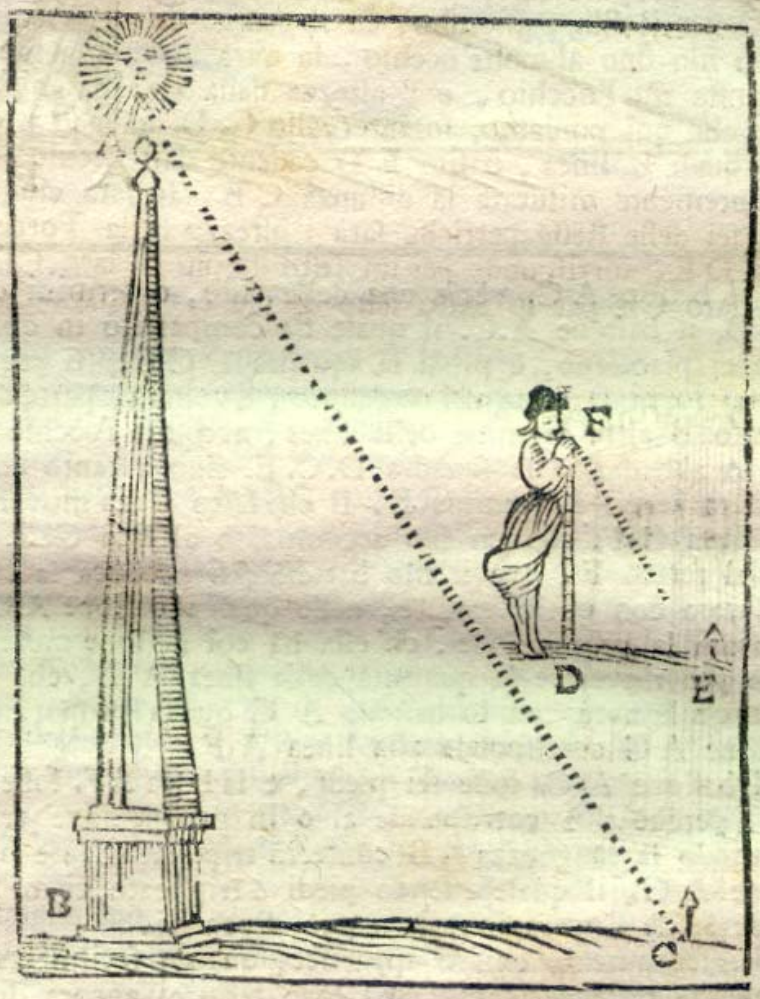
DEL MISURARE LE ALTEZZE CON L'OMBRA.

Diviſione Terza.

Oltre l'uſo dello ſpecchio ſopra dimoſtrato per ritrovare l'altezza di alcuna coſa elevata ſopra il piano dell'orizzonte, inſegneremo ancora un altro modo di ciò fare col mezzo dell'ombra cagionata da qualunque corpo, lo che niente meno ci ſarà facile, quando col ſeguente ordine ſi proceda.

Nella ſottopoſta Figura pongo, che il Sole mi faccia l'ombra B C pro-

prodotta dal corpo piramidale A B, e che istessamente il bastone D F rizzato in disparte sopra del terreno mi produca l'ombra D E. Misurandosi l'ombra B C, la quale poniamo, che sia piedi 40, e l'ombra DE sia piedi 4, ed il bastone DF piedi 6; dico per regola infallibile, che siccome il numero 4 di quest'ombra viene compreso per la metà più nel numero 6 del bastone, così corrispondentemente ancora l'altezza della piramide A B eccederà per la metà l'ombra sua particolare B. C. cioè sarà piedi 60.



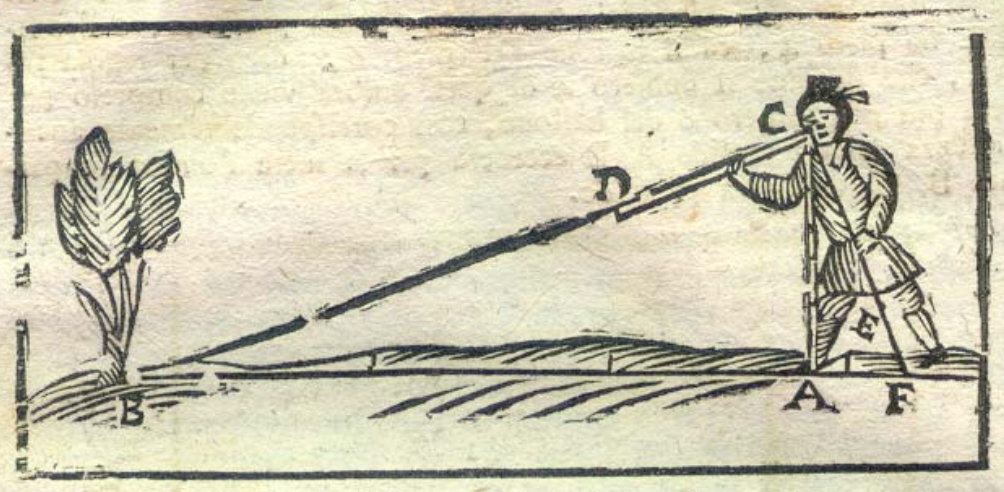
DEL MISURARE LE LUNGHEZZE DE'PIANI IN SEI MANIERE DIFFERENTI.

Divisione Quarta.

Continuando l'incominciato assunto, vengo ora alle lunghezze de' piani; per misurare i quali mi piace prima di tutto porgere un esempio da operare con l'ajuto solo della squadra usata comunemente da' meccanici Lavoratori; e questo modo di misurare tornerà di molto comodo, sì perchè egli è facile, sì perchè non di rado ancora può accadere alli misuratori, che veruno degl'istrumenti consueti seco loro non abbiano.

Ven-

Vengaci per ciò propoſta una linea diritta, della quale noi vogliamo rintracciare la lunghezza; e ſia A B.



Dirizzato il baſtone A C. verſo una delle teſte, o termini della detta linea A. B, il baſtone A.C. il quale ſia compartito in quante parti eguali più ci piacciano, e preſa la ſquadra D C E, ſi porrà il ſuo angolo interno ſopra la cima del medeſimo, e voltata la parte della ſquadra D.C. verſo B altro termine della linea, accoſtiſi l'occhio al punto C, alzando, o abbaſſando la ſquadra D.C.E. fino a tanto che il raggio della veduta arrivi al termine B. Il che fatto ſenza movere la ſquadra tiriſi la linea C.F. con un filo accomodato al lato C.E. di detta ſquadra, e nel punto F, ove il filo batterà, ſi produca la linea A F, la quale miſurata con quelle miſure, nelle quali il baſtone A C. ſta diviſo, e ritrovata la proporzione, ch' eſſa ha col baſtone medeſimo, ce ne ſerviremo per rinvenire la quantità della linea A B, che ci è ſtata propoſta: la quale avrà con lo baſtone A C quella proporzione, con cui eſſo baſtone A C corriſponde alla linea A F.

Cioè ſe il baſtone A C. foſſe ſei piedi, e la linea A F. foſſe ſolamente due piedi, perchè il 2 corriſponde al *6* in proporzione triplicata, nello ſteſſo modo la lunghezza A B conterrà triplicatamente la lunghezza del baſtone A C, il quale eſſendo piedi *6* triplicato, ci moſtrerà 18; e con ciò più facile l'operazione non può divenirci.

Da queſto inſegnamento chiaro appariſce, quanto facilmente ſi ritrovino le lunghezze rette de' piani, ed i loro termini ancora difficili da accoſtarvici, quantunque vi ſi interpongano acque, foſſi, o altri così fatti impedimenti, che ciò fare ci vietino.

E per ciò oltre di queſta facile e comoda invenzione, acciocchè il miſuratore con più modi ſappia l' arte ſua eſercitare, cinque altri eſempj ho penſato di porre, i quali, benchè differente abbiano la forma dell' operare, con tutto ciò in eſſi le ſteſſe ragioni affatto, ed anco gli effetti ſempre concordano.

Piero della Francesca (Borgo San Sepolcro 1416 ca. –1492)



Il **Vasari**, nelle sue *Vite*, così ci narra l'infanzia e l'adolescenza di questo grande pittore rinascimentale:

"Costui nacque nel Borgo detto, a' dì nostri fatto città, e chiamossi della Francesca, da 'l nome di sua madre, per esser quella restatane gravida quando il padre suo si morì; e per essere stato da lei allevato e nutrito con ogni sollecitudine e diligenzia, perché e' potesse venire a 'l grado che la sua buona sorte gli dava, attese Pietro nella sua giovanezza alle matematiche, et ancora che di anni XV fusse in diritto ad esser pittore, non si ritrasse già mai da quelle. Anzi, faccendo mirabil frutto et in esse e nella pittura, fu adoperato da Guidobaldo Feltro Duca vecchio d'Urbino in molti disegni."

In realtà Piero prese il nome dalla nonna Francesca.

Il pittore fu successivamente convocato presso altre corti: lavorò anche per gli **Estensi** a Ferrara e per i **Malatesta** a Rimini.

La Flagellazione di Cristo è un bell'esempio di applicazione delle leggi della prospettiva, elaborate da **Leon Battista Alberti** e da Piero della Francesca stesso nel suo trattato ***De prospectiva pingendi*** (1490 ca.), essenzialmente basato sull'***Ottica*** di **Euclide**: una **trascrizione latina** di quest'opera, appartenuta al pittore, è conservata presso la Biblioteca Vaticana.

Piero della Francesca mise a frutto i suoi studi matematici anche in altre due opere: il **Trattato d'abaco**, un'opera di algebra ed aritmetica ad uso dei mercanti, ed il ***Libellus de quinque corporibus regularibus***, in cui vengono studiati cinque **poliedri**. Quest'ultima opera impressionerà **Keplero**, che sui cinque solidi fonderà la sua fantasiosa teoria astronomica.
La datazione di questi scritti è incerta, perché il loro autore non li diede mai alle stampe. Essi furono diffusi solo dopo la sua morte, inseriti in altre opere. Il **Vasari** dà della vicenda la seguente versione, forse non del tutto rispondente a verità. Ormai vecchio e malato,

Piero della Francesca non poteva prendere l'iniziativa di pubblicare i suoi trattati. Alla sua morte, il suo discepolo **Luca Pacioli** se ne impadronì, e decise di farli passare come propri. Gran parte del loro contenuto confluì nella ***Summa*** e nel ***De Divina Proportione***. La vera paternità delle opere fu scoperta solo molto tempo dopo. I tre trattati furono editi integralmente solo a partire dal 1899.

Agli anni della vecchiaia, anni in cui riassumeva e teorizzava i suoi ideali formali nei già citati *De prospectiva pingendi* e nel *Libellus de quinque corporibus regolaribus,* risale ***La Madonna tra Santi e Angeli*** inquadrata entro una solenne architettura già quasi bramantesca.

Presentiamo anche un disegno relativo agli **studi prospettici di un toro**.

Un'opera di Archimede appartenuta a Piero della Francesca

Piero della Francesca
Trattato d'abaco

Quest'opera contiene molte pagine di geometria e di algebra, con particolare attenzione ai problemi di natura mercantile. Ne riportiamo uno, che riguarda il calcolo degli interessi maturati in cinque anni. Altri problemi analoghi erano stati trattati, due secoli prima, da **Fibonacci** nel suo ***Liber abaci***.

"Uno presta ad un altro 100000 lire per 5 anni a fare capo d'anno; in capo de' 5 anni quello gli rende, tra merito e capitale, 161051. Domando a che ragione fu prestata la Libra il mese.

Mecti che la libra fusse prestata il mese ad 1 ***cosa*** *de Libra […] arai 1* ***censo di cubo*** *e 100 censo di censo e 4000 cubi e 80000 censi e 800000 cose equale ad 1953632 numero. E la regola dici che se parta i censi che sono 80000 per li censi di censi, e quello che ne vene, montiplicare per li cubi. E partendo i censi per li censi di censi ne vene 800, montiplica con li cubi cioè 800 via 4000 fa 3200000, giogni collo numero fa 5153632. Hora se vole ppartire le cose, che sono 800000, per li censi di censi, e quello che ne vene, se vole serbare. Adunqua partendo le cose, che sono 800000, per li censi di censi, che sono 100, ne vene 8000; adunqua diremo che la Libra fu prestata il mese a radice relata de 5153632 meno radice cuba de 8000, ch'è 20; et la radice relata de 5153632 è 22, tranne 20 resta 2. E a denari 2 la lira fu prestata il mese."*

(cit. da U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica,* Sansoni, Firenze 1992, pagg. 176-177)

Ecco la traduzione in linguaggio moderno:

Uno presta ad un altro 100000 lire per 5 annualità. Allo scadere dei cinque anni, quello gli rende 161051 lire, compresi gli interessi. Si chiede a quanto ammonti il tasso d'interesse mensile.

Sia x l'interesse mensile. Allora

$$x^5 + 100x^4 + 4000x^3 + 80000x^2 + 800000x = 1953632 \qquad (*)$$

La regola di risoluzione prescrive di dividere il coefficiente del termine di grado 2 per il coefficiente del termine di grado 4, e quindi di moltiplicare il tutto per il coefficiente del termine di grado 3.

Eseguendo la divisione di 80000 per 100 si ottiene 800, che moltiplicato per 4000 dà 3200000. A questo si sommi il termine noto: si ottiene 5153632. Quindi si divida il coefficiente del termine di grado 1, che è 800000, per il coefficiente del termine di grado quattro, che è 100: si ottiene 8000. La soluzione si ricava sottraendo dalla radice quinta di 5153632, che è 22, la radice cubica di 8000, che è 20. Il risultato è 2. Il tasso d'interesse mensile è pari a 2 denari per lira.

Vediamo di spiegare il calcolo usando il simbolismo matematico attuale.

Una lira vale *240* denari. Ogni anno al debito si aggiunge, per ogni lira, un certo numero di denari, che chiameremo *12x*. In questo modo *x* è il valore mensile cercato. Dopo *5* anni, l'ammontare del debito in denari è

$$(12x + 240)^5\ 100000 = 240^5 \cdot 161051,$$

cioè, dopo le opportune semplificazioni:

$$(x + 20)^5 = 32 \cdot 161051.$$

Sviluppando il binomio ed isolando il termine noto a secondo membro si ottiene l'equazione (*).

Piero della Francesca utilizza una formula risolutiva generale per le equazioni di quinto grado della forma:

$$(x + s)^5 = t \qquad (**)$$

con *s,t* numeri reali. Queste sono essenzialmente equazioni binomie, e quindi risolubili per radicali; come sappiamo, non lo sono tutte le equazioni di quinto grado.

Sia

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$$

la forma esplicita dell'equazione (**). Allora la soluzione è data da

$$x = \sqrt[5]{bc/a + e} - \sqrt[3]{d/a}.$$

Piero della Francesca calcolò i coefficienti del binomio due secoli prima che **Newton** pubblicasse il *teorema del binomio*, secondo il quale i coefficienti dello sviluppo del binomio di grado *n* sono i numeri che compaiono nella *n*-esima riga del **triangolo aritmetico**.

Curiosità

Nel testo originale di Piero della Francesca, i numeri che corrispondono ai coefficienti dell'equazione vengono contrassegnati in modo diverso a seconda del grado del termine a cui si riferiscono. Il coefficiente del termine di grado *1* appare così:

$\overline{800000}$

il coefficiente del termine di grado *2* è sormontato da un quadrato

$\square 80000$

il coefficiente del termine di grado *3* è sormontato da una "c" minuscola:

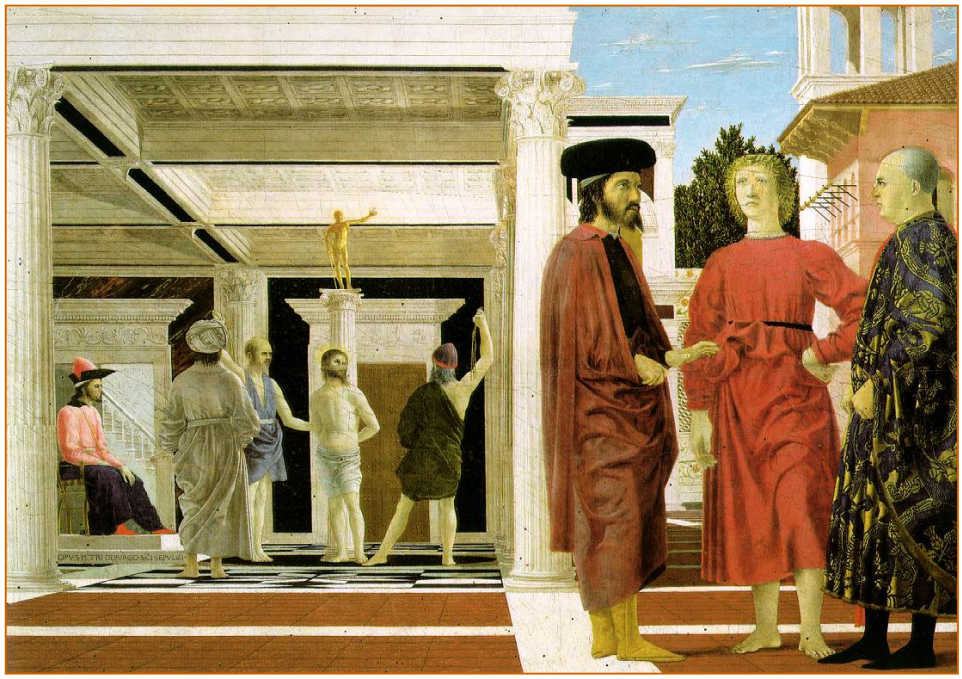
$\overset{c}{4000}$

e quello di grado *4* da un doppio quadrato:

$\square\square 100$

La flagellazione di Cristo

Quest'opera risale ad uno dei primi soggiorni urbinati, e si presume sia stata dipinta poco dopo il 1444. Risale a tale data, infatti, la morte violenta di **Oddantonio**, fratellastro di **Federico da Montefeltro**, di cui il dipinto sarebbe una singolare commemorazione.



"La tradizione popolare ravvisa Oddantonio nel giovane biondo in primo piano, affiancato dai due consiglieri responsabili della rivolta che gli tolse la vita; e la flagellazione di Cristo starebbe a simboleggiare il tragico destino del principe.
*Tuttavia, all'infuori di ogni puntuale significato, l'opera è così interamente calata in un clima di astrazione formale, da divenire in se stessa "**sogno matematico**", cioè uno dei dipinti in cui meglio si esprime quell'esaltazione poetica della **prospettiva** e della **"misurazione"** che è un portato tipico della Rinascita in genere e dell'arte di Piero in particolare. La composizione è spartita in due zone non simmetriche, ma legate da quel **rapporto** che i Greci, ritenendolo perfetto, chiamavano **aureo** e che gli artisti del Quattrocento venivano ora riscoprendo nella sua **divina armonia**. A considerare poi attentamente il quadro, tutta una serie di ben calcolate **proporzioni** crea un **tessuto geometrico** da cui nasce l'evidenza di ogni forma e il suo intimo legame con le altre. Il colore-luce riveste e trasfigura la razionalità dello schema donandogli quel senso di circolazione continua del raggio solare e dei suoi infiniti variabili riflessi sulla materia, che costituisce l'unico elemento vivo e mosso di un quadro dove i*

personaggi sono invece fermi e impassibili, quali i protagonisti di un fatto ormai fatalmente compiuto e che perciò nessuna azione può modificare. Così non la posa di Oddantonio e dei consiglieri, ma i passaggi dell'intensità cromatica e la direzione diagonale della prospettiva rendono evidente il vincolo allegorico tra il gruppo in primo piano e la scena della flagellazione; e questa, immersa nei glauchi riflessi di una luce indiretta, dà un senso di lontananza non solo nello spazio, ma anche nel tempo. In tale spettacolo di forme i gesti crudeli assumono la fissità di un simbolo e divengono anch'essi partecipi di quel clima di catarsi lirica, che è la più profonda ragion d'essere di questo capolavoro."

(da: Storia dell'arte, Volume Terzo, di Castelfranchi Vegas e Cerchiari Necchi, Signorelli editore, 1960)

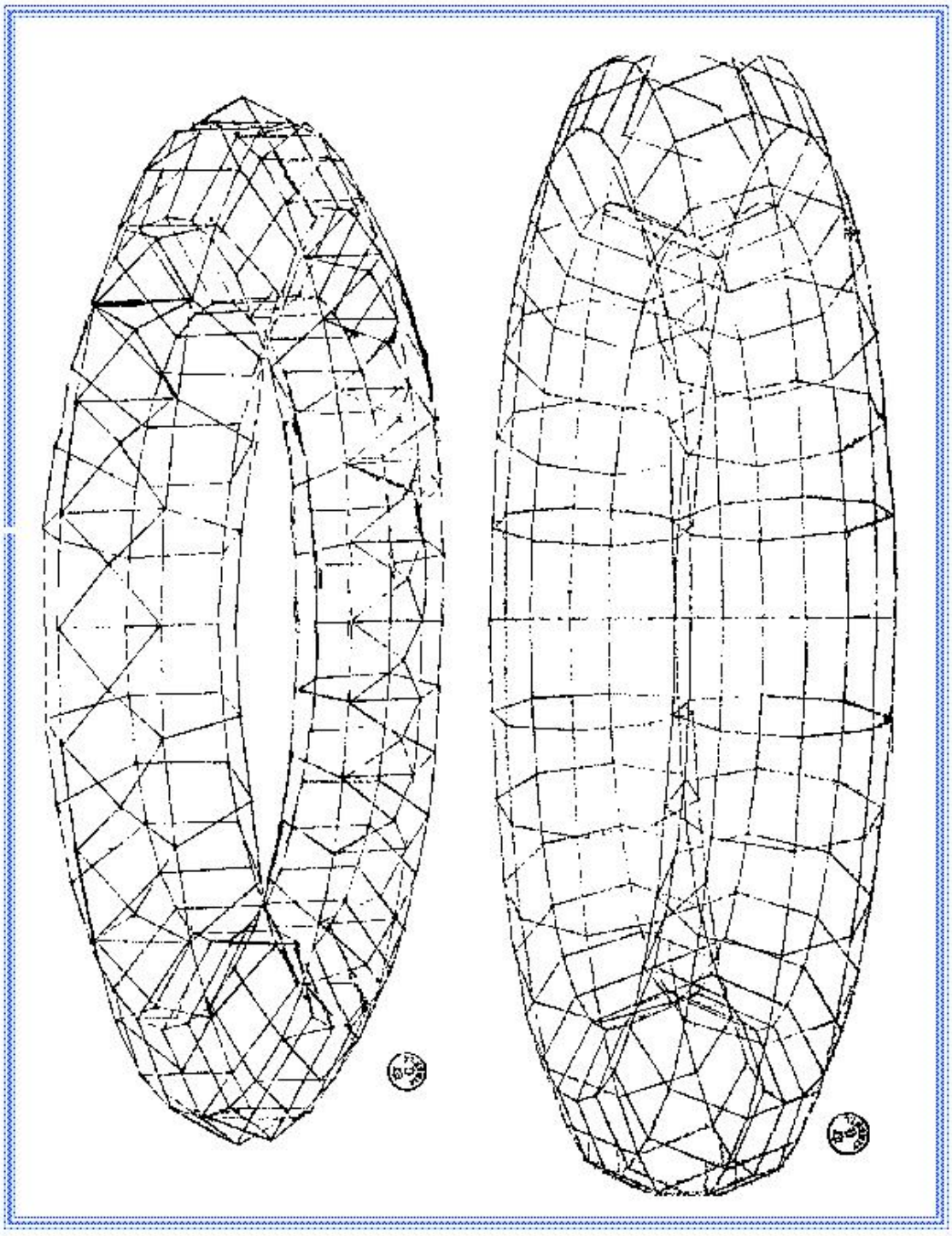
La Madonna tra Santi e Angeli



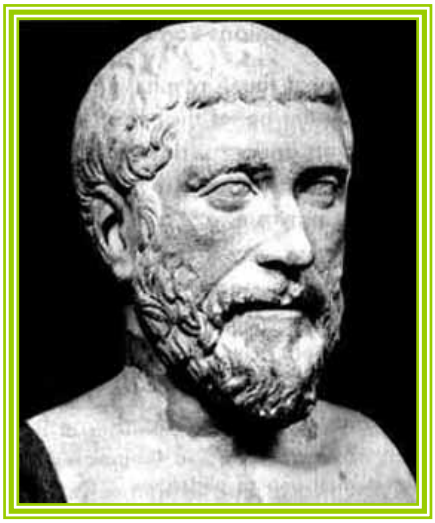
"L'accolta dei personaggi si addentra nella profondità dell'ambiente lungo una traiettoria ricurva rispondente alla conca absidale e si fissa in una immobilità di pose che suggerisce l'immagine di un emiciclo di colonne. Con questa rigorosa astrazione compositiva, che colpisce immediatamente l'occhio dello spettatore, contrasta ma non stride l'eccezionale realismo dei particolari - gioielli, mani, volti - che rimane comunque subordinato all'organicità dell'insieme.
D'altra parte, uno degli elementi più curiosi ed evidenti, l'uovo sospeso alla conchiglia absidale, riconduce la nostra attenzione su un terreno di astratta simbologia, alludente all'idea della Redenzione, e rappresenta sul piano pittorico un punto di riferimento composito e luminoso, concentrando in esso la luce il massimo della sua intensità."

(da: Storia dell'arte, Volume Terzo, di Castelfranchi Vegas e Cerchiari Necchi, Signorelli editore, 1960)

Studi prospettici di un toro (Piero della Francesca)



Pitagora ed i Pitagorici



Sulle origini di Pitagora, come riferito da Porfirio, v'è incertezza. Nacque intorno al 570 a.C. probabilmente a Samo, un'isola del Mar Egeo, situata di fronte alle coste dell'Asia Minore. Era forse figlio di Mnesarco, mercante di frumento. Si narra che all'età di diciotto anni vinse le Olimpiadi nella categoria del pugilato. Si stabilì poi nell'Italia del Sud, per sfuggire alla tirannia di Policrate. Nel 532 fondò a Crotone la sua scuola filosofica e religiosa, in cui vigeva una rigida disciplina di vita, basata sull'amicizia e sulla continenza, e sostenuta dalla contemplazione e dallo studio. Pitagora fu poi di nuovo costretto a fuggire, a causa delle persecuzioni di cui egli ed i suoi seguaci erano divenuti oggetto. Approdò infine a Metaponto, ma neanche qui riuscì a sottrarsi all'ostilità che, nel frattempo, si era diffusa un po' ovunque. Morì nel 490 a.C., forse proprio in seguito ad un attacco dei suoi avversari politici.

Pitagora non lasciò nulla di scritto: tutto ciò che sappiamo sulla sua vita ed i suoi insegnamenti ci è pervenuto grazie a tarde testimonianze, redatte anche a distanza di secoli, e discordanti in più punti. Alcune di queste sono state composte sotto forma di lettere col finto nome di Pitagora, come, del resto, è avvenuto per altri antichi filosofi. Le regole che governavano la vita della comunità pitagorica ci sono giunte tramite i ***Versi aurei***, una breve composizione poetica, risalente forse al secolo IV d.C..

Pare che Pitagora dovesse la sua formazione scientifica alla

frequentazione degli egizi, dei fenici e dei caldei, e che avesse appreso il culto religioso dai magi.

Secondo Eudemo, fu Pitagora a coniare il termine *"matematica"* (letteralmente: ciò che si impara): l'anonimo Foziano riferisce che *matematici* erano detti gli appartenenti alla scuola di Crotone che si dedicavano alla geometria ed all'astronomia, e venivano distinti dai *sebastici,* dediti alla contemplazione religiosa, e dai *politici,* studiosi delle cose umane. A Pitagora è dovuto anche il termine *"filosofia".*

Empedocle così descrive Pitagora:
"*Era fra di essi un uomo di altissima sapienza che possedeva massima dovizia di scienze, ed era assai vago di ogni specie di dotte arti: poiché quando intendeva le forze della mente agevolmente vedeva ciascuna delle cose esistenti fino a dieci o venti età d'uomini."*

Presso i suoi seguaci Pitagora era considerato un essere divino, e questa convinzione era suffragata da sue presunte capacità divinatorie e taumaturgiche. Pare che uno dei loro motti fosse:

"L'uomo è bipede e così l'uccello e un'altra terza cosa. La terza cosa è Pitagora."

I due principali contributi dei Pitagorici nel campo della matematica sono:
- la prima dimostrazione del famoso **Teorema** sui triangoli rettangoli, che pare fosse già noto ai **Babilonesi**;
- la scoperta dei numeri irrazionali (allora detti *incommensurabili*).

Il misticismo dei numeri
La teoria musicale pitagorica
L'astronomia pitagorica
La geometria pitagorica



Antica moneta greca

Il misticismo dei numeri

Il pensiero filosofico della scuola di **Pitagora** è basato sul concetto di numero, visto come l'essenza ultima di tutte le cose, e come unico modo di esprimere i primi principi, inspiegabili a parole. L'esercizio matematico è, per i Pitagorici, la maniera ideale di distogliere la mente dalle cose materiali, instabili, ed aprirla alla contemplazione delle cose spirituali, immutabili, le "*cose veramente esistenti*". I principali concetti astratti vengono associati a numeri che, in qualche modo, ne rispecchiano la natura. Così essi chiamano **uno** (*monade*) i principi di unità e di identità, grazie ai quali l'universo rimane, nel tempo, sempre uguale a se stesso; uno è anche il generatore dei numeri ed è il numero della ragione. Il concetto di diversità e la natura di tutte le cose divisibili e variabili corrispondono invece al **due** (*diade*), che è anche il primo numero pari o femminile, il numero dell'opinione. Il numero **tre** è il primo vero numero dispari o maschile, il numero dell'armonia, essendo composto di unità e diversità, ed indica tutto ciò che ha un inizio, un mezzo e un fine (*triade*). Il **quattro** è il numero della giustizia e del castigo, e indica il far quadrare i conti; **cinque** è il numero del matrimonio, l'unione del primo vero numero maschile col primo numero femminile; e **sei** è il numero della creazione. Un ruolo speciale spetta al numero **sette** (*ebdomade*), che possiede, secondo le parole di Ierocle, *"la dignità della monade in grado secondario".* Esso viene anche definito *"privo di madre e vergine"*: privo di madre perché *non è partorito da numero alcuno che sia dentro la decina,* cioè non ammette divisori non banali fra i numeri da *1* a *10*, (*7* infatti è un **numero primo**). D'altra parte il *7* è vergine, cioè sterile, perché non partorisce alcun numero che sia dentro la decina, ossia non è divisore di alcun altro numero compreso fra *1* e *10*. E, com'è facile verificare, il *7* è l'unico numero, compreso fra *1* e *10*, avente entrambe queste proprietà.
Il più sacro di tutti i numeri è il **dieci**, o ***tetractys***, il numero dell'universo, in quanto è la somma di tutte le dimensioni geometriche possibili (quattro, da cui il nome, che in greco significa *"essere quadruplice"*): **un** punto è il generatore delle dimensioni, **due** punti determinano una retta (oggetto a una dimensione), **tre** punti non allineati determinano un triangolo (oggetto a due dimensioni), **quattro** punti non complanari determinano un tetraedro (oggetto a tre dimensioni). La formula del giuramento presso i Pitagorici suonava così: *"In nome di Colui che rivelò alla nostra stirpe la tetractys, la fonte e la radice dell'eterna natura."*
Pitagora identificava la *tetractys* con Dio, che chiamava anche *il numero dei numeri.* La particolarità del numero *10* è che si tratta del

quarto **numero triangolare**: secondo la teoria esposta da **Platone** nel ***Timeo***, quattro sono gli elementi di cui è composto l'universo, e tutta la materia è formata di triangoli.
E ancora: Pitagora spiegava l'universo per mezzo di dieci categorie di opposti: limitato e illimitato, dispari e pari, uno e molti, destra e sinistra, maschio e femmina, quiete e moto, diritto e curvo, luce e tenebre, bene e male, quadrato e oblungo: si trattava di forze opposte, delle quali la prima era positiva, la seconda negativa. E.T. Bell propone un'interessante spiegazione dell'illimitatezza dei numeri pari e della limitatezza dei numeri dispari. Ogni numero pari è somma di due numeri uguali, che possono essere idealmente associati ai due "estremi" all'infinito di una retta. Ogni numero dispari è somma di due numeri uguali e di uno: ad esempio *5 = 2 + 1 + 2*. Qui i due "estremi" vengono a combaciare in un punto, rappresentato dal numero uno, che è poi il generatore di tutti i numeri.
Pare che i Pitagorici suddividessero i numeri interi in *10* classi, a seconda del resto della divisione per *10*. Questa operazione anticipa di molti secoli un oggetto della moderna teoria dei numeri: la ***congruenza modulo un numero naturale***.
Alla scuola di Pitagora risale l'invenzione dei **numeri poligonali**, e la scoperta dei **numeri amicabili e perfetti**.

Pitagora era convinto che ogni ente dell'universo potesse essere descritto mediante un rapporto fra numeri, che caratterizzasse la relazione fra le sue parti. Questa idea gli proveniva forse dalle osservazioni su cui è basata la sua **teoria musicale**: i Pitagorici avevano notato che le vibrazioni delle corde producono note armoniose quando i rapporti fra le loro lunghezze sono numeri interi. I rapporti fra numeri interi erano detti *commensurabili.* Gli altri rapporti erano detti *incommensurabili,* o anche *inesprimibili.*

Secondo quanto dichiarato da Aristotele nella *Metafisica,* i Pitagorici consideravano i numeri come le componenti ultime degli oggetti reali e materiali, come lo sono oggi per noi le particelle elementari. Pare addirittura che essi non distinguessero i numeri dai punti geometrici, e vedessero entrambi come minuscole sfere: questa teoria è riassunta nel motto *"**Tutto è numero**".*
Da qui nasceva la convinzione che una volta penetrati i segreti dei numeri, anche i misteri dell'universo e del destino dell'uomo sarebbero stati svelati. Ciò spinse i Pitagorici a dedicarsi alla geometria, vista come la più elevata disciplina matematica. Purtroppo proprio dallo studio di quest'ultima giunse la smentita alla teoria che le leggi dell'universo potessero essere codificate mediante i numeri

interi. È infatti dovuta ai Pitagorici la scoperta che il rapporto tra la diagonale ed il lato di un quadrato non è esprimibile come quoziente di interi.
Una leggenda racconta che in seguito a questa scoperta, attribuita ad Ippaso di Metaponto (o forse da lui solo divulgata) quest'ultimo venne espulso dalla Scuola, quale punizione per aver introdotto nell'universo un elemento che privava i numeri interi del loro assoluto primato nella spiegazione dei fenomeni naturali. Quasi paradossalmente, questa scoperta si fonda proprio sul **Teorema di Pitagora**.

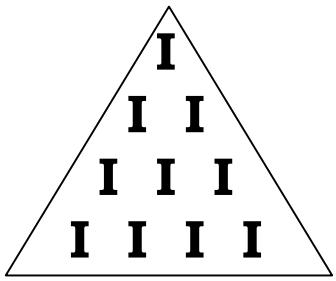
L'idea pitagorica che il mondo fosse strutturato secondo frazioni di interi si è però, comunque, rivelata come una felice intuizione: in natura sono ricorrenti forme le cui proporzioni si traducono in rapporti fra particolari numeri interi, i cosiddetti **numeri di Fibonacci**, introdotti nel 1200 dal matematico italiano **Leonardo Pisano**. La **media armonica**, introdotta da Ippaso di Metaponto, è alla base delle consonanze musicali.

Pitagora aveva anche fama di indovino: le sue profezie erano basate su calcoli aritmetici. Ad ogni lettera dell'alfabeto era assegnato un valore numerico: preso il nome di una persona, e compiute opportune operazioni sui numeri ad esso associati, nel risultato egli leggeva un responso sul destino della persona. In particolare credeva di essere in grado di prevedere l'esito della lotta fra due contendenti: Pitagora, in una **lettera a Teulage**, apocrifa, spiega come la vittoria di Ettore su Patroclo nell'Iliade fosse scritta nei numeri. Questa particolare scienza divinatoria, detta ***numerologia***, come, in generale, il culto dei numeri, risale alla **tradizione babilonese**.

La numerologia cinese

La *tetractys* di Pitagora

Il triangolo è un elemento fondamentale del pensiero di **Pitagora**: non solo per via del notissimo **Teorema** sui triangoli rettangoli, ma anche e soprattutto perché il triangolo veniva considerato la forma generatrice dell'universo. Da qui deriva l'importanza attribuita dai Pitagorici ai **numeri triangolari**, e, in modo particolare, al *10*, numero sacro della ***tetractys***:



Questa disposizione dei numeri *1,2,3,4* riuniva in sé molti principi del **misticismo pitagorico**. A questo è ispirato il ***Timeo*** di **Platone**, che forse non a caso si apre con queste parole, pronunciate da Socrate:

*"**Uno, due, tre**: ma il **quarto** dei nostri commensali ieri e convitatori oggi dov'è, mio caro Timeo?"*

Al di là dell'aspetto numerico, al triangolo era riconosciuto un ruolo geometrico fondamentale: era infatti considerato come il mattone di cui sono costruiti tutti i corpi. I più belli tra questi sono i **poliedri regolari**, di cui esistono cinque tipi: le loro superficie sono formate congiungendo alcuni triangoli uguali.

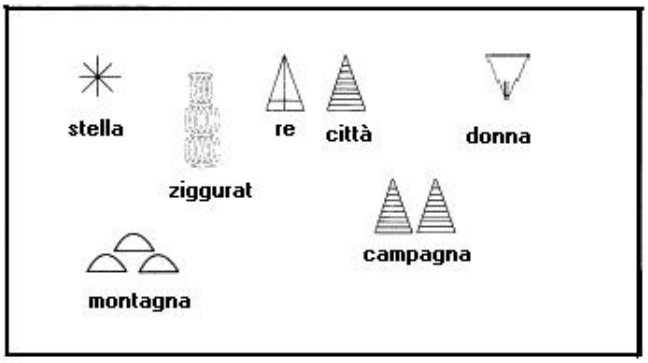




Questi poliedri, poi chiamati ***solidi platonici***, ispirarono, nei secoli successivi, molti altri geni creativi, come il pittore rinascimentale **Piero della Francesca** e l'astronomo seicentesco **Johannes Kepler**.

D'altra parte, andando a ritroso nel tempo, si scopre che il triangolo era, fin dall'epoca sumerica, un simbolo frequentemente impiegato,

per lo più associato a persone e cose che costituivano oggetto di venerazione.



Glifi sumerici

La tetractys nella Scuola di Atene di Raffaello

Lettera di Pitagora a Teulage

Dopo aver molte cose apprese e fatti molti esperimenti, ti invio questo libriccino, che contiene una tavola assai preziosa; poiché chi la conosca, grazie alle spiegazioni che la precedono, potrà sapere e le cose presenti e le passate e anche quelle avvenire.
Ho disegnato, come dissi, quella tavoletta per nove cifre, e tu te ne servirai in questa guisa: prendi due nomi di quelli che si impongono alle persone alla lor nascita, e non soprannomi, di due avversari sia in tribunale, sia in duello, o in genere di due contendenti fra loro per una vittoria, una palma, una corona. Conta di entrambi i nomi le lettere separatamente; e conta così:

α,	ι,	ϱ	equivalgono a	1
β,	κ,	σ	»	2
γ,	λ,	τ	»	3
δ,	μ,	υ	»	4
ε,	ν,	φ	»	5
(ϛ)	ξ,	χ	»	6
ζ,	ο,	ψ	»	7
η,	π,	ω	»	8
θ			equivale a	9

E dopo questo computo, avendo fatte le somme delle lettere separatamente su le tue due mani, leva da ciascuna somma il numero nove quante volte è possibile, e, notati i due resti, cerca questi numeri nella tavola che segue a questa lettera, e saprai chi deve vincere e chi soccombere, poiché i numeri vincitori sono contraddistinti come tali. Così a mo' d'esempio: Ettore ('Εκτωρ), 5+2+3+8+1 = 19; levane due volte 9 e resta 1, Patroclo (Πάτροκλος), 8+1+3+1+7+2+3+7+2 = 34: levane tre volte 9, restano 7.
Per Ettore restava 1; guarda la tavola e troverai che 1 vince 7; e in generale in tutti i casi si fa il computo alla medesima guisa. Che se i contendenti ti danno entrambi il medesimo resto, conoscerai il vincente così: se i resti sono 1 e 1, l'accusatore vince, oppure il provocatore; se 2 e 2, l'accusato; se 3 e 3, l'accusatore; e in genere pei numeri dispari vince chi attacca, pei numeri pari chi viene accusato oppure provocato."

TAVOLA DIVINATORIA [1]

1	1 e 1 vince l'attacco	1 e 2 v. 2	1 e 3 v. 1	1 e 4 v. 4	1 e 5 v. 1	1 e 6 v. 6	1 e 7 v. 1	1 e 8 v. 8	1 e 9 v. 1
2		2 e 2 v. la difesa	2 e 3 v. 3	2 e 4 v. 2	2 e 5 v. 5	2 e 6 v. 2	2 e 7 v. 7	2 e 8 v. 2	2 e 9 v. 9
	3		3 e 3 v. l'attacco	3 e 4 v. 4	3 e 5 v. 3	3 e 6 v. 6	3 e 7 v. 3	3 e 8 v. 8	3 e 9 v. 3
		4		4 e 4 v. la difesa	4 e 5 v. 5	4 e 6 v. 4	4 e 7 v. 7	4 e 8 v. 4	4 e 9 v. 9
			5		5 e 5 v. l'attacco	5 e 6 v. 6	5 e 7 v. 5	5 e 8 v. 8	5 e 9 v. 5
				6		6 e 6 v. la difesa	6 e 7 v. 7	6 e 8 v. 6	6 e 9 v. 9
					7		7 e 7 v. l'attacco	7 e 8 v. 8	7 e 9 v. 7
						8		8 e 8 v. la difesa	8 e 9 v. 9
							9		9 e 9 v. l'attacco



L'astronomia secondo Pitagora

I primi seguaci di **Pitagora** furono così audaci da estrapolare dalla **teoria musicale** la congettura che i corpi celesti con i loro moti producevano suoni armoniosi, *"l'armonia delle sfere"*. Essi giunsero forse a questa conclusione pensando al sibilo prodotto da un oggetto che viene fatto roteare tenendolo legato all'estremità di una corda. Essi credevano, inoltre, che un corpo emettesse una nota tanto più alta quanto maggiore era la sua velocità, quindi, nel caso di un pianeta, quanto più esso era distante dalla Terra. L'uomo non percepisce questa sinfonia di suoni celesti, perché essa fa incessantemente da sfondo alla sua vita, e l'orecchio non è più in grado di distinguerla, o forse il motivo è semplicemente la sua piccolezza d'animo. Pitagora riteneva di essere il solo a sentire l'armonia cosmica, in virtù di una sua divina prerogativa. Iamblico parla di *"una musica più perfetta e più soave delle mortali, perché fatta di un movimento e giro gratissimo e dalla varietà reso leggiadrissimo, nascendo da dissimili e in varie guise differenti stridori, celerità, grandezze ed intervalli, disposti reciprocamente in sapiente armonia."* Sembra che la scienza pitagorica, tramandataci da Filolao, consistesse in una strana mescolanza di lucidi pensieri e speculazioni fantastiche.

Secondo quanto riferito da Plinio, gli intervalli musicali tra i corpi celesti erano i seguenti:

Terra-Luna	un tono
Luna-Mercurio	un semitono
Mercurio-Venere	un semitono
Venere-Sole	una terza minore
Sole-Marte	un tono
Marte-Giove	un semitono
Giove-Saturno	un semitono
Saturno-stelle fisse	una terza minore

L'idea che il moto dei pianeti fosse governato da un'armonia di tipo musicale venne ripresa e sviluppata, sia pur in modo diverso, da **Keplero**.

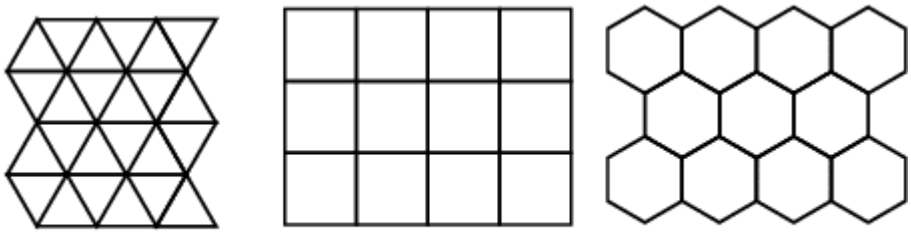
I Pitagorici pensavano che tutti i corpi celesti si muovessero su orbite circolari, con velocità costante, intorno ad un fuoco centrale. Nella loro visione del cosmo, questa posizione privilegiata doveva spettare necessariamente al fuoco, elemento superiore rispetto all'elemento terra. Inoltre, in onore della sacralità della ***tetractys***, i Pitagorici decisero che gli astri dovevano essere in numero di dieci. Le loro

conoscenze fornivano però solo nove corpi, e cioè, dall'interno verso l'esterno: la Terra, la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove, Saturno ed il cielo delle stelle fisse. Per far tornare i conti, ipotizzarono l'esistenza di un decimo corpo celeste, chiamato la Contro-Terra (*antichthon*), che ruotava anch'esso intorno al fuoco centrale, ma rimaneva invisibile, perché si muoveva esattamente con la stessa velocità della Terra, al di là del fuoco centrale, e la parte abitata della Terra era rivolta dal lato opposto. È questa la prima teoria che asserisce il moto della Terra e nega la sua centralità nell'Universo - che sarà invece sostenuta da **Tolomeo** circa sei secoli più tardi - ed anticipa di circa 2000 anni la rivoluzione copernicana. Il primo precursore di **Copernico** per quanto riguarda la teoria eliocentrica sarà invece il greco **Aristarco**, nel secolo III a.C.. A Pitagora spetta inoltre il merito di aver riconosciuto la sfericità della Terra, e con ciò si staccò nettamente dalla tradizione, anche se si ignora se questa dottrina sia stata formulata sulla base di osservazioni astronomiche, o sia essa stessa frutto della immaginazione. Pare anche che i Pitagorici sapessero che l'orbita apparente del cielo delle stelle fisse intorno alla Terra è inclinata rispetto al piano dell'Equatore. Ignoravano, invece, la rotazione della Terra intorno al suo asse. La composizione ed il moto dell'universo sono efficacemente descritti nel ***Timeo*** di **Platone**.

Un'altra speculazione pitagorica riguarda le distanze della Terra dai restanti corpi celesti. I Pitagorici pensavano che queste fossero, nell'ordine, pari a *1*, *2, 3, 4, 8, 9, 27*. Questa successione è ottenuta dalla fusione dei primi quattro termini della progressione geometrica di ragione *2* (*1, 2, 4, 8*) e della progressione geometrica di ragione *3* (*1, 3, 9, 27*).

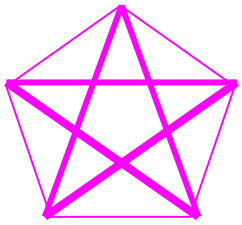
La geometria di Pitagora

Oltre al notissimo **Teorema**, ai **Pitagorici** vengono attribuiti, ad esempio da Proclo, altri importanti risultati sui triangoli (*la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180 gradi*), sulle rette parallele, sui **poligoni**, sui cerchi, sulle sfere e sui **poliedri regolari**. Essi conoscevano anche primitivi esempi di ***tassellazione*** del piano, quelli realizzabili con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni regolari.



Furono i primi a studiare i problemi noti come *applicazioni delle aree*. Esempio: costruire un poligono che abbia area uguale a quella di un poligono dato e sia simile ad un altro poligono dato.

Una delle questioni più appassionanti della geometria pitagorica concerne la costruzione di un *pentagramma o* ***pentagono stellato***, cioè la figura, avente la forma di una stella a cinque punte, delimitata dalle diagonali di un pentagono regolare.



Si può osservare che i punti di intersezione delle diagonali dividono queste ultime in maniera sorprendente. Ogni punto divide la diagonale in due segmenti disuguali tali che il rapporto dell'intera diagonale al segmento maggiore è uguale al rapporto di questo segmento al segmento minore. Questa suddivisione è la famosa **sezione aurea** di un segmento.

Il Teorema di Pitagora

L'enunciato, forse il più famoso di tutta la matematica, è il seguente:

In un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

È facile darne una **dimostrazione grafica**, in cui è evidente come il quadrato sull'ipotenusa si possa ricostruire combinando in modo opportuno i frammenti dei quadrati sui cateti. Questo procedimento di spezzare e ricomporre i pezzi si presta ad essere proposto come **rompicapo**, anche perché i modi di scomporre i due quadrati più piccoli sono molteplici: ne diamo **tre esempi** più articolati.

I **Pitagorici** trovarono un modo per determinare infinite terne di numeri interi che potevano figurare come le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo: queste terne, dette *pitagoriche,* sono costituite da tutti e soli i numeri del tipo $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$, dove m ed n sono interi positivi, e $m>n$.

Il problema di trovare tutte le soluzioni intere dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

è un esempio di quella che oggi viene chiamata una equazione diofantea, dal matematico alessandrino **Diofanto**, che, sette secoli più tardi, dedicò a questo tipo di equazioni la sua opera principale, l'***Arithmetica***. La generalizzazione dell'equazione (1), ottenuta sostituendo a 2 un qualsiasi esponente intero positivo n, è passata alla storia come uno dei problemi matematici più difficili: è l'oggetto dell'**Ultimo Teorema di Fermat,** dimostrato solo in tempi recentissimi.

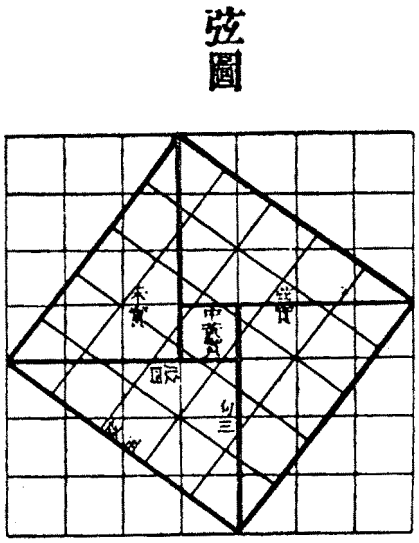
Il Teorema di **Pitagora** compare, insieme al suo inverso, nel Libro II degli ***Elementi*** di **Euclide**.

La scoperta del triangolo rettangolo di lati *3, 4, 5* viene annoverata, nel trattato ***De Architectura*** di **Vitruvio**, fra le acquisizioni matematiche più grandiose del passato: essa permette di costruire

facilmente una squadra da falegname, combinando tre assi delle lunghezze date. Egli la ricorda insieme alla legge idrostatica di **Archimede** e alla **duplicazione del cubo**.

Pare che il triangolo rettangolo di lati *3, 4, 5* fosse noto ai **Cinesi** fin dai tempi più remoti. Ve ne sono chiare tracce nei più antichi trattati di matematica che ci sono pervenuti. Ne citiamo un brano significativo.

1) *Una volta, Chou Kung si rivolse a Shang Kao, dicendo: "Ho sentito che il Grande Prefetto (Shang Kao) è versato nell'arte del calcolo. Posso avere l'ardire di chiedere in che modo Fu-Hsi stabilì anticamente i gradi della sfera celeste? Non vi sono scalini con cui si possa salire al cielo e la terra non è misurabile con un regolo della lunghezza di un piede. Mi piacerebbe sapere da te qual è l'origine di questi numeri".*



Dimostrazione del teorema di Pitagora nel *Chou Pei Suan Ching.*

2) *Shang Kao rispose: "L'arte del calcolo proviene dal cerchio (yuan) e dal quadrato (fang). Il cerchio è derivato dal quadrato e il quadrato dal rettangolo (letteralmente squadra a T o squadra da carpentiere; chü).*

3) *Il rettangolo ha origine dal (fatto che) 9 x 9 = 81 (ovvero la tavola per le moltiplicazioni o le proprietà dei numeri in quanto tali).*

4) *Dividiamo perciò un rettangolo (diagonalmente) e poniamo che la larghezza (kou) sia di 3 (unità) e la lunghezza (ku) di 4 (unità). La diagonale (ching) fra i (due) angoli sarà allora lunga 5 (unità). Adesso, dopo aver disegnato un quadrato su questa diagonale, circoscriviamolo con mezzi rettangoli come quello che è rimasto fuori, in modo da formare una tavola (quadrata). I "quattro" mezzi rettangoli esterni che misurano 3 unità di larghezza, 4 di lunghezza e 5 di diagonale, formano in tal modo insieme (tê chhêng) due rettangoli (di superficie 24); così (quando questa viene sottratta dalla tavola quadrata di superficie 49) il resto (chang) è una superficie di 25 unità. Questo (procedimento) è chiamato "accumulare i rettangoli'*

(chi chü).

5) *I metodi usati da Yü il Grande per governare il mondo erano derivati da questi numeri".*

[Si ricorderà che il leggendario Yü era il santo patrono degli ingegneri idraulici e di tutti coloro che si occupavano del controllo delle acque, dell'irrigazione e della conservazione. Testimonianze epigrafiche dei Han posteriori, quando il Chou Pei assunse la sua forma attuale, ci mostrano, scolpiti in rilievo sulle pareti delle tombe-sacrario di Wu Liang (140 a. C.), i leggendari eroi culturali Fu-Hsi e Nü-Kua che impugnano squadre e compasso. Il riferimento a Yü indica qui indubbiamente l'antica necessità della misurazione e della matematica applicata.]

6) *Choti Kung esclamò: "Davvero grande è l'arte del calcolo. Mi piacerebbe conoscere il Tao dell'uso del triangolo rettangolo (letteralmente squadra a T)".*

7) *Shang Kao rispose: "Il triangolo rettangolo in piano (posto sul terreno) serve a stendere il progetto di (opere) diritte e squadrate (con l'aiuto di) corde. Il triangolo rettangolo inclinato serve ad* ***osservare le altezze****. Il triangolo rettangolo rovesciato serve a* ***scandagliare le profondità****. Il triangolo rettangolo in posizione orizzontale è usato per* ***accertare le distanze****.*

8) *Mediante la rotazione di un triangolo rettangolo (compasso) si può formare un cerchio. Unendo triangoli rettangoli si formano quadrati (e rettangoli).*

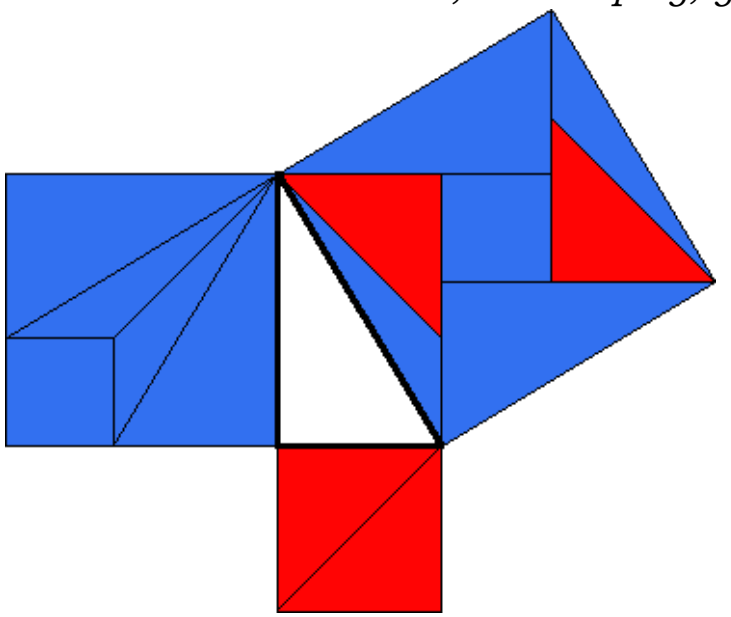
9) *Il quadrato appartiene alla terra, il cerchio appartiene al cielo, in quanto il cielo è rotondo e la terra è quadrata. Poiché i numeri del quadrato costituiscono il modello, le (dimensioni del) cerchio vengono (dedotte) da quelle del quadrato.*

10) *Il cielo è come un cappello da sole (li) conico. I colori del cielo sono il blu e il nero, quelli della terra il giallo e il rosso. Per rappresentare il cielo viene usata una tavola circolare, tracciata secondo i numeri celesti; sopra, come un indumento esterno, essa è blu e nera, sotto, come un indumento interno, rossa e gialla.*

Così viene rappresentata la figura del cielo e della terra.

(cit. da: J. Needham, *Scienza e Civiltà in Cina,* trad. di M. Baccianini e G. Mainardi, vol. III, Einaudi, Torino 1985, pagg. 29-30)

Il diagramma raffigurato qui sotto, tratto da un'opera di datazione incerta, ma sicuramente anteriore al sec. III d.C., prende il nome di *Hsüan Thu.* Così è definito da un tardo commentatore: *"il diagramma che fornisce i rapporti fra l'ipotenusa e la somma e la differenza degli altri due lati."* (in lingua originale questa definizione suona più o meno come: *"kou ku chha, kou ku ping, yü hsüan hu chhiu chih thu"*).



Per capirne il significato, occorre sapere che i Cinesi scrivevano la formula algebrica del Teorema nella forma:

$$h^2 = 4ab/2 + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

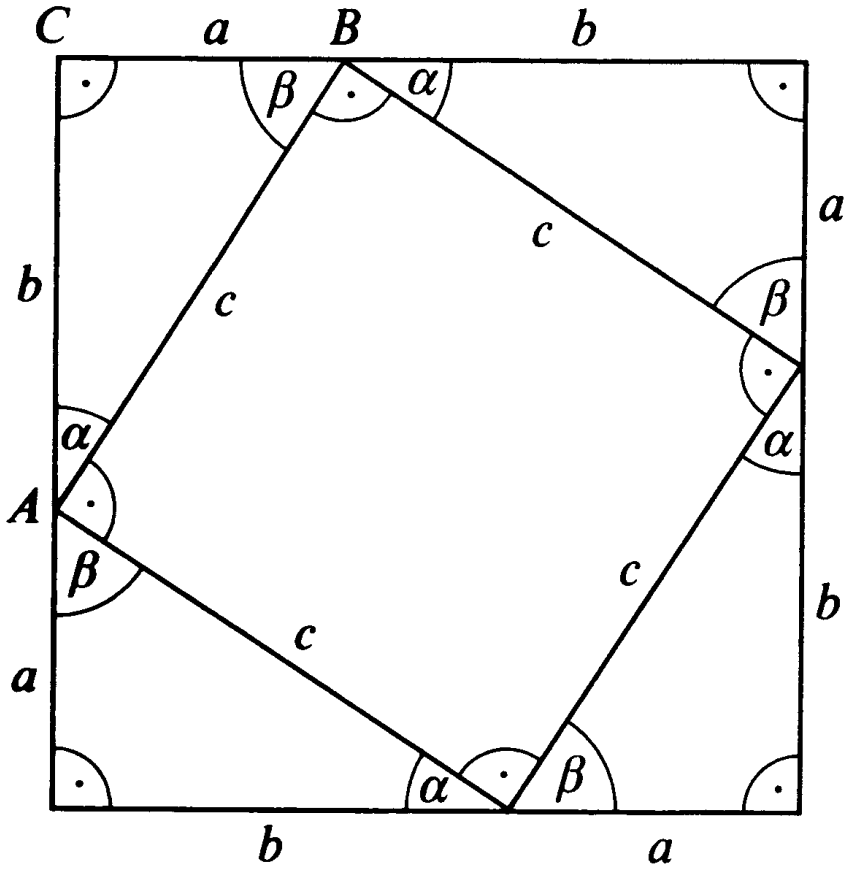
ove h è l'ipotenusa, ed a e b sono i cateti.

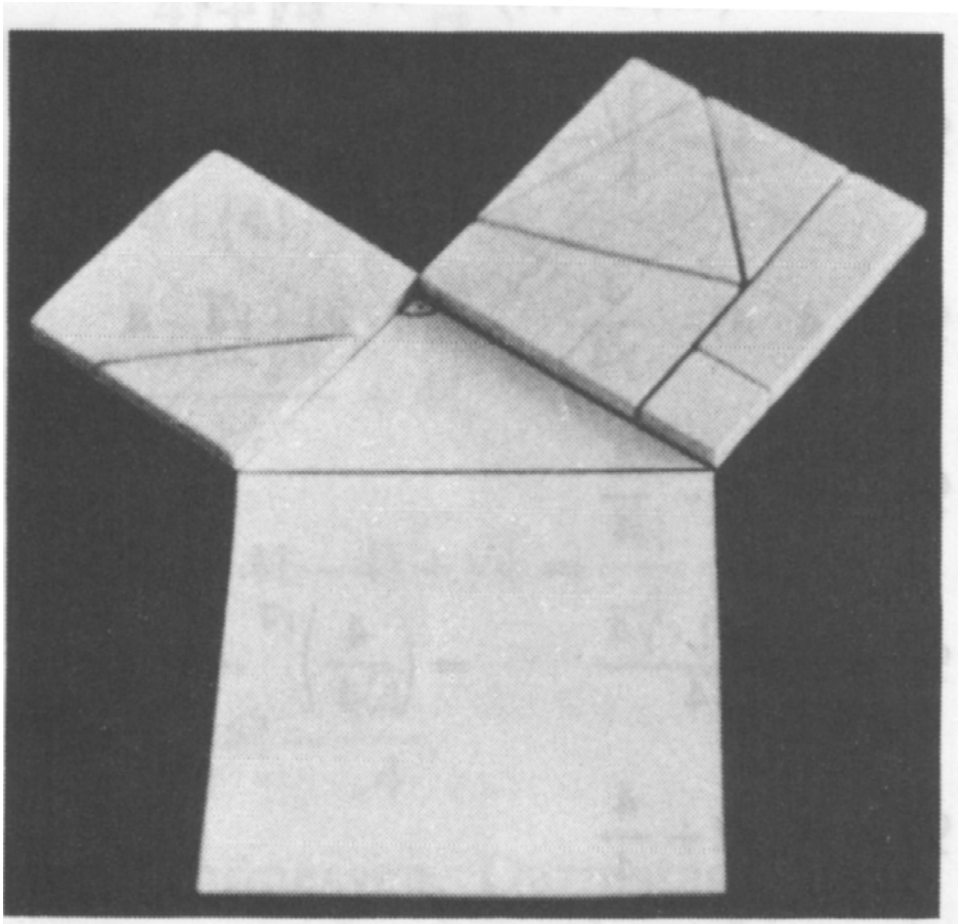
I primi scopritori del Teorema sono però stati, quasi sicuramente, i **Babilonesi**, come testimoniano le iscrizioni sulla tavoletta d'argilla denominata **Plimpton 322**.

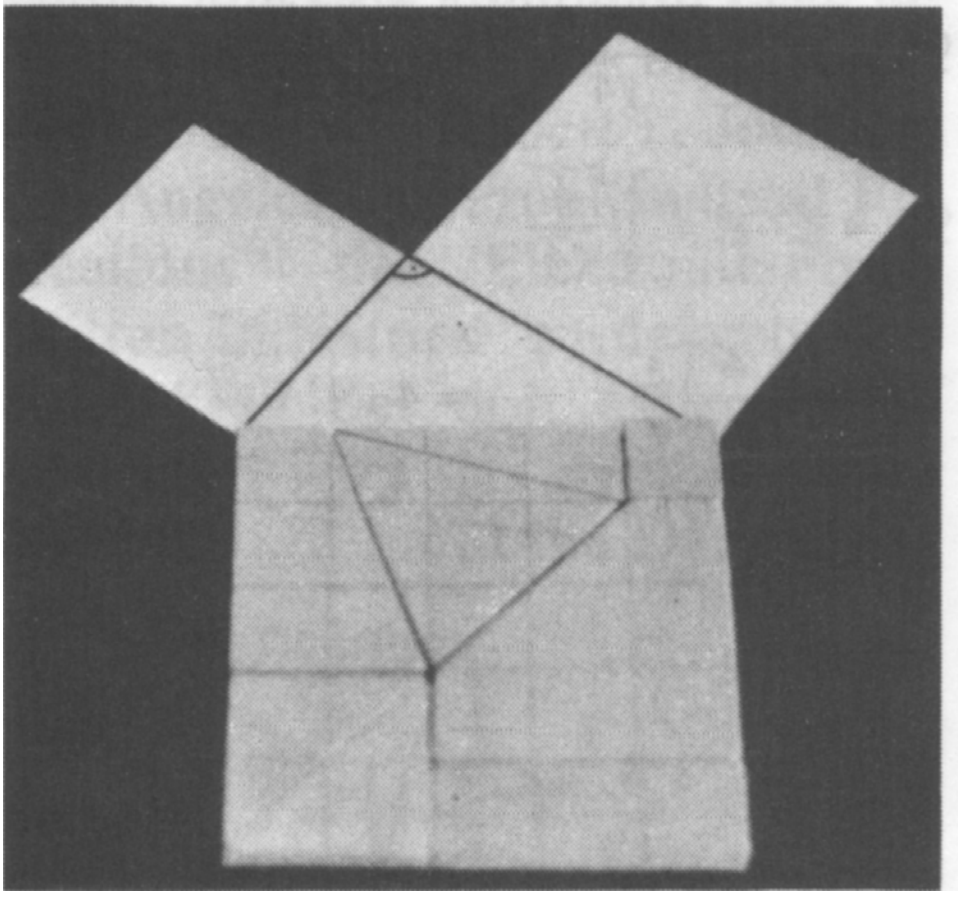
Curiosità

Il teorema di Pitagora esprime anche la legge sull'addizione delle masse dei buchi neri: se due buchi neri di masse a e b si fondono, la massa c del nuovo buco nero è legata alle prime due dall'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$.

Il Teorema di Pitagora in Platone
Generalizzazione del Teorema di Pitagora
Una dimostrazione di Leonardo

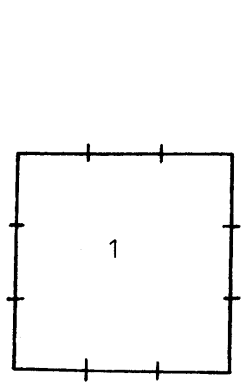

C
a
B
b
β
α
a
c
b
c
β
α
α
A
β
c
b
c
a
α
β
b
a

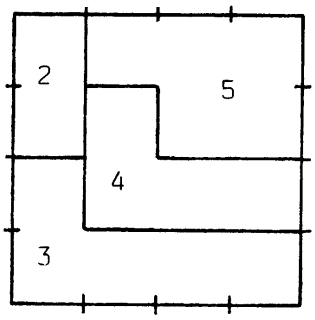


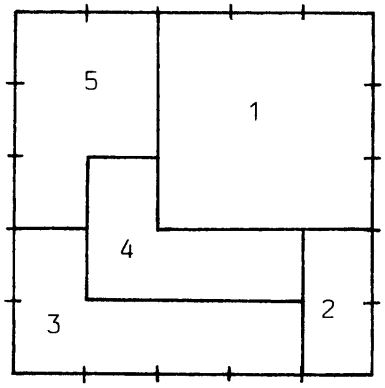


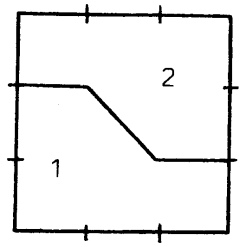
Tre dimostrazioni "taglia e incolla" del Teorema di Pitagora

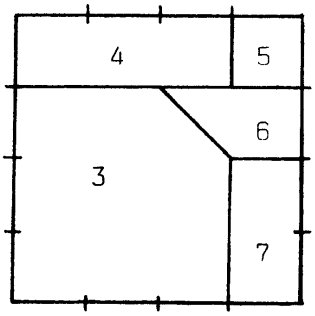
Ciascuno dei seguenti tre disegni è una dimostrazione grafica del Teorema di Pitagora per un triangolo rettangolo avente i lati di lunghezza *3, 4* e *5.* I primi due quadrati sono quelli costruiti sui cateti, il terzo è quello costruito sull'ipotenusa.

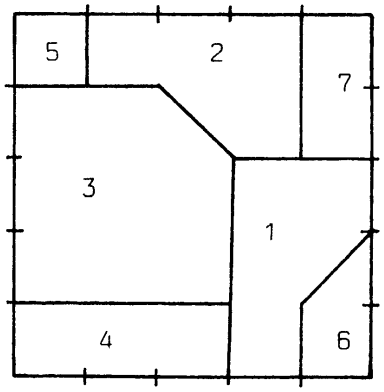


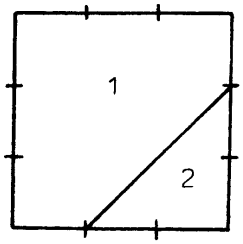


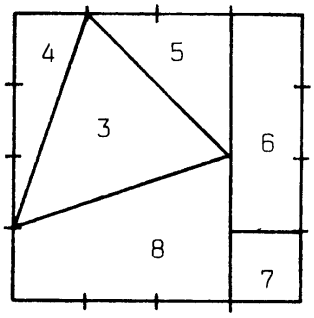


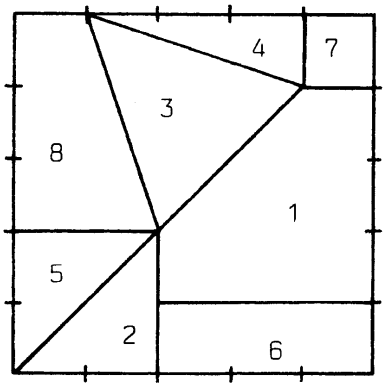












La teoria musicale pitagorica

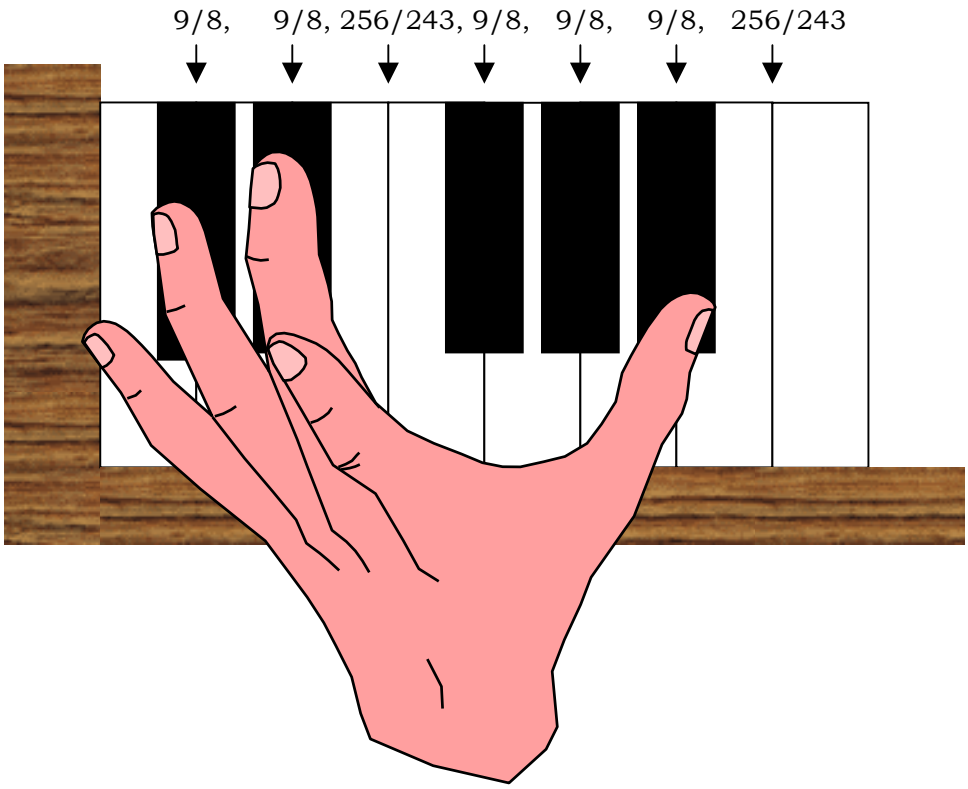
Il coro del **duomo di Ulm**, Germania, risalente al sec. XIV, è ricco di statue lignee di filosofi, statisti e sibille di epoca greca e romana. Tra queste figura anche il **busto di Pitagora**, recante la seguente iscrizione latina, che ne esalta le doti di poeta e musicista:

Pietagoras musice inventor
fuganda sunt omnibus modis et abscindenda
languor a corpore
impericia ab anima
a ventre luxuria
a civitate sedicio
a domo discordia
et a cunctis rebus intemperancia.

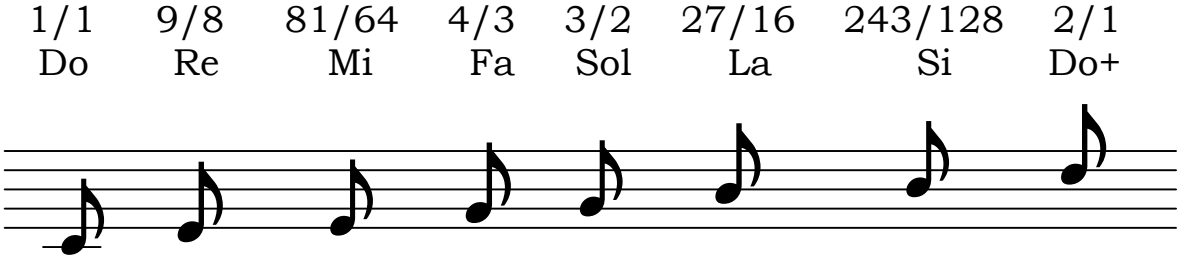
(Pitagora, l'inventore della musica/ da rifuggire sono in ogni modo e da scongiurare/ la fiacchezza dal corpo/ l'imperizia dall'anima/ dal ventre la lussuria/ dallo stato la sedizione/ dalla casa la discordia/ e da tutte le cose lintemperanza).

Pitagora è ritratto nell'atto di suonare un liuto, a ricordare la sua teoria dell'armonia delle corde musicali. Egli suddivideva la corda in *12* parti uguali. Riducendo la lunghezza della corda a *9, 8, 6,* ossia nei rapporti *4:3, 3:2, 2:1,* le note così prodotte davano luogo, con la nota prodotta dalla intera lunghezza della corda *(nota fondamentale)*, ad una consonanza armoniosa. Queste note erano la base di un sistema di otto note, di cui esse occupavano il 4°, il 5° e l'8° posto, mentre la nota fondamentale ne occupava il 1° posto. Nella terminologia moderna, queste consonanze prendono il nome di *quarta, quinta ed ottava.*
Ai Pitagorici si deve dunque la scoperta che i principali intervalli sinfonici si ottengono mediante i rapporti dei numeri interi *1,2,3,4,* i numeri che compongono la ***tetractys***. Inoltre si noti che i quozienti *3/2* e *4/3* sono, rispettivamente, la ***media aritmetica*** e la ***media armonica*** (ossia il reciproco della media dei reciproci) di *1* e *2*.

Ora, come **Platone** racconta nel ***Timeo***, Pitagora frappose, alle note di cui abbiamo appena parlato, altre quattro note: due fra la prima e la quarta, due fra la quinta e l'ottava. I rapporti tra due note consecutive erano i seguenti:



Il valore *9/8* corrisponde ad un tono, *256/243* ad un semitono. In base a questi valori, è facile calcolare i quozienti corrispondenti alle note musicali di quella che oggi chiamiamo *scala di Do:*



Questa suddivisione della scala musicale, detta *diatonica,* è anch'essa descritta nel ***Timeo*** di **Platone**.

Nel notissimo affresco di Raffaello ***La scuola di Atene***, nella stanza della Segnatura in Vaticano, Pitagora è riconoscibile dalla tavola che un fanciullo gli regge con la mano. Questa tavola racchiude tutta la teoria musicale di Pitagora: in alto compaiono i numeri *6, 8, 9, 12*. Una linea collega i numeri *6* e *12*, ad indicare il rapporto *1:2*, corrispondente all'ottava (*diapason* in greco, letteralmente *"universalità dell'accordo"*). Allo stesso modo sono collegati i numeri *6* e *9*, e *8* e *12*, ad indicare il rapporto *2:3*, corrispondente alla quinta

(*diapente* in greco), ed i numeri *6* e *8*, e *9* e *12*, ad indicare il rapporto *3:4*, corrispondente alla quarta (*diatessaron* in greco). La linea da *8* a *9* rappresenta il tono (*epogdoon* in greco). Nella parte bassa della tavola è riprodotta la *tetractys*.

I Pitagorici hanno forse prodotto il primo esempio di leggi quantitative dell'acustica, ed è possibile che si tratti delle più antiche fra tutte le leggi fisiche quantitative. In effetti, usando il moderno linguaggio della fisica, si può dire che il rapporto numerico associato ad ogni intervallo musicale esprime il quoziente delle ***frequenze*** delle note che lo delimitano: infatti la frequenza della nota è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda che la produce.

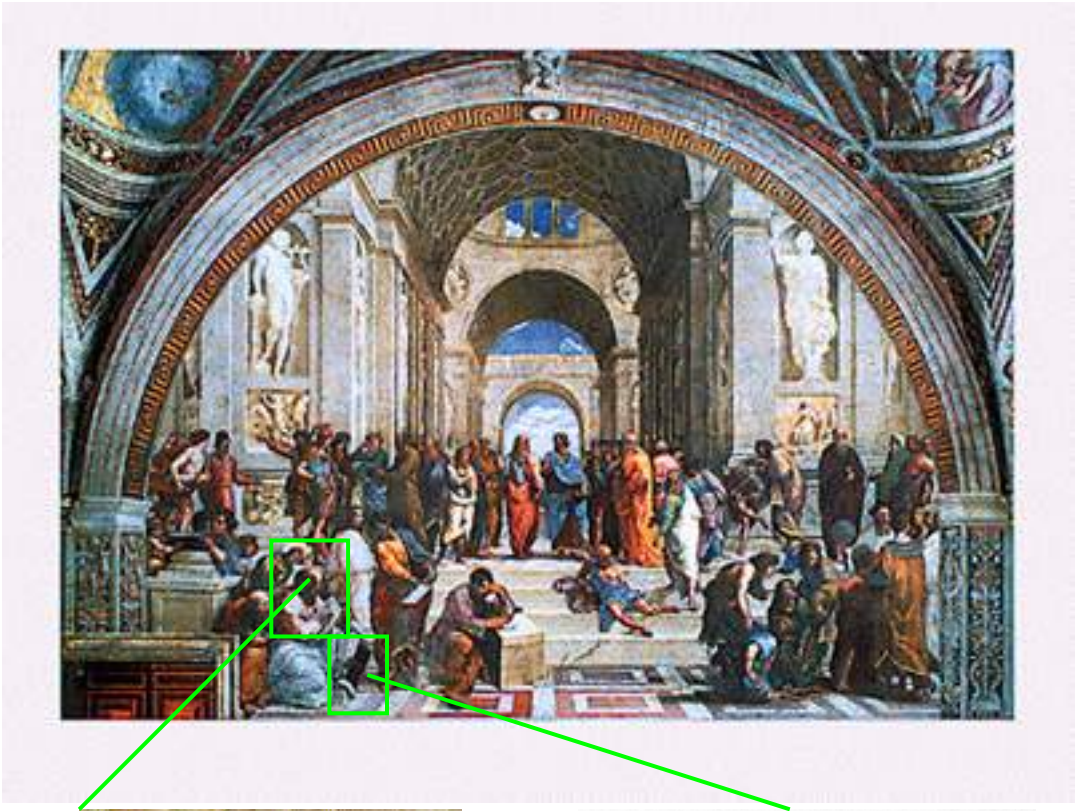
La teoria musicale pitagorica venne ripresa da tutti gli autori successivi, sia pur con molte varianti: in **Boezio** ne troviamo una bella raffigurazione, come anche nel ***Compendium Musicae*** di **Descartes**. Il grande matematico e filosofo tedesco **Leibniz** disse che *"la musica è l'esercizio matematico nascosto di una mente che calcola inconsciamente."*

L'armonia musicale fu, per i Pitagorici, come per tutte le correnti di pensiero, ispirate al pitagorismo, che si susseguirono nei secoli, la base dell'ordinamento universale, in particolare dell'**astronomia**.

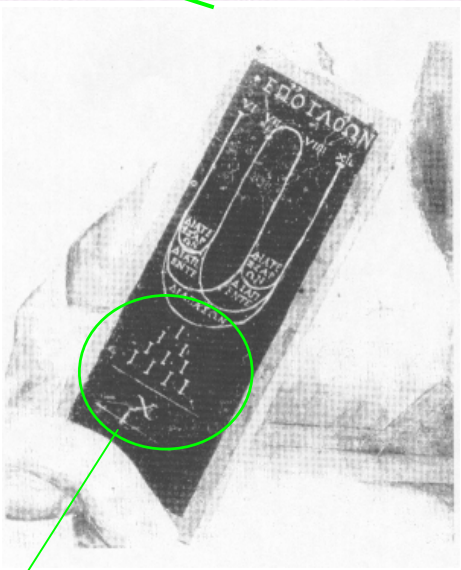
La musica aveva per Pitagora non solo un interesse scientifico, ma anche e soprattutto un valore terapeutico per l'anima come per il corpo: al canto dei versi di Omero ed Esiodo, accompagnato dal suono della lira, egli attribuiva la facoltà di calmare le passioni, oltre a quella di guarire gli ammalati. Disprezzava invece il flauto, che riteneva lascivo ed indegno di un uomo libero.



Pitagora nella *Scuola di Atene* di Raffaello (1508-11)



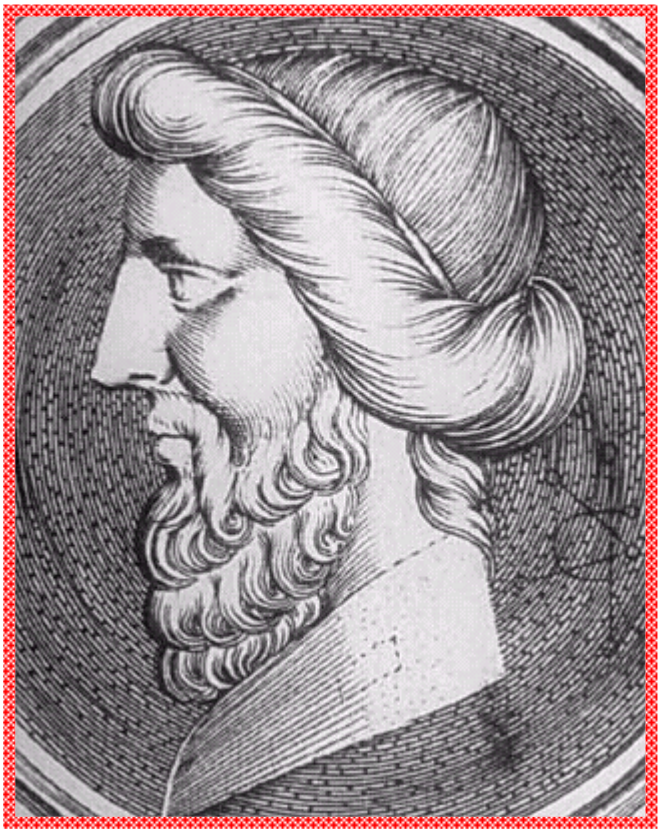




la *tetractys*



Archita di Taranto (secoli V-IV a.C.)



Fu uno degli ultimi esponenti della **scuola pitagorica**. Ebbe come allievo **Eudosso**, che, a sua volta, insegnò a **Menecmo**.
È ricordato per aver proposto una soluzione al problema della **duplicazione del cubo**; il suo nome è anche legato ad un metodo per **l'approssimazione di radici** che, però, in realtà, era già noto ai **Babilonesi**.

Introdusse l'idea "dinamica" delle **curve geometriche** come oggetti generati dal moto di un punto, lo stesso principio che sarà alla base del **calcolo differenziale** di **Newton**.

Fu lui a raccogliere *l'aritmetica, geometria, musica e astronomia* nel ***quadrivio***: questo, insieme al ***trivio*** *(retorica, dialettica e grammatica),* creato da Zenone di Elea, costituì, fino alla fine del Medio Evo, l'insieme delle *sette arti liberali.*

Archita fu anche un abile uomo politico: eletto per ben sette anni consecutivi alla carica di stratega di Taranto, che allora era parte della Magna Grecia, riuscì a sventare i piani orditi da Dionigi, tiranno di Siracusa, per uccidere **Platone**. Questi attinse da Archita gran parte del materiale matematico che confluì nei suoi dialoghi. Da Archita attinse forse anche **Euclide** per la compilazione del **Libro VII** dei suoi ***Elementi***.



Il campanile del duomo di Ulm, Germania
(161 metri: il più alto d'Europa)

La matematica di Platone

Lo storico greco **Proclo** scriveva:

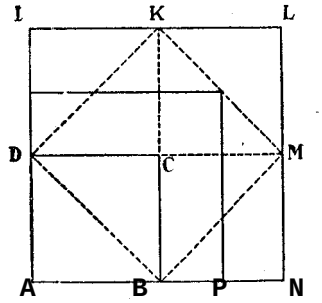
"Platone […] fece prendere il massimo incremento alle altre scienze matematiche e alla geometria, per il suo grande amore verso di esse; ciò è manifesto poiché riempì i suoi scritti di considerazioni matematiche e ovunque destò ammirazione per queste scienze in coloro che studiano filosofia."

Numerosi sono i dialoghi platonici in cui vengono presentati e discussi teoremi scoperti dai greci. Essi costituiscono quindi un'importante testimonianza storica sul pensiero matematico dell'epoca, sul modo in cui gli scienziati di allora si ponevano di fronte ai numeri ed alle forme geometriche. Pochi dei risultati citati sono opera dello stesso Platone, quasi tutti sono tratti da altri autori: in effetti il filosofo era un cultore di matematiche, ma non un ricercatore. Della matematica apprezzava soprattutto la funzione formativa per la mente degli uomini destinati a guidare la *Repubblica*, la sua città ideale. Per Platone le strutture della matematica erano il vero fondamento del retto pensiero, perché in esse egli riconosceva, da un lato, le relazioni della dialettica, dall'altro le forme del mondo reale.

Menone
Timeo
Teeteto
Le Leggi e La Repubblica

Platone
Menone

Nel Dialogo ***Menone*** *Socrate vuole dimostrare che "apprendere" non è altro che "ricordare" ciò che abbiamo appreso in una vita precedente. Egli fa chiamare un ragazzo del tutto ignorante e gli propone un problema di geometria, il raddoppiamento del quadrato, che l'altro dovrebbe risolvere da sé soltanto "ricordando". [...] Si tratta di costruire un quadrato che abbia area doppia di quella del quadrato ABCD. Il ragazzo ritiene dapprima che un tal quadrato si ottenga raddoppiando i lati, ma Socrate gli fa osservare che un tal quadrato ANLI così ottenuto è quadruplo e non doppio di quello dato.*



Si pensa allora che il quadrato di area doppia, dovendo avere un lato di lunghezza intermedia tra quella di AB e quella doppia, possa aver un lato che sia (come AP) uguale a una volta e mezza il lato primitivo. Ma si vede che neppure così facendo si ottiene il quadrato di area doppia.
Finalmente viene suggerito di tracciare le diagonali DB, BM, MK, KD dei quattro quadrati componenti il quadrato ANLI e si vede che il quadrato DBMK avente per lati le diagonali stesse ha l'area doppia di quella di partenza: è, cioè, il quadrato che si cercava.

Si tratta di un caso particolare del ***Teorema di Pitagora****, e precisamente di quello riguardante il triangolo rettangolo isoscele: infatti, riferendoci al triangolo rettangolo isoscele ADB, il quadrato costruito sull'ipotenusa BD risulta uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti AB, AD, cioè risulta doppio del quadrato costruito sul cateto AB.*

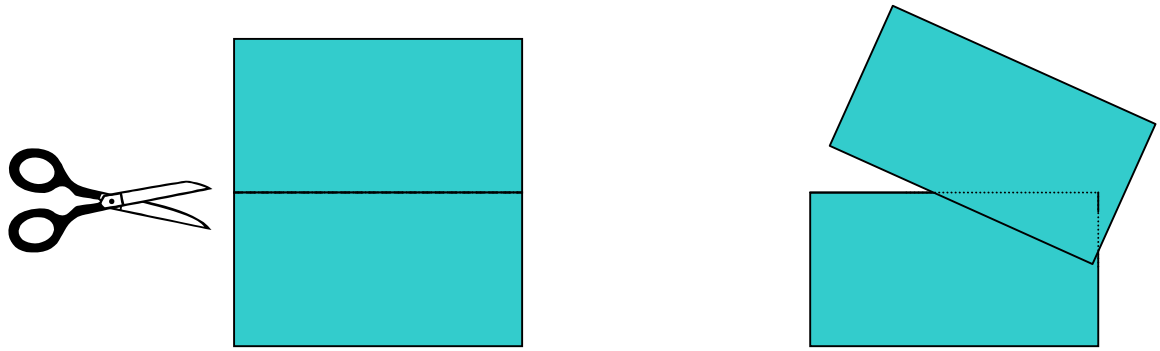
(cit. da Attilio Frajese, *La matematica nel mondo antico,* Roma, 1951)

Il problema della duplicazione del cubo

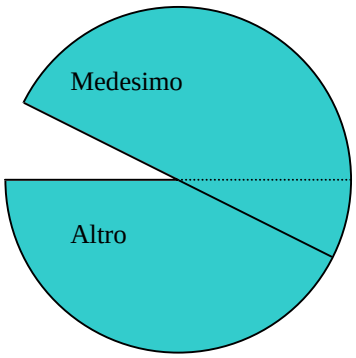
Platone
Timeo

La creazione dell'universo
Questo dialogo di **Platone** riprende la teoria di **Pitagora** sulla formazione dell'universo, secondo la quale il dio creatore avrebbe suddiviso l'essenza primordiale in base ad un'armonia matematica, simile a quella che determina la consonanza delle note musicali. Il cosmo sarebbe stato composto di tante sfere, in moto perpetuo, una contenuta nell'altra, ad ognuna delle quali sarebbe stato attaccato un corpo celeste. Ecco come Timeo descrive l'origine e la natura del movimento della volta celeste rispetto alla Terra, spiegando anche l'apparente inclinazione dell'orbita delle stelle fisse rispetto all'equatore terrestre.

"Tutta questa composizione dunque, dopo averla scissa in due nel senso della lunghezza, e sovrapposte le due metà rispettivamente l'una sull'altra in forma di X;

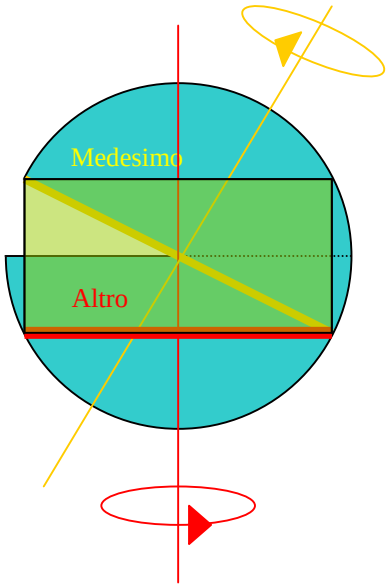


queste egli le piegò, ognuna di per sé, in cerchio, collegandole poi ciascuna con sé e tra sé nell'<altro> punto <del cerchio> opposto alla loro intersezione, e impresse loro un moto di rotazione uniforme e sempre nello stesso luogo; e dei due cerchi pose l'uno fuori e l'altro dentro. E così il moto <del cerchio> esterno lo destinò ad essere della natura del medesimo; l'interno, di quella dell'altro.



Quello poi del medesimo lo girò, secondo il lato <d'un parallelogrammo> a destra; quello dell'altro, secondo la diagonale a sinistra; ma la preminenza la diede alla circolazione del medesimo e dell'omogeneo; giacché lasciò questa unica ed indivisa; ma dopo d'avere scisso quella interna sei volte in sette cerchi disuguali giusta gli intervalli del doppio e del triplo, tre per ciascuna parte; ordinò che i cerchi andassero gli uni agli altri contrario; e tre <si movessero> con <velocità> eguale e gli altri quattro con <velocità> disuguale, così tra loro come con i tre, pur movendosi secondo rapporti costanti."

(cit. da *Platone, Tutte le opere,* trad. di G. Pugliese Carratelli, Sansoni, Firenze 1974, pag. 1106).

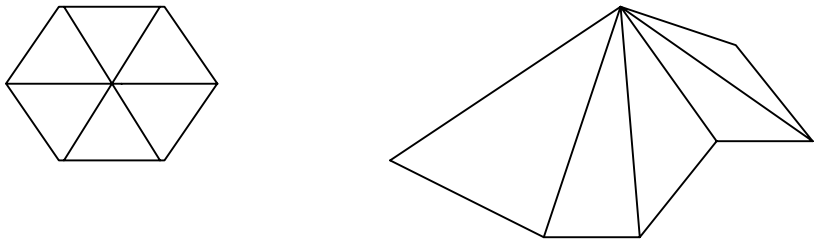


I quattro elementi e i cinque solidi platonici

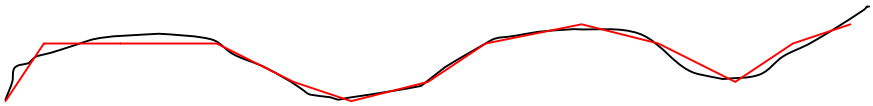
Il grande matematico greco **Euclide**, al termine dell'ultimo libro dei suoi ***Elementi***, dimostra che esistono solo cinque tipi diversi di **solidi regolari**, ossia solidi aventi come facce poligoni regolari congruenti. Platone vede in questi corpi le figure fondamentali dell'universo, le forme dei suoi costituenti primordiali. Anche **Keplero**, nel Seicento, li immaginerà collocati idealmente nel cosmo, intorno ai singoli pianeti.

"Sia questo, dunque, in breve, il ragionamento <a giustificazione> del mio parere: che c'erano e l'essere e lo spazio e la generazione, tre

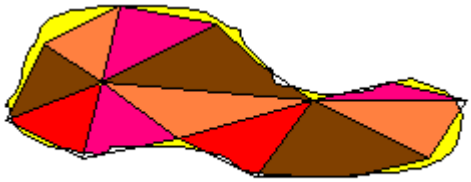
termini in tre modi diversi, <esistenti> anche prima che il cielo nascesse; e che la nutrice della generazione, essendo irrigata ed infocata e assumendo le forme di terra e d'aria e patendo tutte le altre passioni, che a queste conseguono; appariva a vedersi infinitamente varia; e piena, com'era, di forze né uniformi né equilibrate, non serbava l'equilibrio in nessuna sua parte, ma pencolando disugualmente in ogni lato, era essa stessa scossa da loro, e, a sua volta, movendosi, le scoteva […]. Così allora quei quattro generi <o elementi> scossi dalla recettrice, che si moveva essa stessa a guisa d'uno strumento scuotitore, separavano <ciascuno> da sé, quanto più potevano, le parti più dissimili tra loro, mentre le più simili le stipavano soprattutto nel medesimo luogo; ond'esse anche occuparono quale un posto, quale un altro, prima che da loro l'universo ordinato nascesse […] ma quando <il dio> prese ad ordinare l'universo, al fuoco dapprima e all'acqua e alla terra e all'aria [….] egli dapprima dette forme e numeri. […] che fuoco e terra e acqua e aria siano corpi, è, credo, chiaro a chicchessia; ed ogni forma di corpo ha anche spessore. Ora, ogni spessore comprende necessariamente la natura di superficie; e la superficie piana e rettilinea consta di ***triangoli****."*



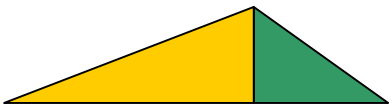
È facile vedere che ogni figura poligonale è decomponibile in triangoli. D'altra parte ogni curva può essere approssimata quanto si vuole con una linea poligonale: basta scegliere un numero di segmenti sufficientemente elevato.



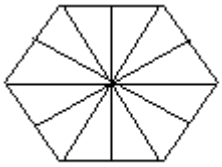
Quindi ogni superficie piana può essere approssimata con una figura poligonale, ottenuta dall'unione di tanti piccoli triangoli.

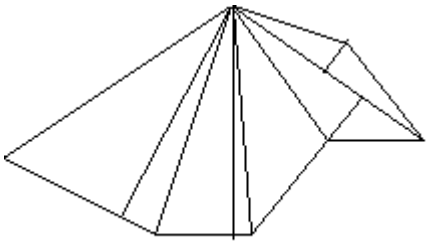


Poiché ogni triangolo è unione di due triangoli rettangoli,



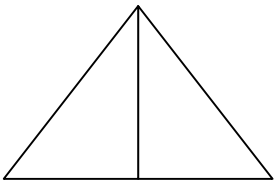
ogni superficie può quindi essere coperta da triangoli rettangoli.



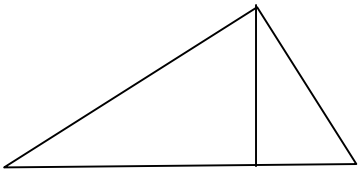


Platone prosegue osservando che:

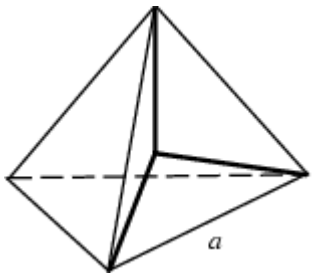
Tutti i triangoli poi hanno principio da due <tipi di> triangoli, aventi ciascuno un angolo retto e due acuti. E di essi l'uno, <l'isoscele>, ha da un lato e dall'altro una parte eguale d'angolo retto diviso da lati eguali;



l'altro, <lo scaleno>, ha due parti disuguali <d'angolo retto> diviso da due lati disuguali.

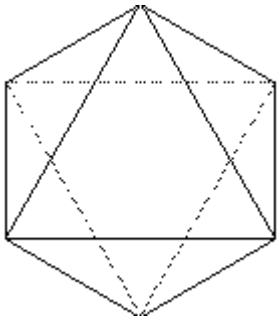


Ora, è questo il principio e del fuoco e degli altri corpi <elementari> […] Bisogna pertanto dire quali siano quei quattro bellissimi corpi che ne derivano, dissimili bensì tra loro, ma capaci taluni di generarsi, dissolvendosi, gli uni dagli altri. […]



tetraedro (il fuoco)

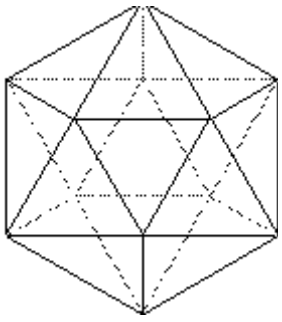
Combinandosi […] quattro triangoli equilateri, <ciascun gruppo di> tre angoli piani forma un angolo solido, che segue immediatamente il più ottuso degli angoli piani. Di quattro cosiffatti <gruppi> consta la prima specie solida, capace di dividere in parti eguali e simili tutta la superficie della sfera <in cui è inscritta>.



ottaedro (l'aria)

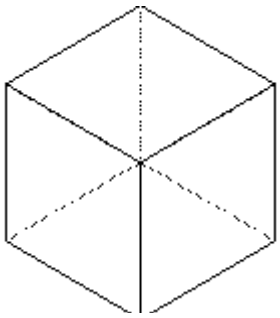
La seconda poi si ha degli stessi triangoli <elementari>, riuniti però insieme in otto triangoli equilateri, formanti un angolo solido di quattro angoli piani; e quando si ottengano sei angoli cosiffatti, anche il secondo corpo è così compiuto.

La terza specie poi consta di due volte sessanta triangoli elementari uniti insieme, e di dodici angoli solidi, chiusi ciascuno da cinque triangoli equilateri piani, ed ha venti basi <o facce> in forma di triangoli equilateri.



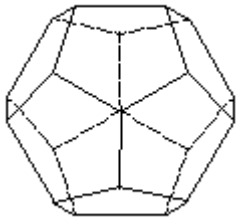
icosaedro (l'acqua)

E dopo d'aver generato <questi tre solidi>, l'uno dei due elementi, <il triangolo scaleno> ha esaurito il suo compito. Il triangolo isoscele, a sua volta, generò la natura del quarto <corpo elementare>, componendosi insieme quattro di questi triangoli in guisa che gli angoli retti si congiungano nel centro e ne nasca un tetragono equilatero. Sei di tali <tetragoni> combinati insieme formano otto angoli solidi, costituiti ciascuno di tre angoli retti piani; sicché la forma del corpo, che ne risulta, è cubica, con una base di sei tetragoni equilateri piani.



cubo (la terra)

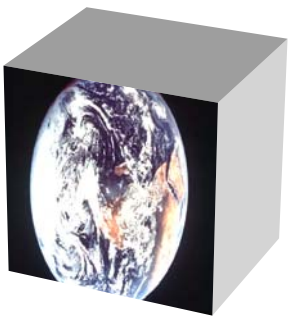
Non rimaneva che una quinta combinazione, e il dio se ne servì per <abbellire> l'universo, quando ne completò il disegno.



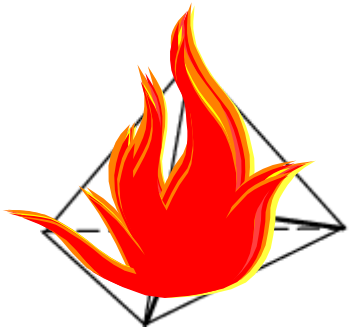
dodecaedro (Dio)

Platone così giustifica l'assegnazione delle forme ai vari elementi:

"*Alla terra diamo la forma cubica; perché la terra è il meno mobile dei quattro generi e il più plasmabile dei corpi, essendo necessario che tale sia soprattutto quello de' corpi che ha le basi più salde.*



Ora, dei triangoli, supposti da principio, la base di quelli che hanno lati eguali, è per natura più salda che non quella degli altri, che li hanno disuguali; e delle superficie, composte dell'uno e dell'altro tipo di triangolo, il tetragono equilatero in confronto del triangolo equilatero, così nelle parti come nell'intero ha necessariamente una base più stabile. Perciò, attribuendo questa figura alla terra, salviamo la verosimiglianza del discorso; mentre invece daremo all'acqua la forma che tra le rimanenti è la meno mobile; al fuoco, la più mobile di tutte, e l'intermedia, all'aria; e così il corpo più piccolo, al fuoco; il più grande, all'acqua, e l'intermedio all'aria; e il più acuto, daccapo, al fuoco; il più grande, all'acqua, e l'intermedio, all'aria; e il più acuto, daccapo, al fuoco; il secondo per acutezza, all'aria; il terzo, all'acqua. Di tutte queste forme pertanto, quella che ha il minor numero di basi deve necessariamente essere la più mobile per natura, perché è da ogni lato la più tagliente e la più acuta;



e sarà inoltre la più leggera, perché costituita del più piccolo numero delle stesse parti; del pari la seconda avrà le stesse caratteristiche in grado secondario, e la terza in terzo grado. Cosicché, in conformità d'un ragionamento retto e verosimile, la figura solida della piramide sia elemento e seme del fuoco; la seconda per generazione diciamola elemento e seme dell'aria; e la terza, dell'acqua. E tutti questi solidi elementari bisogna concepirli così piccoli, che ciascuno da sé in ciascun genere per la sua piccolezza non sia punto visibile da noi, ma allorché molti se ne raggruppino insieme, se ne vedano le masse. E quanto ai rapporti circa il numero e i movimenti e le altre proprietà loro, bisogna ritenere che in quella misura, dopo che tali cose furono in ogni parte esattamente compiute, il dio le avesse proporzionatamente e armonicamente coordinate."
(ibidem, pagg. 1117 - 1119)

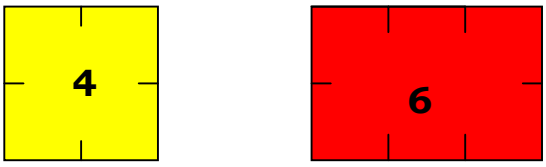
Secondo Platone, il miscuglio degli elementi darebbe luogo ai **poliedri semiregolari**, ossia poliedri le cui facce sono poligoni regolari di due o più specie diverse. **Erone** riferisce che Platone ne conosceva due tipi, mentre sappiamo che **Archimede** ne trovò *13*.

Platone
Teeteto

In questo dialogo di **Platone**, il cui argomento principale è la natura della conoscenza, l'interlocutore di Socrate è un giovane discepolo del matematico greco **Teodoro**. Ispirandosi alla **rappresentazione figurata della moltiplicazione**, Teeteto espone la suddivisione dei numeri naturali in due categorie "geometriche". La prima corrisponde ai numeri che non sono quadrati perfetti, ossia quelli la cui radice quadrata è irrazionale. I **Pitagorici** avevano scoperto che il lato e la diagonale di un quadrato sono *incommensurabili,* ossia il loro quoziente non è una frazione d'interi, è un numero irrazionale. In altri termini la radice quadrata di *2* è irrazionale: **Euclide** ne darà una **dimostrazione** negli ***Elementi***. Come riferisce Teeteto, Teodoro aveva trovato tutti i numeri interi tra *1* e *17* la cui radice quadrata è irrazionale. Secondo lo Zeuthen, il metodo adoperato da Euclide nella dimostrazione risalirebbe proprio a Teodoro.

I numeri con radice quadrata irrazionale si possono caratterizzare anche come le aree dei quadrati aventi per lato un numero irrazionale.

"Il nostro Teodoro ci disegnava certe figure concernenti le potenze, quella di tre piedi <quadrati> e quella di cinque, [dimostrando] che queste potenze rispetto alla lunghezza <del lato> non sono commensurabili con l'unità di piede; e così, trascegliendo via via ciascuna potenza, arrivò fino a quella di diciassette piedi; e a questa si fermò. E qui a noi venne in mente qualcosa di simile: poiché le potenze sono evidentemente infinite di numero, provarci ad aggrupparle insieme in un unico concetto con cui denominarle tutte, codeste potenze. […]
Dividemmo in due classi tutta la serie de' numeri; ogni numero, che può risolversi in due fattori uguali, lo rassomigliammo per la figura ad un quadrato, e lo chiamammo quadrato ed equilatero. […]
I numeri intermedi a questi, come il tre, il cinque e in genere tutti quelli che non possono risolversi in un prodotto di due fattori eguali, ma si ottengono <sempre> dalla moltiplicazione o d'un fattore maggiore per uno minore o d'uno minore per uno maggiore, e però, <rappresentati come superficie> sono sempre limitati da un lato maggiore e da un altro minore; li rassomigliammo ad una figura oblunga e li chiamammo ***numeri oblunghi****."*
(cit. da *Platone, Tutte le opere,* trad. di G. Pugliese Carratelli, Sansoni, Firenze 1974, pag. 176).



Teeteto chiama *lunghezze* i quadrati perfetti e *potenze* gli altri. Questa denominazione nasce dal fatto che in un quadrato avente come area un quadrato perfetto la lunghezza del lato è intera, mentre negli altri casi lo diventa elevandola alla seconda potenza.

Platone
Le Leggi
La Repubblica

Nei Dialoghi di **Platone** diversi sono i brani in cui affiora una **concezione pitagorica del numero**. Il più celebre è quello del ***Timeo***, che, in accordo con l'**astronomia pitagorica**, vede nella struttura del cosmo un'armonia retta da proporzioni matematiche.

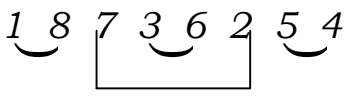
Nel **Libro V** de ***Le Leggi***, in cui Platone descrive la sua Città Ideale, viene indicato *5040* come numero di abitanti. E così egli giustifica la sua scelta:
"Adottiamo questo numero per le ragioni di convenienza ch'esso ci offre. Territorio e abitazioni siano del pari divisi nel medesimo numero di parti, in modo che ad ogni uomo corrisponda una parte di essi. L'intiero numero si divida dapprima in due parti, poi in tre: esso è divisibile anche per quattro, per cinque, e così di seguito fino a dieci. In fatto di numeri bisogna che ogni legislatore sappia per lo meno quale numero riesca maggiormente utile a tutti gli stati. Orbene questo numero è quello che contiene moltissimi divisori e soprattutto consecutivi. Il numero infinito è pienamente suscettibile di tutte le divisioni; il numero cinquemila e quaranta non può offrire, sia per la guerra sia per ogni sorta di convenzioni e commerci del tempo di pace, così per le contribuzioni come per le distribuzioni, più di cinquantanove divisori, di cui consecutivi quelli da uno fino a dieci."

(cit. da *Platone, Tutte le opere,* trad. di G. Pugliese Carratelli, Sansoni, Firenze 1974, pag. 1249).

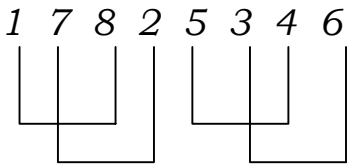
Il numero *5040* è pari a *7!*, il prodotto dei numeri interi da *1* a *7*, che poi è anche il numero delle permutazioni di *7* elementi. Platone ne apprezza la divisibilità per tutti i numeri da *1* a *10*, che costituisce un grande vantaggio al fine della spartizione dei beni tra gli abitanti. Lo storico E.T. Bell va oltre nell'interpretazione del *5040,* che egli chiama un "*numero enciclopedico*". Egli sottolinea che esso comprende, fra i suoi divisori, il "*7 super-sacro, per non parlare del femminile 2, del maschile 3, del giusto 4, dei 5* ***solidi regolari***, *e del* ***perfetto 6***." I significati dei numeri sono tratti dal misticismo pitagorico. Bell rileva anche che *7* sono i colli che, secondo Platone, devono essere superati per giungere alla sapienza. Ed inoltre *"Ogni numerologo cosmico osserverà che 5040 ha esattamente 60 divisori, mentre 60 ne ha esattamente 12, e 12 ne ha il numero perfetto di 6, e 6 ne ha il numero*

giusto di 4, mentre 4 ne ha esattamente 3, e 3 ne ha esattamente il numero femminile di 2, che ne ha esattamente 2, e così via, 2-2-2…"
Questa sequenza, piena di numeri cari ai **Pitagorici**, termina con una ripetizione infinita, una *"eterna ricorrenza"*: la circolarità del tempo, incarnata dal serpente che si morde la coda, apparteneva alla visione babilonese dell'universo, e venne ripresa da Platone. È anche significativo il fatto che la successione numerica descritta sopra si stabilizzi esattamente dopo il quarto passo, in corrispondenza, cioè, del simbolo della giustizia. Il numero *3* rappresenterebbe la Famiglia Ideale della Città Ideale, il *12* sarebbe un'esplicita allusione allo **zodiaco**.

Bell vuole vedere, inoltre, un riferimento al *numero nuziale*, che secondo alcuni è da identificare con *12.960.000*, cioè la quarta potenza di *60*, e di cui *5040* è un divisore. Quel numero, che figura anche nella **matematica babilonese**, possedeva un notevole valore cosmologico, in quanto divisibile per *360* (la durata in giorni dell'anno degli antichi) e per *36.000* (il numero di giorni di *10×10* anni, dove *10* è il sacro numero della ***tetractys***). Secondo l'astronomia pitagorica (e forse già per **l'astronomia babilonese**), *36.000* anni era la durata dell'anno cosmico, ossia la durata di un ciclo completo di precessione degli equinozi. Come osserva il Chambry, inoltre, *60* è il prodotto di *3, 4* e *5,* cioè dei numeri della prima **terna pitagorica**. Come Platone asserisce nella ***Repubblica***, l'altra sua opera a contenuto politico, questi tre numeri governerebbero, secondo un complesso calcolo aritmetico, i periodi favorevoli alla generazione dei figli. Un altro brano dello stesso dialogo descrive la struttura del cosmo, che Platone immagina formata da una serie di sfere cave, che si incastrano perfettamente l'una nell'altra, e rappresentano i cieli dei pianeti, secondo l'ordine stabilito da Pitagora: dall'esterno verso l'interno si trovano le stelle fisse, Saturno, Giove, Marte, Mercurio, Venere, il Sole, la Luna. Al centro è collocata la Terra. Una volta assegnati a questi corpi celesti i numeri da *1* a *8*, se questi vengono disposti in ordine crescente rispetto allo spessore delle sfere cave, otteniamo la sequenza:



Le somme di questi numeri, presi a due a due secondo uno schema simmetrico, sono tutte pari a *9*, il quadrato del numero perfetto *3*. Si ottiene un risultato analogo considerando la sequenza corrispondente all'ordine di luminosità:



Nel dialogo ***La Repubblica*** Platone insiste molto sull'importanza dell'apprendimento della matematica nella formazione della classe politica e militare dello stato ideale. Ecco cosa fa dire a Socrate:

"Sarà perciò conveniente, Glaucone, di rendere obbligatoria questa conoscenza, e persuadere quelli, che nella città dovranno coprire i più alti uffici, di dedicarsi al calcolo e studiarlo non superficialmente, ma fino a pervenire con la pura intelligenza a contemplare la natura dei numeri, non già come i commercianti e i bottegai per servirsene a comperare e vendere, ma in vista della guerra, e per facilitare all'anima stessa la possibilità di volgersi dal mondo sensibile alla verità ed all'essenza."[…]
E Glaucone:
"Per quanto almeno si riferisce […] alle operazioni guerresche, è evidente che ci conviene, giacché e nel porre gli accampamenti e nell'occupare certe posizioni e nell'ammassare o spiegare le truppe, come in tutte le altre formazioni che può assumere un esercito in battaglia o in marcia, un generale esperto di geometria sarà in miglior condizione di chi la ignora."
Risponde Socrate:
"Veramente […] per questo basterebbe anche una cognizione elementare di geometria e di calcolo. Bisogna però esaminare se la parte maggiore e più alta di questa scienza non tenda in qualche modo a quest'altro fine: a permetterci, intendo, di scorgere più facilmente l'idea del bene. E, secondo me, tende a tal fine tutto ciò che costringe l'anima a volgere lo sguardo verso quel luogo ov'è l'essere tra tutti gli altri sovranamente felice, che l'anima deve contemplare ad ogni costo."

(cit. da Platone, *Repubblica*, Libro VII (525-527) in: *Tutte le opere,* trad. di G. Pugliese Carratelli, Sansoni, Firenze 1974, pagg. 1025-1026)

La matematica nei dialoghi platonici:
Il *Menone*
Il *Teeteto*

I poligoni

Si dice ***poligono con n lati*** una figura piana chiusa delimitata da n segmenti.

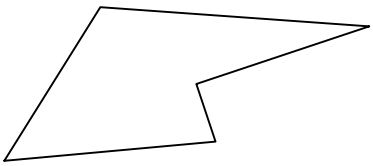


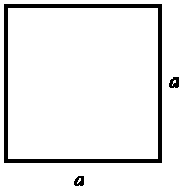
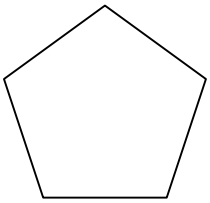
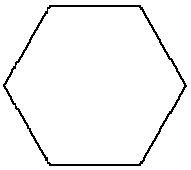
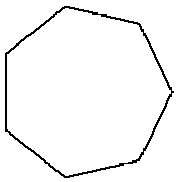
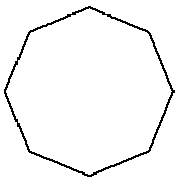
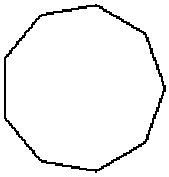
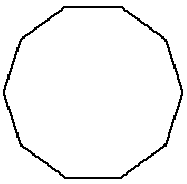
Figura 1

Nomenclatura

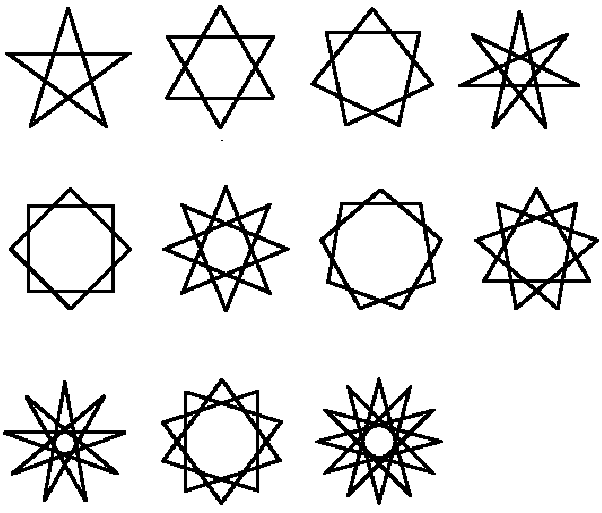
Per molti valori di n un poligono con n lati prende un nome particolare. Ne ricordiamo alcuni:

n	nome
3	triangolo
4	quadrangolo
5	pentagono
6	esagono
7	ettagono o eptagono
8	ottagono
9	ennagono o nonagono
10	decagono
12	dodecagono
15	pentadecagono
17	ettadecagono

Nella pagina successiva presentiamo alcuni poligoni regolari ***convessi***:

 Triangolo equilatero	 Quadrato	 Pentagono regolare	 Esagono regolare
 Ettagono regolare	 Ottagono regolare	 Ennagono regolare	 Decagono regolare

Ricordiamo che una regione del piano si dice *convessa* se, dati due punti in questa regione, essa contiene tutto il segmento che li congiunge.



Accanto ai poligoni regolari convessi si considerano quelli ***stellati***: il primo in alto a destra della figura è il pentagono stellato, uno dei simboli della **scuola pitagorica**.

Costruibilità dei poligoni regolari

Numeri poligonali

Frattali

Costruzioni a pianta poligonale

I cristalli di ghiaccio

La costruibilità dei poligoni regolari

Uno dei più antichi problemi della matematica è il seguente: si chiede di suddividere, con riga e compasso, una circonferenza in un numero assegnato n di parti uguali o, equivalentemente, costruire un **poligono regolare** con n lati inscritto nella circonferenza stessa.

Euclide, nei suoi ***Elementi***, riporta solo le costruzioni dei casi più semplici:

- caso ***n=3*** (triangolo) (v. **Libro IV, Prop. 2**) ;
- caso ***n=4*** (quadrato), in cui è sufficiente tracciare due diametri mutuamente ortogonali (v. **Libro IV, Prop. 6**) ;
- caso ***n=5*** (pentagono) (v. **Libro IV, Prop. 11**);
- caso ***n=6***, (esagono), in cui il lato è uguale al raggio (v. **Libro IV, Prop. 15**);
- caso ***n=15***, (pentadecagono) (v. **Libro IV, Prop. 16**).

Dalle precedenti costruzioni, attraverso reiterate bisezioni degli angoli, è possibile derivare quelle dei poligoni regolari aventi un numero di lati del tipo

$$2^k,\ 2^k \cdot 3,\ 2^k \cdot 5,\ 2^k \cdot 15,$$

ove k è un intero positivo.
Per n arbitrario il problema può essere riformulato in termini algebrici, e ricondotto allo studio delle proprietà delle **radici del polinomio X^n-1**: ciò fa parte della **teoria** sviluppata dal grande matematico francese **Galois**.
Un noto criterio dovuto a **Gauss** stabilisce che la costruzione è possibile se e solo se n ha una decomposizione del tipo:

$$n = 2^r \qquad \textit{oppure} \qquad n = 2^r \cdot F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdots F_{k_s}$$

dove r è un intero nullo o positivo, e $F_{k_1}, F_{k_2}, \ldots, F_{k_s}$ sono distinti ***primi di Fermat***, cioè numeri primi della forma

$$F_k = 2^{2^k} + 1,$$

con k intero positivo o nullo. Secondo questo criterio - la cui **scoperta** fu fatta da Gauss, mentre la dimostrazione fu completata solo nel 1836 da Wantzel - i primi valori di n per i quali la costruzione è possibile sono

$$3 = F_0,\ 4 = 2^2,\ 5 = F_1,\ 6 = 2 \cdot F_0,\ 8 = 2^3,$$
$$10 = 2 \cdot F_1,\ 12 = 2^2 \cdot F_0,\ 15 = F_0 \cdot F_1,\ 16 = 2^4 .$$

Fin qui ritroviamo i casi già noti ai tempi di Euclide, e sappiamo,

inoltre, che per *n=7,9,11,13,14* la costruzione non è possibile. Scopriamo però un nuovo caso positivo: ***n=17*** (ettadecagono), essendo ***17 = F_2***. Una **costruzione** esplicita è riportata da **Bachmann**. Riportiamo anche una **costruzione moderna**.
Il successivo primo di Fermat è ***F_3 = 257***. Una costruzione esplicita per ***n = 257***, estremamente lunga e laboriosa, è stata realizzata da **Richelot**: è oggetto di un articolo, pubblicato nel 1832 sul *"Journal für die reine und angewandte Mathematik"* (vol. 9), che si estende per ben 194 pagine.

Anche ***F_4 = 65.537*** è primo: il caso ***n = 65.537*** è stato trattato dal prof. J.Hermes di Lingen, Germania: la costruzione, che porta il titolo di *"Diario della suddivisione del cerchio"*, fu da lui iniziata il 4 novembre 1879 e terminata dopo nove anni e mezzo, il 15 aprile 1889: essa occupa circa 250 fogli formato A1, ed è attualmente conservata in una cassa presso il Seminario Matematico della Università di Göttingen, Germania.

Abbiamo osservato che per *n=7* (ettagono) e per *n=9* (ennagono) la costruzione con riga e compasso non è possibile. È però possibile costruire questi due poligoni regolari con la tecnica dell'*origami*. Essi rientrano infatti in una classe di problemi che *"si possono risolvere col ripiegamento della carta, avendo a disposizione un foglio di carta trasparente, una matita, l'unità di misura segnata sull'orlo di un ulteriore foglio di carta, e non facendo uso di altri strumenti."* (cit. dal contributo di Margherita Piazzolla Beloch, in *Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari,* Pavia, 1936, pagg. 93-95). Le costruzioni che riportiamo sono opera di Robert Geretschlaeger:

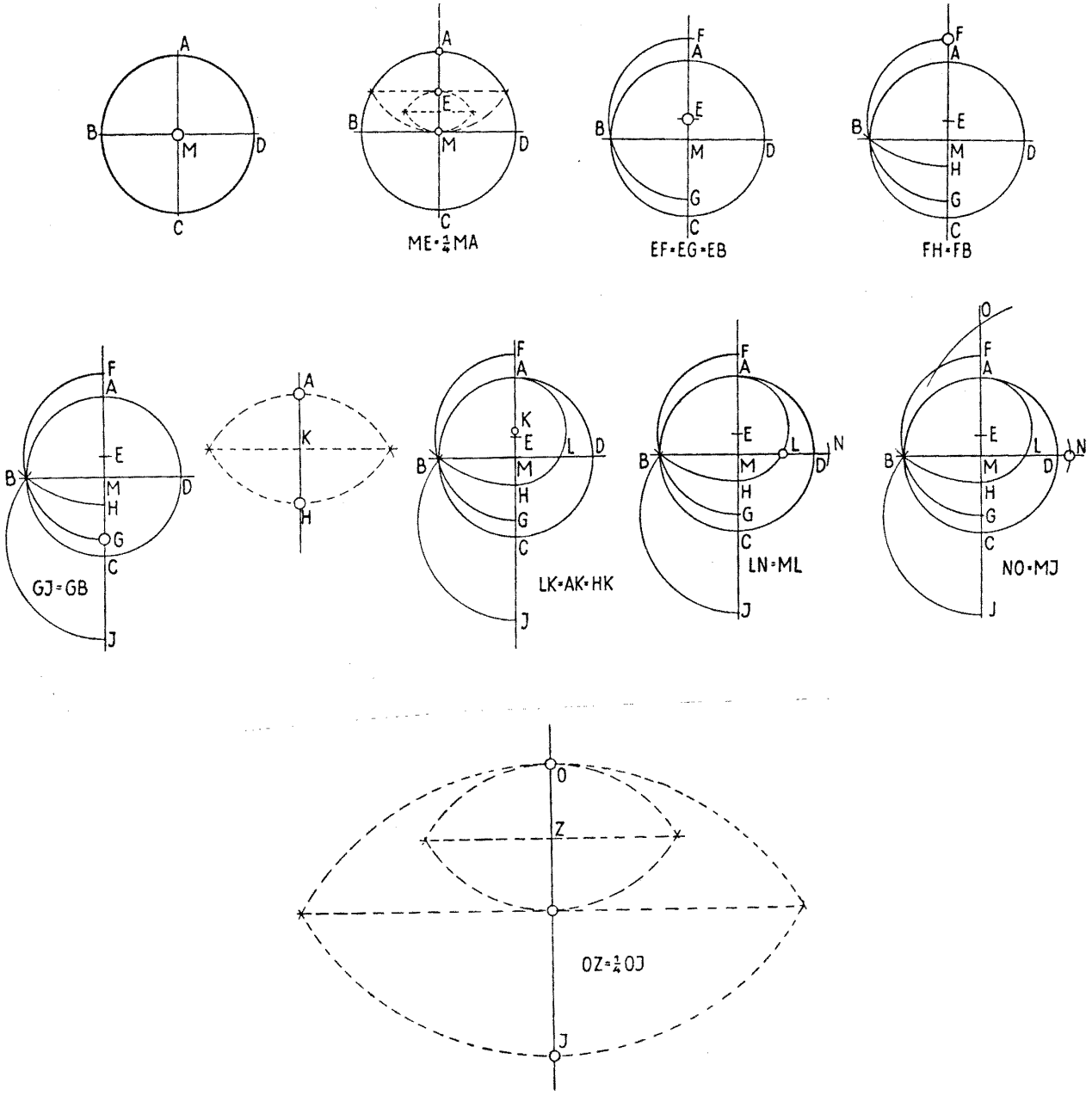
- **Ettagono con l'origami**
- **Ennagono con l'origami**

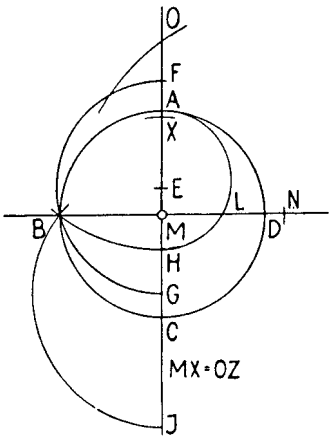
È infine possibile effettuare, per un qualunque poligono regolare, una **costruzione approssimata**, la cui imprecisione, per i valori di *n* grandi, è davvero impercettibile.

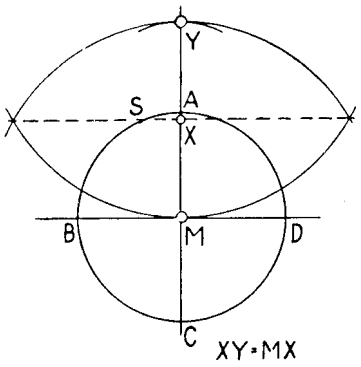
I poligoni costruibili e il triangolo aritmetico
La costruzione dei poligoni secondo L.B. Alberti

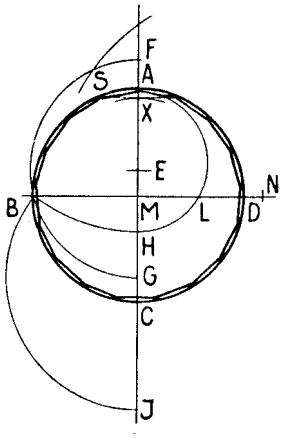
La costruzione dell'ettadecagono

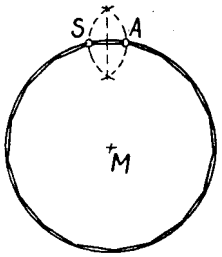
Ecco i singoli passi della costruzione dell'ettadecagono regolare riportata da **Bachmann**:




O
F
A
X
E
L
N
B
M
D
H
G
C
MX=OZ
J

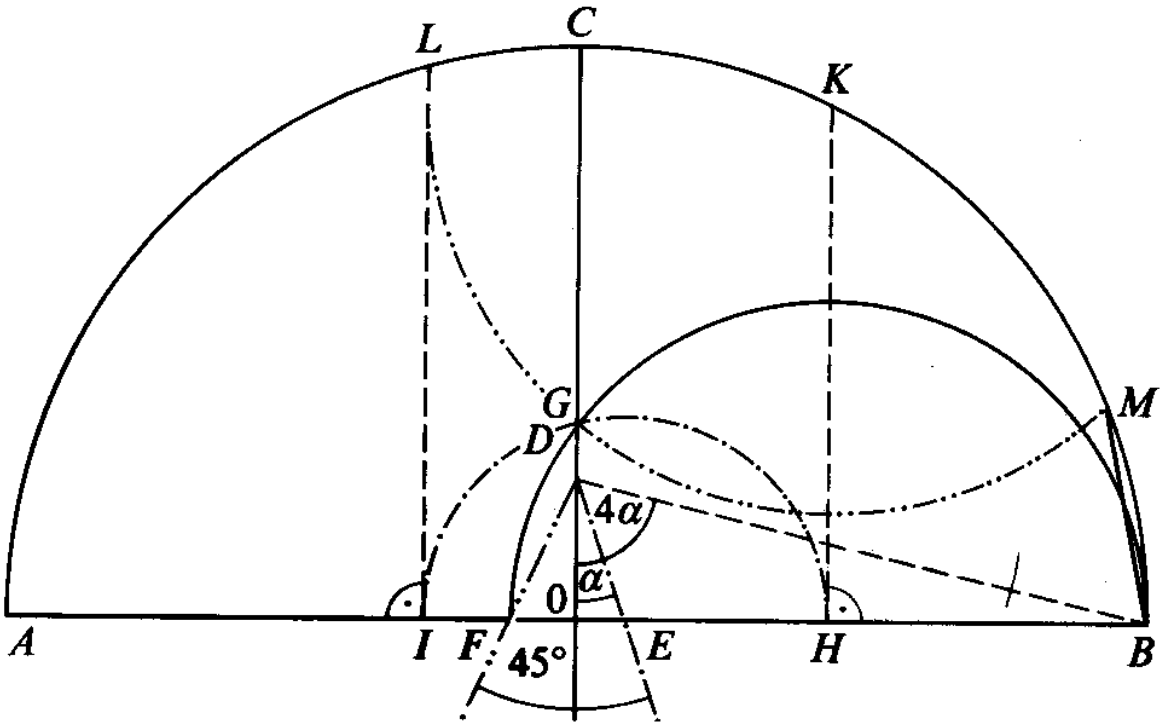

Y
S
A
X
B
M
D
C
XY=MX


F
S
A
X
E
N
B
M
L
D
H
G
C
J


S
A
M

Una moderna costruzione dell'ettadecagono regolare

Questa costruzione è dovuta a **Richmond**, che la pubblicò nel 1893 in una rivista statunitense.



Il segmento *BM* è il lato dell'ettadecagono inscritto nella circonferenza di centro *O* e diametro *AB*. Ecco i primi passi della costruzione:

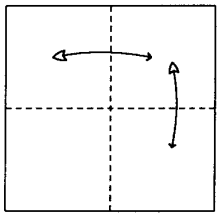
1. $CO \perp AB$
2. $\overline{OD} = \frac{1}{4}\,\overline{OC}$
3. $\sphericalangle\, ODB = 4\alpha,\ \sphericalangle\, ODE = \alpha$
4. $F \in AO,\ \sphericalangle\, FDE = 45°$

Si traccia, quindi, il cerchio di diametro *FB*, che interseca *CO* nel punto *G*. Poi si traccia il cerchio di centro *E* passante per *G*, infine il cerchio di centro *K* passante per *L* (vedi figura). Ciò permette di determinare il punto *M*.

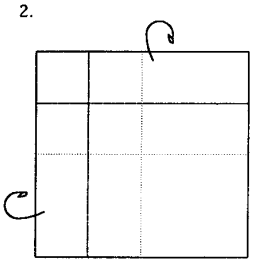
Ettagono con l'origami

Ecco come piegare un foglio di carta quadrato fino ad ottenere un ettagono regolare:

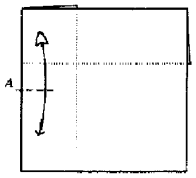
1.



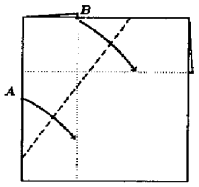
2.



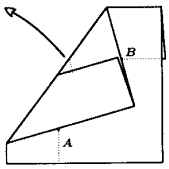
3.



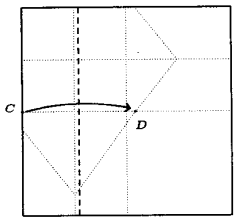
4.



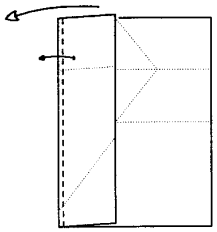
5.



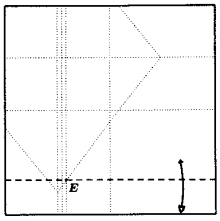
6.



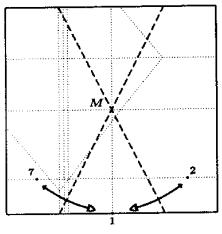
7.



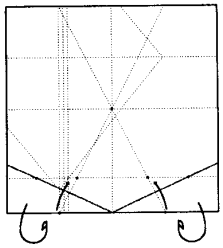
8.



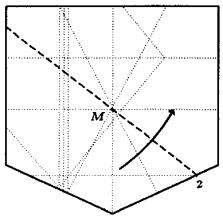
9.



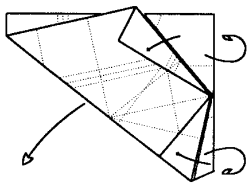
10.



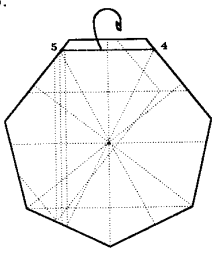
11.



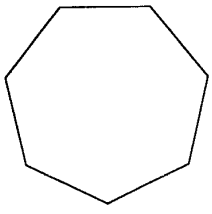
12.



13.



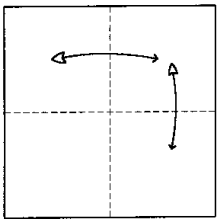
14.



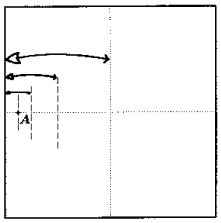
Ennagono con l'origami

Ecco come piegare un foglio di carta quadrato fino ad ottenere un ennagono regolare:

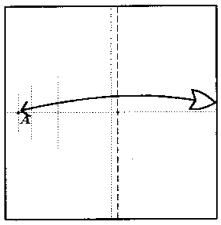
1.



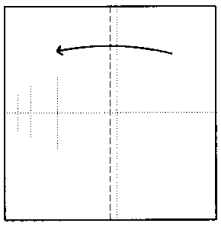
2.



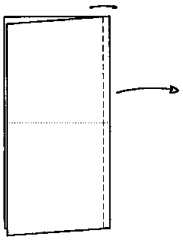
3.



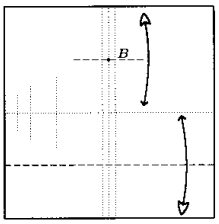
4.



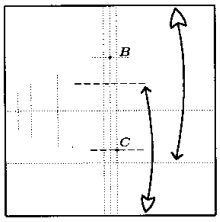
5.



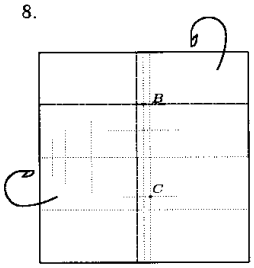
6.



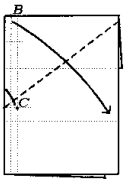
7.



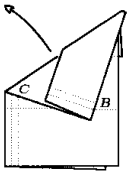
8.



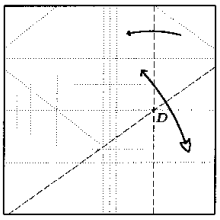
9.



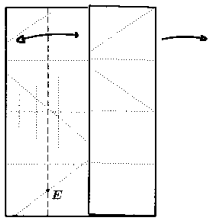
10.



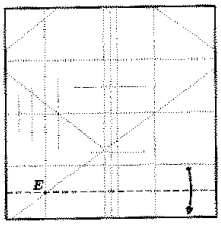
11.



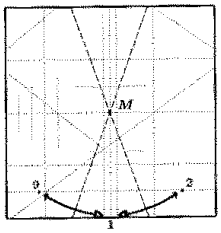
12.



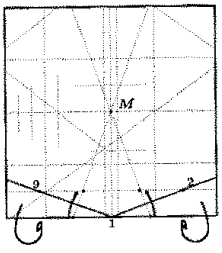
13.



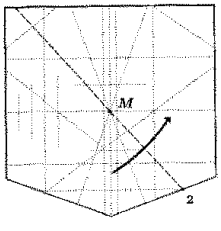
14.



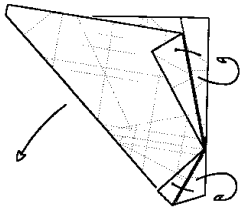
15.



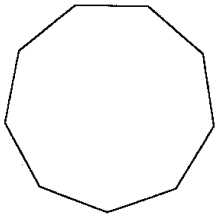
16.



17.

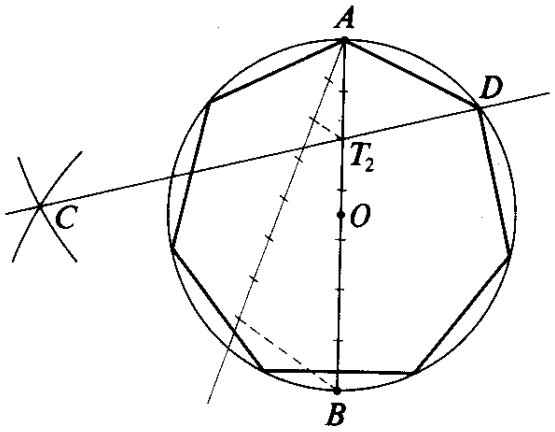


18.



La costruzione approssimata di un poligono regolare

Per ogni poligono regolare esiste una costruzione approssimata, la cui precisione aumenta col numero dei lati. Il procedimento è lo stesso per tutti i poligoni.



Si traccia prima il cerchio di centro *O,* nel quale si inscriverà il poligono regolare di *n* lati. Tracciato il diametro *AB*, lo si suddivide in *n* parti uguali. Quindi si tracciano le due circonferenze di raggio pari ad *AB* aventi centro in *A* e *B* rispettivamente. Sia *C* uno dei due punti d'intersezione. Si traccia dunque la congiungente il punto *C* ed il punto T_2 della figura. Sia *D* il punto d'intersezione di questa con la circonferenza che non appartiene al segmento CT_2. Allora *AD* è la lunghezza del lato del poligono cercato.

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

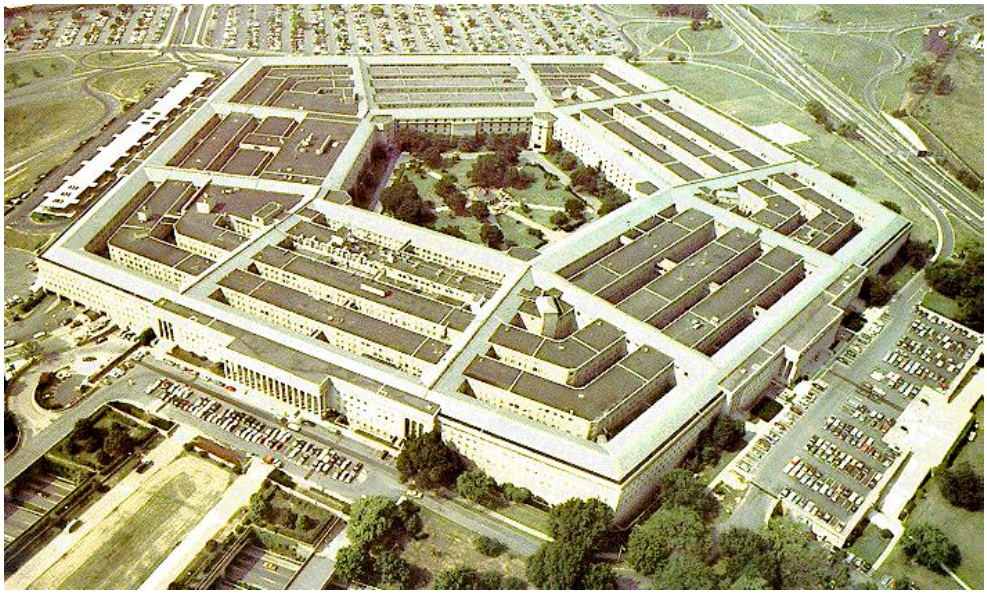
Paul Bachmann
Die Lehre von der Kreistheilung und Ihre Beziehungen zur Zahlentheorie - Academische Vorlesungen
Leipzig, 1872

(*La teoria della divisione del cerchio e le sue relazioni con la Teoria dei Numeri - Lezioni accademiche*
Lipsia, 1872)

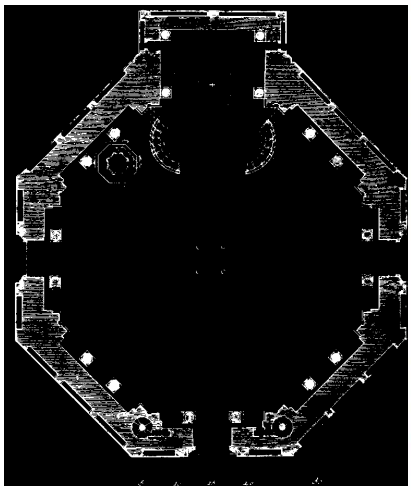
L'opera è interamente dedicata allo studio del seguente problema: si chiede di suddividere, con riga e compasso, una circonferenza in un numero assegnato n di parti uguali o, equivalentemente, **costruire un poligono regolare** con n lati inscritto nella circonferenza stessa. All'inizio della **Prima Lezione** l'autore, professore straordinario all'Università di Breslau, Germania, ricorda come il problema in questione sia uno dei più antichi della storia della matematica. Nella **Settima Lezione** viene riportata una **costruzione** esplicita del poligono con 17 lati *(ettadecagono)*, risalente a **Gauss**. Riportiamo, per confronto, anche una **costruzione moderna**, ed una **costruzione approssimata**.
Secondo la **teoria** sviluppata dal grande matematico francese **Galois**, la costruibilità di questo poligono è legata a certe proprietà delle radici del polinomio $X^{17}-1$.

I poligoni nella realtà: gli edifici

1. Il Pentagono (USA)



2. Il Battistero di Firenze *(ottagono regolare)*



La pianta

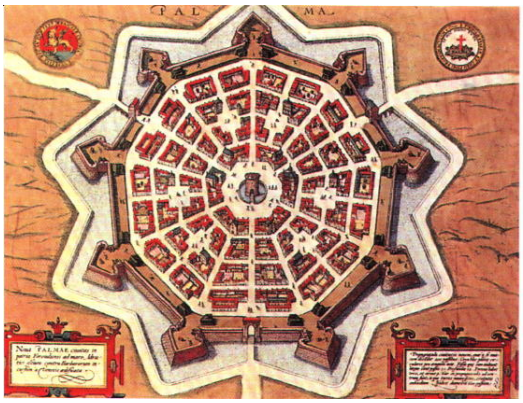


Il soffitto

1. Palmanova (Udine) (*ennagono regolare*)



Veduta aerea



Antica pianta della città

2. Granmichele (Catania) *(esagono regolare)*



Panorama



La piazza

3. Castel del Monte, Andria (Bari)



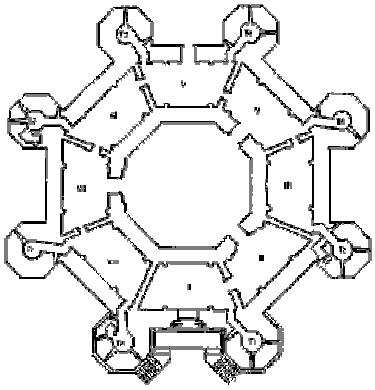
Il castello



Il cielo visto dal cortile



Le torri ottagonali



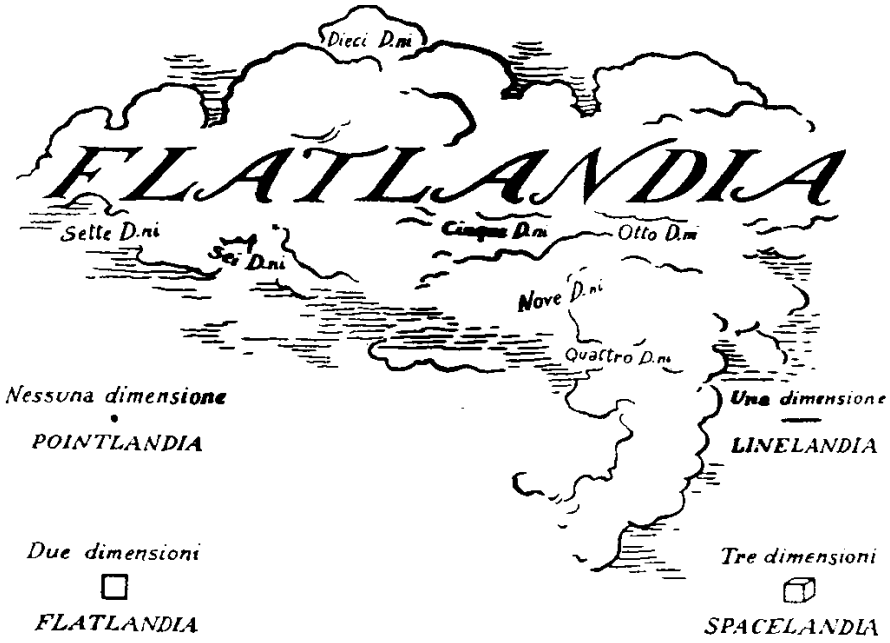
La pianta del castello

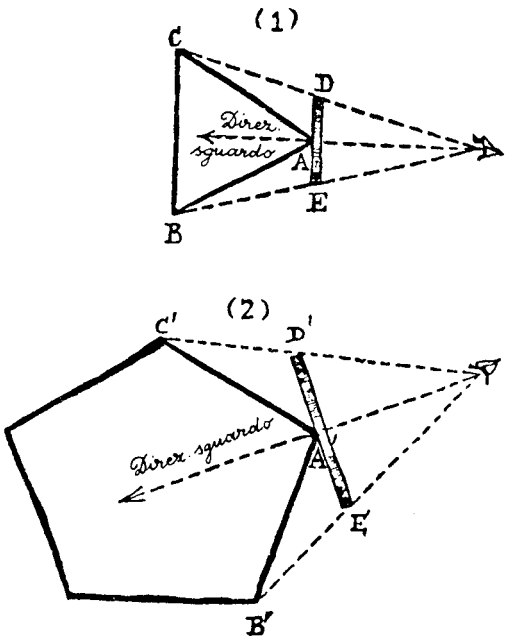
Matematica fantastica: *Flatlandia*

Il reverendo inglese Edwin Edwin Abbott (1838-1926), rettore della City of London School, pubblicò in forma anonima, nel 1882, un racconto fantastico, ambientato in un mondo immaginario a due sole dimensioni: ***Flatlandia*** (dalla parola inglese *flat,* cioè "piatto"). Nel libro egli descrive minuziosamente gli abitanti di questo singolare paese, e le loro abitudini di vita. Persone e case sono **poligoni**, e l'appartenenza sociale è determinata dalla forma e dal numero dei lati (gli uomini sono triangoli, quadrati, pentagoni, le donne sono segmenti,...): tutti gli aspetti della quotidianità sono condizionati dalla geometria. Un giorno, improvvisamente, un essere tridimensionale attraversa Flatlandia: si tratta di una sfera, che agli abitanti del mondo bidimensionale si manifesta come un cerchio che si allarga e si restringe fino a scomparire. È un bell'esempio di fenomeno che appare soprannaturale nella prospettiva ridotta di chi lo osserva, ma, in una visione globale del mondo, ha una banale spiegazione geometrica.

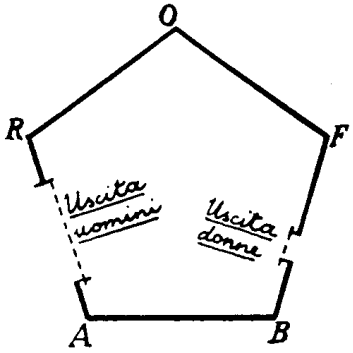


Edwin A. Abbott (1838-1926)





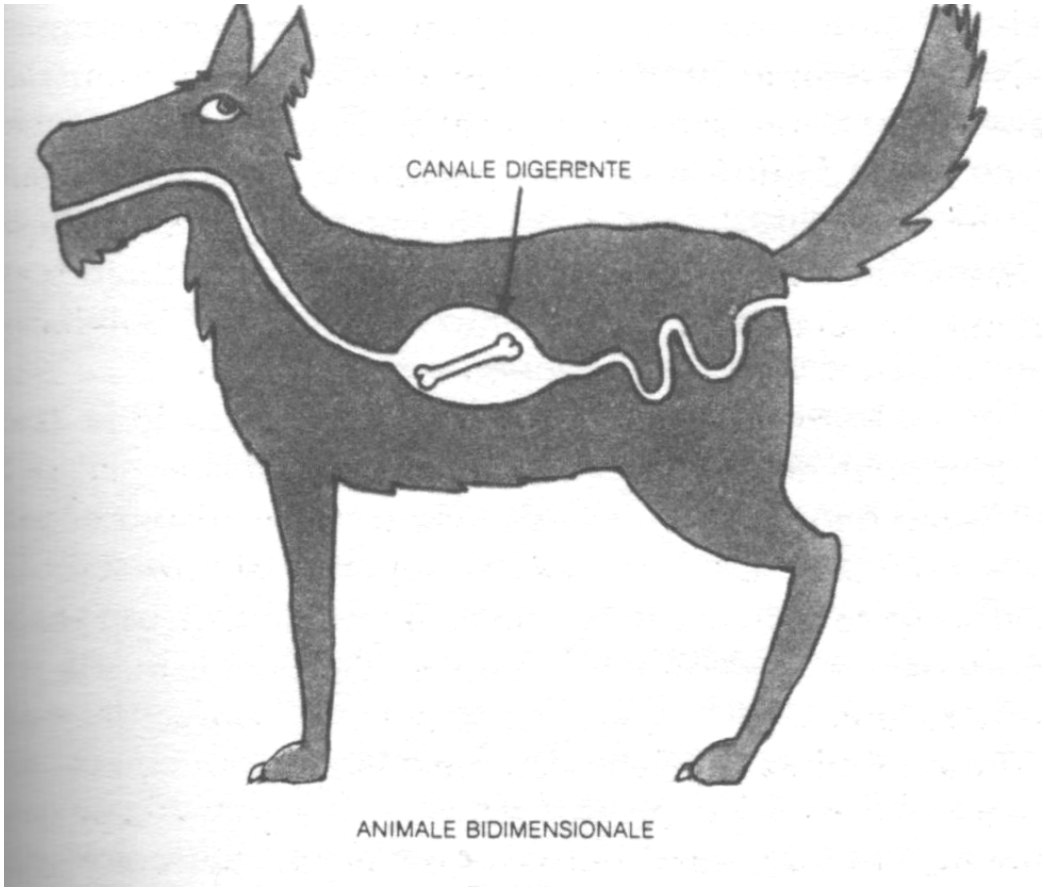
Riconoscimento visivo basato sulla prospettiva



Una casa di Flatlandia

Curiosità

Secondo il grande fisico teorico inglese Stephen Hawking, un paese come Flatlandia non potrebbe essere popolato. Ogni essere vivente rimarrebbe infatti tagliato in due dal proprio apparato digerente:



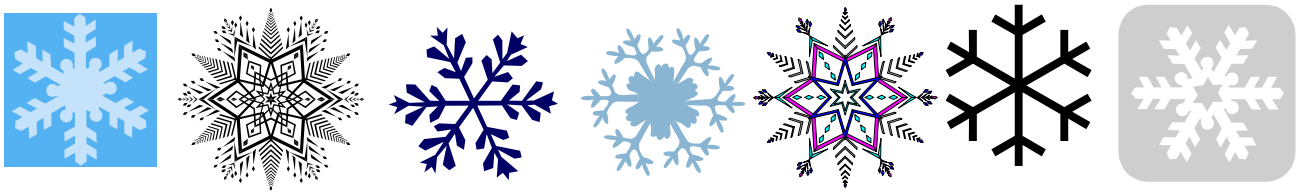
ANIMALE BIDIMENSIONALE

I cristalli di ghiaccio ed i fiocchi di neve

Come osservato anche da **Weyl**, questi cristalli presentano sempre una simmetria esagonale.
Ecco come viene descritta, nel best seller *"Il senso di Smilla per la neve"* di Peter Høeg (Mondadori, Milano 1994), la prima fase della formazione del ghiaccio:

"Lo strato di ghiaccio si è formato l'anno scorso nel Mar Glaciale. Da lì è stato spinto fra le Svalbard e la costa orientale della Groenlandia, poi verso sud intorno a Capo Farvel e su lungo la costa occidentale.
È stato creato in bellezza. Un giorno di ottobre la temperatura si è abbassata di 30 gradi Celsius in quattro ore e il mare è diventato uno specchio. Aspetta di riflettere un miracolo della creazione. Le nubi e il mare si uniscono in una cortina di seta grigia e spessa. L'acqua si addensa e diventa rossastra, come un liquore di bacche selvatiche. Una nebbia azzurra di gelo si stacca dalla superficie e vaga sull'acqua. Poi l'acqua si rapprende. Dal mare scuro il freddo fa spuntare un giardino di rose, un tappeto bianco di fiori di ghiaccio formati da gocce d'acqua salate congelate. Vivranno forse quattro ore, forse due giorni.
A questo punto la struttura dei cristalli di ghiaccio è basata sul numero sei. Intorno a un esagono, come in un alveare di acqua solidificata, sei braccia sporgono verso sei nuove cellule che a loro volta si dissolvono in nuovi esagoni.[…]"

I cristalli di ghiaccio si aggregano fino a formare i fiocchi di neve, che presentano anch'essi una simmetria esagonale.



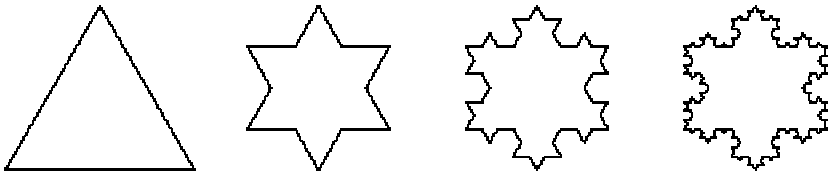
L'analogia fra la struttura macroscopica e microscopica è tipica dei **frattali**: la **curva di Koch** è un esempio di frattale avente una simmetria esagonale sia nelle componenti piccole, sia nella forma complessiva. Per questo è detto anche ***fiocco di neve***.
I matematici di tutte le epoche si sono interrogati sulla ragione della simmetria dei fiocchi di neve: tra questi ricordiamo **Descartes**, che ne ha parlato nel suo saggio ***Les Météores***, e **Keplero**, che vi ha dedicato **un piccolo trattato**.

I poligoni

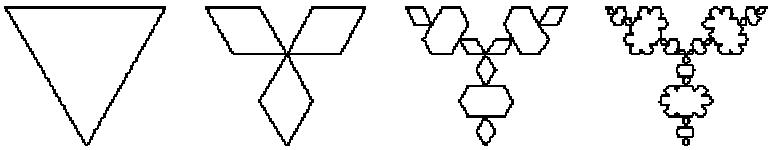
Frattali poligonali

Alcuni **frattali** sono realizzati a partire da un poligono. Eccone gli esempi più noti:

1. **Il fiocco di neve** (curva di Koch)



2. L' "antifiocco" di neve

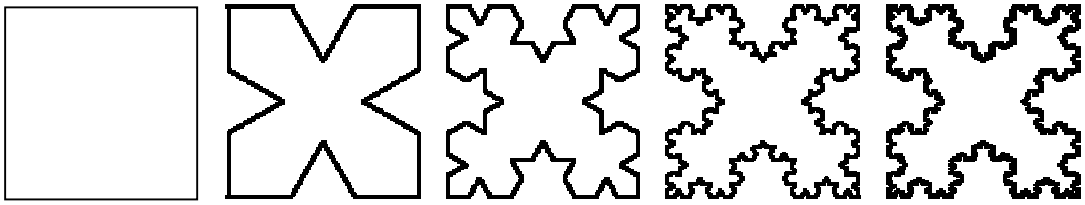


3. Il crivello di Sierpinski

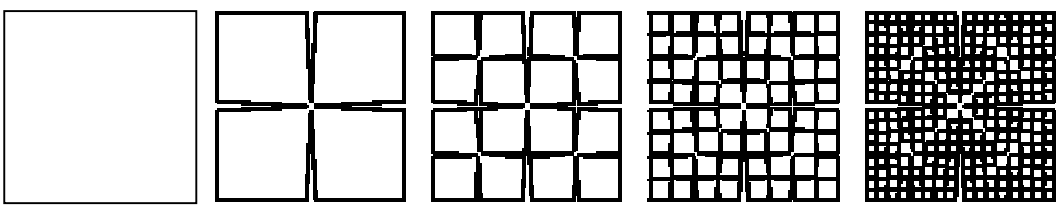


4. I frattali di Cesaro

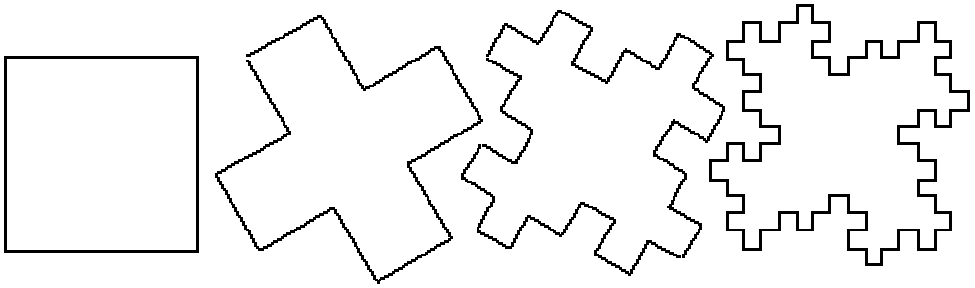
a)



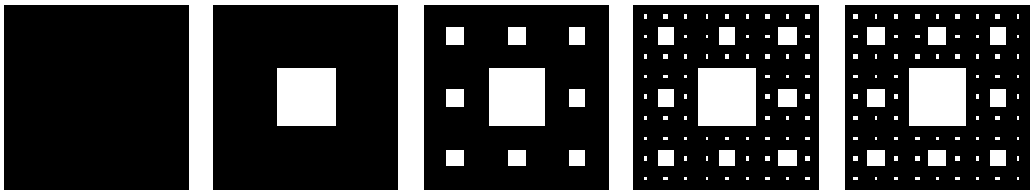
b)



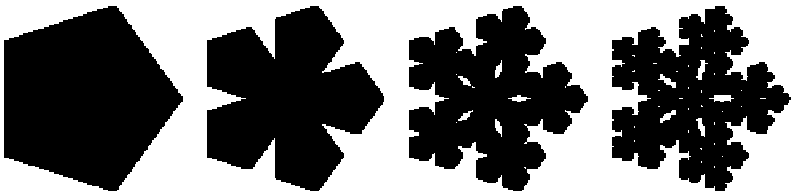
5. La salsiccia di Minkowski



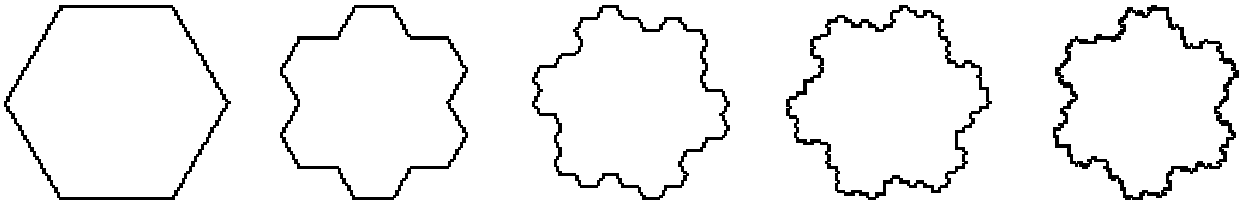
6. Il tappeto di Sierpinski



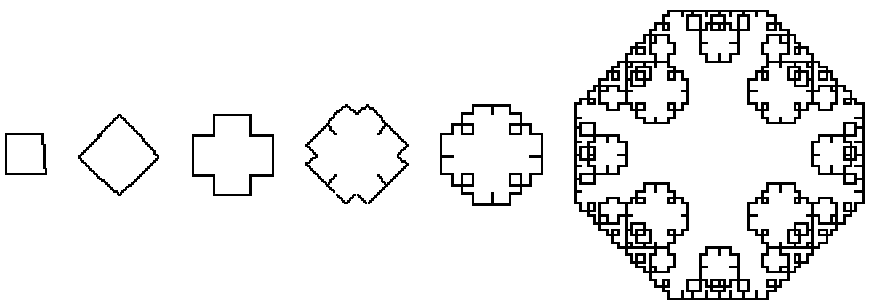
7. Il fiocco a cinque punte



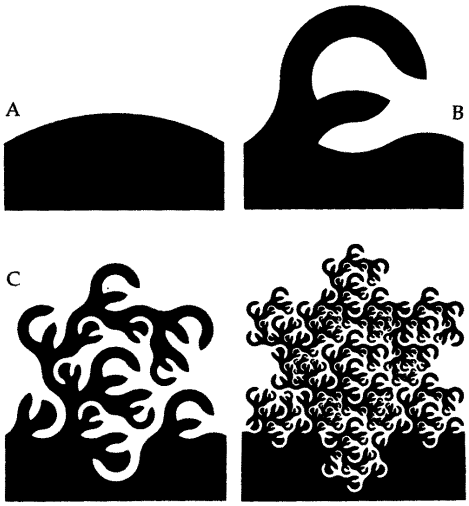
8. L'isola di Gosper



9. Il frattale di Lévy



L’inventore dei frattali, **Benoît Mandelbrot**, ha ideato anche un frattale che, al limite del processo iterativo, riempie completamente il fiocco di neve:



Curiosità: Il crivello di Sierpinski ed il triangolo aritmetico

I numeri primi

Definizione Un numero intero p diverso da $0, 1, -1$ è detto *composto* se è prodotto di due numeri interi entrambi diversi da 1 e -1. Altrimenti è detto *primo*.

Tabella dei numeri primi fra 1 e 1500

Quanti sono i numeri primi?
Fin dall'antichità si sa che esistono infiniti numeri primi: **Euclide** lo prova negli ***Elementi*** (**Libro IX, Prop. 20**). **Eratostene** inventò un algoritmo, detto **crivello**, che, iterato all'infinito, permetterebbe di trovarli tutti. Nel corso della storia sono state date diverse altre dimostrazioni.
Un noto teorema di **Dirichlet** stabilisce che, più in generale, ogni progressione aritmetica

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots$$

contiene infiniti numeri primi se il massimo comune divisore di a e b è 1.
Ad esempio, se $a=2$ e $b=3$, otteniamo la progressione aritmetica

2, **5**, 8, **11**, 14, **17**, 20, **23**, 26, **29**, 32, 35, 38, **41**,...

nella quale abbiamo indicato in grassetto i numeri primi.
Più difficile è descrivere la "densità" dei numeri primi: Chiamiamo $\pi(n)$ il numero di primi compresi fra 1 ed n: cosa si può dire di $\pi(n)$? Il primo a dare una risposta a questa domanda fu **Gauss**; fu lui a scoprire la nota **formula asintotica** sulla distribuzione dei primi. Chiamiamo p_n l'n-esimo numero primo, e poniamo $d_n = p_{n+1} - p_n$: ci chiediamo come varii, al crescere di n, il numero d_n, che è poi la distanza fra due numeri primi consecutivi. L'andamento di d_n è molto irregolare, e non è stato ancora possibile descriverlo mediante una legge generale. È chiaro che, a parte l'eccezione $d_1 = p_2 - p_1 = 3-2 = 1$, il numero d_n è sempre maggiore o uguale a 2, ed è sempre pari. (Esempio: $d_2 = p_3-p_2 = 5-3 = 2$). È stato anche dimostrato che si possono trovare coppie di primi consecutivi aventi distanza grande quanto si vuole. Ma per il resto si sa poco, e molte sono ancora le domande senza risposta. Una di queste riguarda i cosiddetti **primi gemelli**, cioè le coppie di numeri primi aventi distanza 2 (ad esempio: 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13,...).

Problema irrisolto: Esistono infinite coppie di primi gemelli? Si pensa che la risposta sia sì, ma nessuno è ancora riuscito a dimostrarlo. La coppia di primi gemelli più grandi mai trovati è

$$318032361 \cdot 2^{107001} - 1$$
$$318032361 \cdot 2^{107001} + 1$$

ed è stata scoperta nel 2001. Questi due numeri hanno ben *32220* cifre!

I numeri primi stanno alla base del notissimo **teorema fondamentale dell'aritmetica**, dimostrato già da Euclide.

Curiosità

- A tutt'oggi non è stato possibile provare, né confutare le seguenti congetture, formulate nel 1742 da Goldbach in una lettera a **Eulero**:

  - *Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi.*
  - *Ogni numero dispari maggiore di 5 è somma di tre numeri primi.*

  Tutte le prove effettuate finora su numeri anche molto grandi hanno dato esito positivo, ma manca la dimostrazione generale.

- Alcune specie di cicale hanno un ciclo vitale estremamente lungo: il loro stadio larvale dura *13* o *17* anni, a fronte di una vita adulta di poche settimane. La causa di questa particolarità, unica nel mondo degli insetti, potrebbe essere stata la presenza, in passato, di parassiti che avrebbero attaccato le cicale alla schiusa del loro bozzolo. La selezione naturale avrebbe favorito le cicale il cui stadio larvale dura un numero di anni che è primo e sufficientemente grande. Queste avrebbero evitato l'attacco dei parassiti il cui ciclo vitale - come normalmente avviene - è pari a pochi anni: la cicala ed il parassita si possono infatti incontrare solo dopo un numero di anni che sia multiplo di entrambi i cicli vitali. Se un parassita avesse un ciclo vitale di due anni, esso potrebbe incontrare la cicala solo ogni *26* o *34* anni, se avesse un ciclo vitale di tre anni, la potrebbe incontrare solo ogni *39* o *51* anni, e così via. Poiché un tale parassita non è mai stato trovato, si è formulata l'ipotesi che, a seguito dell'allungamento del ciclo vitale della cicala, esso si sia estinto…nell'attesa.

- Una delle pochissime **donne matematiche** della storia, la francese **Marie-Sophie Germain**, introdusse nell'Ottocento una particolare classe di numeri primi (ancor oggi chiamati ***primi di Germain***): ella voleva provare **l'Ultimo Teorema di Fermat** per gli esponenti di questo tipo. Si ignora se i primi di Germain siano infiniti.

Primi di Fermat
Primi di Mersenne
Primi gaussiani

I numeri primi fra 1 e 1500

601	611	621	**631**	**641**	651	**661**	671	681	**691**
602	612	622	632	642	652	662	672	682	692
603	**613**	623	633	**643**	**653**	663	**673**	**683**	693
604	614	624	634	644	654	664	674	684	694
605	615	625	635	645	655	665	675	685	695
606	616	626	636	646	656	666	676	686	696
607	**617**	627	637	**647**	657	667	**677**	687	697
608	618	628	638	648	658	668	678	688	698
609	**619**	629	639	649	**659**	669	679	689	699
610	620	630	640	650	660	670	680	690	700

701	711	721	731	741	**751**	**761**	771	781	791
702	712	722	732	742	752	762	772	782	792
703	713	723	**733**	**743**	753	763	**773**	783	793
704	714	724	734	744	754	764	774	784	794
705	715	725	735	745	755	765	775	785	795
706	716	726	736	746	756	766	776	786	796
707	717	**727**	737	747	**757**	767	777	**787**	**797**
708	718	728	738	748	758	768	778	788	798
709	**719**	729	**739**	749	759	**769**	779	789	799
710	720	730	740	750	760	770	780	790	800

801	**811**	**821**	831	841	851	861	871	**881**	891
802	812	822	832	842	852	862	872	882	892
803	813	**823**	833	843	**853**	**863**	873	**883**	893
804	814	824	834	844	854	864	874	884	894
805	815	825	835	845	855	865	875	885	895
806	816	826	836	846	856	866	876	886	896
807	817	**827**	837	847	**857**	867	**877**	**887**	897
808	818	828	838	848	858	868	878	888	898
809	819	**829**	**839**	849	**859**	869	879	889	899
810	820	830	840	850	860	870	880	890	900

901	**911**	921	931	**941**	951	961	**971**	981	**991**
902	912	922	932	942	952	962	972	982	992
903	913	923	933	943	**953**	963	973	**983**	993
904	914	924	934	944	954	964	974	984	994
905	915	925	935	945	955	965	975	985	995
906	916	926	936	946	956	966	976	986	996
907	917	927	**937**	**947**	957	**967**	**977**	987	**997**
908	918	928	938	948	958	968	978	988	998
909	**919**	**929**	939	949	959	969	979	989	999
910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000

1001	1011	**1021**	**1031**	1041	**1051**	**1061**	1071	1081	**1091**
1002	1012	1022	1032	1042	1052	1062	1072	1082	1092
1003	**1013**	1023	**1033**	1043	1053	**1063**	1073	1083	**1093**
1004	1014	1024	1034	1044	1054	1064	1074	1084	1094
1005	1015	1025	1035	1045	1055	1065	1075	1085	1095
1006	1016	1026	1036	1046	1056	1066	1076	1086	1096
1007	1017	1027	1037	1047	1057	1067	1077	**1087**	**1097**
1008	1018	1028	1038	1048	1058	1068	1078	1088	1098
1009	**1019**	1029	**1039**	**1049**	1059	**1069**	1979	1089	1099
1010	1020	1030	1040	1050	1060	1070	1080	1090	1100

1101	1111	1121	1131	1141	**1151**	1161	**1171**	**1181**	1191
1102	1112	1122	1132	1142	1152	1162	1172	1182	1192
1103	1113	**1123**	1133	1143	**1153**	**1163**	1173	1183	**1193**
1104	1114	1124	1134	1144	1154	1164	1174	1184	1194
1105	1115	1125	1135	1145	1155	1165	1175	1185	1195
1106	1116	1126	1136	1146	1156	1166	1176	1186	1196
1107	**1117**	1127	1137	1147	1157	1167	1177	**1187**	1197
1108	1118	1128	1138	1148	1158	1168	1178	1188	1198
1109	1119	**1129**	1139	1149	1159	1169	1179	1189	1199
1110	1120	1130	1140	1150	1160	1170	1180	1190	1200

1201	1211	1221	**1231**	1241	1251	1261	1271	1281	**1291**
1202	1212	1222	1232	1242	1252	1262	1272	1282	1292
1203	**1213**	**1223**	1233	1243	1253	1263	1273	**1283**	1293
1204	1214	1224	1334	1244	1254	1264	1274	1284	1294
1205	1215	1225	1235	1245	1255	1265	1275	1285	1295
1206	1216	1226	1236	1246	1256	1266	1276	1286	1296
1207	**1217**	1227	**1237**	1247	1257	1267	**1277**	1287	**1297**
1208	1218	1228	1238	1248	1258	1268	1278	1288	1298
1209	1219	**1229**	1239	**1249**	**1259**	1269	**1279**	**1289**	1299
1210	1220	1230	1240	1250	1260	1270	1280	1290	1300

1301	1311	**1321**	1331	1341	1351	**1361**	1371	**1381**	1391
1302	1312	1322	1332	1342	1352	1362	1372	1382	1392
1303	1313	1323	1333	1343	1353	1363	**1373**	1383	1393
1304	1314	1324	1334	1344	1354	1364	1374	1384	1394
1305	1315	1325	1335	1345	1355	1365	1375	1385	1395
1306	1316	1326	1336	1346	1356	1366	1376	1386	1396
1307	1317	**1327**	1337	1347	1357	**1367**	1377	1387	1397
1308	1318	1328	1338	1348	1358	1368	1378	1388	1398
1309	**1319**	1329	1339	1349	1359	1369	1379	1389	**1399**
1310	1320	1330	1340	1350	1360	1370	1380	1380	1400

1401	1411	1421	1431	1441	**1451**	1461	**1471**	**1481**	1491
1402	1412	1422	1432	1442	1452	1462	1472	1482	1492
1403	1413	**1423**	**1433**	1443	**1453**	1463	1473	**1483**	**1493**
1404	1414	1424	1434	1444	1454	1464	1474	1484	1494
1405	1415	1425	1435	1445	1455	1465	1475	1485	1495
1406	1416	1426	1436	1446	1456	1466	1476	1486	1496
1407	1417	**1427**	1437	**1447**	1457	1467	1477	**1487**	1497
1408	1418	1428	1438	1448	1458	1468	1478	1488	1498
1409	1419	**1429**	**1439**	1449	**1459**	1469	1479	**1489**	**1499**
1410	1420	1430	1440	1450	1460	1470	1480	1490	1500

Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

Questo teorema, noto anche come ***teorema di fattorizzazione***, fu scoperto e dimostrato dal matematico greco **Euclide**, che lo trattò nella sua opera monumentale, gli ***Elementi***, presentandolo come **Proposizione 31** del **Libro VII**. Parte di questo lavoro, che comprende ben 13 libri, è infatti dedicata all'aritmetica.
Alla base di questo risultato sta il concetto di **numero primo**: eccone l'enunciato in moderno linguaggio matematico.

Ogni numero intero diverso da 0,1,-1 si scrive come prodotto di numeri primi. I fattori che compaiono in questa decomposizione ("fattorizzazione") sono unici a meno di moltiplicazione per -1.

Esempio: Le fattorizzazioni di 30 sono le seguenti:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $30 = (-2) \cdot (-3) \cdot 5$ $30 = (-2) \cdot 3 \cdot (-5)$ $30 = 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$

Il crivello di Eratostene

Esiste un facile algoritmo, dovuto al matematico greco **Eratostene**, che a tutt'oggi è il procedimento più efficiente per stabilire se un dato numero intero è o no un **numero primo**.

Si considera la successione dei numeri naturali compresi fra *2* ed il numero assegnato; supponiamo, per esempio, che il numero sia *23*:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Il passo successivo consiste nel cancellare tutti i multipli di *2:*

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Quindi si cancellano, fra i restanti numeri, tutti i multipli di *3*:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Si procede iterando l'operazione di cancellazione, tenendo presente che:

- al passo *n-esimo* il primo dei numeri non cancellati è l'*n*-esimo numero primo;
- al passo successivo si cancellano, tra i numeri restanti, tutti quelli che sono multipli di questo numero primo.

Il crivello di Eratostene fornisce dunque, dopo *n* passi, i primi *n* numeri primi. Dopo il passo *n*-esimo, tutti i numeri minori o uguali a n^2 che sono rimasti sicuramente saranno primi: infatti, se fossero composti, essi sarebbero multipli di un numero minore o uguale a *n,* e quindi sarebbero stati cancellati. Il numero di passi necessari a stabilire se un dato numero *N* è primo è quindi minore o uguale a $\sqrt{N}$.
Nel nostro esempio $\sqrt{N} = \sqrt{23} \approx 4{,}79$, e vediamo che dopo il terzo passo sono stati cancellati tutti i numeri minori o uguali a *4,79* ossia tutti i numeri minori di *5*. Quindi possiamo concludere che *23* è primo dopo *3* passi soltanto.

Il **teorema fondamentale dell'aritmetica** stabilisce che ogni numero *N* può essere decomposto nel prodotto di numeri primi. Il crivello di Eratostene è il migliore metodo conosciuto per trovarli. Quando *N* è molto grande, il numero di passi necessari è anch'esso molto grande.

Per decomporre un numero a 20 cifre con un macchina capace di effettuare un passo dell'algoritmo ogni secondo, occorrerebbero alcune migliaia di anni.

La difficoltà di trovare la fattorizzazione di un numero è sfruttata in **crittografia**, ossia per la cifratura dei messaggi. Negli anni settanta, tre ricercatori del Massachussets Institute of Technology hanno sviluppato un particolare tipo di cifratura numerica, per decrittare la quale è necessario conoscere la fattorizzazione di numeri interi molto grandi.

I primi di Mersenne

Definizione Si dice *primo di* **Mersenne** ogni **numero primo** avente la forma

$$M_k = 2^k - 1,$$

dove k è un numero intero maggiore di 1.

Ad esempio $M_2 = 3$ e $M_3 = 7$ sono primi di Mersenne, mentre non è primo $M_4 = 2^4 - 1 = 15$. È facile dimostrare che, se M_k è primo, allora k deve essere primo. I successivi primi di Mersenne sono $M_5 = 31$ e $M_7 = 127$. Originariamente si pensava che M_k fosse primo per ogni valore di k primo. Ma ciò risultò essere falso: nel 1536 **Hudalricus Regius** si accorse infatti che $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$ non è primo. Questo è solo l'inizio di una lunghissima serie di controesempi: a tutt'oggi, nonostante l'impiego di potenti calcolatori, sono stati trovati solo 39 primi di Mersenne, che riportiamo in **tabella**. A titolo di curiosità, ricordiamo che ci sono voluti tre secoli per confutare la convinzione di Mersenne secondo cui M_{67} doveva essere primo: solo nel 1903, in una sorprendente conferenza presso la American Mathematical Society, Frank Nelson Cole scrisse alla lavagna la decomposizione

$$2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287.$$

Applicazioni

1 Da anni è in corso la gara a chi trova il numero primo più grande. Ecco l'elenco dei **top ten** aggiornato al 14 novembre 2001. L'attuale primato è detenuto da un ricercatore americano appena ventenne. Osservate che i primi cinque numeri in classifica sono primi di Mersenne. In effetti, la ricerca di numeri primi di questo tipo è agevolata da un criterio detto *test di Lucas-Lehmer.*

2 I primi di Mersenne sono legati ai **numeri perfetti**.

Definizione Si chiama *numero perfetto* ogni numero intero positivo che è somma dei suoi divisori positivi.

Il più piccolo numero perfetto è 6. Per trovare tutti i numeri perfetti pari

si utilizza il seguente teorema, dimostrato da **Euclide** e da **Eulero**.

Il numero n è pari e perfetto se e solo se si può scrivere:

$$n = M_k \cdot 2^{k-1},$$

per qualche k>1, ove M_k è un primo di Mersenne.

Ad ogni primo di Mersenne corrisponde dunque un numero perfetto pari P_k.

k	M_k	P_k
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8128

Naturalmente, anche i numeri perfetti pari noti sono solo *39.*

Fin dall'antichità si sa che i numeri primi sono infiniti (**dimostrazione**). Ma non si conosce la risposta al seguente:

Problema irrisolto: Esistono infiniti primi di Mersenne?

La tabella dei primi di Mersenne

Ecco l'elenco degli unici 38 **primi di Mersenne** noti a tutt'oggi, e dei relativi numeri perfetti.

k	Numero di cifre di M_k	Numero di cifre di P_k	Anno
2	*1*	*1*	
3	*1*	*2*	
5	*2*	*3*	
7	*3*	*4*	
13	*4*	*8*	1456
17	*6*	*10*	1588
19	*6*	*12*	1588
31	*10*	*19*	1772
61	*19*	*37*	1883
89	*27*	*54*	1911
107	*33*	*65*	1914
127	*39*	*77*	1876
521	*157*	*314*	1952
607	*183*	*366*	1952
1279	*386*	*770*	1952
2203	*664*	*1327*	1952
2281	*687*	*1373*	1952
3217	*969*	*1937*	1957
4253	*1281*	*2561*	1961
4423	*1332*	*2663*	1961
9689	*2917*	*5834*	1963
9941	*2993*	*5985*	1963
11213	*3376*	*6751*	1963
19937	*6002*	*12003*	1971
21701	*6533*	*13066*	1978
23209	*6987*	*13973*	1979
44497	*13395*	*26790*	1979
86243	*25962*	*51924*	1982
110503	*33265*	*66530*	1988
132049	*39751*	*79502*	1983
216091	*65050*	*130100*	1985
756839	*227832*	*455663*	1992
859433	*258716*	*517430*	1994
1257787	*378632*	*757263*	1996
1398269	*420921*	*841842*	1996
2976221	*895932*	*1791864*	1997

3021377	*909526*	*1819050*	1998
6972593	*2098960*	*4197919*	1999
13466917	*4053946*		2001

La fonte è il sito WEB della *University of Tennessee at Martin*, Stati Uniti:

http://www.utm.edu/research/primes/largest.html

Nella stessa pagina INTERNET si trova anche la classifica delle dieci più grandi coppie di **numeri primi gemelli**.

I primi di Fermat

Secondo una congettura formulata da **Fermat**, tutti i numeri della forma:

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

dove k è un intero non negativo, sarebbero primi. Diamo i primi valori di F_k:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$
$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$
$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$
$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

I numeri da F_0 a F_4 sono effettivamente primi, mentre non lo è F_5: ciò fu scoperto da **Eulero**, che nel 1732 trovò la seguente decomposizione:

$$4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Questo basta a dimostrare che la congettura di Fermat è falsa. È comunque proseguita, nel corso degli anni, la caccia ad altri numeri primi della forma F_k, che hanno preso il nome di ***primi di Fermat***.
Landry, nel 1880, provò che F_6 non è primo, e, nel 1905, **Moorehead** stabilì che neanche F_7 è primo. **Brillhart** e **Morrison**, nel 1970, trovarono per questo numero la seguente decomposizione non banale:

$$F_7 = 2^{2^7} + 1 = 340282366920938463463374607431768211457 =$$
$$59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721$$

Impiegando potenti calcolatori elettronici si è potuto dimostrare che F_k non è primo per nessuno dei valori $5 \leq k \leq 30$ e per molti altri valori: nel 1999 è stato dimostrato che

$$F_{382447} = 2^{2^{382447}} + 1$$

non è primo, in quanto è divisibile per $3 \cdot 2^{382449} + 1$.
Secondo una congettura formulata nell'Ottocento dal matematico tedesco **Eisenstein**, i valori di k per i quali F_k è primo potrebbero essere cercati tra quelli del tipo

$$2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ 2^{2^{2^2}},\ \ldots..$$

Da alcuni anni sappiamo che F_{16} e F_{256} non sono primi, ma la questione è ancora aperta per gli altri valori.

Fino ad oggi non sono stati trovati altri primi di Fermat, oltre a F_0, F_1, F_2, F_3 e F_4 : ciò dimostra quanto la congettura di Fermat fosse lontana dalla realtà! D'altra parte ai suoi tempi non esistevano ancora macchine capaci di eseguire calcoli con numeri grandi come F_5 .

I primi di Fermat entrano in gioco nel **criterio**, trovato da **Gauss**, che stabilisce quali poligoni regolari possano essere costruiti con riga e compasso.

I numeri primi

La "top ten" dei numeri primi

Da anni è in corso una gara fra matematici, che impiegano potenti calcolatori ed algoritmi avanzati per trovare **numeri primi** sempre più grandi. Questi vengono solitamente cercati tra i **primi di Mersenne**, per i quali esistono criteri di facile applicazione, come il *test di Lucas-Lehmer.*

Il sito WEB della *University of Tennessee at Martin* contiene una pagina di aggiornamento sullo stato di avanzamento delle ricerche:

http://www.utm.edu/research/primes/notes/

Ecco la classifica dei dieci numeri primi più grandi, aggiornata al 2001:

Numero primo	Numero di cifre	Anno della scoperta
$2^{13466917} - 1$	*4053946*	2001
$2^{6972593} - 1$	*2098960*	1999
$2^{3021377} - 1$	*909526*	1998
$2^{2976221} - 1$	*895932*	1997
$2^{1398269} - 1$	*420921*	1996
$843832^{65536} + 1$	*388384*	2001
$2^{1257787} - 1$	*378632*	1996
$108368^{65536} + 1$	*329968*	2001
$48594^{65536} + 1$	*307140*	2000
$3 \cdot 2^{916773} + 1$	*275977*	2001

I primi cinque numeri in classifica sono primi di Mersenne.

La "top ten" dei primi gemelli

Due **numeri primi** consecutivi – ossia aventi differenza *2* – si dicono ***primi gemelli***. Si ignora se esistano infinite coppie di primi gemelli, quindi è aperta la gara a chi trova i primi gemelli più grandi. Di record in record si è giunti a compilare la seguente classifica delle dieci coppie più grandi finora trovate:

Primi gemelli	Numero di cifre	Anno della scoperta
$318032361 \cdot 2^{107001} \pm 1$	*32220*	2001
$1807318575 \cdot 2^{98305} \pm 1$	*29603*	2001
$665551035 \cdot 2^{80025} \pm 1$	*24099*	2000
$781134345 \cdot 2^{66445} \pm 1$	*20011*	2001
$1693965 \cdot 2^{66443} \pm 1$	*20008*	2000
$83475759 \cdot 2^{64955} \pm 1$	*19562*	2000
$291889803 \cdot 2^{60090} \pm 1$	*18098*	2001
$4648619711505 \cdot 2^{60000} \pm 1$	*18075*	2000
$2409110779845 \cdot 2^{60000} \pm 1$	*18075*	2000
$2230907354445 \cdot 2^{48000} \pm 1$	*14462*	1999

La fonte è il sito WEB della *University of Tennessee at Martin,* Stati Uniti:

http://www.utm.edu/research/primes/largest.html

Nella stessa pagina INTERNET si trova anche la **"top ten" dei numeri primi**.

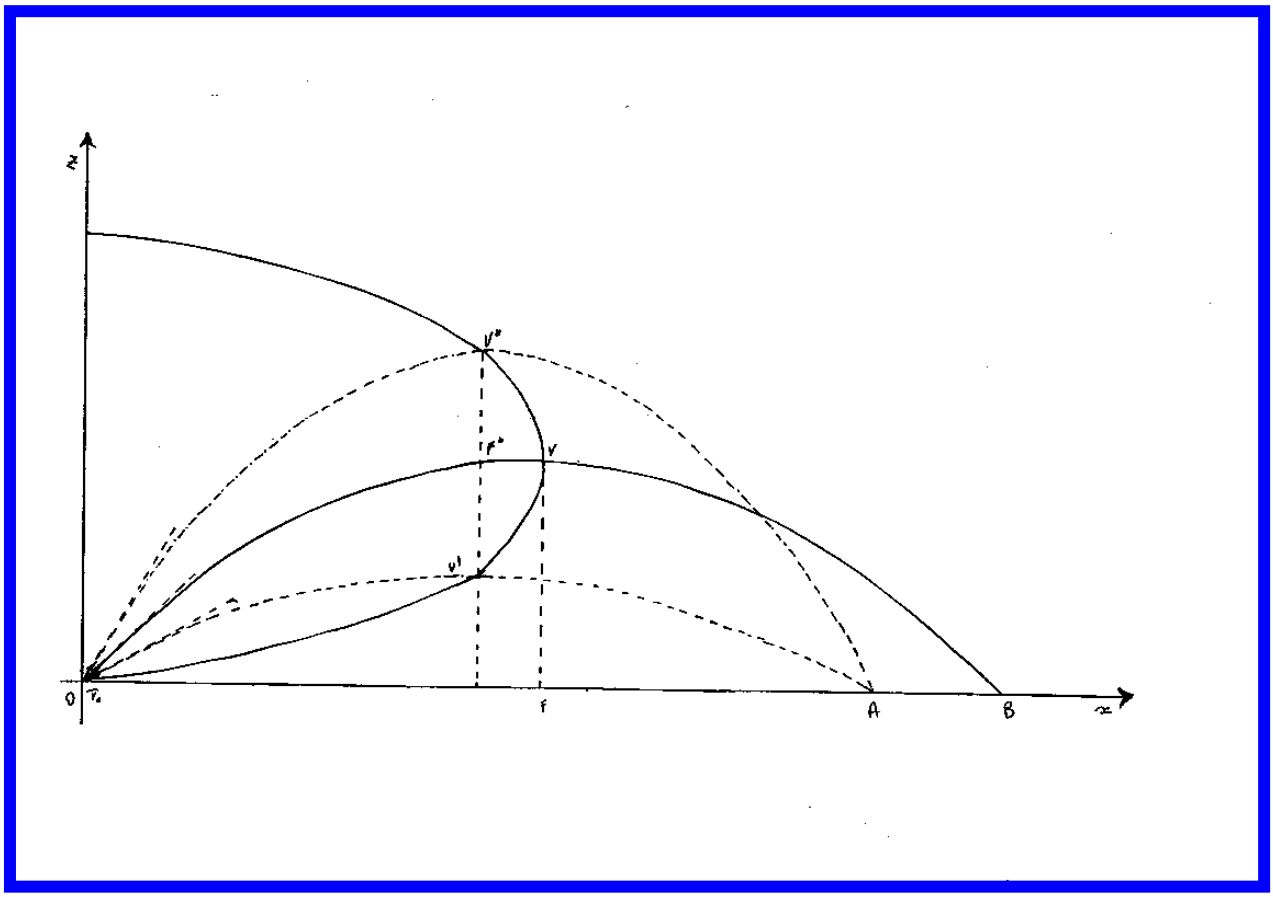
Marin Mersenne
nato l'8 settembre 1588 a Oizé (Francia)
morto il 1 settembre 1648 a Parigi (Francia)



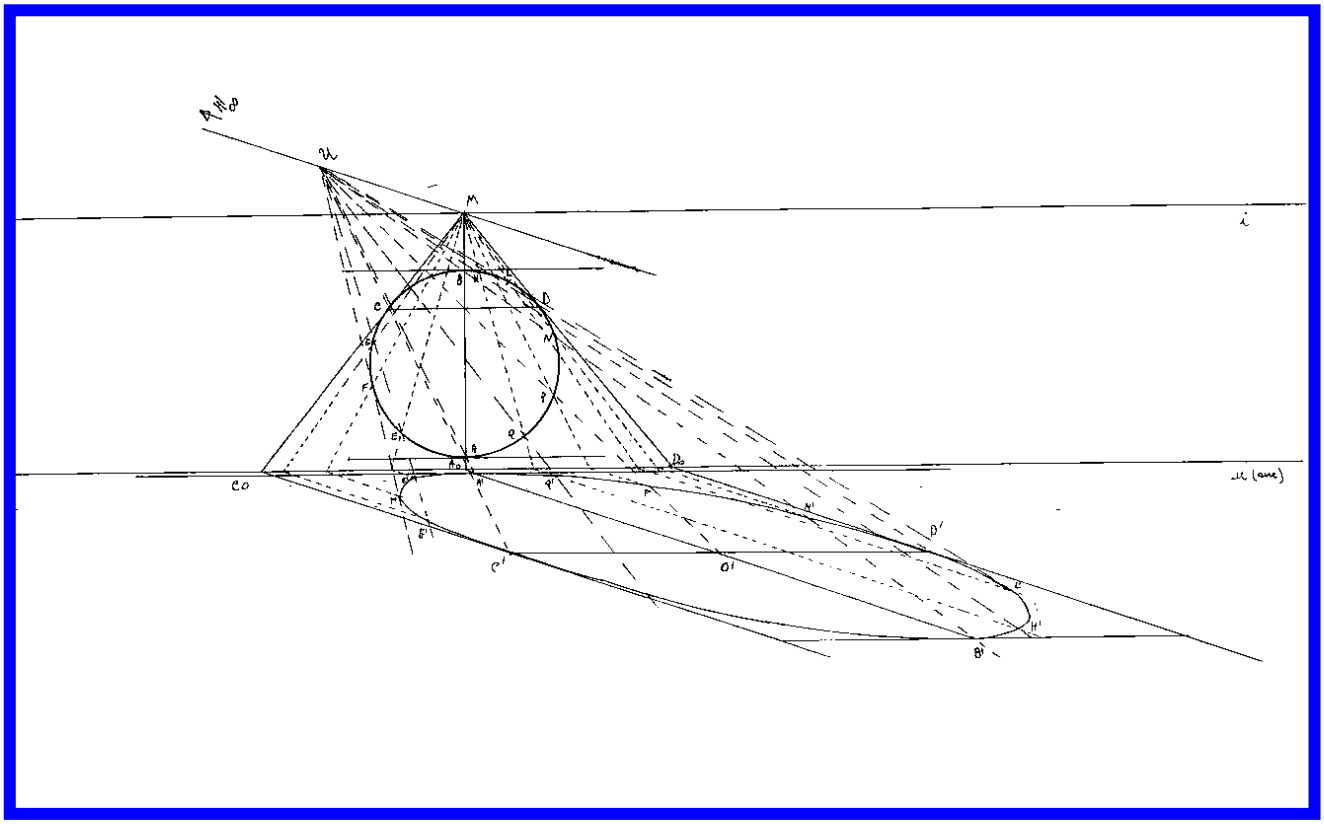
Frate dell'ordine dei Minimi, fondato da San Francesco da Paola, si occupò di filosofia, matematica e fisica. Fu il principale animatore di un circolo scientifico, chiamato *Académie de Mersenne,* con sede a Parigi, che ebbe tra i suoi membri **Cartesio**, **Fermat**, ed il giovane **Pascal**. Questo circolo, fondato nel 1630, venne trasformato, nel 1666, per volere di Luigi XIV, nell'*Académie Royale des Sciences,* ed ottenne, da allora, regolari finanziamenti dal re. Mersenne fu in contatto, oltre che con i suoi amici francesi, con **Torricelli** e **Galileo**. Grazie ad un assiduo carteggio contribuì ad influenzare e diffondere le opere di tutti questi grandi scienziati.
Di Mersenne si ricordano soprattutto gli studi compiuti sui **numeri primi** della forma 2^p-1 (ove p è un numero primo), che da lui hanno preso il nome. A lui si devono anche importanti osservazioni sulla natura di alcune curve, come, ad esempio, la **cicloide** e la **spirale logaritmica**.
Le sue principali opere sono ***Synopsis Mathematica*** (1626), ***Cogitata Physico-Mathematica*** (1644) e ***L'Harmonie Universelle*** (1636): questi ultimi due trattati riguardano vari argomenti di meccanica, come la vibrazione delle corde, la resistenza dei solidi e il moto dei fluidi.

Cartesio scrive a Mersenne a proposito di Fermat
Cartesio scrive a Mersenne sulla lingua universale

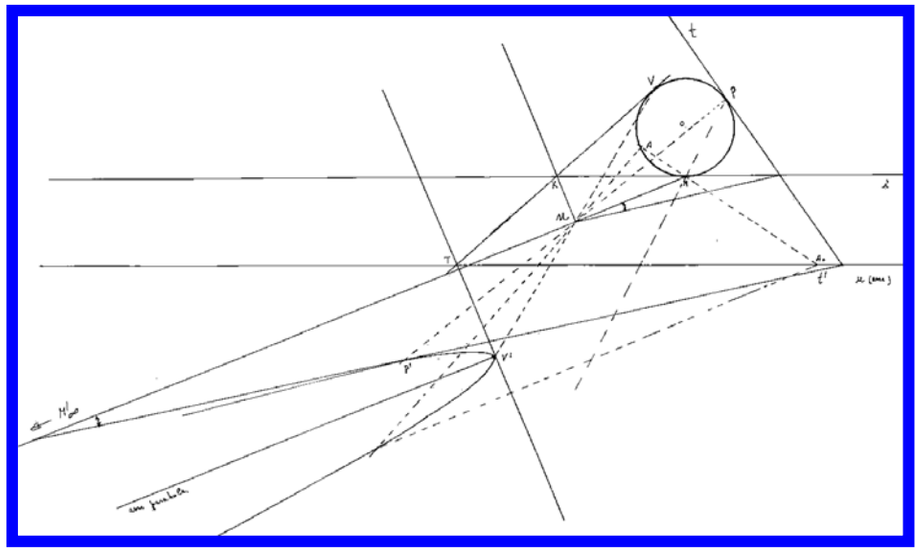
Ellisse luogo dei vertici delle parabole di tiro



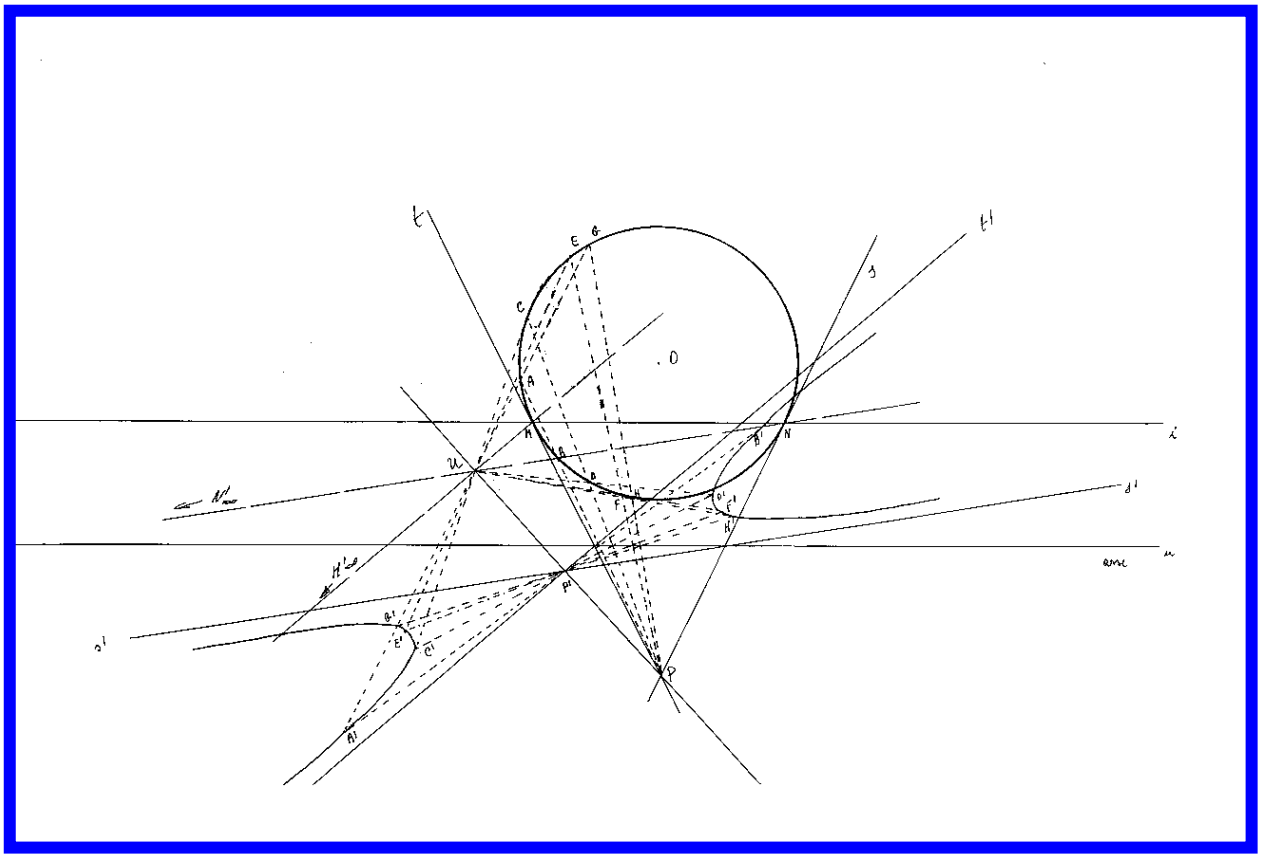
Data una omologia Ω(u,*U*,i) determinare la figura omologa di una circonferenza esterna alla retta limite



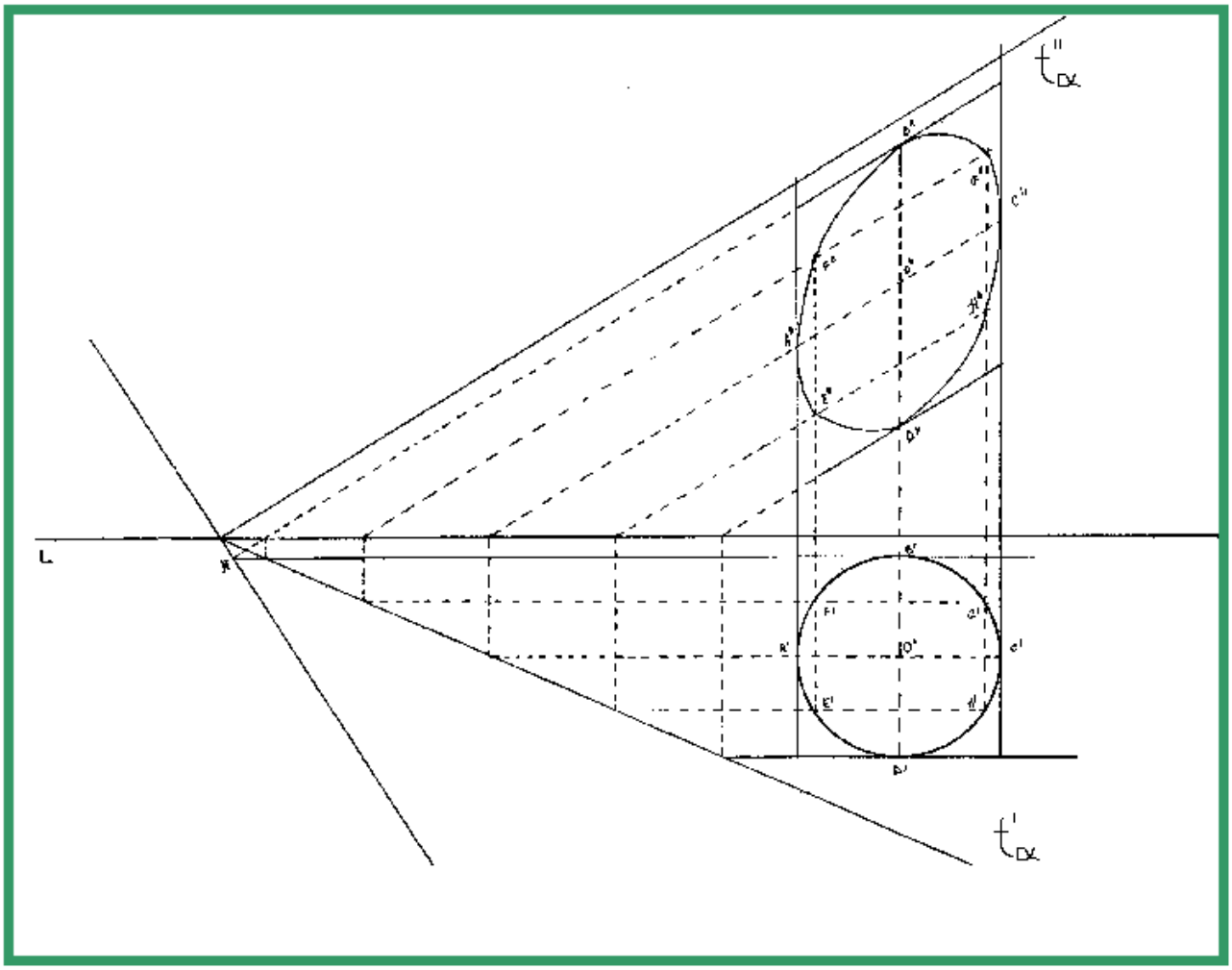
Individuata l'omologia Ω(u,U,i), determinare la figura omologa di una circonferenza tangente la retta limite



Data una omologia Ω(u,*U*,i) determinare la figura omologa di una circonferenza secante la retta limite



Disegnare la seconda proiezione γ'' di una ellisse γ di cui si conoscano il piano α (t'_α , t''_α) e la proiezione γ' coincidente con una circonferenza



Matematica e Psicologia

C.H. Coombs, R.M. Dawes, A. Tversky
Introduzione alla psicologia matematica
Trad. di G. Cioffi e M. Bagassi
Franco Angeli, Milano 1980

In questo testo vengono proposti vari modelli matematici per lo studio del comportamento umano.
Vi viene discussa, tra l'altro, la nozione di *probabilità soggettiva*: è la personale valutazione che un singolo individuo dà sulla probabilità che un certo evento si verifichi. In assenza di dati concreti (*probabilità* oggettiva) egli basa proprio su quella le proprie decisioni. Alcuni studiosi hanno proposto **formule** per calcolarla.

Il calcolo delle probabilità

La probabilità soggettiva

"L'ultimo metodo di analisi di preferenze specifiche fra scelte in condizioni di rischio è quello che emerge dalla teoria della motivazione al successo (Atkinson 1964). Questa teoria, che proviene dalla tradizione di Lewin-Tolman, cerca di spiegare le decisioni prese in situazioni in cui una persona avverte che il risultato di un comportamento rischioso dipende (in parte) dalla sua abilità. Secondo la teoria il comportamento in tali situazioni è determinato dalla motivazione a conseguire il successo (M_s), dalla motivazione ad evitare l'insuccesso (M_{af}), dai valori di incentivo a conseguire il successo e ad evitare l'insuccesso (I_s e I_{af}) e dalla probabilità soggettiva di successo (P_s). Secondo la teoria, la relazione che intercorre tra queste cinque variabili è espressa dall'equazione

$$T(G) = P_s(M_s I_s) + (1 - P_s)(M_{af} I_{af}),$$

in cui T(G) è la motivazione risultante dall'azione G, o la forza della sua tendenza alla risposta. Si noti che se noi definiamo l'utilità del successo e dell'insuccesso (U_s e U_{af}) con le espressioni

$$U_s = M_s I_s \quad e \quad U_{af} = -(M_{af} I_{af}),$$

allora T(G) si riduce all'utilità attesa soggettiva di G.
Atkinson, comunque, formula gli assunti critici che l'incentivo al successo si misuri con il complemento della probabilità di successo e che l'incentivo ad evitare l'insuccesso si misuri con il negativo della probabilità di successo; in simboli, $I_s = 1 - P_s$ e $I_{af} = -P_s$."

La probabilità soggettiva è passibile di revisione: mano a mano che la situazione si evolve, l'individuo acquisisce elementi oggettivi che lo inducono a correggere la propria valutazione. Questa correzione avviene secondo la nota legge matematica della ***probabilità condizionata***.

> *"Si supponga che una persona creda, prima dell'apertura del campionato di pallacanestro, che la probabilità dei Celtics di Boston di vincere il campionato NBA sia di 2 a 1. In che modo si modificherebbe questo pronostico, se accadesse che i Celtics vincessero (o perdessero) le loro prime quattro gare? In quest'ultimo sottoparagrafo discuteremo, appunto, il problema di come le persone*

modifichino le loro probabilità soggettive alla luce di nuove informazioni. Questo problema rappresenta una parte di ciò che potrebbe essere definito il processo predecisionale, piuttosto che il processo decisionale in se stesso. Ad ogni modo, poiché la percezione e la modificazione delle probabilità soggettive sono strettamente legate a decisioni in condizioni di rischio, esse saranno discusse in questo paragrafo dopo aver passato in rassegna alcuni degli aspetti matematici relativi.

Come è illustrato in appendice, la probabilità condizionale (leggi: condizionata) *che possa verificarsi l'evento A dato l'evento B, è definita dalla formula*

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad per \qquad p(B) \neq 0.$$

Di conseguenza

$$p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(A \mid B)\, p(B)$$

e

$$p(B \mid A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \mid B)\, p(B)}{p(A)} \qquad per \qquad p(A) \neq 0.$$

Questa equazione è definita come il ***teorema di Bayes*** *o la regola di Bayes, dal reverendo Thomas Bayes. La sua formula, che rappresenta una conseguenza diretta della definizione di probabilità condizionale, fornisce una valida procedura matematica per la revisione delle probabilità; quindi, se A indica l'evento che i Celtics vinceranno il campionato NBA e B indica l'evento che i Celtics perderanno i loro primi quattro incontri, allora la nuova probabilità $p(A \mid B)$ che i Celtics vincano il campionato, posto che abbiano perso i loro primi quattro incontri, può essere calcolata con la formula di Bayes, noti $p(B \mid A)$ e $p(B)$."*

Matematica e Meccanica

Vincenzo Riccati
De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium - Commentarius
Bononiae, 1751

(*Dell'uso del moto traslatorio nella costruzione delle equazioni differenziali - Commentario*
Bologna, 1751)

Questo libro, interamente scritto in latino, è dedicato allo studio matematico del moto con gli strumenti del **Calcolo Infinitesimale**, più precisamente, mediante le **equazioni differenziali**. Si riportano il **frontespizio**, la prima pagina della **prefazione** e le **prime tre pagine del Caput I**. Qui l'autore introduce il problema di trovare la traiettoria di un corpo che si muove secondo una certa equazione differenziale che, per lungo tempo, era rimasta irrisolta, poiché essa non poteva essere trattata con l'usuale *metodo di separazione delle variabili:* questo è basato su un semplice calcolo di **integrale**. Fu **Eulero**, nel 1742, il primo a darne la soluzione. L'esposizione del Riccati è tratta dal suo carteggio con **Maria Gaetana Agnesi**, che egli cita definendola *"fœmina doctissima, et in analyticis rebus versatissima".*

Molte curve famose nascono come soluzioni di equazioni differenziali esprimenti una data situazione fisica: tra queste ricordiamo la **cicloide**, la **catenaria** e la **trattrice**.

VINCENTII RICCATI

SOC. JESU PRÆSBITERI

DE USU

MOTUS TRACTORII

In conſtructione

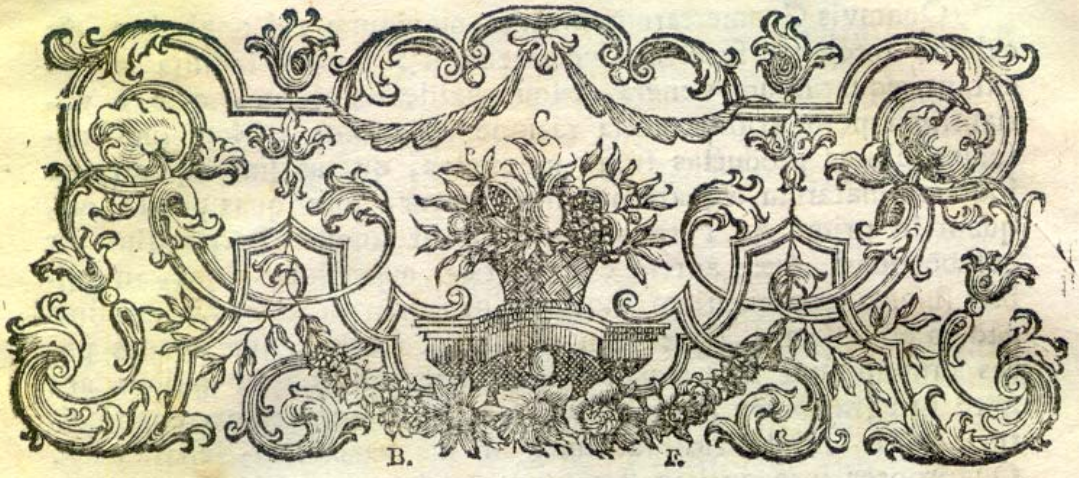
ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM

Commentarius.



BONONIÆ

Ex Typographia Lælii a Vulpe. (MDCCLII)
Superiorum facultate.



PRÆFATIO.

STatim ac acutiſſimi Analyſtæ, qui in Europa quinquaginta ante annos florebant, in perficiendo calculo integrali operam collocarunt, probe cognoverunt, omnes æquationes differentiales, in quibus per opportuna analyſeos auxilia ſeparantur indeterminatæ, aut ad integrationem perduci, ſi fieri poſſit, aut certe poſitis curvarum rectificationibus, & quadraturis conſtructione donari. Quamobrem in illud ſedulo incubuerunt, ut in illis æquationibus, in quibus liceret (neque enim ſperandum erat in omnibus) hujuſce ſeparationis obtinendæ methodos aperirent. Hac in re multa, eaque perutilia præſtiterunt Bernoullii, Hermannus, Gabriel Manfredius, Jacobus Riccatus Pater meus, aliique viri ingenio, ac doctrina præſtantes. Ipſe quoque abhinc triennium in altero Ac. Bon. Tomo methodum exhibui, per quam ſeparatio indeterminatarum perficitur in formulis illis, in quibus indeterminatæ duæ linearem tantum obtinent dimenſionem, neque ducuntur in ſe invicem: tametſi earum differentialia ad quamcumque poteſtatem aſcendant, & quomodocumque fuerint inter ſeſe multiplicata.

Caput Primum

Quænam æquationes conſtrui poſſint ope tractoriæ præditæ tangente conſtante, methodo directa inveſtigatur.

Quoniam in formula $T^2\,dt = p^2\,dt + dp$, ſi caſus paucos excipias, nullo artificio potuerunt Analyſtæ ſeparare indeterminatas, adeo celebris facta eſt, ut hoſpes videatur eſſe in hoc ſtudiorum genere, qui eam ignoret. Hujuſce autem formulæ œcumenicam conſtructionem invenit Leonardus Eulerus Geometra in primis clarus, quemadmodum cognovi ex Clairaut viro maximo, qui in opuſculo edito in monumentis Ac. Reg. Pariſ. anni 1742 ita ſcribit. *Eulerus ſolus, quantum mihi conſtat, ejus formulæ conſtructionem invenit, quæ tametſi non eſt comparanda cum illis, quæ oriuntur facta ſeparatione indeterminatarum; tamen Auctoris ingenio, doctrinæque reſpondet. Eam autem (Geometris enim vix nota eſt) juvabit hic exponere.*

Deſcripta ſit curva AB (*Fig.* 1) *cujus abſciſſæ* KG *ſint* $= 2a\int T\,dt$, *& ordinatæ* $GE = a\,l\frac{1}{T}$; *a eſt conſtans pro libito accepta. Filo* $EF = a$ *deſcribatur curva* CD *tractoria curvæ* AB. *Si externus angulus* GEQ *bifariam dividatur recta* ER, *ordinata p curvæ quæſitæ erit* $= \frac{GR}{GE}$. T. Hactenus Clairaut.

Captus novitate conſtructionis cupide demonſtrationem quæſivi, eamque quum facili negotio brevique tempore reperiſſem, cum Cajetana Maria Agneſia fœmina doctiſſima, & in analyticis rebus verſatiſſima communicavi. Quæ in ea epiſtola continentur hic neceſſario exponenda ſunt, mutatis tamen quibuſdam, adjectiſque.

Deſcripta intelligatur curva AB (*Fig.* 1, 2, 3, 4,) cujus æquatio data ſit inter coordinatas $KG = x$, $GE = y$. Hanc vero curvam tractoriæ baſim deinceps nominabo. Primum adverto ex hac curva quatuor tractorias oriri. Etenim conſtituto filo EF ad eam partem, ubi axis poſitus eſt, ſi motus fiat ab A in B deſcribitur tractoria figuræ primæ; ſi motus a B verſus A diriga-

ſive formata æquatione, translatiſque terminis

$\overset{+}{=}\int qdx \overset{=}{+} abqD\frac{1}{\sqrt{bb+qq}} = by \overset{=}{+}\frac{abq}{\sqrt{bb+qq}}$, & ſumptis differentiis $\overset{+}{=} qdx \overset{=}{+} abqD\frac{1}{\sqrt{bb+qq}} = bdy \overset{=}{+}\frac{abdq}{\sqrt{bb+qq}} \overset{=}{+} abqD\frac{1}{\sqrt{bb+qq}}$, & deletis delendis $\overset{+}{=} qdx = bdy \overset{=}{+}\frac{abdq}{\sqrt{bb+qq}}$, ſive (*p.*^{mo} *a*) $\frac{abdq}{\sqrt{bb+qq}} \overset{+}{=} qdx = \overset{+}{=} bdy$.

Methodus hujuſce æquationis inveniendæ palam facit, eam ſemper conſtrui poſſe, ſi detur y per x, tametſi indeterminatæ non ſeparentur. Conſtructio vero eſt hujuſmodi. Deſcripta curva AB, cujus abſciſſæ KG $= x$, ordinatæ GE $= y$, eademque tamquam baſi accepta delineetur ejus tractoria CD, cujus tangens EF $= a$. Abſcinde GM $= b$, & age MN parallelam FE, quæ concurrat cum GE in N: punctum N erit in curva quæſita, & recta GN æquabit ordinatam $= q$. Dixi punctum N eſſe in curva quæſita: quod veriſſimum eſt, ſi x ſit ejus abſciſſa. Verum ſi abſciſſa foret alia indeterminata ex cauſ. s, per quam x data eſſet, tum ex data KG $= x$ invenienda eſſet abſciſſa $= s$, eique aptanda tamquam ordinata recta GN $= q$, ut determinaretur curva quæſita coordinatarum s, q.

Ordo ſignorum comparatus cum ordine figurarum indicat, quænam ex quatuor tractoriis uſurpanda ſit ad conſtruendam æquationem. Hoc ſolum adverte, in ſingulis caſibus infinitas tractorias exiſtere, quæ dependent a prima fili poſitione, atque ex illis infinitas curvas oriri æquationi ſatisfacientes. Verum ſicuti problematis peculiaris natura determinat conſtantem addendam in integratione; ita patefaciet, quo pacto ſit filum primo conſtituendum, ut deſcribatur tractoria ad conſtructionem perducens.

Ne in peculiari æquatione difficultas ſuboriatur, aliquod exemplum videtur eſſe proponendum. Itaque ſit conſtruenda æquatio $\frac{bgdq}{\sqrt{bb+qq}} + \frac{qds\sqrt{f}}{\sqrt{s}} = -sds$. Si hæc æquatio cum œcumenica æquatione conferatur, videbimus ea ſigna valere,

rigatur, producitur tractoria figuræ alterius: ſimiliter poſito filo EF poſt axem, & curvam a figuris tertia, & quarta deſignabuntur tractoriæ, prima quum motus ab A in B, altera quum motus a B in A dirigitur. Ut caſus omnes ſimul complectar, in illis, in quibus quatuor tractoriæ non conveniunt, quatuor ſigna ſcribam, quorum ordo figurarum numero reſpondebit

Curiosità

Paolo Ruffini
Opere matematiche
Tomo Primo - Teoria generale delle equazioni
Palermo, 1915

Il *Discorso Preliminare* dell'autore si apre con una riflessione su quello che egli considera il principale risultato della sua opera *"La soluzione algebraica* (leggi: per radicali) *delle equazioni generali di grado superiore al quarto è sempre impossibile. Ecco un teorema troppo importante nelle Matematiche, che io credo, se pur non erro, di poter asserire, e di cui la dimostrazione quella si è, che principalmente mi ha spinto alla pubblicazione del presente volume.*
L'immortale ***La Grange*** *con le sublimi sue riflessioni intorno alle equazioni, inserite negli Atti dell'Accademia di Berlino, ha somministrato il fondamento alla mia dimostrazione..."*

Questo enunciato, che pose fine ad una ricerca durata secoli, fu dimostrato, in maniera indipendente, anche dal giovane matematico norvegese **Niels Henrik Abel**, e generalizzato da **Galois**.

Al **Capo II**, dedicato alle **Proprietà generali delle equazioni**, viene più volte utilizzato il Teorema che da Ruffini prende il nome:

Un polinomio nell'indeterminata X a coefficienti in un campo K ha una radice α in K se se solo se è divisibile per il polinomio X – α.

La divisione di due polinomi può essere realizzata mediante un algoritmo di facile implementazione: si confrontino i calcoli di Ruffini con la **versione informatica** dello stesso teorema, tratta da un **moderno testo per le scuole**.

Il Teorema nella versione originale

CAPO II.

PROPRIETÀ GENERALI DELLE EQUAZIONI.

---

17. Sappiamo già dall'Algebra cosa intender si debba col nome di equazione algebraica determinata, e quali siano quelle quantità che diconsi sue radici.

Venga ora proposta con l'incognita x una simile equazione, e sia questa per esempio la

$$\frac{a\,x^4}{m} - \frac{b\,x^3}{n} - c\,x + \frac{d\,x^2}{p} + f = \frac{g\,x^4}{p} - \frac{e\,x^3}{m\,n} + g\,x + \frac{h}{n\,p}\,.$$

Tolte in essa le frazioni, trasporto tutti i suoi termini nel primo membro, e venendone

$$(anp - gmn)x^4 + (ep - bmp)x^3 + dmnx^2 - (cmnp + gmnp)x + (fmnp - hm) = 0,$$

$$\begin{aligned} (a\,n\,p - g\,m\,n) &= F,\\ (e\,p - b\,m\,p) &= G,\\ d\,m\,n &= H,\\ -(c\,m\,n\,p + g\,m\,n\,p) &= I,\\ (f\,m\,n\,p - h\,m) &= K, \end{aligned}$$

avremo da ciò l'equazione

$$F\,x^4 + G\,x^3 + H\,x^2 + I\,x + K = 0,$$

la quale altro non è che la proposta avente tutti i suoi termini intieri, ordinati, e collocati nel primo membro. Ora ciò che si è detto della precedente equazione di quarto grado, dicesi egualmente di una qualsivoglia equazione algebraica di un grado m, rappresentando m un numero intiero e positivo qualunque. Dunque una tale equazione potrà sempre ridursi nel modo istesso alla forma

$$(C) \qquad F\,x^m + G\,x^{m-1} + H\,x^{m-2} + I\,x^{m-3} + \cdots + Z = 0,$$

ove i coefficienti F, G, H, ... sono tutti numeri intieri. Dividiamo presentemente questa per F, e avutone il risultato

$$x^m + \frac{G}{F}x^{m-1} + \frac{H}{F}x^{m-2} + \frac{I}{F}x^{m-3} + \cdots + \frac{Z}{F} = 0,$$

supponiamo

$$\frac{G}{F} = A, \quad \frac{H}{F} = B, \quad \frac{I}{F} = C, \ \ldots, \ \frac{Z}{F} = V;$$

sostituisco, e ne verrà l'equazione

$$(D)\quad x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots+Lx^{m-(k-1)}+Mx^{m-k}+\cdots+Rx^3+Sx^2+Tx+V=0,$$

chiamati V, Tx, Sx^2, ... gli ultimi suoi termini, ed espresso per Mx^{m-k} un qualunque termine di essa, e per $Lx^{m-(k-1)}$ quello che a questo precede. Essa non sarà altro che la (C) medesima; ma sì l'una che l'altra di queste equazioni deriva da una qualsivoglia equazione algebraica determinata di un grado qualunque; dunque sì all'una che all'altra potrà darsi il nome di *equazione algebraica determinata generale;* e da entrambe egualmente, attribuendo all'esponente m ed ai coefficienti gli opportuni valori, potremo ricavare le diverse particolari equazioni algebraiche determinate, avvertendo che i coefficienti della prima si possono bensì supporre sempre tanti numeri intieri, ma non già così quelli della seconda.

18. Poichè possono esistere diverse radici di una equazione data, ossia diverse quantità reali, od immaginarie, le quali poste in essa in luogo della x la facciano verificare, supponiamo di rappresentare con le lettere α, β, γ, δ, η, ..., ω le radici tutte della (C); cosicchè fuori di esse non abbiavi alcun'altra quantità capace di rendere zero, con la sostituzione, il primo membro di questa equazione. Ciò presupposto, prendiamo il primo membro della (C), senza farlo uguale allo zero, e chiamatolo Y, consideriamo in essa la x, come variabile. Avremo così la funzione

$$Y=Fx^m+Gx^{m-1}+Hx^{m-2}+Ix^{m-3}+\cdots+Z,$$

ove, attribuendo diversi valori alla x, è chiaro che ne verranno diversi risultati; e quando giungiamo a fare

$$x=\alpha,\quad x=\beta,\quad x=y,\ \ldots,$$

la Y diverrà sempre, e solamente in tali casi, $=0$.

19. Sia per es.

$$m=3,\quad F=5,\quad G=-15,\quad H=-50,\quad I=120,$$

onde la (C) riducasi alla

$$5x^3-15x^2-50x+120=0,$$

equazione di cui tutte le radici sono i numeri 2, 4, -3. Supponiamo, come precedentemente, $Y=5x^3-15x^2-50x+120$.

Facendo quivi $x=1$, otterremo

$$Y=5-15-50+120=60;$$

facendo $x=3$, otterremo

$$Y=5.27-15.9-50.3+120=-30;$$

e così di seguito, ma mentre supponiamo $x=2$, oppure $x=4$, oppure $x=-3$, sempre ci risulta $Y=0$: e ci risulta tale soltanto in questi casi.

20. Ritenute le precedenti supposizioni, e sottratta dalla variabile x ciascuna delle radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \omega$, onde avere i binomj

$$x - \alpha, \quad x - \beta, \quad x - \gamma, \quad x - \delta, \ldots, x - \omega,$$

essendo F il coefficiente del primo termine in Y, ed essendo $a, b, c, d, \ldots$, e tutti numeri intieri e positivi, de' quali la somma è $= m$.

Suppongo

$$x - \alpha = r, \quad x - \beta = s, \quad x - \gamma = t, \ldots, x - \omega = \zeta,$$

e ciò fatto, poichè la Y diventa sempre zero, allorchè facciasi $x = \alpha$, ovvero $x = \beta$, oppure $x = \gamma$, etc., e però mentre si supponga

$$x - \alpha = 0, \quad \text{od} \quad x - \beta = 0, \quad \text{od} \quad x - \gamma = 0, \ldots,$$

ossia

$$r = 0, \quad \text{od} \quad s = 0, \quad \text{oppure} \quad t = 0, \ldots,$$

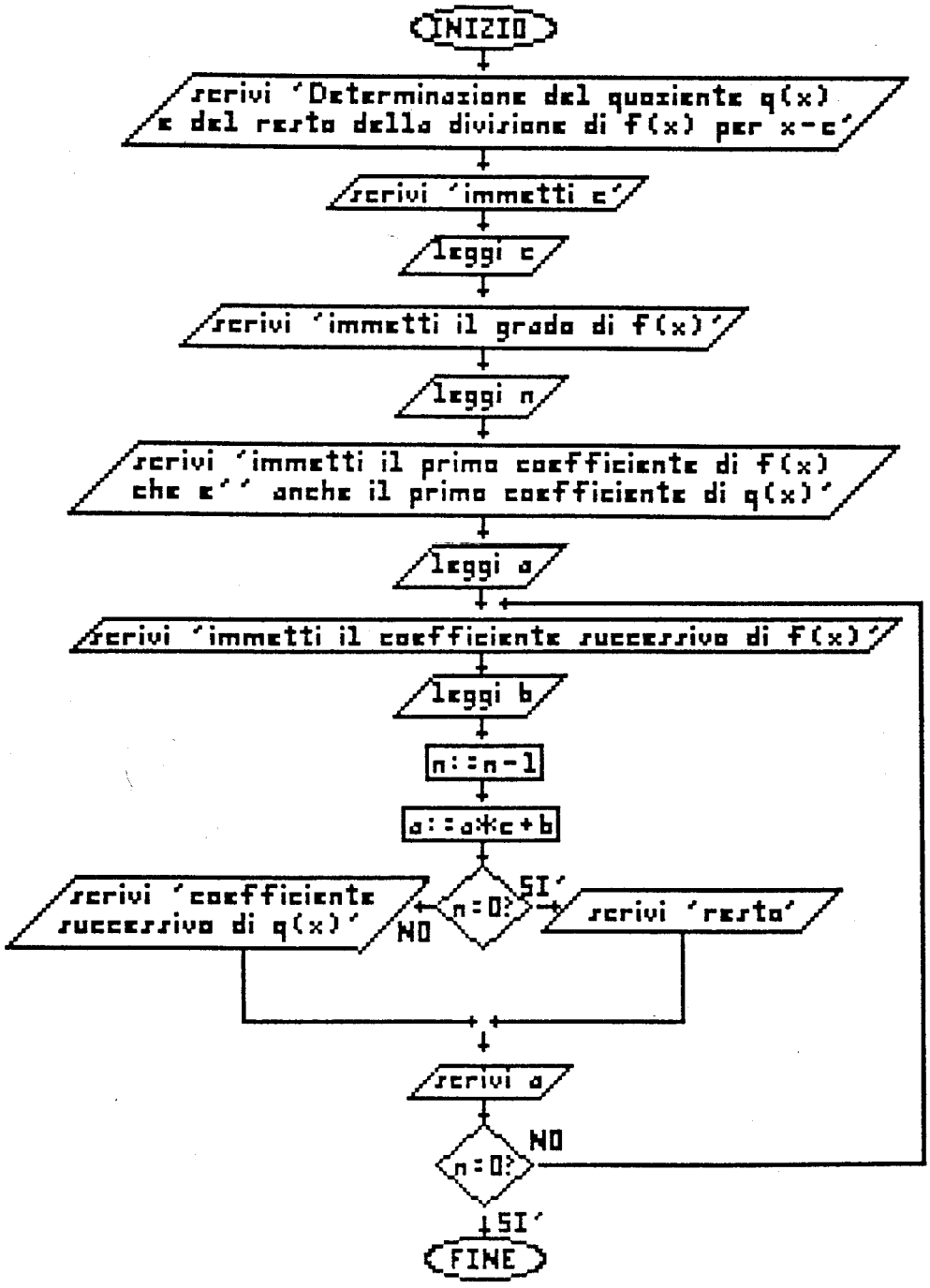
ne viene dal n° 11 che dovrà la nostra Y essere $= f(r)(s)(t) \ldots (\zeta)$.

Ma questa per l'ipotesi essendo una funzione intiera e razionale della x (n^i 17, 18), viene appunto ad essere una funzione delle $r, s, t, \ldots$, come quelle dei n^i 12, 15; dunque per quanto si è colà dimostrato, dovrà essere

$$Y = M r^a s^b t^c \ldots \zeta^e$$

(n° 16), esprimendo con le lettere $a, b, c, \ldots, e$ tanti numeri intieri e positivi; e però avremo

$$Y = M(x - \alpha)^a (x - \beta)^b (x - \gamma)^c \ldots (x - \omega)^e.$$


INIZIO
scrivi 'Determinazione del quoziente q(x)
e del resto della divisione di f(x) per x-c'
scrivi 'immetti c'
leggi c
scrivi 'immetti il grado di f(x)'
leggi n
scrivi 'immetti il primo coefficiente di f(x)
che e'' anche il primo coefficiente di q(x)'
leggi a
scrivi 'immetti il coefficiente successivo di f(x)'
leggi b
n:=n-1
a:=a*c+b
n=0?
SI'
NO
scrivi 'resto'
scrivi 'coefficiente
successivo di q(x)'
scrivi a
n=0?
NO
SI'
FINE

Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

G. Schaffnit
Scienza Geometrica delle Costruzioni, ovvero Geometria Descrittiva
Padova, 1841
(tradotto dal tedesco da V. Tuzzi)

Il libro è preceduto da un'introduzione in cui si spiega qual è lo scopo principale della **Geometria Descrittiva** o **Scienza geometrica delle costruzioni**: essa insegna a rappresentare su un piano gli oggetti che si trovano nello spazio, ed a ricostruire, partendo dalla rappresentazione, la vera forma, grandezza e posizione dell'oggetto nello spazio.
"Essa mette il meccanico, l'architetto e l'artista in istato di presentare agli altri ed a se stesso per mezzo del disegno le proprie idee e concepimenti, a fine di esaminarli rigorosamente, e mandarli ad effetto con esattezza.
Non meno importante, e pressoché indispensabile, è questa scienza per la formazione dei disegni di prospettiva e per la determinazione della luce e dell'ombra in pianta ed in prospetto."
Il libro è suddiviso in 12 sezioni, cui seguono delle illustrazioni ed aggiunte del traduttore.
La prima sezione riguarda le **proiezioni** ed i metodi per determinare la posizione di punti, linee e corpi: non a caso la geometria descrittiva è oggi più comunemente chiamata ***Geometria Proiettiva***.
Nella seconda sezione sono proposti problemi per la cui maggiore comprensione l'autore si serve di tavole raccolte alla fine del testo.
Particolarmente interessante è la quinta sezione, dove l'autore tratta le **curve**, tra cui le **sezioni coniche**, sempre precisandone la definizione, illustrandone poi la costruzione e concludendo con problemi risolti.
Le ultime sezioni riguardano le applicazioni alla scienza delle costruzioni, le **relazioni tra geometria ed algebra** e la risoluzione di problemi relativi alla determinazione di **luce ed ombra**.
Il libro è scritto in modo discorsivo ed è sostanzialmente privo di formule.

Tavole di geometria descrittiva

SCIENZA

GEOMETRICA

DELLE COSTRUZIONI

OVVERO

GEOMETRIA DESCRITTIVA

DI

G. SCHAFFNIT

Capitano d'artiglieria, Professore di Matematica e Fisica
nella Scuola militare del Granducato di Assia Darmstadt,
Cavaliere di Prima Classe dell'Ordine di Lodovico,
Membro della Legione d'Onore, ec. ec.

VERSIONE DAL TEDESCO

CON ILLUSTRAZIONI ED AGGIUNTE

DI

VINCENZO D.R TUZZI

Professore Supplente d'Introduzione al Calcolo Sublime
presso l'I. R. Università di Padova.

PADOVA

COI TIPI DI A. SICCA

1841

A

MONSIGNORE

FRANCESCO CASSIANO HALLASCHKA

PREVOSTO INFULATO DEL CAPITOLO COLLEGIATO IN ALTBUNZLAU

PRELATO NEL REGNO DI BOEMIA

DOTTORE IN FILOSOFIA

IMPERIALE REGIO CONSIGLIERE ATTIVO DI GOVERNO

DELLA BASSA AUSTRIA

ASSESSORE PRESSO LA COMMISSIONE AULICA DEGLI STUDII

DIRETTORE DEGLI STUDII FILOSOFICI

E

PRESIDE DELLA FACOLTÀ FILOSOFICA NELL' UNIVERSITÀ DI VIENNA

MEMBRO DI MOLTE COSPICUE SOCIETÀ SCIENTIFICHE

ONORATO DA TUTTI I DOTTI CARO A TUTTI I BUONI

SAGGIO ORDINATORE DELLE MATEMATICHE DISCIPLINE

NEL REGNO DI LOMBARDIA E VENEZIA

IN TRIBUTO DI OSSEQUIO

QUESTA VERSIONE

VINCENZO TUZZI

CONSACRA

INTRODUZIONE

§ 1. Le quantità geometriche, dotate soltanto di due dimensioni, si possono rappresentare nella loro vera forma e grandezza sopra di un piano, giacchè avendo questo pure due dimensioni, vi si presta convenientemente. Ma la cosa è diversa, se si debbano rappresentare sopra di un piano quelle grandezze geometriche, le quali non hanno tutte le loro parti in uno stesso piano, ossia che hanno più di due dimensioni, vale a dire i corpi. Ed è questo il problema di cui si occupa la scienza geometrica delle costruzioni, ossia la Geometria descrittiva (1). Perciocchè essa insegna a rappresentare sopra di un piano gli oggetti che si trovano nello spazio, ed inoltre mostra come da una esatta descrizione di questi oggetti si possa, per mezzo di tale rappresentazione, conoscere la loro vera forma e grandezza, e dedurre tutto ciò che si riferisce ai medesimi considerati nello spazio, ritenendo costante la loro posizione, o facendola variare.

§ 2. Considerata sotto questo duplice punto di vista, la scienza geometrica delle costruzioni è importante ed interessante a un tempo. Essa può dirsi arte

(1) La lingua tedesca ha *darstellende Geometrie*, che propriamente vale *Geometria rappresentativa*, e che meglio esprime l'ufficio di questa parte delle Matematiche, giacchè i disegni rappresentano i corpi, le parole li descrivono.

del disegno, in quanto che insegna a rappresentare sopra di un piano gli oggetti. Ma differisce essenzialmente dall'arte del disegno propriamente detta, la quale tende ad offrire la più illusoria rassomiglianza con un oggetto nella posizione in cui deve apparire all'occhio dell'osservatore da un determinato punto di stazione: dalla quale rappresentazione però non risulta nè la vera grandezza e l'effettiva posizione di un oggetto e d'ogni sua parte, nè tutto ciò che vi si riferisce, con quella semplicità e precisione che si richiede pel chiaro concepimento dell'oggetto rappresentato, e specialmente per costruirlo in base del disegno.

All'incontro dalle rappresentazioni della scienza geometrica delle costruzioni si possono conoscere le esatte dimensioni ed i precisi rapporti dell'oggetto, come pure la sua vera forma e posizione, od immediatamente, o per mezzo di una semplice ed agevole determinazione. Essa mette quindi il meccanico, l'architetto e l'artista in istato di presentare agli altri ed a sè stesso per mezzo del disegno le proprie idee e concepimenti, a fine di esaminarli rigorosamente, e mandarli ad effetto con esattezza; essa è il mezzo ad una generale diffusione delle più utili scoperte della meccanica, dell'architettura e di altre arti, stantechè insegna a comunicare agli altri queste scoperte in una maniera più compiuta di quella che si può conseguire dalla più circostanziata descrizione.

D'altra parte la Geometria descrittiva insegnando per mezzo di tale rappresentazione a desumere gli oggetti dalla loro geometrica descrizione, e quindi tutto ciò che riguarda la loro grandezza, forma e posizione, essa è indispensabile così al pratico artista come al

meccanico speculativo, non potendo che per essa mettersi in istato di eseguire correttamente un disegno, d'intenderlo, e di mandarlo esattamente ad effetto. In ispecialità poi è necessario che la conoscano coloro i quali devono proporre e fare eseguire oggetti tecnici.

Non meno importante, e pressochè indispensabile, è questa scienza per la formazione dei disegni di prospettiva, e per la determinazione della luce e dell'ombra in pianta ed in prospetto. Questi due rami dell'arte del disegno soltanto per mezzo di essa si possono trattare fondatamente.

A mostrare la importanza della Geometria descrittiva pei militari, e specialmente per gl'ingegneri ed artiglieri, basta dire che senza di quella non sono essi in grado non solo di abbozzare ed eseguire un disegno esatto d'oggetti di fortificazione e d'artiglieria, ma nemmeno d'intenderlo e di giudicarne. E questa importanza della Scienza geometrica delle costruzioni si fa sentire ai militari provetti tanto più, in quanto che la maggior parte delle opere militari si rappresentano con incisioni.

Finalmente questa scienza facilita lo studio della Geometria analitica, è un mezzo impareggiabile ad esercitare ed acuire straordinariamente lo intelletto e la immaginazione, e ad un tempo è molto propria a procurare un'occupazione non meno dilettevole che industriosa per chi vi si dedica.

§ 3. Ora siccome i corpi da rappresentarsi sono terminati da superficie, e queste da linee, e le linee da punti, ne segue che sarà prima da determinarsi la posizione di un dato punto nello spazio. Questa determinazione si può fare soltanto per mezzo di altri og-

getti dati di posizione. Affinchè poi questi oggetti possano riescire d'un uso frequente, ed essere facilmente indicati, importa che sieno i più semplici possibili. Quindi non debbono consistere che in punti, linee o superficie, alle quali rapportare si possa la posizione del punto da determinarsi. Il metodo delle projezioni, che esporremo nella seguente Sezione, fa sì che bastino a questo scopo due soli piani.

32.° Al proposito di queste generalità sulle intersezioni delle superficie, Monge crede necessario di notare nuovamente la corrispondenza che esiste fra l'Algebra e la Geometria descrittiva; e noi stimiamo di riportare qui le sue dotte osservazioni.

Nell'Algebra, dic'egli, quando un problema è posto in equazione, e che si abbia un numero di equazioni uguale a quello delle incognite, se ne può sempre dedurre un egual numero ad una sola incognita; al che si perviene col metodo dell'eliminazione, conseguendo un'equazione finale che offra il mezzo di ricavare il valore di una delle incognite stesse.

L'oggetto dell'eliminazione algebrica delle incognite ha la massima analogia con le operazioni che in Geometria descrittiva si fanno per determinare le intersezioni delle superficie curve.

Diffatti considerando un punto nello spazio, lo si riferisca a tre piani ortogonali per mezzo delle sue distanze da essi, che esprimeremo con x, y, z; e supponga si di avere una relazione fra queste distanze espressa da un'equazione formata colle variabili stesse x, y, z, e con varie costanti. Questa relazione però non determina la posizione del punto, perchè possono variare le dette distanze, e quindi questa posizione, senza che cangi la supposta relazione; ed anzi l'equazione relativa rappresenta la superficie sulla quale si trova il punto nelle varie posizioni che può assumere, mantenendo inalterata la relazione suddetta.

Così, ad esempio, detto A il raggio di una sfera che abbia il centro nel punto di comune intersezione dei tre piani ortogonali, e supposte condotte da un punto della superficie sferica le perpendicolari ai tre piani che misurano le sue distanze dai medesimi, il raggio si potrà riguardare come la diagonale di un parallelepipedo che abbia per spigoli le dette perpendicolari; sicchè si avrà la relazione $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$. Quindi si vede, che se anche il punto cangia posizione, e perciò variano i valori di x, y, z, la relazione però rimane sempre la stessa; sicchè appartenendo essa a tutti i punti della superficie sferica, ed anzi non convenendo che a questi soli, essa è l'equazione della superficie. Allo stesso modo, benchè non così semplicemente, si può determinare l'equazione di qualsiasi superficie.

Ora si considerino le equazioni di due diverse superficie, i punti delle quali sieno riferiti ai medesimi piani ortogonali, e si supponga che queste equazioni debbano coesistere per gli stessi valori delle variabili: è chiaro che in tal caso non si tratterà più di tutti i punti dell'una o dell'altra superficie, ma soltanto di quelli che sono ad esse comuni, cioè che appartengono alla loro intersezione, ai quali le due equazioni soddisfanno contemporaneamente. Se dunque si eliminerà da esse una variabile, per esempio la z, l'equazione fra x ed y, che ne risulta, esprimerà la relazione fra queste due distanze per tutti i punti dell'intersezione, qualunque possa essere la z ch'è scomparsa; cioè è l'equazione della projezione dell'intersezione delle due superficie sopra il piano perpendicolare alla distanza z.

Dunque in Algebra l'oggetto dell'eliminazione fra più equazioni a tre incognite è quello di determinare sui tre piani, ai quali si riferiscono tutti i punti dello spazio, le projezioni delle intersezioni delle superficie alle quali quelle equazioni appartengono.

33.° Soggiunge poi lo stesso Autore, che non è questo solo il punto di convenienza fra le operazioni dell'analisi ed i metodi della Geometria descrittiva, poichè questa si riscontra dovunque. Così facendo muovere nello spazio dei punti, delle linee o delle superficie per generare qualsiasi oggetto, quei movimenti possono sempre essere regolati da operazioni analitiche, e gli oggetti generati s'esprimono coi risultati stessi di quelle operazioni. Viceversa non v'ha alcuna operazione analitica a tre dimensioni, che non possa rappresentare un movimento nello spazio. Quindi per imparare

le Matematiche con la massima utilità è necessario di conoscere per tempo la corrispondenza che passa fra l'analisi e la geometria, e di essere in grado di tradurre in formule analitiche tutti i moti dello spazio, e di rappresentarsi nello spazio i movimenti dei quali le operazioni analitiche sono la traduzione.

34.° Si chiuderà questa illustrazione coll'avvertenza, che l'intersezione di due superficie curve può avvenire in due modi; cioè per *istrappamento*, o per *perforamento*. Il primo ha luogo quando vi è una porzione di ciascuno dei due corpi che non ha punti comuni coll'altro, cosicchè sembrano strapparsi a vicenda una parte della loro superficie. Il secondo invece è quando un corpo entra tutto nell'altro, segnando un'intersezione là dov' entra, che dicesi *curva di entrata;* ed una là dove esce, che appellasi *curva di uscita.*

Al § 267.

35.° Si suole distinguere da alcuni, come l'ombra, anche la penombra in *propria* e *projetta;* intendendosi che la prima sia quella che accompagna l'ombra propria di un corpo, e la seconda quella che accompagna lo sbattimento. Qui si accenneranno soltanto alcuni teoremi, la dimostrazione dei quali si desume facilmente da ciò che si dice sulla maniera di determinare l'ombra. Essi sono:

a) La penombra *propria* varia col rapporto fra la grandezza del corpo luminoso e quella del corpo illuminato, ritenuta costante la distanza dai loro centri.

b) L'ampiezza della penombra *propria* è in ragione inversa della distanza dal corpo luminoso all'illuminato.

c) La penombra *propria* di una sfera illuminata dal sole è circa un mezzo grado di un suo circolo massimo, ed è compresa fra due paralleli.

d) Varia l'ampiezza della penombra *propria* in ragione inversa della curvatura della superficie illuminata.

36.° Si avverta inoltre, che l'alterazione di figura che talvolta si osserva nei contorni delle ombre, così che invece di essere poligona spesso apparisce curvilinea, dipende dalla grandezza del corpo luminoso e dalla sua distanza dall'illuminato. Così un raggio di sole ch'entra per un pertugio in una stanza, benchè questo sia di forma rettangolare, la luce raccolta sovra una parete alquanto distante apparisce di figura ellittica, e talvolta anche circolare. E ciò perchè tutti i punti del contorno del foro sono i vertici di altrettanti coni che hanno per base il corpo luminoso; e ciascuno di questi coni lucidi si prolunga al di là del vertice, ed è intercettato dalla parete, la quale essendo piana dà per sezione un'ellisse; quindi l'immagine prodotta dai raggi luminosi invece d'essere formata di linee rette risulta d'archi ellittici, i quali sono tanto maggiori, quanto più lontana è la superficie che accoglie l'immagine.

Matematica ed Economia

Gaetano Scorza
Opere Scelte
Volume I
Roma, 1960

Una raccolta di scritti di vario argomento, tra cui un articolo di applicazione del **Calcolo Infinitesimale** all'Economia: ***"Osservazioni sulla teoria del baratto secondo il prof. Walras"*** . Ne riportiamo le **note introduttive e conclusive**, e l'inizio della **trattazione matematica** del problema.

OSSERVAZIONI SULLA TEORIA DEL BARATTO SECONDO IL PROF. WALRAS

È noto in che cosa consista il problema del baratto secondo il Prof. WALRAS e sono anche noti i teoremi economici, che quell'insigne scienziato ne ha dedotti.

In un mercato X si presentino varii portatori di più merci di qualità diverse e ogni portatore abbia prima stabilito quanta merce di ogni specie acquisterà o venderà in cambio di altra merce venduta o acquistata, per ogni sistema di prezzi di tutte le merci rispetto a una determinata (1). Supposto, che nessun baratto parziale avvenga prima, che la domanda effettiva e l'offerta effettiva di ogni merce, da parte di tutti i portatori insieme considerati, siano divenute eguali (2), si domanda come si potranno determinare i *prezzi d'equilibrio del mercato*, cioè quel sistema (o quei sistemi) di prezzi di tutte le merci in una prestabilita, pel quale (pei quali) si verifichi, relativamente a ogni singola merce, la uguaglianza della domanda effettiva e dell'offerta effettiva, totali.

Il modo di risolvere questo problema teoricamente più rapido e preciso è quello di ricorrere all'analisi matematica, cioè quello, che consiste nel riguardare i prezzi d'equilibrio come altrettante incognite di un certo sistema di equazioni, nello scrivere queste equazioni e, dato che si possa, nel risolverle. Ma il Prof. WALRAS ha

(1) Questa merce (*numerario*), nella quale si esprimono i prezzi di tutte le altre, può essere una di quelle esistenti sul mercato, ma può anche non comparire affatto tra le merci, che si tratta di barattare.

(2) Noti il lettore tutta l'importanza di questa restrizione. Così non gli accadrà, per avventura, di ripetere contro la teoria del Prof. WALRAS una obbiezione assai superficiale del Prof. BERTRAND, cui il Prof. WALRAS medesimo ha egregiamente risposto. Cfr. BERTRAND, *Journal des Savants*, sett. 1883; WALRAS, *Journal des Économistes*, aprile 1885, oppure WALRAS, *Études d'Économie sociale* Lausanne, 1896, pag. 352.

dimostrato, che, senza scrivere un tal sistema di equazioni, la sua soluzione si può praticamente raggiungere affidandosi al puro e semplice meccanismo della libera concorrenza; per il quale, supposto che, relativamente a certi prezzi delle merci in una determinata, per qualche merce o per tutte non si verifichi l'uguaglianza della domanda e dell'offerta, complessive, si passano a considerare, come più prossimi ai prezzi d'equilibrio, prezzi ottenuti dai precedenti rialzando quelli che corrispondono a merci, la cui domanda totale sia inferiore all'offerta totale, e ribassando quelli, che corrispondono a merci, la cui domanda totale sia inferiore all'offerta totale.

Ora alla teoria del Prof. WALRAS, che ci pare di aver esposta abbastanza esattamente in questi brevi tratti sintetici (1), si possono muovere, come vedremo, varii appunti: soprattutto, non sembra, che possa concludersi, così senz'altro, la libera concorrenza essere un mezzo atto a risolvere il sistema di equazioni, cui dà luogo il baratto di più merci: ma in ogni modo non va disconosciuto il merito grandissimo, che il Prof. WALRAS ha avuto nel tentare di porre i problemi fondamentali di questa teoria con tanta chiarezza, da permettere l'immediata applicazione del linguaggio più preciso, che si conosca, cioè del linguaggio matematico.

La forma del mio lavoro, le modifiche che esso apporta ad alcune considerazioni assai comuni sulle varie specie degli equilibri dei mercati ed infine l'importanza delle questioni, che in esso si sollevano, spero, che basteranno a convincere il lettore della perfetta obbiettività delle mie osservazioni critiche. Esse sono mosse non dalla vana soddisfazione, che ogni spirito gretto e piccino prova nel poter cogliere in fallo i maestri, ma dall'amore della verità e dal desiderio di contribuire a quel movimento scientifico così felicemente iniziato da alcuni valenti economisti, che ha per scopo di dare a qualche teoria dell'Economia politica un assetto armonico e definitivo col razionale impiego delle notazioni e dei teoremi matematici.

Il Prof. WALRAS rispondendo, negli scritti citati, ad un articolo del Prof. BERTRAND sopra la sua *Théorie mathématique de la richesse sociale* (Lausanne, 1883), dopo aver osservato, che le obbiezioni del Prof. BERTRAND hanno un carattere più economico, che matematico, conclude: « Comme je redoutais beaucoup plus la critique des ma-

(1) Nel seguito, per la esposizione delle ricerche del Professor WALRAS, che sono state pubblicate a varie riprese in varii luoghi e per le relative citazioni mi riferirò sempre al trattato: *Éléments d'Économie politique pure*, Lausanne, 1900, come alla fonte meno antica e più completa.

thématiciens que celle des économistes, j'avoue que ma théorie, après l'examen qu'elle a subi de la part de l'illustre secrétaire de l'Académie des sciences, me paraît être assez solide et mériter quelque peu la peine que je me donne pour tâcher d'en partager équitablement entre GOSSEN, JEVONS et moi la propriété scientifique — » (1); quindi, confortato dall'autorevole parere dello stesso WALRAS, non mi pare d'aver fatto opera inutile riguardando qui la questione da un lato più logico-matematico, che economico.

13. Due parole di conclusione non ci sembrano fuor di luogo.

Il Prof. WALRAS, dopo aver stabilito quel che egli chiama le due leggi della determinazione e della variazione dei prezzi e che raccoglie sotto il nome comprensivo di legge della domanda e dell'offerta, passa alla teoria della produzione e quivi con procedimenti analoghi stabilisce altre leggi, che, insieme con quelle, considera come costituenti la giustificazione razionale del notissimo principio « *laissez faire, laissez passer* » in materia di scambio e di produzione (*Éléments* etc., pag. 231 e seg.). Stante l'enorme importanza pratica e scientifica di questo risultato, non sembra che la critica precedente sia da considerarsi come inutile. Essa, ben inteso, non infirma il principio « *laissez faire, laissez passer* »: solo vuole affermare, che si è ben lontani dal poterne dare una dimostrazione matematica.

Tutto ciò per noi e, speriamo, anche pei lettori non deve implicare e non implica, che le applicazioni della matematica all'Economia politica non siano utili. Al contrario, noi le riguardiamo come assolutamente necessarie *in quelle parti* dell'economia politica *nelle quali possono esser fatte*, e crediamo, che *su queste parti* appunto debbano vertere le ricerche degli studiosi, perchè esse potranno poi servire come base di una costituzione razionale dell'edifizio economico.

Sappiamo bene che queste nostre parole ci attireranno sorrisi ironici di molti lettori e noi stessi non le abbiamo scritte senza un qualche ritegno. Ma da una parte l'autorità di scienziati, quali il WALRAS e il PARETO, dall'altra il sentimento di sconforto provato nel passar dai campi della matematica pura, così sereni e così *obbiettivi*, a quelli dell'Economia politica, così *soggettivi* e così irti di discussioni passionate e, per ciò stesso, antiscientifiche, non ci hanno lasciato molto in dubbio sulla loro opportunità.

L'introduzione del linguaggio matematico nell'Economia politica, come è stato detto tante volte e ottimamente dagli economisti matematici, contribuisce a darle chiarezza, semplicità e precisione, e soprattutto *costringe* a delimitare con rigore il senso e la portata dei postulati economici fondamentali (1).

A considerare il modo di scrivere di parecchi economisti sembra, che essi obbediscano più a delle preoccupazioni letterarie, che a delle esigenze scientifiche: così che pare di non esser troppo lontani dal vero quando si afferma, che essi non si fanno un conto esatto dell'estrema importanza dello stretto rigore nelle dimostrazioni. Ebbene, non sarà male rammentare, che i grandi progressi ottenuti nella matematica nel secolo ora trascorso, oltre che a circostanze intrinseche (per esempio, la grande semplicità logica dell'Analisi e della Geometria) ed estrinseche (per es. di ordine sociale, favorevoli al suo sviluppo e a quello di tutte le scienze fisico-matematiche), sono dovuti all'introduzione generale di quel rigore logico, di cui fra gli Analisti è stato modello il prof. WEIERSTRASS dell'Università di Berlino, da pochi anni defunto. L'Analisi, liberatasi dalle pastoie metafisiche dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande concepiti in modo attuale, adoperando su larga scala la nozione di numero complesso e in generale di numeri a più unità, non solo ha corretto moltissimi errori, in cui era caduta fra le mani degli analisti anteriori, e si è costituita su basi assolutamente solide, ma anche ha fatto progressi incalcolabili: e la Geometria, con un esame attento dei suoi principi fondamentali, con qualche semplice modificazione *formale* nella espressione delle proprietà primitive degli enti geometrici più semplici e con l'applicazione di quel principio generale di logica, che si cela sotto la legge più feconda della Geometria moderna, *la legge della sostituibilità degli enti geometrici*, ha raggiunto colle ricerche sugli spazi a un numero qualunque di dimensioni e più ancora con le ricerche della così detta *Geometria degli enti algebrici* una purezza, semplicità e grandiosità di linee, davvero imponenti.

Numero complesso

(1) Ciò ha visto ed espresso assai nettamente il sig. WHEVEL nelle sue due Memorie: *Mathematical exposition of some economical doctrines* (Transactions of the Camb. phil. Soc. 1829, 1831), alle quali ci piace di rimandar il lettore. Siamo sicuri, che quando egli ne avrà ben compreso il concetto informatore non vorrà ripetere su di esse il severo e ingiustificato giudizio del prof. BOCCARDO (*Biblioteca dell'Economista*, serie 3ª, vol. 2º), e forse nemmeno vi troverà quelle contraddizioni strane, che vi trova il prof. VIRGILI (*La Rassegna Nazionale*, 1º giugno 1890).

Che proprio, dunque, l'Economia politica non debba ricavar nessun frutto dalle fatiche di chi intende a darle una base solida? (1).

Pisa, 8 gennaio 1902.

(1) Avevo già mandato il manoscritto di questo lavoro alla Direzione del *Giornale*, quando il Prof. PANTALEONI cortesemente mi avvertì, che il MARSHALL aveva già osservato, che le due specie di equilibrio distinte coi nomi di equilibrio stabile ed equilibrio instabile non esauriscono tutte le specie possibili. Non ostante ciò, ho creduto opportuno mantenere inalterato il mio scritto, perchè il passo del MARSHALL non esaurisce la questione e lascia adito a qualche incertezza. Ecco le parole di questo autore racchiuse in una parentesi della nota a pag. 492 dei suoi *Principles of Economics* (London, 1891): «If the curves touch one another at any point, the equilibrium corresponding to it will be stable for displacements in one direction, and unstable for displacements in the other. No practical interest attaches to the investigation of this barely possible case».

1. Cominciamo, per semplicità e per chiarezza, dal caso di un mercato, nel quale si tratti del baratto di due sole merci e, per comodità del lettore, riassumiamo brevemente le considerazioni del Prof. WALRAS.

2. In un mercato X più compratori e più venditori scambino tra di loro merci di due sole qualità, e si indichino queste merci con (A) e (B). Per ogni valore del prezzo p_a di (A) in (B) o del prezzo $p_b = \frac{1}{p_a}$ di (B) in (A), ogni individuo intervenuto al mercato ha interesse a scambiare una determinata quantità della merce, che egli possiede con la quantità dell'altra merce, che, in virtù dei valori dei prezzi le corrisponde: quindi, per ogni coppia di valori dei prezzi p_a e p_b, legati dalla relazione

$$p_a p_b = 1,$$

si avranno in totale delle determinate domande ed offerte effettive delle merci (A) e (B), di cui indicheremo rispettivamente le misure con D_a, O_a, D_b, O_b.

Si ha, per definizione:

$$(1) \qquad \begin{aligned} D_a &= O_b p_b & O_a &= D_b p_b \\ D_b &= O_a p_a & O_b &= D_a p_a, \end{aligned}$$

quindi, se si pone, per indicare che D_a e D_b (al pari del resto di O_a e O_b) sono funzioni di p_a e p_b [2],

$$(2) \qquad D_a = F_a(p_a), \qquad D_b = F_b(p_b)$$

[1] *Études d'Économie sociale*, pag. 352.

[2] Grazie alla relazione $p_a p_b = 1$, D_a e D_b (al pari di O_a e O_b) possono considerarsi come funzioni di quella delle due variabili p_a e p_b, che meglio ci piace.

si ha:

$$(3) \qquad O_a = F_b(p_b)\,p_b\,, \qquad O_b = F_a(p_a)\,p_a\,.$$

Nel mercato si ha equilibrio solo quando $D_a = O_a$ e, conseguentemente per le (1), $D_b = O_b$: quindi i valori di p_a e p_b pei quali si ha l'equilibrio sono tutti e soli quelli delle radici (reali, positive) del sistema di equazioni:

$$(4) \qquad F_a(p_a) = F_b(p_b)\,p_b\,, \qquad p_a\,p_b = 1$$

la cui risoluzione si riduce subito a quella dell'unica equazione:

$$(5) \qquad F_a(p_a) = F_b\left(\frac{1}{p_a}\right)\frac{1}{p_a}.$$

Arrivati a questo punto, è chiaro che null'altro di preciso può dirsi sul problema dal lato matematico, finchè nessuna restrizione si introduca sulla natura delle funzioni F_a ed F_b.

Il Prof. WALRAS, in seguito a considerazioni di carattere economico dice qualcosa riguardo a tale natura, ma comunque sia, esse non bastano per autorizzarlo a dedurre dal ragionamento qui riportato il teorema:

Deux marchandises étant données, pour qu'il y ait équilibre du marché à leur égard, ou prix stationnaire de l'une en l'autre, il faut et il suffit que la demande effective de chacune de ces deux marchandises soit égale à son offre effective. Lorsque cette égalité n'existe pas, il faut, pour arriver au prix d'équilibre, une hausse du prix de la marchandise dont la demande effective est supérieure à l'offre effective, et une baisse du prix de celle dont l'offre effective est supérieure à la demande effective [1].

È vero, che egli, dopo aver posto il problema nella forma analitica precedente, prima di enunciare il suo risultato finale rappresenta le funzioni $F_a(p_a)$ ed $F_b\left(\frac{1}{p_a}\right)\frac{1}{p_a}$ mediante curve, rispetto a un sistema di assi coordinati ortogonali, e, *supposto che queste curve abbiano un sol punto comune e che nell'intorno di quel punto si comportino opportunamente,* prosegue il suo discorso. Ma non si può intendere, che il teorema sia essenzialmente tratto da questi ulteriori argomenti, poichè nel suo enunciato non compajono le restrizioni introdotte nel caso particolare discusso.

[1] *Éléments* etc., pag. 64.

come si fa a parlare *del* prezzo di equilibrio, quando questi prezzi d'equilibrio possono essere più d'uno, e come si può dire, che per raggiungere (badisi bene, soltanto per raggiungere!) un prezzo d'equilibrio, dato che si possa raggiungerlo, debbasi necessariamente fare un rialzo del prezzo della merce di cui la domanda effettiva supera l'offerta effettiva e un ribasso del prezzo della merce di cui la domanda effettiva è inferiore all'offerta effettiva?

Se, ad esempio, le funzioni $F_a(p_a)$ ed $F_b\left(\frac{1}{p_a}\right)\frac{1}{p_a}$ sono rappresentate dalle due curve AB e CD della *fig. 1*, tanto l'ascissa del punto E, quanto quella del punto F, rappresentano prezzi d'equilibrio; cosicchè, se all'inizio del baratto il prezzo p_a avesse il valore

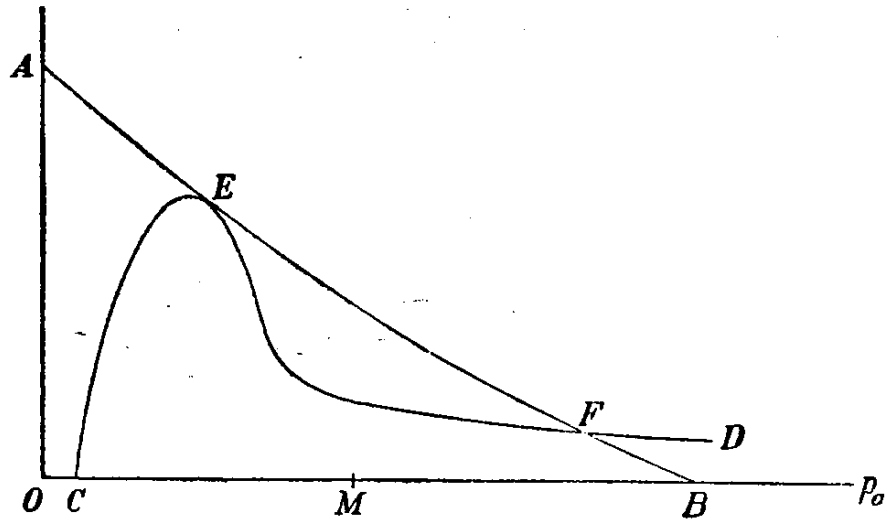


Fig. 1.

Matematica e Informatica

Jean-Michel Morel
Sergio Solimini
Variational Methods in Image Segmentation
Boston-Basel-Berlin 1995

(Metodi variazionali nella segmentazione delle immagini)

Citiamo dall'introduzione degli autori: *"Se si guarda direttamente una scena tratta dal mondo della natura o degli uomini, o una qualunque immagine (dipinto, fotografia, disegno,...) che rappresenti questa scena, è inevitabile vederla suddivisa in strutture, che in molti casi possono essere identificate con oggetti reali. Questi oggetti possono essere più o meno concreti, come nelle fotografie in cui si vedono alberi, finestre, persone, ecc., oppure strutture percettive astratte, come quelle che compaiono nei quadri astratti e possono essere descritte solo in termini geometrici. Tuttavia sappiamo che l'"informazione visiva" che giunge alla nostra retina è tutt'altro che strutturata, è informazione puramente locale che può essere modellizzata efficacemente come un'immagine digitale.*

Dal punto di vista matematico (e ingegneristico), le immagini digitali sono semplicemente funzioni g(x), dove x è un punto del dominio Ω dell'immagine (il piano, un rettangolo,...), e g(x) è un numero reale che rappresenta la "luminosità" o "livello di grigio" dell'immagine nel punto x. Quest'ultimo è il dato non strutturato con cui hanno a che fare gli ingegneri nell'analisi delle immagini, in robotica, ecc. Ed è anche, in qualche modo, il dato di base che giunge alla nostra retina. Quindi non v'è molta affinità tra ciò che pensiamo di vedere "immediatamente" e ciò che costituisce l'informazione fisica sulla luce riflessa dagli oggetti. Questa differenza sostanziale tra le "immagini" in senso ingegneristico o biologico e le "immagini" in senso percettivo, artistico o semantico è ben nota, ma il punto è: come si passa dall'immagine digitale non strutturata all'immagine percettiva strutturata?

Questa domanda è stata posta in un contesto scientifico da psicologi della Gestalt negli anni venti (Koehler) e, successivamente, con i primi computer che permettevano di produrre immagini artificiali, da studiosi di psicofisica che eseguivano misurazioni su quanto veniva percepito nei primissimi millisecondi dall'arrivo dell'immagine sulla retina (Julesz).

Alla fine degli anni sessanta, lo stesso problema fu posto in un contesto prettamente pratico da ingegneri che desideravano estrarre automaticamente informazioni utili dalle immagini digitali. Lo scopo era quello di costruire robot guidati dalla percezione e di capire meglio il funzionamento della vista degli uomini e degli animali. Allora sorse il "problema della segmentazione", che è l'oggetto di questo libro.

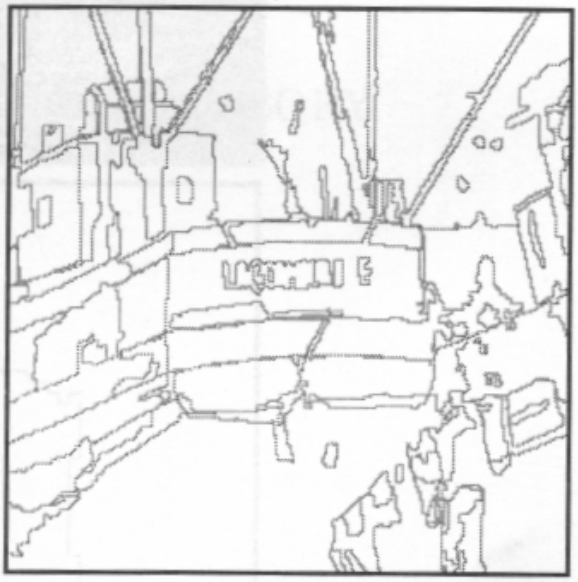
Segmentare un'immagine significa trovare (mediante un algoritmo numerico) le sue "regioni omogenee" e le sue "frontiere". Naturalmente le regioni omogenee dovrebbero corrispondere a parti significative dell'oggetto nel mondo reale, e le frontiere ai suoi contorni apparenti.
I gestaltisti e gli studiosi di psicofisica concordano che un siffatto processo di segmentazione sia in corso nelle primissime fasi del processo di percezione visiva. Inoltre essi dimostrarono che queste prime fasi sono eseguite da una "macchina geometrica", e si suppone che algoritmi informatici, applicati alle immagini digitali, dovrebbero essere in grado di fare altrettanto. [...] Più di mille algoritmi sono stati proposti per segmentare le immagini o trovarne le "frontiere".
[...] Gli autori di questo libro sono giunti alla conclusione che, al di là della grande diversità di strumenti numerici, ***esiste essenzialmente un solo modello di segmentazione****. In effetti [...] la maggior parte degli algoritmi di segmentazione cercano di minimizzare, attraverso diversi procedimenti, una ed una sola "Energia di segmentazione". Questa energia misura l'uniformità delle regioni, e quanto l'"immagine analizzata" sia fedele all'immagine originale, e le "frontiere" trovate siano fedeli alle discontinuità dell'immagine.*

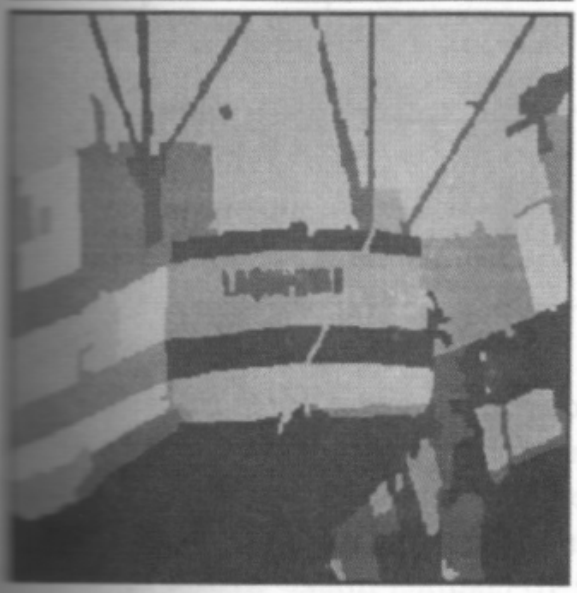
L'algoritmo per la segmentazione delle immagini viene impiegato, con successo, anche in campo militare e criminologico per il riconoscimento automatico di oggetti e persone.

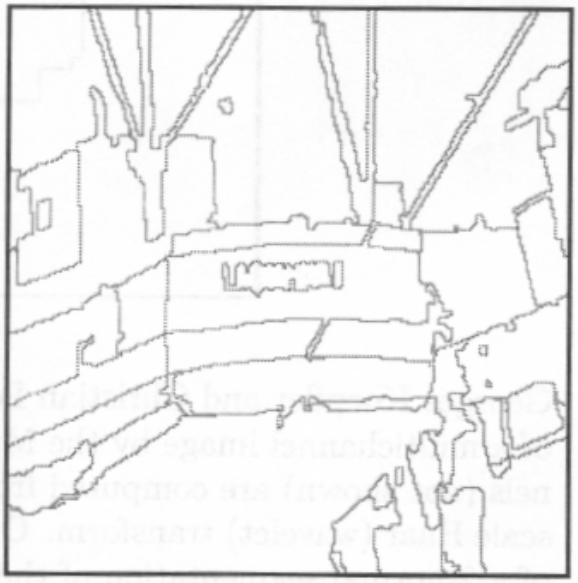
Esempio pratico di segmentazione











Superficie

La nozione matematica di superficie è una delle più delicate, mentre nel linguaggio comune il termine superficie è usato in un'accezione più vasta. Ad esempio, *sfere, coni e cilindri* sono intesi tutti come superficie e l'idea comune di superficie è legata ad *oggetti visualizzabili nello spazio.*
In realtà, nel linguaggio matematico, *le sfere* ed *i cilindri ottenuti come luogo di rette parallele incidenti una curva piana semplice, priva cioè di autointersezioni,* sono superficie immerse nello spazio e quindi visualizzabili in esso; *i coni, come luoghi di rette incidenti una curva piana semplice, priva cioè di autointersezioni, e passanti per un punto (vertice) che non appartenga al piano della curva*, pur essendo visualizzabili nello spazio, non sono superficie, possedendo nel vertice un punto singolare (privo di piano tangente). Infine, esistono superficie "astratte" che non possono essere immerse e quindi visualizzate nello spazio, senza consentire autointersezioni e quindi punti singolari.
Una superficie **M** è per definizione una ***varietà differenziabile reale di dimensione 2***.
In termini elementari, possiamo dire che una superficie è un insieme **M** (dotato di una struttura, detta **topologia**, che consente di parlare di continuità per applicazioni definite su M) che può essere a "pezzi" descritto mediante applicazioni definite su aperti di $\mathbf{R^2}$, bigettive, continue con inverse continue. Si dice che ***M è localmente omeomorfo a R^2***. La descrizione deve però essere coerente, nel senso che si deve poter passare in modo continuo, anzi differenziabile, da un pezzo ad un altro, se la loro intersezione è non vuota.
Questa è sostanzialmente l'idea che si usa in **cartografia** per rappresentare ad esempio il globo terrestre. Le applicazioni locali che descrivono i pezzi di M si chiamano **carte**, non sono isometrie, cioè non conservano le distanze, e l'insieme delle carte si chiama **atlante**.
Formalizzando, si ottiene:
M è una superficie se è uno **spazio topologico di Hausdorff** con le seguenti proprietà:

- esiste una famiglia $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ di aperti tale che si abbia: $\cup_{\alpha\in I} M_\alpha = M$, e, per ogni α, esiste un omeomorfismo, cioè un'applicazione bigettiva, continua, con inversa continua, u_α: $M_\alpha \to u_\alpha(M_\alpha)$, dove $u_\alpha(M_\alpha)$ è un aperto di $\mathbf{R^2}$ nella **topologia naturale**.
- per ogni α, β tali che $M_\alpha \cap M_\beta$ sia non vuota, deve essere differenziabile l'applicazione $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \to u_\beta(M_\alpha \cap M_\beta)$.

La coppia (M_α , u_α) si dice **carta**.

Sostituendo $\mathbf{R^2}$ con $\mathbf{R^n}$ si ottiene la definizione di varietà differenziabile reale di dimensione *n*.
Una nozione importante per le varietà è la nozione di **orientabilità**. Questa nozione può essere introdotta in diversi modi equivalenti.
Ci limitiamo a considerare superficie **M immerse** in $\mathbf{R^3}$.
Una tale superficie si dice ***orientabile*** se esiste un'applicazione continua **G**: $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{S^2}$ che ad ogni punto *P* di M associa un vettore di $\mathbf{R^3}$, di lunghezza *1*, ortogonale al piano tangente in *P* a **M**.
Ad esempio sono orientabili: la **sfera**, il **toro**, il **cilindro**, non è orientabile il **nastro di Möbius** e di conseguenza non sono orientabili le superficie astratte: la **bottiglia di Klein**, il **piano proiettivo reale**.

3 superficie immerse in R^3

La Topologia

Come disciplina matematica, la topologia nasce nel secolo appena trascorso ed ha come effetto immediato quello di permettere la formulazione del concetto di **continuità** per applicazioni definite su un insieme qualsiasi ed a valori in un insieme altrettanto arbitrario.

Assegnare una **topologia** $\boldsymbol{T}$ su un insieme $\boldsymbol{S}$, non vuoto, significa scegliere un sottoinsieme $\mathcal{U}$ dell'insieme delle parti di $\boldsymbol{S}$, $\wp(\boldsymbol{S})$, che contenga l'insieme vuoto $\varnothing$, $\boldsymbol{S}$ stesso ed inoltre sia **chiuso** rispetto alle operazioni di **intersezione finita** e di **unione**, i.e.:

1. $\varnothing \in \mathcal{U}$, $S \in \mathcal{U}$
2. $A_1 \in \mathcal{U}$, $A_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$
3. Se $(A_i)_{i\in I}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{U}$, allora $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{U}$.

Con un processo iterativo (in realtà usando il **principio di induzione**) si può provare che la condizione 2 equivale a chiedere che ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{U}$ è un elemento di $\mathcal{U}$.
Gli elementi di $\mathcal{U}$ si chiamano *aperti dello spazio topologico* $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})$ ed il complementare di ogni aperto si chiama *chiuso.*
La definizione di topologia è chiaramente modellata sul caso in cui $\boldsymbol{S}$ è l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali ed il ruolo degli aperti è assunto dal vuoto, da $\mathbf{R}$ e da tutte le possibili unioni di intervalli aperti di $\mathbf{R}$, cioè di insiemi del tipo $]\, b,\, c\,[= \{x \in \mathbf{R} \mid b < x < c\}$.
Osserviamo che, se indichiamo con a la semisomma $(b + c)/2$ e con r la semidifferenza $(c - b)/2$, l'intervallo $]\, b,\, c\,[$ è uguale all'intervallo $]\, a - r,\, a + r\,[= \{x \in \mathbf{R} \mid \mathrm{d}(x, a) = |x - a| < r\}$.

Analogamente se $\boldsymbol{S}$ è $\mathbf{R^2}$, o più in generale $\mathbf{R^n}$, n > 1, il ruolo degli aperti è assunto dal vuoto, da $\mathbf{R^n}$ e da tutte le possibili unioni di sfere aperte di $\mathbf{R^n}$, cioè di insiemi del tipo $B_r(a) = \{x \in \mathbf{R^n} \mid \mathrm{d}(x, a) < r\}$ con a centro e r raggio della sfera, variabili rispettivamente in $\mathbf{R^n}$ e tra i numeri reali positivi. Questa topologia riflette chiaramente la struttura euclidea di $\mathbf{R^n}$, coinvolgendone la distanza; essa prende il nome di **topologia naturale**.

È possibile ora mostrare perché è necessario chiedere la chiusura di $\mathcal{U}$ per l'operazione di intersezioni **finite**.
In $\mathbf{R^2}$, con la topologia naturale, consideriamo tutte le sfere di centro prefissato a e raggio arbitrario $r > 0$. L'intersezione **infinita** di tali aperti è costituita dal solo elemento a, cioè:

$$\bigcap_{\substack{r \in R \\ r > 0}} B_r(a) = \{a\}$$

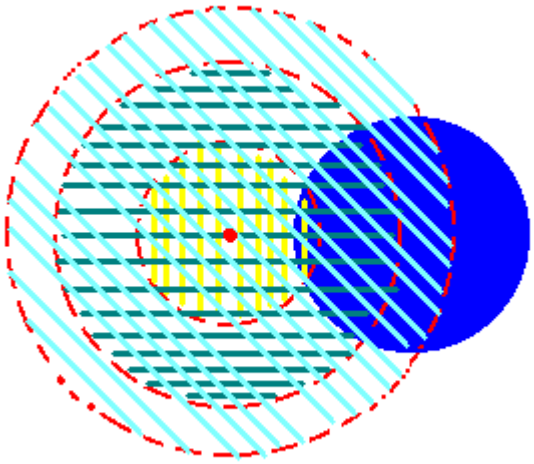
D'altra parte, è possibile provare che il complementare di $\{a\}$, $\mathbf{R^2} - \{a\}$, è un aperto e quindi $\{a\}$ è un chiuso.

Ogni insieme non vuoto, **S**, possiede almeno due topologie:
la topologia **banale** o **indiscreta**, ottenuta scegliendo $\mathfrak{T} = \{\varnothing, \mathbf{S}\}$, e la topologia **discreta**, ottenuta scegliendo $\mathfrak{T} = \wp(\mathbf{S})$.

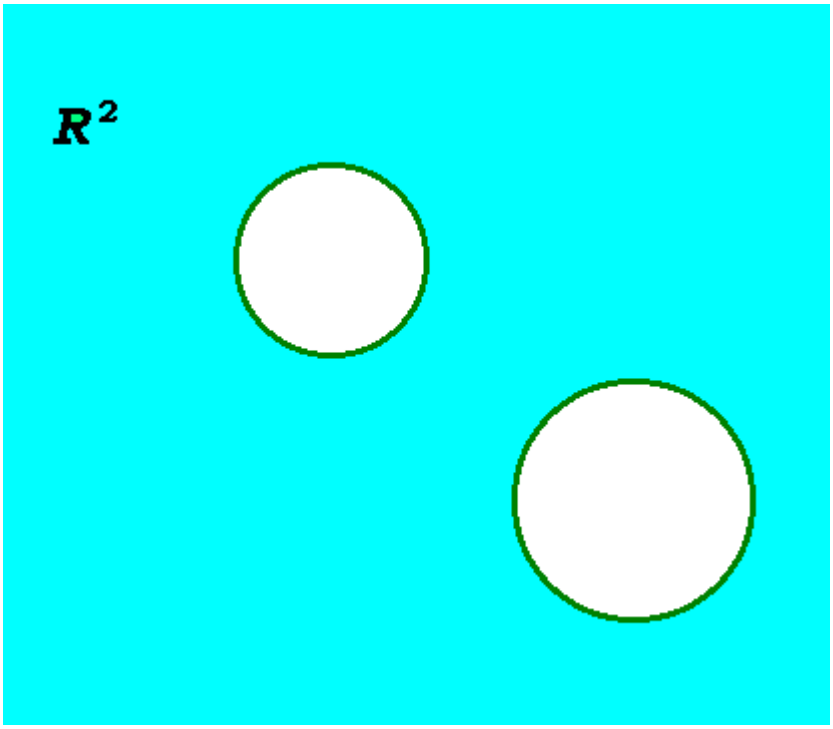
È evidente che è possibile assegnare su uno stesso insieme topologie profondamente diverse.

Per esempio, su $\mathbf{R^n}$ assegniamo come aperti: il vuoto, $\mathbf{R^n}$ stesso e le sfere concentriche $B_r(a)$ con a prefissato ed r variabile. Questa topologia prende il nome di **topologia del tiro al bersaglio di centro *a***, ed i suoi aperti sono aperti anche nella topologia naturale. Non vale, però il viceversa: la sfera $B_r(b)$ con $b \neq a$ è un aperto della topologia naturale, ma non lo è per la topologia del tiro al bersaglio.

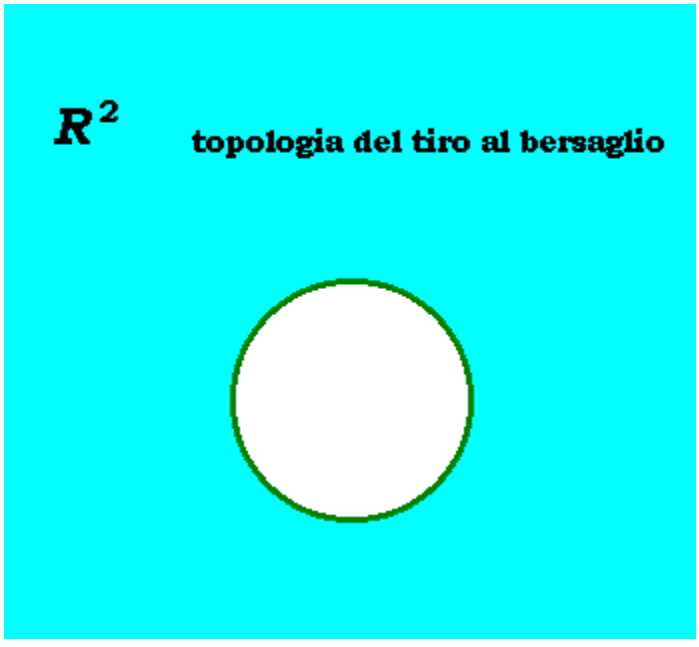
Per visualizzare la situazione in $\mathbf{R^2}$, ci serviamo del **piano cartesiano**.
La figura seguente mostra quattro dischi senza la circonferenza di bordo (sfere nel piano). Sono tutti aperti della topologia naturale, i tre dischi concentrici tratteggiati sono aperti anche nella topologia del tiro al bersaglio, in cui quello colorato in blu non è un aperto.



Mostriamo infine qualche esempio di insiemi **chiusi**.
Tutto $\mathbf{R^2}$ privato dell'unione delle due sfere aperte (in bianco) è un chiuso nella topologia naturale: infatti l'unione delle due sfere è ancora un aperto ed il suo complementare è quindi un chiuso.

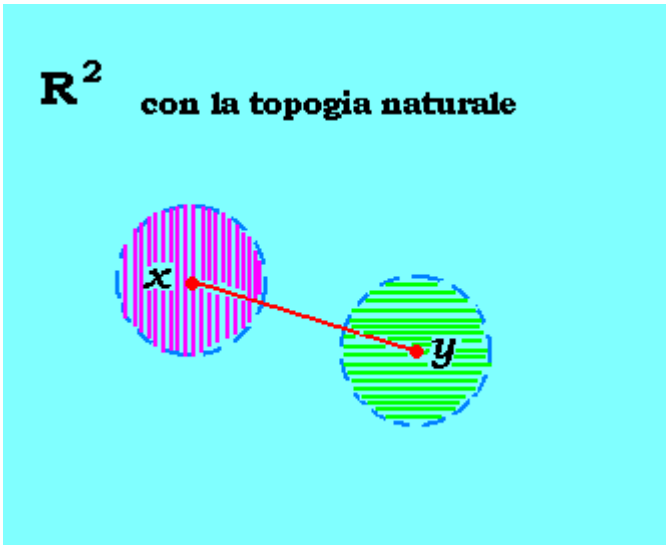


La stessa conclusione non vale nel caso della topologia del tiro al bersaglio di centro *a*, in cui l'unione di sfere è un aperto solo se è ancora una sfera di centro *a* e quindi se le due sfere date sono concentriche in *a*.
I chiusi, in questo caso sono:
il vuoto come complementare di $\mathbf{R^2}$, $\mathbf{R^2}$ come complementare del vuoto ed il complementare di ognuna delle sfere concentriche.

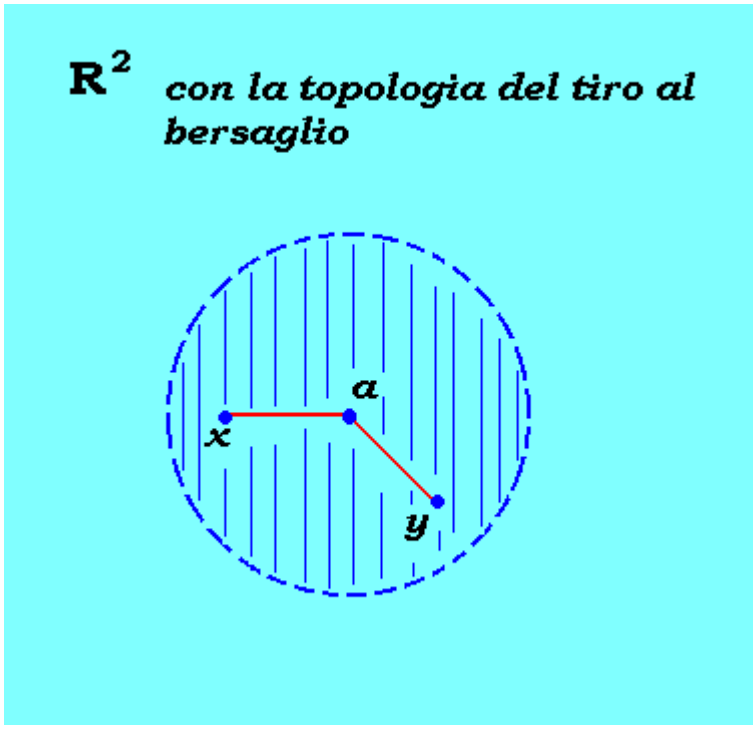


Uno spazio topologico $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ si dice **separato** o di **Hausdorff** se verifica il seguente assioma:
per ogni x, y in $\boldsymbol{S}$, $x \neq y$, esiste un aperto U contenente x ed esiste un aperto V contenente y tali che $U \cap V = \varnothing$.

È facile verificare che $\mathbf{R}^2$ con la topologia naturale è di Hausdorff: infatti, comunque si considerino due elementi distinti x, y di $\mathbf{R}^2$, posto $r = \mathrm{d}(x, y)/3$, si ha $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$.



Invece, $\mathbf{R}^2$ con la topologia del tiro al bersaglio di centro a non è di Hausdorff: infatti, se si considerano due elementi distinti x, y tali che $\mathrm{d}(x, a) = \mathrm{d}(y, a)$, allora ogni aperto contenente x contiene anche y e viceversa.



La nozione di **continuità** per un'applicazione di variabile reale ed a valori reali, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, perfezionatasi nel XIX secolo per merito di **Cauchy**, **Riemann**, Heine e Weierstrass, si può esprimere mediante la condizione che essa trasformi, per immagine reciproca, aperti di **R** in aperti di **R** (per la topologia naturale).

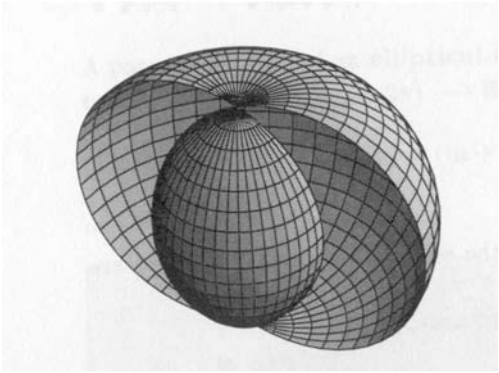
È immediata la generalizzazione al caso più astratto.
Siano $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})$ e $(\boldsymbol{S'},\boldsymbol{T'})$ due spazi topologici e $f : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S'}$ un'applicazione.

f si dice **continua** se:

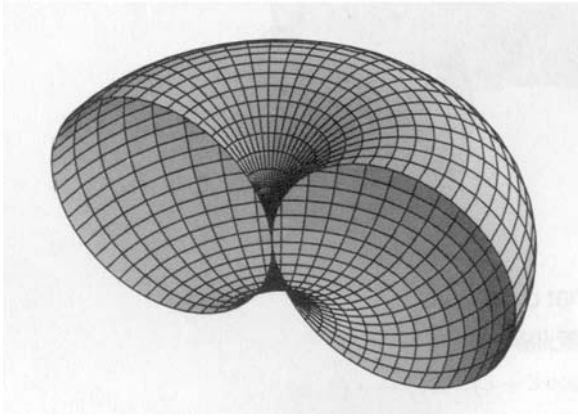
per ogni aperto A' di $(\boldsymbol{S'},\boldsymbol{T'})$, $f^{-1}(A')$ è un aperto di $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})$.

Il toro

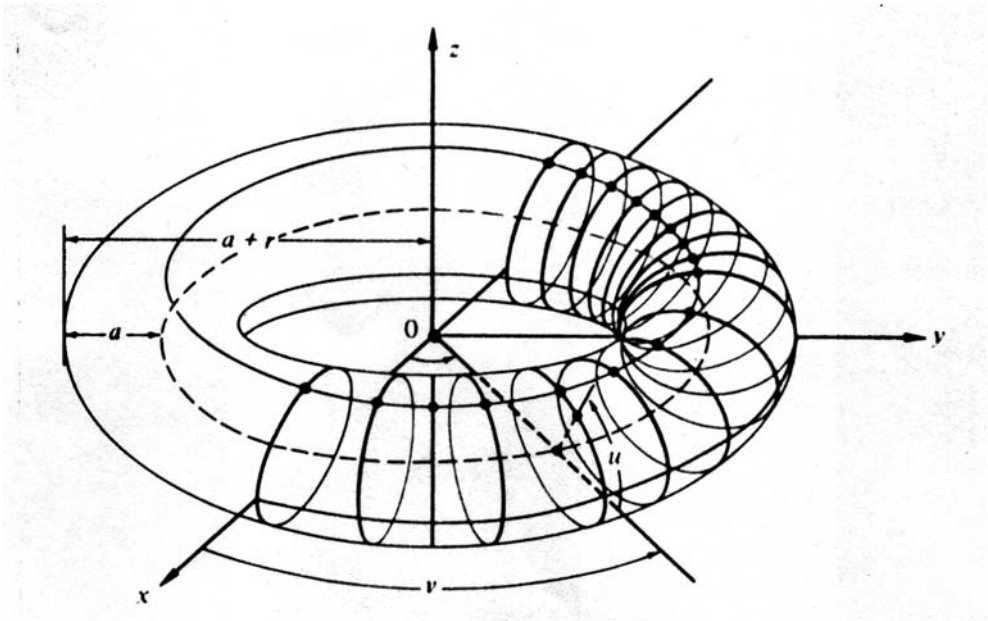
È una superficie di rivoluzione immersa in $\mathbf{R}^3$, ottenuta facendo ruotare una circonferenza, posta su un piano contenente l'asse *z*, attorno all'asse *z* stesso. Con questo procedimento si ottengono tre tipi di superficie a seconda che la circonferenza che ruota sia secante, tangente o esterna all'asse di rotazione.
Nel primo caso si ottiene il toro detto "inside-out o horn torus",



nel secondo caso, si ottiene il toro detto "splindle torus",



nell'ultimo caso si ottiene il toro propriamente detto $\mathbf{T}^2$, o toro ad anello.

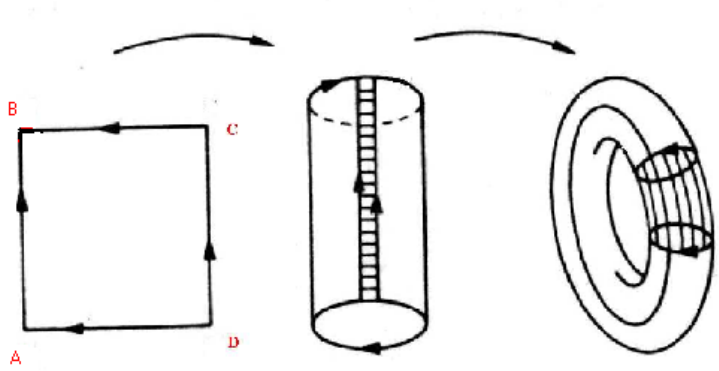


Le sezioni con piani passanti per l'asse z si dicono *meridiani*, quelle ottenute con piani perpendicolari all'asse z, cioè le curve descritte dai punti nella rotazione, sono circonferenze e si dicono *paralleli*.
$\mathbf{T^2}$ è parametrizzato dall'applicazione $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ definita da:

$$f(u,v) = ((r + a\cos u)\cos v,\ (r + a\cos u)\operatorname{sen} v,\ a\operatorname{sen} u).$$

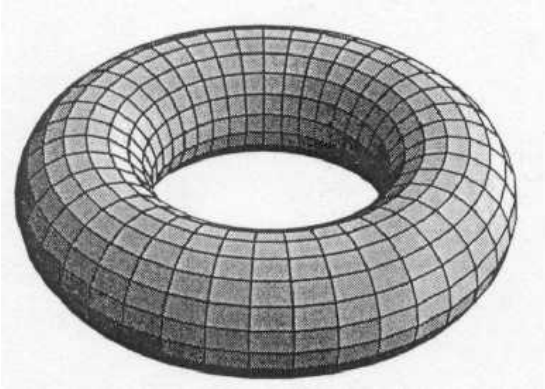
Questa parametrizzazione, che è globale, è regolare ma non ingettiva, essendo *seno* e *coseno* funzioni periodiche, e quindi non può essere considerata una carta se si considera $\mathbf{T^2}$ come varietà differenziabile.

Un altro modo per realizzare il toro è il seguente:

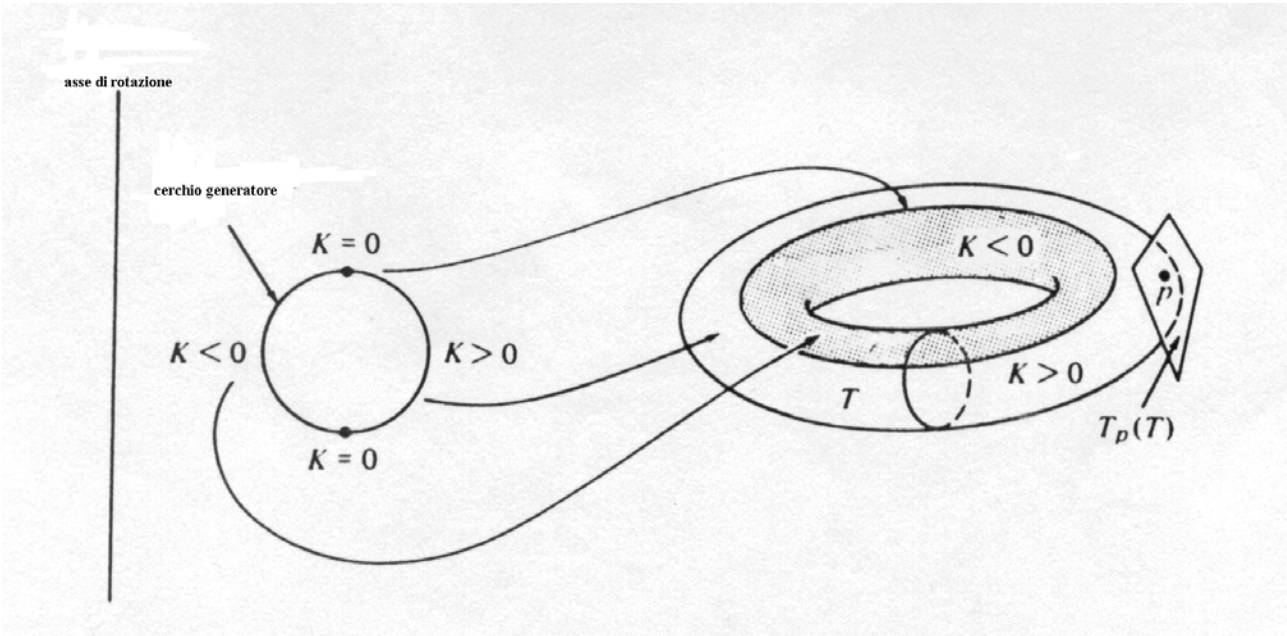


Si considera un quadrato *ABCD* con i lati opposti orientati in modo concorde, ad esempio come in figura. Si arrotola il quadrato fino ad identificare (incollare) i lati *AB* e *DC* rispettando l'orientazione. Si ottiene un cilindro i cui bordi sono equiorientati.
Si deforma il cilindro fino ad incollare i due bordi con le relative orientazioni.

Si è ottenuto il toro $\mathbf{T^2}$:



Questa superficie ha due proprietà fondamentali: è orientabile e presenta tutte le possibilità per il segno della **curvatura di Gauss**. Esistono, cioè, punti con $K>0$ (punti ***ellittici***), punti con $K=0$ (punti ***parabolici***) e punti con $K<0$ (punti ***iperbolici***) distribuiti come in figura:

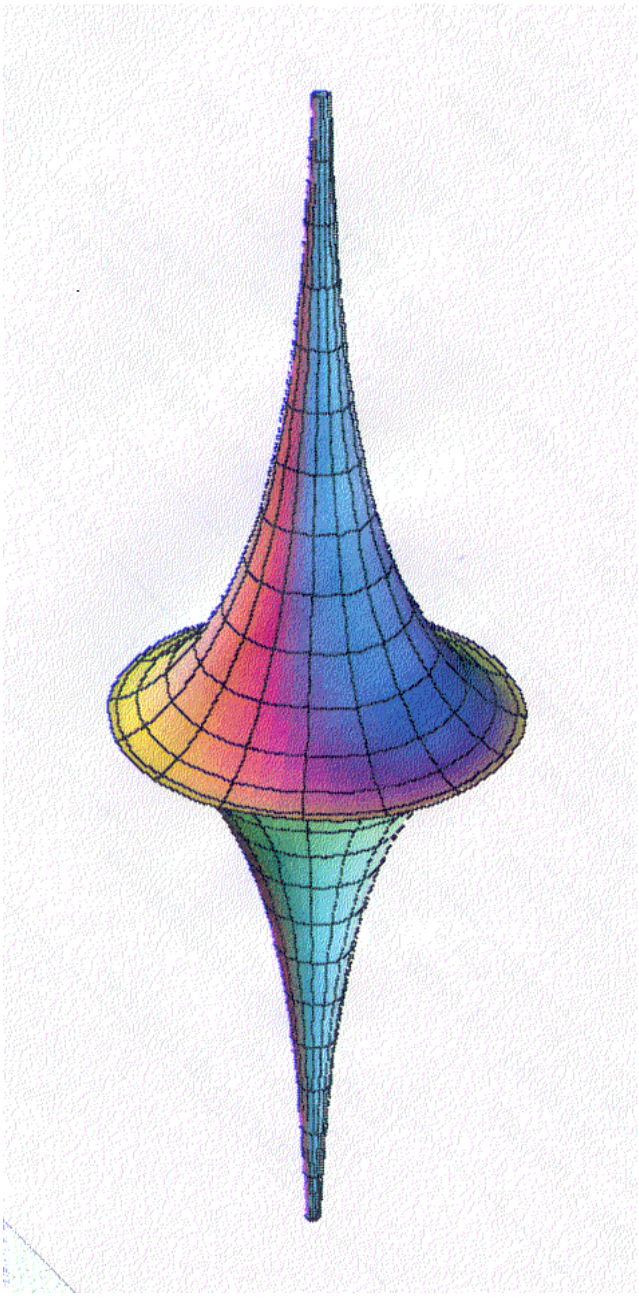


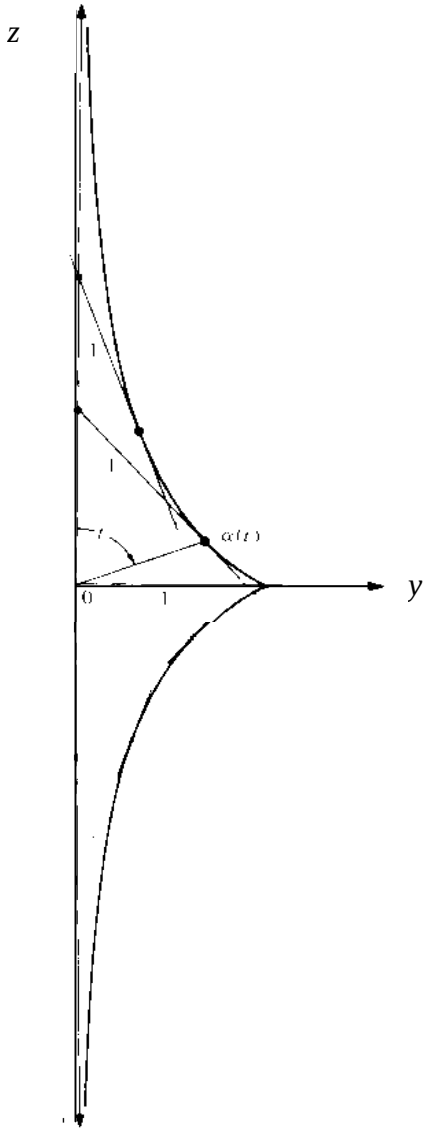
Il toro negli studi prospettici di Piero della Francesca

La superficie di Beltrami o pseudosfera

Una parametrizzazione di questa superficie è data da:

$\Gamma(\varphi,\vartheta) = (\text{sen}\vartheta\cos\varphi\ ,\ \text{sen}\vartheta\,\text{sen}\varphi\ ,\ \cos\vartheta + \log\tan(\vartheta/2)\ )$



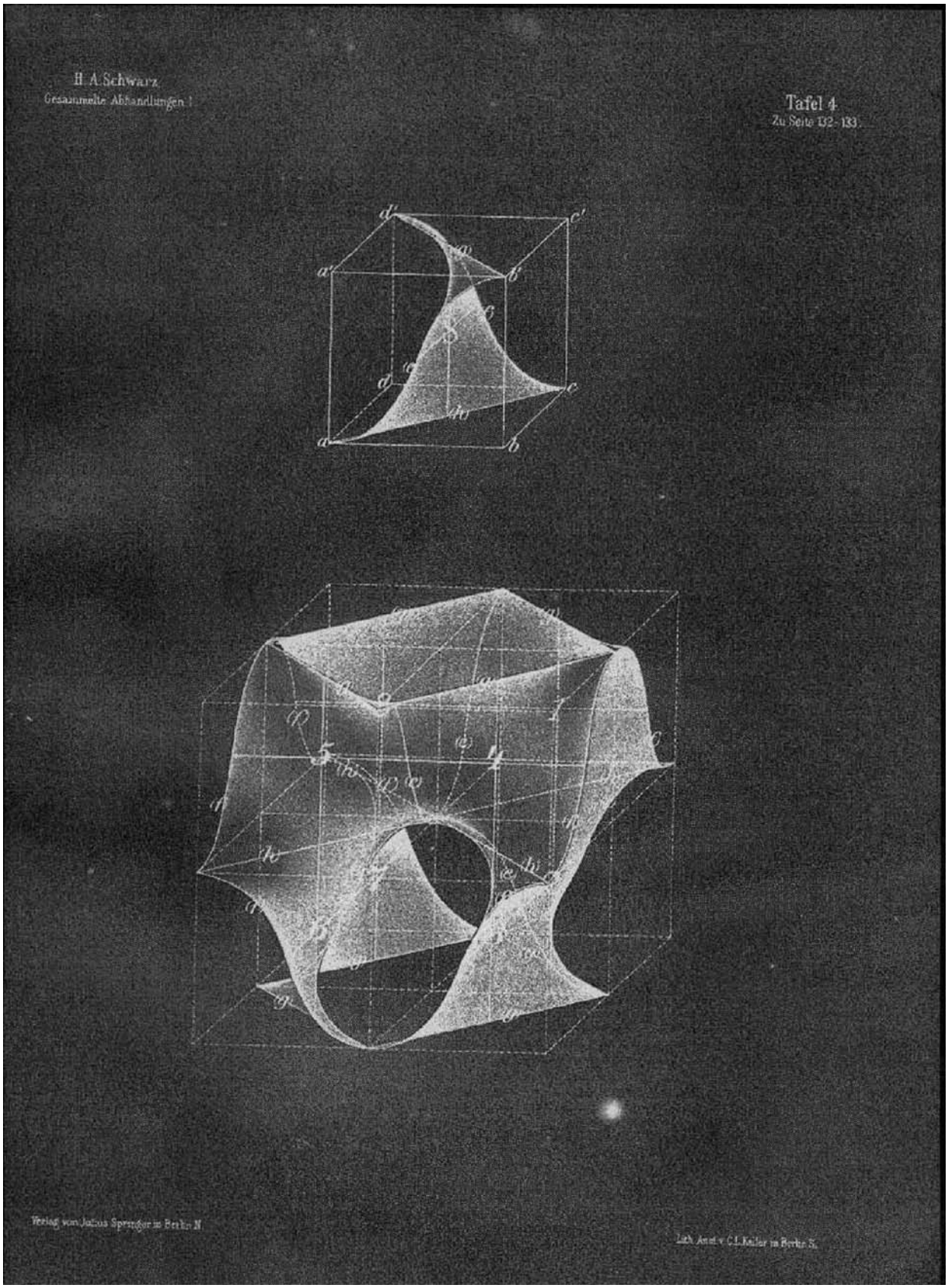


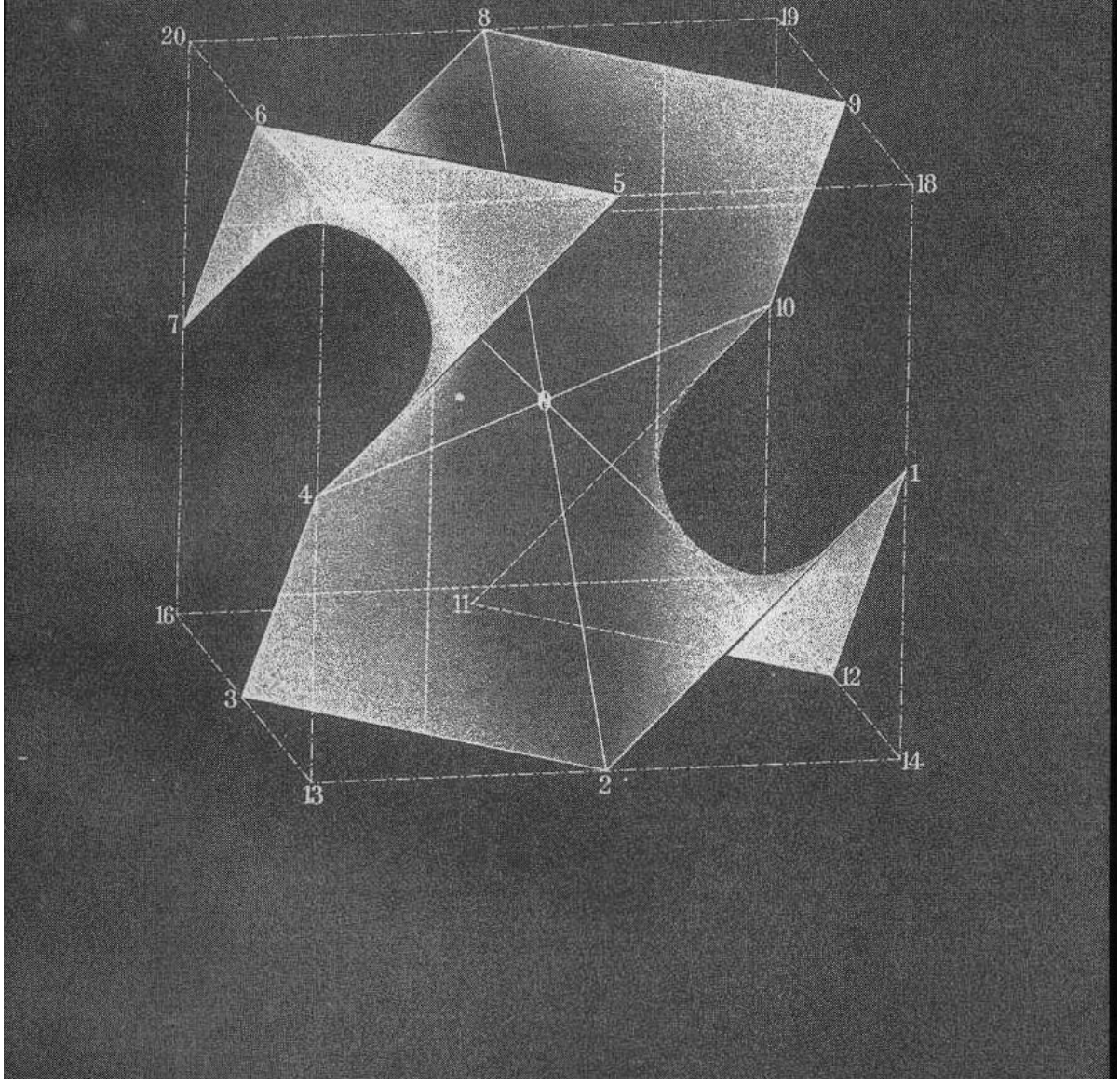
È ottenibile mediante rotazione attorno all'asse z della curva trattrice (scoperta da **Huyghens**), rappresentata nel piano yz da:

$\gamma(\vartheta) = (\text{sen}\vartheta\ ,\ \cos\vartheta + \log\tan(\vartheta/2)\ ).$

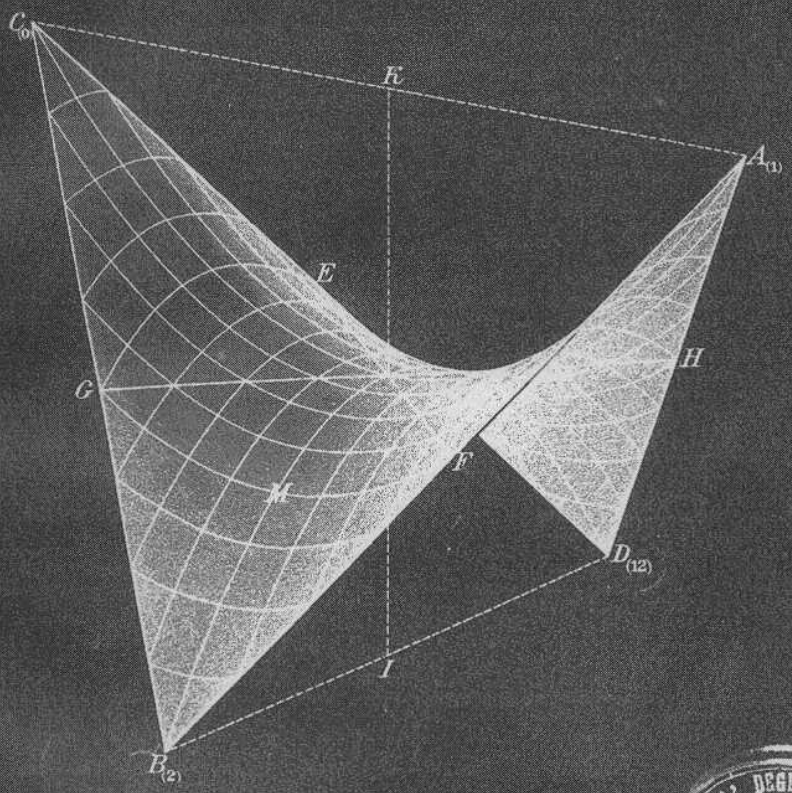
La **curvatura di Gauss** nei punti regolari della pseudosfera è negativa, $K = -1$.

3 superficie immerse in R^3




20
8
19
6
9
5
18
7
10
0
4
1
11
16
12
3
14
13
2

Tafel 1.
Zu Seite 3 Modell I.



UNIVERSITA' DEGLI STUDI - PARMA
ISTITUTO
DI
MATEMATICA
FACOLTA' DI SCIENZE

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Lith. Anst. v. C. L. Keller in Berlin S.

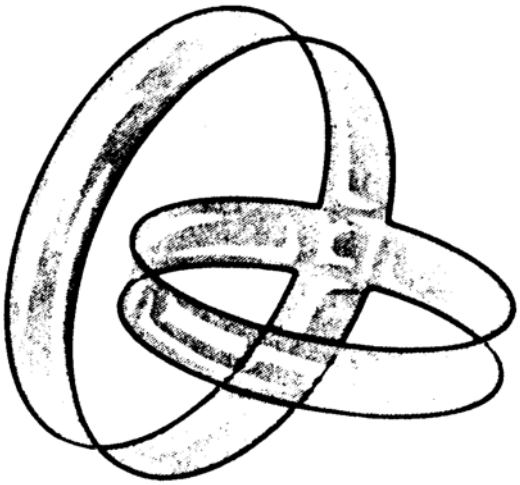
Le superficie minimali

La nozione di superficie minimale risale al 1760 e si incontra, probabilmente per la prima volta, negli studi condotti da **Lagrange** sulle superficie in $\mathbf{R}^3$ che sono grafici di funzioni differenziabili di classe C^2 del tipo $z = f(x,y)$. Nel 1776 Meusnier diede la seguente caratterizzazione: una superficie minimale è una superficie regolare con curvatura media $\boldsymbol{H}$ nulla in ogni suo punto.
Un'interpretazione geometrica che giustifica, in qualche modo, il termine minimale è la seguente.
Per un'assegnata superficie parametrizzata regolare f si considera localmente una variazione normale $(f_t)_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$; per ogni superficie parametrizzata della variazione si calcola l'area $A(t)$ e si prova che f è minimale se e solo se per la derivata si ha $A'(0) = 0$ per ogni variazione normale locale.

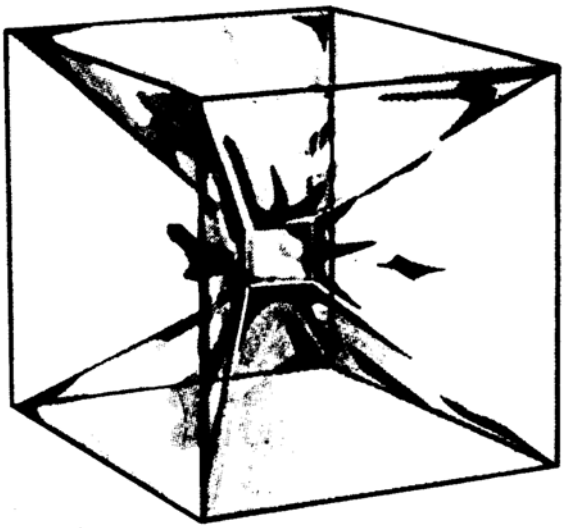
Lo studio delle superfici minimali è legato anche ad un celebre problema di calcolo delle variazioni, noto come **problema di Plateau**.
Plateau fu un fisico belga, che, negli anni intorno al 1850, condusse diversi esperimenti sulle **pellicole di sapone**.
Il problema di **Plateau** può essere formulato, con un buon grado di semplificazione, nel modo seguente: *"Provare che per ogni curva chiusa C in* $\mathbf{R}^3$*, esiste una superficie di area minima avente C come bordo".*
L'esempio più semplice si ottiene considerando un cerchio come bordo assegnato; la superficie minimale corrispondente è quella del disco interno al cerchio.
La formulazione precisa è la seguente:
Assegnata una curva C, semplice (senza autointersezioni), chiusa, rettificabile in $\mathbf{R}^3$*, esiste sempre un'applicazione continua* $g : D \cup \partial D \to \mathbf{R}^3$ *tale che* $g_{|D} = f$ *è una superficie minimale e* $g_{|\partial D} : \partial D \to C$ *è un omeomorfismo (cioè un'applicazione continua, bigettiva, con inversa continua)?*
Precisiamo che $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ è il disco aperto di $\mathbf{R}^2$ e ∂D è il suo bordo, costituito dal cerchio $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
La prima soluzione, detta classica, del problema di **Plateau** risale al 1930 ad opera, indipendentemente, di **T. Radó** e **J. Douglas**. Essi dovettero ammettere anche superficie con possibili singolarità isolate. Nel 1970, però, **Osserman** ha escluso la presenza di tali singolarità nella soluzione classica.

Esempi di superficie minimali: **Elicoide**, **Catenoide**, **La superficie di Enneper**, **La superficie di Scherk**

Le pellicole di sapone

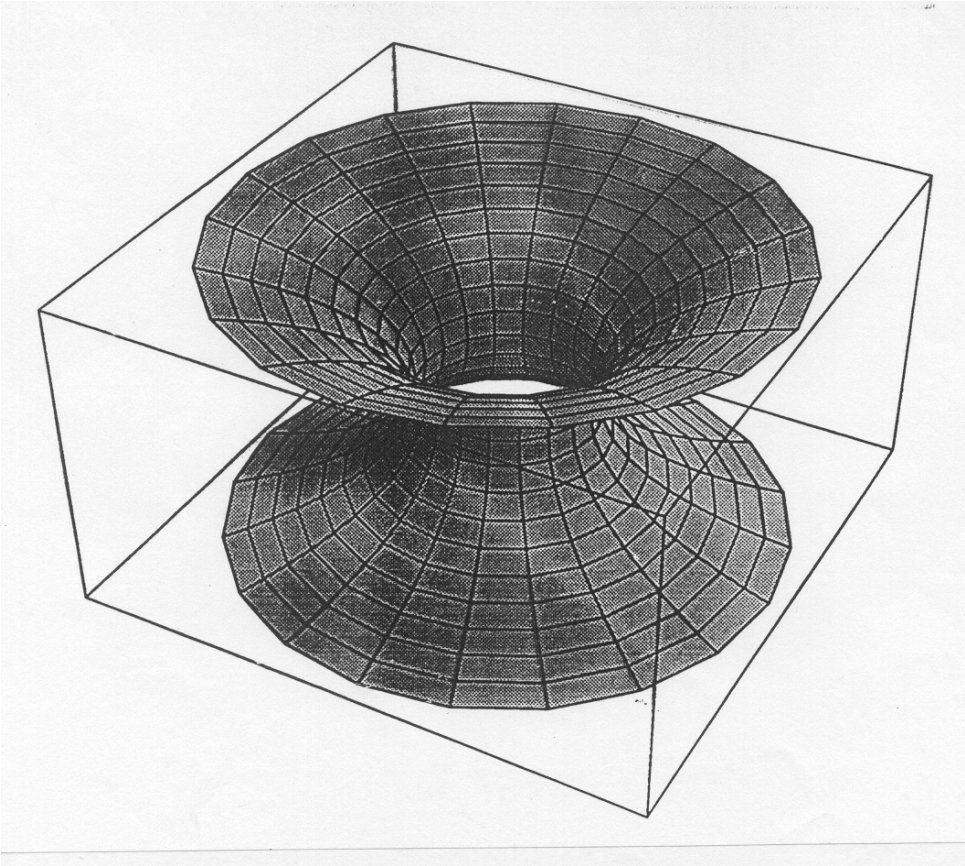


Le pellicole di sapone si ottengono sperimentalmente immergendo in una soluzione saponata una qualunque figura costruita con filo di ferro ed estraendola lentamente.
La pellicola assume allora una configurazione tale che, in ogni suo punto regolare, la curvatura media è nulla.
Questo è dunque un modo per costruire **superficie minimali**.
Naturalmente, non tutte le pellicole sono minimali, poiché possono presentare punti singolari, come avviene ad esempio se il supporto metallico ha la forma di un cubo; si hanno, allora, singolarità lungo linee.



La superficie catenoide

È una superficie descritta dalla rotazione della **curva catenaria** e tra le superficie di rivoluzione è l'unica **superficie minimale**.



Catenoide ed **elicoide** furono scoperte da **Meusnier** nel 1776 e fino al 1835 rimasero le uniche superficie minimali note.
Nel 1835 **Scherk** trovò altri esempi di superficie minimali.
Una parametrizzazione della superficie catenoide è data da:

$\Gamma(\varphi,\vartheta) = (\cosh\vartheta\cos\varphi\ ,\ \cosh\vartheta\,\mathrm{sen}\varphi\ ,\ \vartheta\ )$ $\qquad 0 < \varphi\ < 2\pi,\ \ \vartheta \in \mathbf{R}$

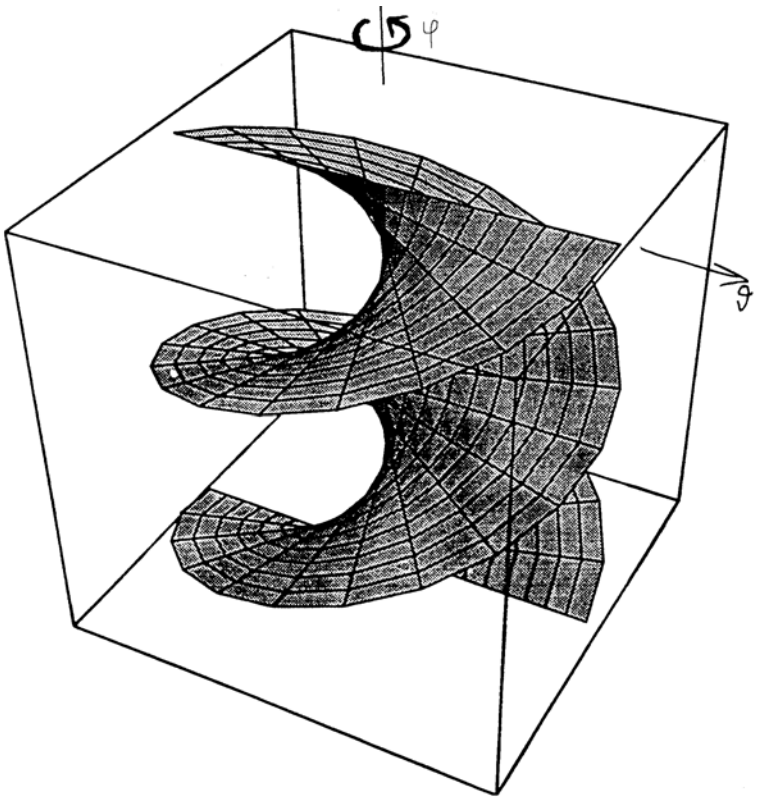
che è uguale alla parte reale del vettore

$((e^{z} + e^{-z})/2,\ \ (e^{z} - e^{-z})/2i,\ z)$

le cui componenti sono funzioni olomorfe nella variabile complessa
$z = \vartheta + i\,\varphi$.

L'elicoide

È una superficie *rigata*. Infatti, può essere geometricamente generata da una retta *r* incidente perpendicolarmente un asse *a*, che si muove lungo *a* e ruota attorno ad *a* con velocità costante in entrambi i casi. Si tratta di una **superficie minimale**; anzi, eccettuato il piano, è l'unica rigata minimale.



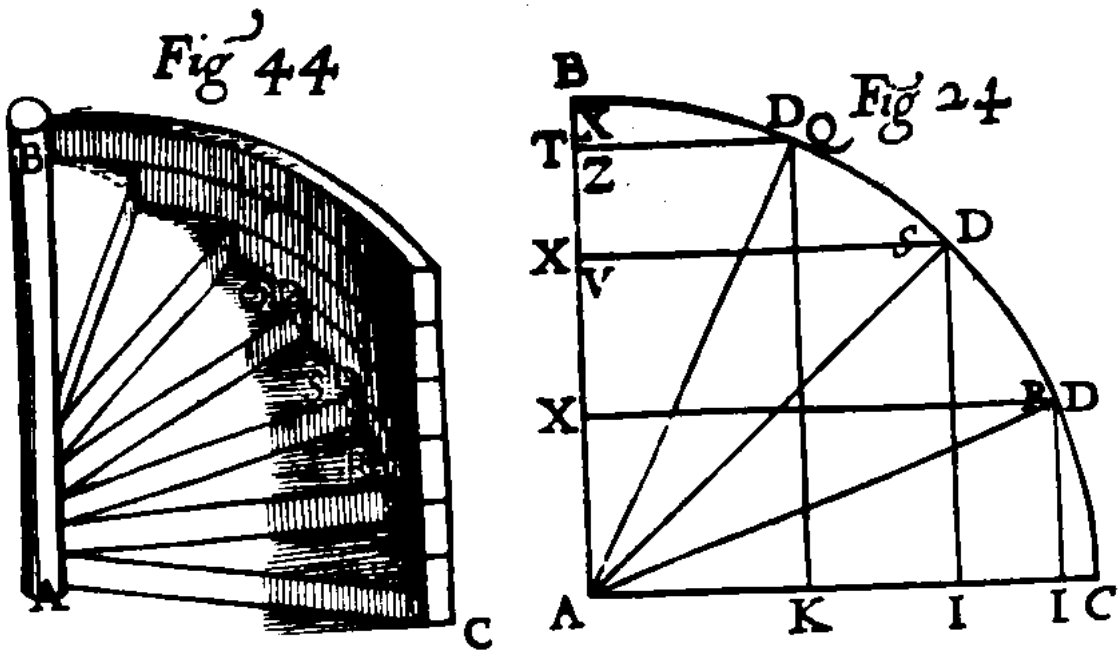
Elicoide e **catenoide** furono scoperte da **Meusnier** nel 1776 e, fino al 1835, esse rimasero le uniche superficie minimali note.
Nel 1835 **Scherk** trovò altri esempi di superficie minimali.
Una parametrizzazione dell'elicoide è data da:

$\Gamma(\varphi,\vartheta) = (\vartheta \cos\varphi\ ,\ \vartheta \operatorname{sen}\varphi\ ,\ \varphi\ )$ $\qquad 0 < \varphi < 2\pi,\ \ \vartheta \in \mathbf{R}$

Il piano e l'elicoide sono esempi di superficie semplicemente connessa, cioè godono della seguente proprietà: *Ogni curva chiusa sulla superficie può essere deformata con continuità, rimanendo sempre sulla superficie, fino a divenire un punto.*
È ancora senza risposta la seguente domanda: *esistono altre superficie minimali che siano semplicemente connesse?*

L'elicoide nella realtà:
La ***coclea*** di **Archimede**
Scale a chiocciola

Scale elicoidali



(da una lettera di **Pascal** a M. Sluze, canonico della cattedrale di Liegi)



Scala antincendio della residenza universitaria di Angers, Francia.

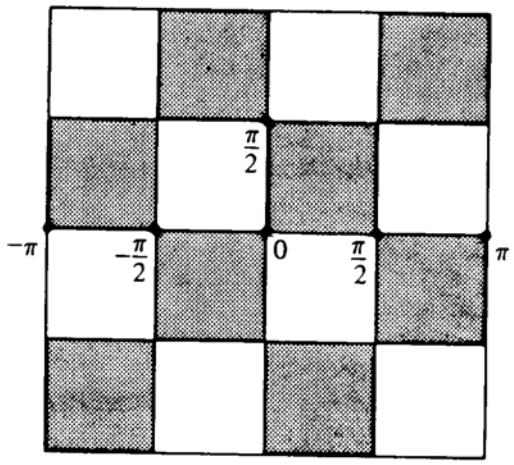
La superficie minimale di Scherk

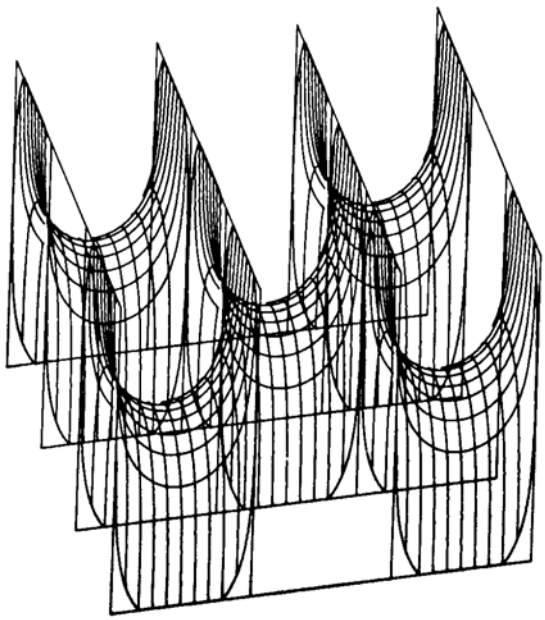
Questa superficie fu scoperta da **Scherk** nel 1835.
Fino ad allora, gli unici esempi noti di superficie minimali erano: **elicoide** e **catenoide**.
Una parametrizzazione è data da:

$$\Gamma(u,v) = (\arg((\zeta+i)/(\zeta-i)), \arg((\zeta+1)/(\zeta-1)), \log|(\zeta^2+1)/(\zeta^2-1)|)$$

dove $\zeta = u + i\,v$, $\zeta \neq \pm 1$, $\zeta \neq \pm i$ ed $\arg(\zeta)$ è l'angolo che l'asse reale forma con ζ.
In coordinate cartesiane si ottiene $z = \log(\cos y / \cos x)$.

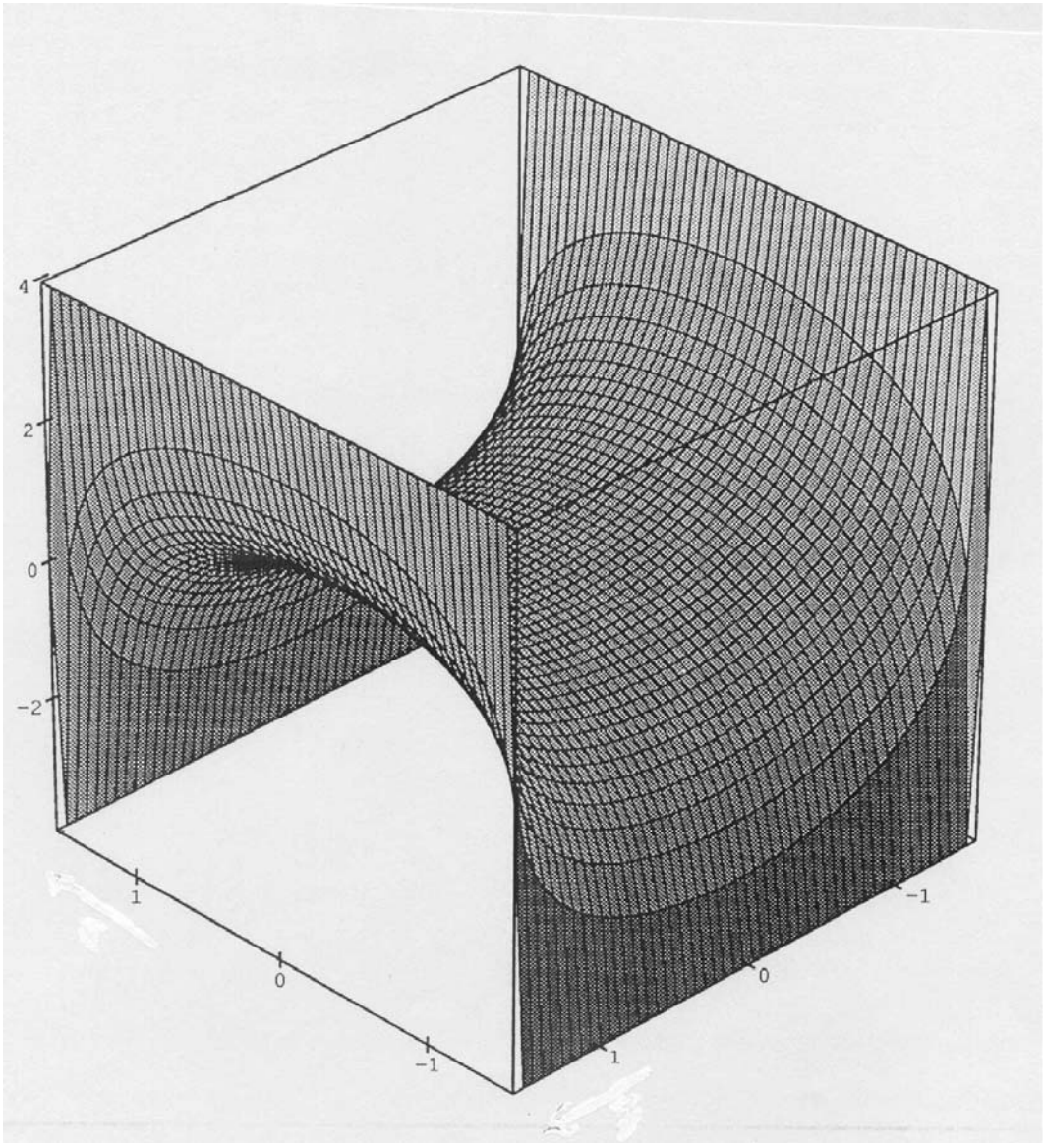
Questa parametrizzazione è definita su una scacchiera con esclusione dei vertici dei quadrati, sui quali la superficie è in realtà costituita da rette verticali.





Una parte della superficie di Scherk

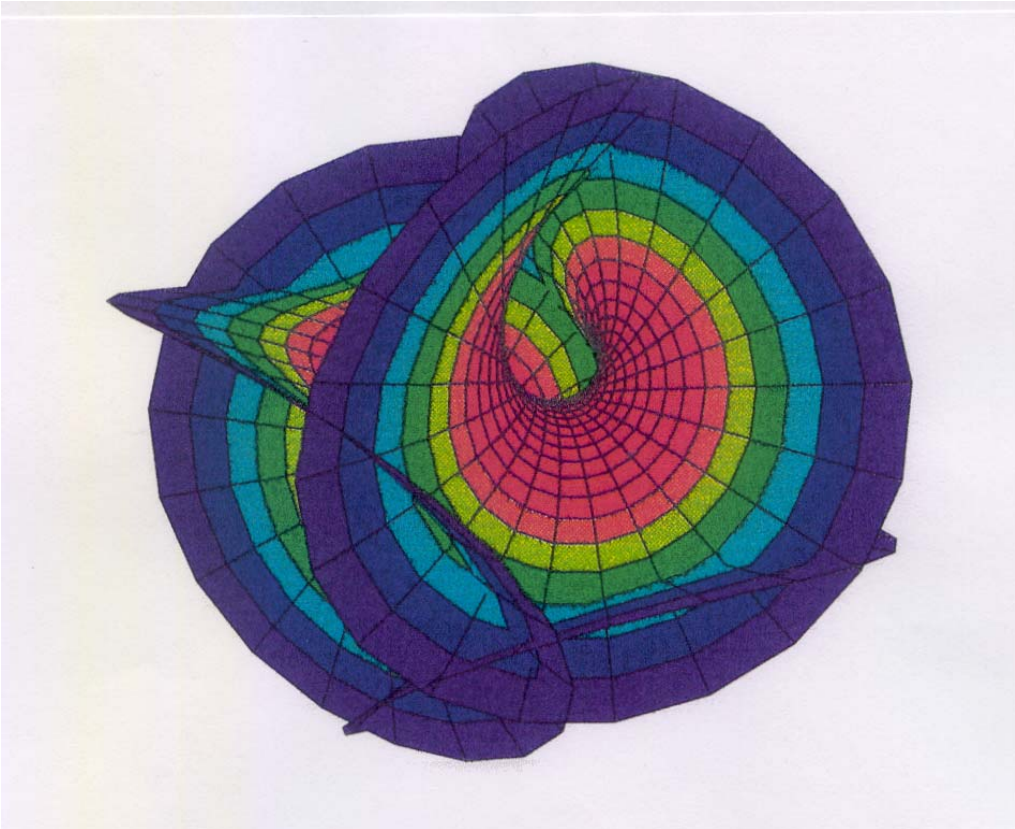
Una parte della superficie di Scherk



La superficie minimale di Enneper di grado 2 colorata in funzione della curvatura di Gauss

Una parametrizzazione di questa superficie minimale è data da:

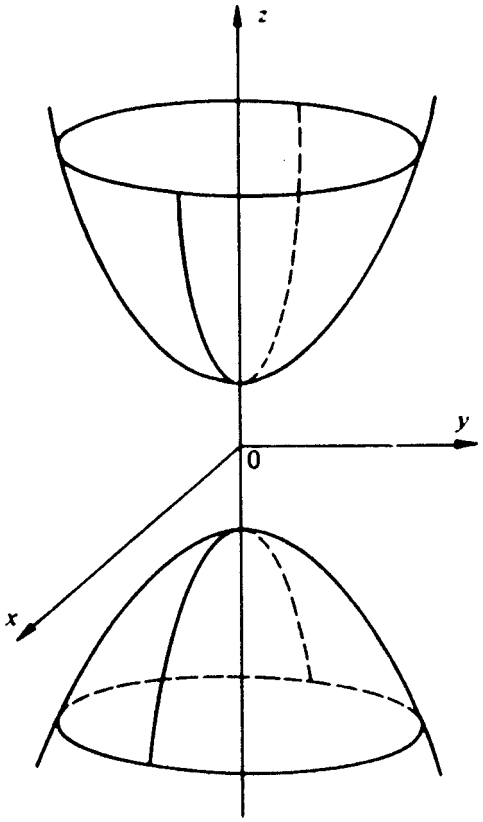
$\Gamma(u,v) = (u - u^3/3 + uv^2 , v - v^3/3 + vu^2 , u^2 - v^2)$ $\quad u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}$



(da: Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces,* CRC Press, London 1993)

L'iperboloide ellittico

È una superficie a punti ellittici, cioè in ogni suo punto *P,* la **curvatura** di **Gauss** è positiva, $K(P) > 0$.



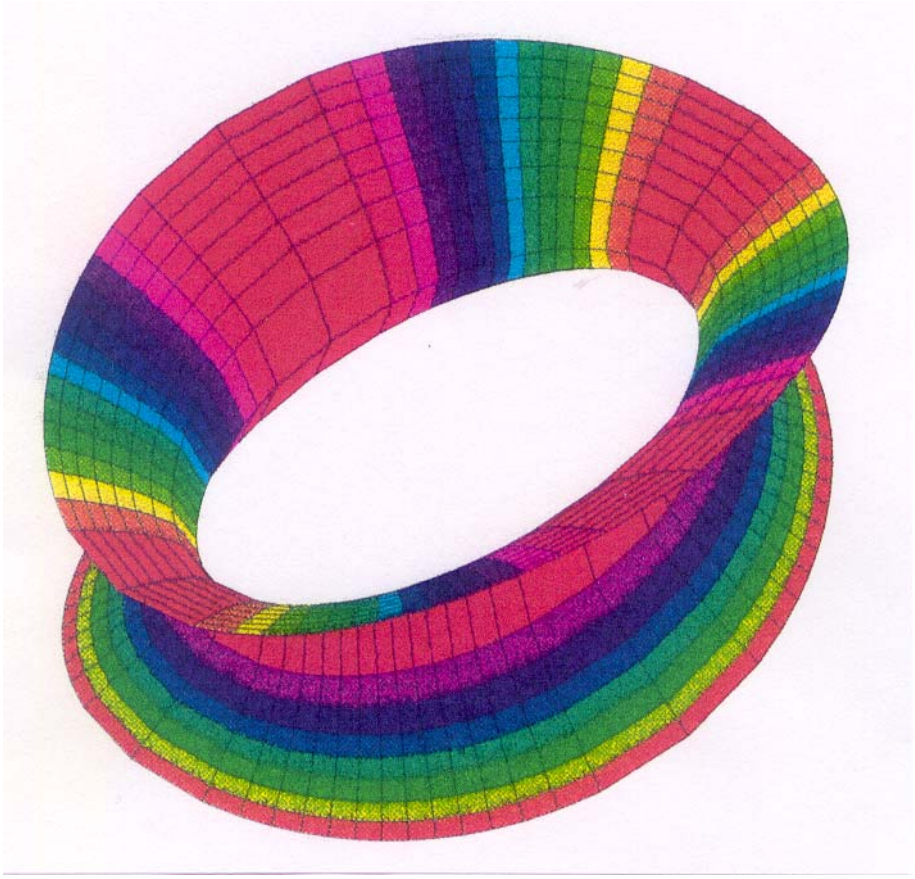
L'iperboloide iperbolico

Un esempio di questo tipo di superficie, chiamata anche *iperboloide ad una falda*, può essere generato dalla rotazione di un'iperbole attorno al suo asse non focale. Si tratta di una superficie a punti iperbolici, cioè in ogni suo punto *P* la **curvatura** di **Gauss** è negativa, *K(P) < 0.*
La rotazione della stessa iperbole attorno al suo asse focale genera una superficie detta **iperboloide ellittico** *o iperboloide a due falde,* che risulta essere a punti ellittici, cioè in ogni suo punto *P* la curvatura di Gauss è positiva, *K (P) > 0.*

Presentiamo dal testo di **Alfred Gray**, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces,* C R C Press 1993:

- **l'iperboloide iperbolico colorato in funzione della curvatura di Gauss ed in funzione della curvatura media**
- **l'iperboloide iperbolico con l'indicazione delle linee di curvatura principale**

L’ iperboloide iperbolico con l’indicazione delle linee di curvatura principale

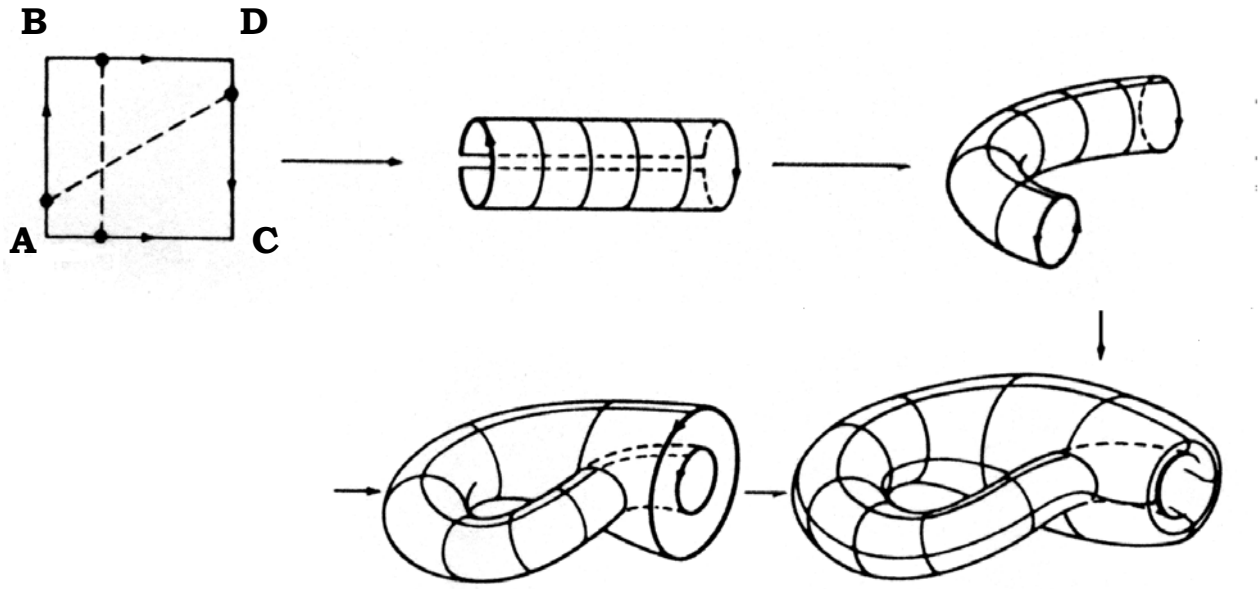


L’ iperboloide iperbolico colorato in funzione della curvatura di Gauss ed in funzione della curvatura media

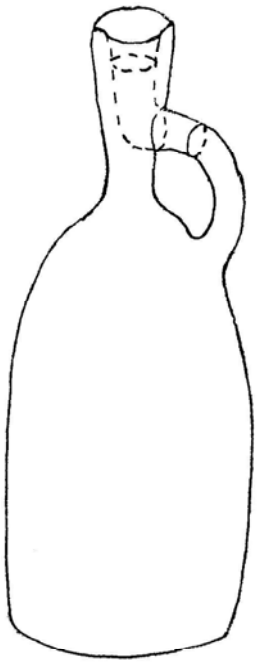


La bottiglia di Klein

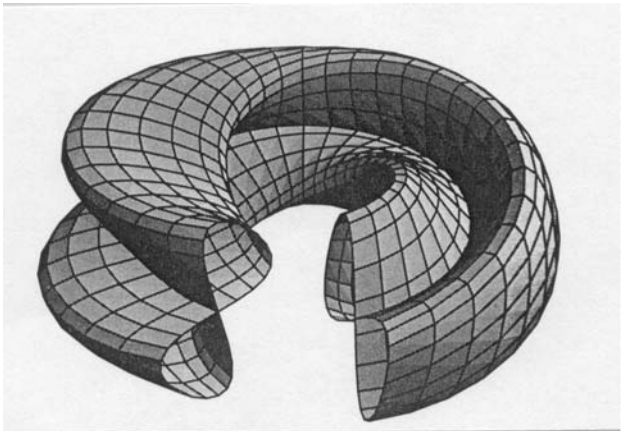
Questa superficie è una superficie astratta, costruibile nel modo seguente.
Si considera un rettangolo ***ABCD*** con una coppia di lati opposti orientati in modo discorde e si identifica ***AC*** con ***BD***, rispettando le orientazioni assegnate su di essi.
Si ottiene un cilindro con i bordi (circonferenze di base) orientati in modo discorde.
Si identificano le due basi in modo che si sovrappongano le loro orientazioni.



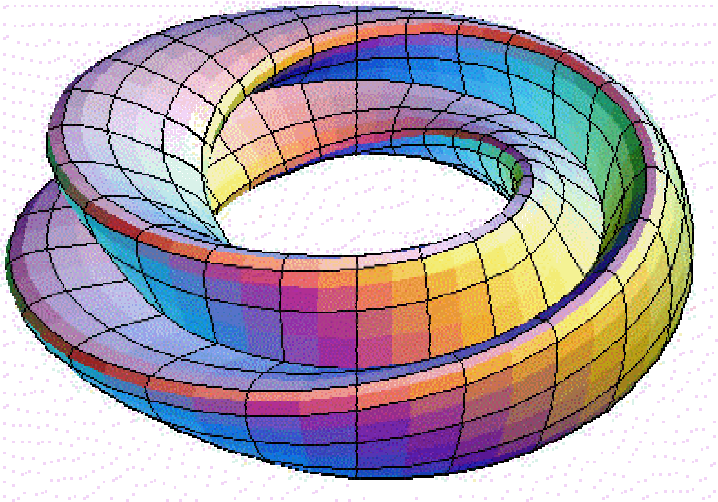
La superficie che si ottiene non è immergibile in $\mathbf{R^3}$, se non consentendo autointersezioni, ed in tal caso, a meno di deformazioni continue, essa assume la caratteristica forma a "bottiglia".



Un altro tipo di bottiglia di Klein si ottiene in modo analogo al **nastro di Möbius**, facendo ruotare una *figura ad otto* lungo una circonferenza.



Ecco il risultato finale:



(da: **http://rsp.math.brandeis.edu/**)

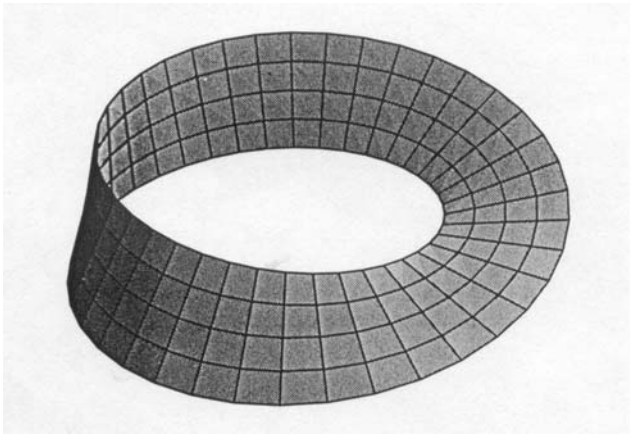
Il nastro di Möbius

È una superficie non orientabile, ad una faccia, immersa in $\mathbf{R}^3$.
Può essere costruita nel modo seguente.

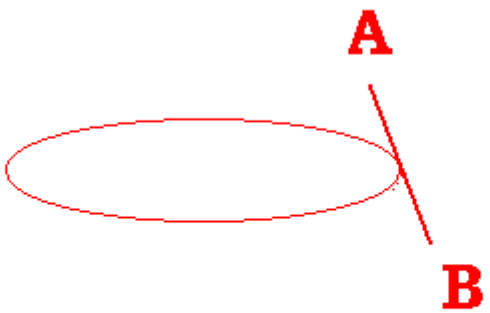
Si considera un rettangolo ***ABCD*** e si identificano i lati opposti ***DA*** e ***BC*** facendo coincidere le due orientazioni su di essi e quindi ***A*** con ***C*** e ***D*** con ***B***.



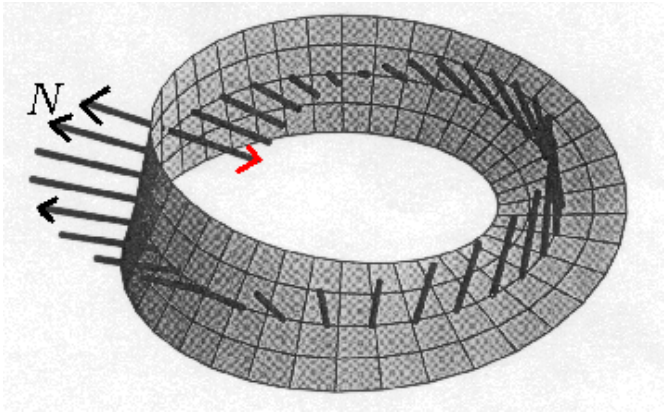
Si ottiene:



Un altro modo per realizzare il nastro di Möbius è quello di considerare una circonferenza Γ ed un segmento ***AB*** non contenuto nel piano di Γ ed incidente Γ nel proprio punto medio. Si muove il segmento lungo la circonferenza facendolo simultaneamente ruotare di un angolo di 180° tra la posizione iniziale e quella finale.

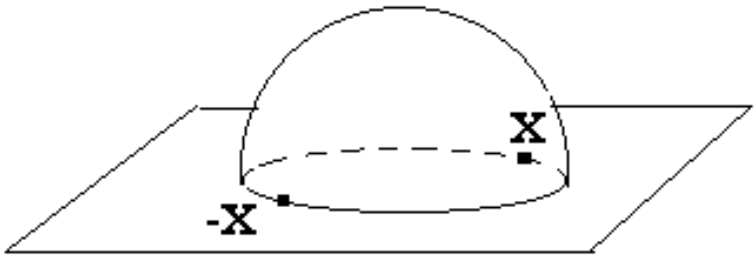


Da un punto di vista intuitivo, la non orientabilità si può spiegare osservando che, se si orienta la normale ***N*** in uno dei due modi possibili in un certo punto considerato come posizione iniziale, quando si raggiunge lo stesso punto dopo aver compiuto un giro completo sulla superficie, l'orientazione di ***N*** si è mutata nell'orientazione opposta.



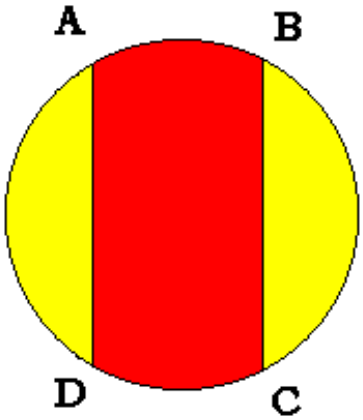
La non orientabilità del nastro di Möbius implica la non orientabilità del **piano proiettivo reale**.

Infatti, uno dei modelli del piano proiettivo reale è costituito da una semisfera (intesa come semisuperficie sferica) con bordo, sul quale sono stati identificati punti antipodali, ovvero punti simmetrici rispetto al centro della sfera.



Proiettando ortogonalmente i punti della semisfera sul piano equatoriale si ottiene un *disco con bordo* e quindi, identificando i punti antipodali del bordo, si ha un nuovo modello del piano proiettivo reale.

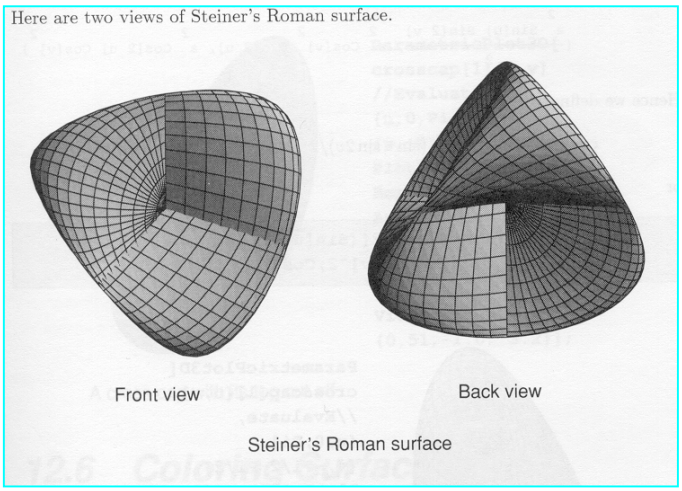
Sul disco, consideriamo un "rettangolo" ***ABCD*** in cui ***AB*** e ***CD*** sono archi del bordo di lunghezza minore di π e tali che i punti ***A*** e ***B*** siano, rispettivamente, simmetrici di ***C*** e ***D*** rispetto al centro del disco.



Nell'operazione di identificazione di punti antipodali sul bordo, mentre il disco dà il piano proiettivo, il rettangolo ***ABCD*** dà un nastro di Möbius. Dunque il piano proiettivo reale contiene un nastro di Möbius e quindi non è orientabile.

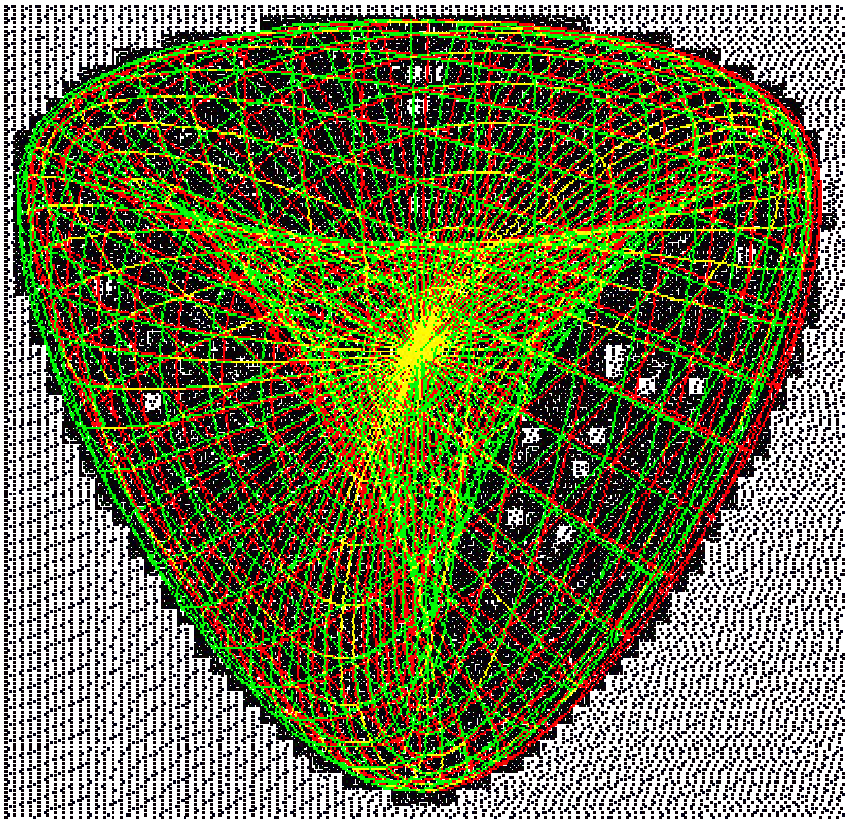
La superficie romana di Steiner

È evidente che tutti i modelli descritti per il piano ellittico, a differenza di quanto avviene nel caso iperbolico, non sono immergibili né nel piano né nello spazio Euclideo, cioè non sono realizzabili in modo fedele (ingettivo) facendo corrispondere a punti distinti di **Ell** punti distinti di $\mathbf{E_2}$ o di $\mathbf{E_3}$. È possibile, però, realizzarli consentendo autointersezioni.
Un esempio di una tale realizzazione è dato dalla superficie che **Jacob Steiner** ideò durante un suo soggiorno a Roma e che è nota come *superficie romana di Steiner.*



Le immagini che riportiamo e la **realizzazione** al computer con il programma ***Mathematica*** sono state selezionate dal testo di **Alfred Gray** dal titolo "*Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*", Studies in advanced mathematics, CRC Press, Inc. 1993.

Un'altra immagine stereo della stessa superficie:
http://rsp.math.brandeis.edu/



Steiner's Roman Surface

When Jacob Steiner visited Rome in 1844 he discovered a surface that is now called Steiner's Roman surface. (See [Apéry, page 37].) It is a realization of the real projective plane. To describe it, we first define a map **roman**: $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ by

$$\mathbf{romanmap}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

or

```
romanmap[{x_,y_,z_}]:={x y, y z, z x}
```

It is obvious that **roman** has the antipodal property; hence **roman** induces a map of $\mathbb{R}P^2(a)$ onto $\mathbf{roman}(S^2(a))$. We call $\mathbf{roman}(S^2(a))$ **Steiner's Roman surface** of radius a. Moreover, we can plot a portion of $\mathbf{roman}(S^2(a))$ by composing **roman** with any patch on $S^2(a)$. For example, let us use the standard parametrization **sphere**$[a]$, defined by $(u, v) \longmapsto (a\cos v \cos u, a\cos v \sin u, a \sin v)$. Then the composition **roman** $\circ$ **sphere**$[a]$ parametrizes all of Steiner's Roman surface of radius a.

To carry out this symbolic computations, we need the *Mathematica* function **Composition**, which composes functions. For example,

```
Composition[Sin,Cos][x]
```

yields

```
Sin[Cos[x]]
```

We can get a parametrization of Steiner's Roman surface with the command:

```
Composition[romanmap,sphere[a]][u,v]//Simplify
```

$$\left\{\frac{a^2\,\mathrm{Cos}[v]^2\,\mathrm{Sin}[2u]}{2},\ \frac{a^2\,\mathrm{Sin}[u]\,\mathrm{Sin}[2v]}{2},\ \frac{a^2\,\mathrm{Cos}[u]\,\mathrm{Sin}[2v]}{2}\right\}$$

Therefore we define

$$\mathbf{roman}[a](u, v) = (a^2/2)(\sin 2u(\cos v)^2, \sin u \sin 2v, \cos u \sin 2v)$$

or

```
roman[a_][u_,v_]:=(a^2/2){Sin[2u]Cos[v]^2,
                          Sin[u]Sin[2v],Cos[u]Sin[2v]}
```

Nicolò Tartaglia (Bressa, oggi Brescia, 1499 - Venezia 1557)



Imparò da solo a leggere, a scrivere, a tradurre dal latino in volgare, e nel 1514 cominciò a studiare da solo nelle scienze matematiche, come egli stesso riferisce nella sua ultima opera ***Il general trattato di numeri et misure***.
Fino a **18-19 anni**, visse a Brescia, ma non esistono notizie certe su come si guadagnasse da vivere, su dove abitasse e con chi vivesse; quindi si trasferì a **Verona** dove si formò una famiglia.
Nel **1534**, Tartaglia lasciò Verona per **Venezia** dove rimase, salvo una breve e drammatica parentesi a Brescia tra il 1548 ed il 1549, fino alla morte avvenuta il **13 dicembre del 1557**.

Opere:

La Nova Scientia (**1537**)

Euclide Megarense **(febbraio del 1543)**

Un primo libro in latino di opere di Archimede **(maggio del 1543)**

Quesiti et Inventioni Diverse **(1546)**

La Travagliata Inventione **(1551)**

Il General Trattato di Numeri et Misure **(1556, 1560)**

Curiosità: **il nome**, **i versi**, **il triangolo aritmetico**.

Il nome

La prima stranezza riguarda il vero cognome di **Tartaglia**. Infatti i documenti disponibili non sono sufficienti a chiarire il mistero e sebbene per qualche tempo sia stato noto come **Nicolò Fontana**, presto si tornò a citarlo come **Nicolò Tartalea o Tartaglia**, esattamente come veniva citato in vita e come egli stesso firmava le sue opere.
Nel febbraio del **1512**, dopo alterne vicende che coinvolsero Brescia nella guerra tra la Repubblica di Venezia e i sovrani che avevano costituito la **lega di Cambrai**, la città venne riconquistata dai soldati francesi ed esattamente nella notte tra il 18 ed il 19 febbraio un soldato riescì a penetrare nel **Duomo Vecchio** e, tra gli altri lì rifugiatisi, ferì "a morte" un umile ragazzo di 12 anni, che sarebbe diventato uno dei matematici più discussi, più insigni e più sfortunati.
L'avvenimento è raccontato dallo stesso Tartaglia nell'opera ***Quesiti et Inventioni Diverse***, **libro sesto**, **Quesito VIII**.
La testimonianza termina con queste parole:
……. "essendo io quasi guarito di tale et tai ferrite stetti un tempo che io non poteva ben proferire parole, ma sempre balbutava nel parlar per causa di quella ferrita à traverso della bocca et denti …per il che li putti della mia eta con che conversava, me imposero il sopra nome Tartaglia. Et perche tal cognome me duro molto tempo, per bona memoria di tal mia disgrazia me apparso volermi chiamare per Nicolò Tartalea….."
Oggi, sul **Duomo di Brescia** si legge la seguente lapide:

"Qui scampato agli eccidi del 1512
un povero fanciullo ferito alle labbra
ebbe indi nome dalla impedita favella
quel nome è Tartaglia
glorioso nella scienza dei numeri"
Per Decr. Mun. 1878

Matematica e Balistica

Nicolò Tartaglia
La Nova Scientia
con una giunta al terzo libro.
Venezia: per Nicolò de Bascarini a istantia de l'autore, 1550

Si tratta di un'opera di **balistica**, ed è la prima pubblicazione di **Tartaglia**. Viene stampata per la prima volta nel **1537** in Venezia a cura di Stefano da Sabio. Dell'intera opera, che doveva essere articolata in cinque libri, furono stampati solo i primi tre.

L'opera è dedicata *"allo Illustrissimo et Invictissimo Signor Maria Feltrense della Rovere Duca Eccelentisimo di Urbino et di Sora, Conte di Montefeltro, et di Durante, Signore di Senegalia et di Pesaro, Prefetto di Roma e dello inclito Senato Venetiano Dignissimo General Capitano.."*

Il **frontespizio** dell'opera così recita:

"Inventione de Nicolo Tartaglia Brisciano intitolata Scientia nova divisa in .5. libri nel primo di quali: se dimostra Theoricamente: la natura: et effetti de corpi ugualmente gravi: in li due contrarij moti che in essi puon accadere: et de lor contrari effettij..."

Tartaglia deve essere stato a lungo incerto, per motivi etici, sulla opportunità di pubblicare i suoi studi, e sembra essersi deciso solo quando il pericolo rappresentato dalla crescente diffusione dell'Islam e in particolare da una possibile invasione da parte dei Turchi ha direttamente interessato la repubblica di Venezia.

Infatti, nella **Prefazione** dell'opera si legge testualmente:
"*abitando in Verona l'anno MDXXI Illustrissimo S: Duca mi fu adimandato da un mio intimo et cordial amico Peritissimo bombardiere del Castel Vecchio...dil modo di mettere a segno un pezzo de arteglieria al piu che puo tirare. E a benche in tal arte io non avesse pratica alcuna (per che in vero Eccellente Duca giammai discargheti artegieria, archibuso, bombardo ne schioppo) niente di meno desideroso di servir l'amico gli promisi di farli in breve rissoluta risposta. Et poi che hebbi ben masticata et ruminata tal materia, gli conclusi et dimostrai con ragioni naturale, et geometrice, qualmemte bisognava che la bocca del pezzo stesse ellevata talmente che guardasse rettamente a .45. gradi sopra a l'orizonte, et per far tal cosa ispedientemente bisognava havere una squadra de alcun metallo over legno sodo che habbia interchiuso un*

quadrante con lo suo perpendicolo come di sotto appare in ***disegno (1)***, ***disegno (2)*** *.....*
.....Ma poi fra me pensando un giorno, mi parve cosa biasimevole, vituperosa, et crudele, et degna di non poca punitione appresso a Iddio, et alli huomoni a voler studiare di assotigliare tal essercitio dannoso al prossimo, anci destruttore della specie humana, et massime de Christiani in lor continue guerre. Per il che non solamente pospossi totalmente il studio di tal materia et attesi a studiar in altro, ma ancor strazzai, et abbruciai ogni calculatione, et scrittura da me notata: che di tal materia parlasse. Et molto mi dolsi, et avergognai dil tempo circa à tal cosa speso et quella particularita, che nella memoria mi restorno (contra mia volunta) iscritte mai ho voluto palesarle ad alcuno,ne per amicitia, ne per premio (quantunque sia stato da molti richiesto) perche insignandole mi parea di far naufragio e grande errore. Ma hor vedendo ***il luppo desideroso de intrar nel nostro armento*** *et accordato insieme alla difesa ogni nostro pastore non mi par licito al presente di tenere tai cose occulte, anci ho deliberato di publicarle parte in iscritto, et parte viva voce ad ogni Christiano, ancorche cadauno sia meglio atto si nell'offendere come nel difendersi da quello.*
*Data in Venetia in le Case Nove di San Salvatore alli .****XX****. **Decembrio** **MDXXXVII**.*
De vostra Illustrissima D.S. infimo servitore. Nicolo Tartaglia Brisciano".

Il ***"luppo"*** cui si fa riferimento è ovviamente il Turco e nell'imminente pericolo turco, Tartaglia trova la giustificazione morale per la pubblicazione di un'opera che reputa dannosa per l'umanità. ***La Nova Scientia*** contiene infatti le indicazioni per un migliore utilizzo delle armi di artiglieria.
Come si è visto, il Tartaglia dimostra che la massima gittata per un proiettile si ottiene quando il pezzo raggiunge una inclinazione di 45 gradi sull'orizzonte.
L'autore racconta anche gli esperimenti positivi effettuati nel **1532** da alcuni suoi amici che avevano scommesso sulla validità della sua teoria. La dimostrazione matematica rigorosa sarà poi effettuata da **Galileo** nei suoi ***Discorsi***.



Disciplinæ Mathematicæ loquuntur.
Qui cupitis Rerum uarias cognoscere causas
Discite nos; Cunctas hæc parit una uia.

INVENTIONE DE NICOLO

Tartaglia Briſciano intitolata Scientia noua diuiſa in. 5. libri: nel Primo di quali: ſe dimoſtra theoricamente: la natura: & effetti de corpi egualmente graui: in li dui contrarij moti che in eſsi puon accadere: et de lor cõtrarij effetti.

¶ In lo ſecondo (geometricamente) ſe approua, e dimoſtra la qualita ſimilitudine, & proportionalita di tranſiti loro ſecondo li uarij modi, che puono eſſer elletti, ouer tirati uiolentemente per aere, & ſimilmente delle lor diſtantie.

¶ In lo terzo ſe inſegna una noua pratica de miſurare con l'aſpetto, le altezze diſtantie ypothumiſſale, & orizontale delle coſe apparente, giontoui anchora la theorica, cioe la ragione & cauſa di tal operare.

¶ In lo quarto ſe dara la proportione de l'ordine dil creſcere callar che in ogni pezzo de artegliaria nelli ſuoi tiri, alzãdolo ouer arbaſſandolo, ſopra il pian de l'orizonte, & ſimilmente ogni mortaro, anchora ſe inſegnara il modo di trouar tutte le dette uarieta, ouer quantita de tiri in ogni pezzo de artegliaria, ouer mortaro mediante la notitia dun tiro ſolo. Anchora ſi moſtrara il modo come ſi debbia gouernar un bombardiero quando deſidera, di battere ouer di percottere in qualche luoco apparente.

Oltra di q̃ſto ſe inſegnara ancora il modo come ſi debia gouernar il detto bõbardiero quando gli fuſſe fatto un riparo dauanti al luoco doue percotte, uolendo pur percottere nel medemo luoco p altra uia, ouer elleuatione quãtunq; piu nõ ueda q̃l tal luoco.

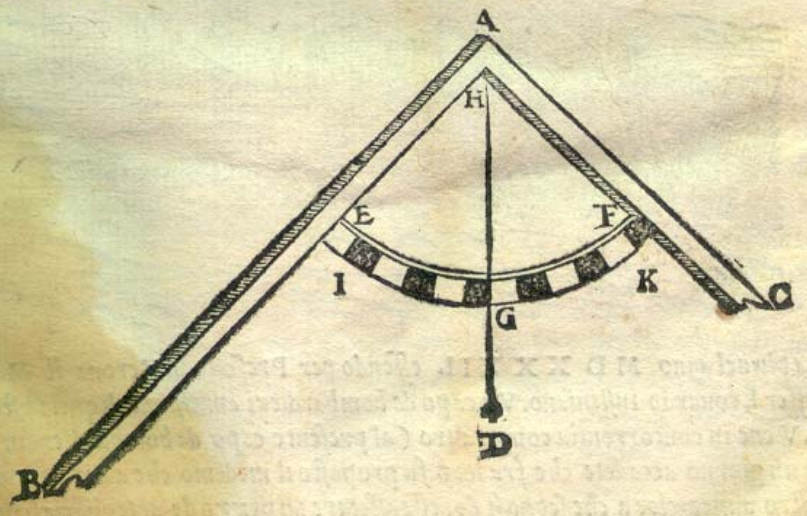
¶ Anchora ſe dara il modo di ſapere percottere continuamente la oſcura notte in un luoco appoſtato il giorno auanti.

¶ In lo quinto libro ſe dechiarira (ſecondo l'auttorita de molti Eccellentiſsimi Naturali) la natura, & origine de diuerſe ſpecie di gome, olei acque ſtillate, anchora de diuerſi ſimplici minerali & nõ minerali dalla natura prodotti, & da l'arte fabricati, anchora ſe manifeſtara alcune ſue particolare proprieta circa a larte de fuochi. Et ſimilmente ſe delucidara quale ſono quelle materie chi ſe conuiengono & che ſe accordano & quale ſono quelle che non ſi conuiengono ne ſe accordano, a ardere inſieme, & conſequentemente ſe dara il modo di componere, uarie & diuerſe ſpecie de fuochi, non ſolamente, alla defenſione de ogni murata terrra utiliſsimi, ma anchora in molte altre occorentie molto a propoſito.

ALLO ILLVSTRISSIMO ET INVICTISSIMO SIGNOR
Franceſcomaria Feltrenſe dalla Rouere Duca Eccellentiſsimo di Vrbino &
di Sora, Conte di Montefeltro, & di Durante. Signor di Senegalia,
& di Peſaro. Prefetto di Roma. & dello Inclito Senato
Venetiano Digniſsimo General Capitano.

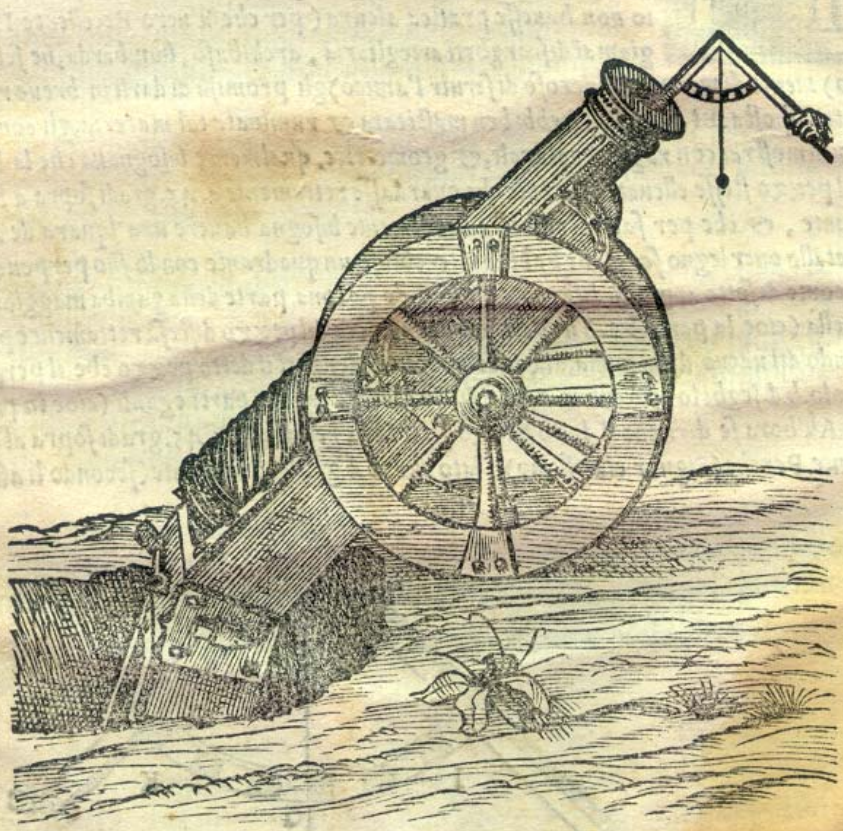
EPISTOLA.

HABITANDO IN VERONA L'ANNO. MDXXXI. Illuſtriſsimo. S. Duca mi fu adimandato dauno mio intimo et cordial amico Peritiſsimo bombardiero in caſtel uecchio (huomo atẽpato & copioſo di molte uirtu) dil modo de mettere a ſegno un pezzo de artegliaria al piu che puo tirare. E a benche in tal arte io non haueſſe pratica alcuna (per che in uero Eccellente Duca) giamai diſcargheti artegliaria, archibuſo, bombarda, ne ſchioppo) niente di meno (deſideroſo di ſeruir l'amico) gli promiſsi di darli in breue riſſoluta riſpoſta. Et di poi che hebbi ben maſticata & ruminata tal materia, gli concluſſi, & dimoſtrai con ragioni naturale, & geometrice, qualmente biſognaua che la bocca dil pezzo ſteſſe elleuata talmente che guardaſſe rettamente a. 45. gradi ſopra a l'orizonte, & che per far tal coſa iſpedientemente biſogna hauere una ſquara de alcun metallo ouer legno ſodo che habbia interchiuſo un quadrante con lo ſuo perpendicolo come di ſotto appar in diſegno, & ponendo poi una parte della gamba maggiore di quella (cioe la parte. b c.) ne l'anima ouer bocca dil pezzo diſteſa rettamente per il fondo dil uacuo della canna, alzando poi tanto denanti il detto pezzo che il perpendicolo. h d. ſeghi lo lato curuo. e g f. (dil quadrante) in due parti eguali (cioe in ponto g.) All'hora ſe dira che il detto pezzo guardara rettamẽte a. 45. gradi ſopra al orizonte. Perche (Signor clariſsimo) il lato curuo. e g f. del quadrante (ſecondo li aſtro-



nomi ſe diuide in. 90. parti eguale & cadauna di quelle chiamano grado. Pero la mita di quello (cioe g f.) uerria a eſſer gradi. 45. Ma per acordarſe con quello che ſe ha da dire lo hauemo diuiſo in. 12. parti eguali & accioche uoſtra Illuſtriſſima. D. S. ueda in figura quello che di ſopra hauemo con parole depinto hauemo qua diſotto deſigna to il pezzo con la ſquara in bocca aſſettato ſecondo il propoſito da noi conchiuſo al detto noſtro amico. La qual concluſion a eſſo parſe hauer qualche conſonantia pur circa cio dubitaua alquanto parendo a lui che tal pezzo guardaſſe troppo alto. Ilche procedeua per non eſſer capace delle noſtre ragioni, ne in le Mathematice ben corroborato, niente di meno con alcuni iſperimenti particolari in fine ſe uerifi= co totalmente coſi eſſere.

Pezzo elleuato alli. 45. gradi ſopra a l'orizonte.



Ma piu nel anno MD XXXII. eſſendo per Prefetto in Verona il Magnifico miſſer Leonardo Iuſtiniano. Vn capo de bombardieri amiciſſimo di quel noſtro ami= co. V ene in concorrentia con un altro (al preſente capo de bombardieri in Padoa) & un giorno accadete che fra loro fu propoſto il medemo che a noi propoſſe quel noſtro amico, cioe a che ſegno ſi douеſſe aſſetare un pezzo de artegliaria che faceſſe

Il libro di Matematica dal manoscritto alla pagina Web

Nicolò Tartaglia
Euclide Megarense
Troiano Navo, Venezia 1585

Questa opera, data alle stampe per la prima volta nel **febbraio del '43**, è la prima traduzione dal latino in volgare degli ***Elementi*** di **Euclide** ed è anche la prima versione in una lingua vivente. Il volume consiste di 240 fogli (480 pagine), è ricco di figure geometriche e dotato di errata corrige. Il **frontespizio** della prima pagina, sia nella **edizione del 1543** sia in **quella del 1585**, dice testualmente:

"Euclide Megarense Philosopho, solo introduttore delle Scientie Mathematice, diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto per il degno Professore di tal Scientie Nicolo Tartalea, Brisciano, secondo le due tradottioni: e per commune commodo et utilità di latino in volgare tradotto. Con una ampla espositione dello istesso tradottore di novo aggiunta. Talmente chiara, che ogni mediocre ingegno, senza la notitia over suffragio di alcun altra Scientia con facilita sera capace à poterlo intendere".

Le due traduzioni citate sono quella dall'*arabo* in *latino* di **Giovanni Campano** da Novara (**1491**-Venezia) e quella dal *greco* in *latino* del veneziano **Bartolomeo Zamberti** (**1505**). L'opera di **Tartaglia** ebbe grande diffusione e diverse ristampe anche se contiene due errori storici:
1) attribuisce gli Elementi ad **Euclide di Megara**, filosofo del IV a.C., discepolo di Parmenide e Socrate, invece che ad **Euclide Alessandrino**, unico e vero autore dell'opera. Lo stesso errore era stato commesso da **Pacioli** e Zamberti;
2) attribuisce ad Euclide anche i libri **XIV** e **XV**. Studi filologici accurati hanno accertato che tali libri furono opera di autori posteriori.

Una delle più evidenti particolarità di questa opera di Tartaglia è la costante presenza di commenti del traduttore aventi lo scopo (peraltro non sempre raggiunto) di aiutare gli studenti a comprendere meglio il testo.
Ad esempio, nella definizione di *punto* come "*ciò che non ha parti*", Tartaglia si sforza di far capire cosa significhi "non avere parti" paragonando il punto a diverse altre quantità, come ad esempio l'istante nel tempo, il suono nella musica, la consonante in una parola, arrivando a concludere che

"…. Il poto ha similitudine con tutte le cose: immo ha gran similitudine con Iddio: & per questa causa li Sapienti hano attribuito qsto nome poto a esso Iddio, come nelli suoi settanta duoi nomi manifestamente appare".

Molti degli altri commenti servono, poi, ad indurre lo studente ad astrarre la *Geometria* dalla materia nel tentativo di presentarla non più semplicemente come scienza pratica per la risoluzione di problemi quotidiani, ma come un sistema in cui, date certe definizioni e certe proprietà di base (gli assiomi), si deducono determinate proprietà.

È pertanto sottolineata numerose volte la distinzione tra il "naturale" e il "matematico", i quali se pure "*nel considerare le cose si accordano in una parte, perché ciascuno le considera secondo l'esser congionte con la materia dove sono infuse*", tuttavia "*si discordano secondo la ragione: pche il naturale secondo la ragione le considera medesimamente congionte e vestite di quella sua veste materiale sensibile: & il matematico, separate, cioè nude e spogliate della detta sua veste materiale …*".

E ancora, Tartaglia tenta di far comprendere l'indimostrabilità dei postulati e degli assiomi, ovvero delle "petitioni" e delle "communi sententie" oltre alla necessità di esse come basi del sistema geometrico Euclideo:

"*…. Bisogna notare che li primi principii di ciascuna scientia non si cognoscono per demostratione: nè etiam alcuna scientia è tenuta a provar li suoi primi principii, perché bisogneria procedere in infinito, ma quelli tali principii si cognoscono per intelletto, mediante il senso, e però il principio d'ogni nostra cognitione incomincia dal senso. Perilchè sono supposti nella scientia, et con quelli se dimostra & sostenta tutta la scientia: e sono detti principii di quella scientia perché provano altri, & non essere possono provati da altri in quella scientia …*".

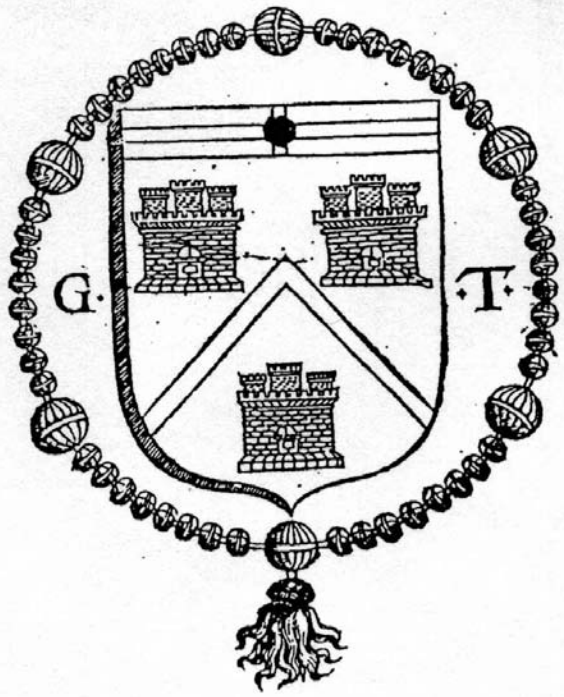
Occorre infine notare la totale assenza di simbolismo, cosa che rende particolarmente difficile la lettura di certe dimostrazioni appesantite da pedanti ripetizioni, la copiosità di esempi e controesempi come chiarimenti rivolti allo studente, e l'uso, talvolta improprio, di termini quali "continuità" o "infinito" mai definiti o giustificati, nonostante l'autore critichi proprio per questo motivo, in diverse parti dell'opera, le due precedenti traduzioni degli "Elementi" di Euclide, esortando lo studente a tralasciare determinate cose aggiunte dagli autori delle stesse perché "*confondon l'intelletto del studente, & interrompon l'ordine dell'Authore* (Euclide), *il quale di non parlar d'alcuna cosa avanti la diffinitione di quella, come vuol il debito, similmente di non metter cosa alcuna superflua cioè che non sia bisognevole in alcuna altra cosa nell'opera sua …*"

Una pagina originale

EVCLIDE MEGARENSE
PHILOSOPHO:
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE MATHEMATICE:
DILIGENTEMENTE REASSETTATO, ET ALLA
INTEGRITA RIDOTTO PER IL DEGNO
Professore di tal Scientie Nicolo Tartalea,
BRISCIANO,
Secondo le due Tradottioni:
E PER COMMVNE COMMODO
& vtilita di latino in volgar
tradotto,

CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
DELLO ISTESSO TRADOTTORE
DI NOVO AGGIONTA,

Talmente chiara, che ogni mediocre ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia con facilita, sera capace a' poterlo intendere.



EVCLIDE MEGARENSE

ACVTISSIMO PHILOSOPHO

SOLO INTRODVTTORE DELLE

SCIENTIE MATHEMATICE.

DILIGENTEMENTE RASSETTATO,

& alla integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie Nicolò Tartalea Brisciano.

SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.

CON VNA AMPLA ESPOSITIONE DELLO ISTESSO tradottore di nuouo aggionta, talmente chiara, che ogni mediocre ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia con facilità serà capace a poterlo intendere.

Di nuouo con ogni diligenza ben corretto, e ristampato.



IN VENETIA,

Appresso gli Heredi di Troian Nauo, alla libraria dal Lione.

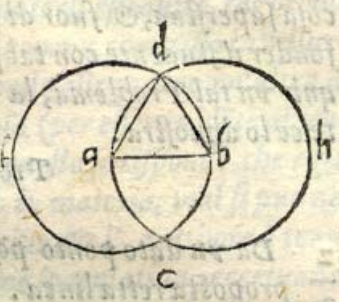
M D L X X X V.

mostratione, e pero propriamente di quelle cose che intendiamo per demostratione siamo detti hauer la scientia, & di questa sorte di sapere, e di questa scientia si raccoglie da Euclide sopra ogni sua propositione, come procedendo manifestamente, si potra vedere.

Problema prima. Propositione prima.

Possiamo sopra vna data retta linea costituir vn triangolo equilatero.

Sia la data retta linea, a,b, voglio sopra di questa constituir vno triangolo equilatero, & per esequir tal cosa, io ponerò il piede immobile del mio compasso, ouer festo, sopral'uno delle estremità della linea, cioè in ponto, a, & l'altro piede mobile lo allargarò infino all'altra estremità, cioè, al ponto, b, & secondo la quãtità di essa linea data per la terza petitione, descriuerò il cerchio. c,b,d,f, dapoi questo di nuouo farò centro l'altra estremità di essa linea, cioè, il ponto, b, & per la medesima petitione, secondo la quantità della medesima linea, linearò il cerchio, c,a,d,b, liquali cerchi se intersecaranno fra loro in duoi ponti, liquali sono, c, &, d, & l'uno de detti, poniamo il ponto, d, continuarò con ambedue le estremità della data linea, tirando per la prima petitione le due linee, d,a, b, &, d,b, & cosi sera constituido, il triangolo, d,a,b, il qual dico esser equilatero: perche, dal ponto, a, il qual è centro del cerchio, c,b,d,f, sono tirate le linee, a,d, &, a,b, per infino alla circonferentia di quello, perilche seranno equal, per la diffinitione del cerchio, similmente anchora: perche. dal ponto, b, che e centro del cerchio, c,a,d,b, sono tirate le linee, b,a, &, b,d, per infino alla circonferentia di quello, quelle medesimamente seranno fra loro equale, Adonque perche l'una e l'altra delle due linee, a,d, et, b,d, e equale alla linea a,b, come di sopra fu approuato, quelle medesime seranno anchora fra loro equal, per la prima concettione. Adonque sopra la data retta linea habbiamo collocato vn triangolo equilatero che e il proposito.



Il Tradottore.

Bisogna notar che quando occorresse di descriuere semplicemente il detto triãgolo equilatero sopra una data retta linea, cioe, che non fusse bisogno a far la demostratione di tal operar, nõ e necessario di descriuer integralmente li detti duoi cerchi, ma basta solamente a designar quella poca parte doue fanno la intersecatione in ponto, d, come appare nella seconda figura, & dal detto ponto d, tirar le due linee, d,a. &, d,b, & sera designatto il detto triangolo, ma volendo dimostrar, & assignar la causa che quel sia quilatero egli necessario a compire li detti duoi cerchi, & arguire come di sopra fu fatto, il medesimo si debbe intendere in molte delle sequente proble me.



Confronta: La stessa pagina nell'Euclide Restituto di V. Giordano

Nicolò Tartaglia
Opera ARCHIMEDIS Syracusani
Venturino Ruffinelli, Venezia 1543

Nell'aprile del **1543**, **Tartaglia** pubblica, a sue spese, un primo libro in latino di opere di **Archimede**:
a) De centris Gravium, libri duo
b) Tetragonibus
c) De insidentibus aquae, liber unus

Il volume è dedicato all'inglese Richardo Ventuorth e nel **frontespizio**, che reca lo stemma dell'editore, si legge:

Opera *ARCHIMEDIS Syracusani philosophi et mathematici ingeniosissimi per Nicolaum Tartaleam Brixianum (Mathematicarum Scientiarum cultorem) multis erroribus emendata, expurgata, ac in luce posita, multisque necessariis additis, quae plurimis locis intellectu difficillima erant, commentariolis sane luculentis et eruditissimis aperta, explicata atq illustrata existunt, Appositisque manu propria figuris que greco exemplari deformate, ac deprauate erant, ad rectissimam Symetriam omnia instaurata reductaet reformata elucent.*
Venetiis per Venturinum Ruffinellum, Anno Domini 1543, Mense Aprili

Nel **'65** esce postumo, sulla base degli appunti trovati dall'editore in casa del Tartaglia, un secondo volume dei "***Galleggianti***", dal titolo ***Archimedis de insidentibus aquae. Liber primus et secundus.*** In realtà pare che la traduzione in latino dei due libri di Archimede sia stata opera del frate belga Guglielmo di **Moerbeke, 1525**.

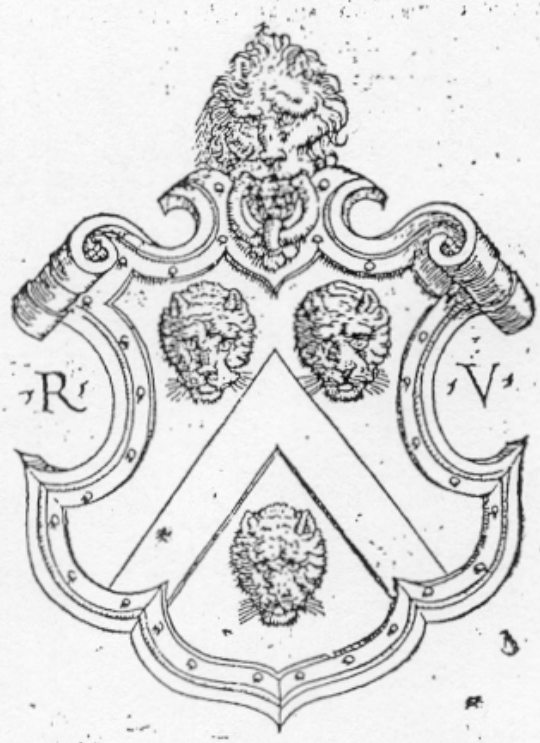
Di Archimede, Tartaglia tradusse anche i libri ***Sulla sfera e sul cilindro***, il cui contenuto compare nella quarta parte del ***General Trattato***.

OPERA ARCHI

MEDIS SYRACVSANI PHILO-

SOPHI ET MATHEMATICI INGENIOSISSIMI

per Nicolaum Tartaleam Brixianum (Mathematicarum ſcientiarum cultorem) multis erroribus emendata, expurgata, ac in luce poſita, multiſque neceſſariis additis, quæ plurimis locis intellectu difficillima erant, commentariolis ſane luculentis & eruditiſſimis aperta, explicata atq; illuſtrata exiſtunt, Appoſitiſq; manu propria figuris quę greco exemplari deformatę, ac depraua tę erant, ad rectiſſimam Symetriam omnia inſtaurata reducta & reformata elucent.



Cum gratia & priuilegio per decennium.

Nicolò Tartaglia
Quesiti et Inventioni diverse

Riproduzione in facsimile dell'edizione del 1554
Commentari dell'Ateneo di Brescia
Arnaldo Masotti, Brescia 1959

La prima edizione di questa opera, che nel **frontespizio** reca un'immagine del **Tartaglia**, risale al **1546**, la seconda edizione completa e definitiva è del 1554 e presenta una *gionta* al III libro. È costituita da nove libri, ciascuno articolato in *quesiti* su un determinato argomento:
libro I, 30 quesiti, libro II, 12 quesiti e libro III, 10 quesiti: *problemi di balistica ed artiglieria*
libro IV, 13 quesiti: *sistemi per ordinare un esercito*
libro V, 7 quesiti: *topografia*
libri VI, 8 quesiti: *fortificazioni e difese*
libro VII, 7 quesiti : *bilance*
libro VIII, 42 quesiti: *gravi*
libro IX, 42 quesiti: *aritmetica, geometria ed algebra, in particolare tutta la storia della soluzione dell'equazione cubica*

" Nel nono et (per al presente) ultimo libro havemo assettato alcuni quesiti realmente fatti, inventioni trovate, sopra la Scientia, over disciplina arithmetica et in la pratica speculativa, de algebra, et almucabala volgarmente detta Regola della cosa, over arte maggiore, et massime sopra la regola delli capitoli de cose, et cubo equal à numero et altri suoi aderenti, et finalmente de censi et cubo equal a numero, et altri suoi aderenti, li quali capitoli dalli sapienti eran giudicati impossibili, over irrisolubili", (ricerca delle soluzioni delle **equazioni di terzo grado**).

L'opera, dedicata ad Enrico VIII re di Inghilterra, rappresenta la fonte più ricca di notizie sulla vita del Tartaglia. È scritta in forma dialogica, a volte epistolare, tra l'autore ed interlocutori di volta in volta diversi, noti e non noti, appartenenti a vari ceti sociali.
Contiene anche tre brani in versi:
- un **sonetto** caudato di indirizzo ai lettori
- l'enunciato di un **problema algebrico** proposto al Tartaglia (IX,22)
- la **regola** risolutiva delle equazioni cubiche in terzine (IX, 34).

L'opera *Quesiti et Invenzioni diverse* ha avuto fortuna: è stata tradotta parzialmente o interamente in tedesco nel 1547, in francese nel 1556, in inglese nel 1588, in tedesco nel 1778 ed in francese nel 1845-1846, insieme con ***La Nova Scientia***.

La triangolazione secondo Tartaglia

QVESITI ET INVEN-
TIONI DIVERSE
DE NICOLO TARTAGLIA.

DI NOVO RESTAMPATI CON VNA GIONTA AL SESTO LIBRO, NELLA *quale si mostra duoi modi di redur una Citta inespugnabile.*

LA DIVISIONE ET CONTINENTIA DI TVTTA l'opra nel seguente foglio si trouara notata.

CON PRIVILEGIO



APPRESSO DE L'AVTTORE
M D L I I I I.

ALLI LETTORI.

Chi Brama di ueder noue inuentioni,
Non tolte da Platon, ne da Plotino,
Ne d'alcun altro Greco, ouer Latino,
Ma ſol da Larte, miſura, e Ragioni.
Lega di queſto le interrogationi,
Fatte da Pietro, Pol, Zuann', e Martino
(Si come, l'occorea ſera, e Matino)
Et ſimelmente, le reſponſioni.
Qui dentr'intendara, ſe non m'inganno,
De molti effetti aſſai ſpeculatiui,
La cauſa propinqua del ſuo danno,
Anchor de molti atti operatiui,
Se uedera eſſequir con puoc'affanno
Nell'arte della guerra Profitiui.
Et molto defenſiui.
Con altre coſe di magno ualore,
Et inuentioni nell'arte maggiore.

I versi di Tartaglia

“Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che’l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.

In el secondo de codesti atti
Quando che’l cubo restasse lui solo
Tu ossevarai quest’altri contratti,
Del numer farai due tal part’à volo
Che l’una in l’altra si produca schietto
Et terzo cubo delle cose in stolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto.

El terzo poi de questi nostri conti
Se solve col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.

Questi trovai et non con passi tardi
Nel mille cinquecente. quatro e trenta
Con fondamenti ben sald’è gagliardi
Nella città dal mar’intorno centa.”

La versione originale

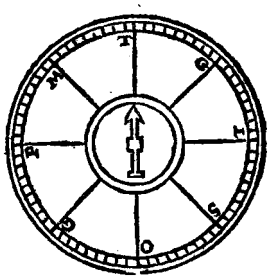
Le equazioni di terzo grado

Le formule di Tartaglia

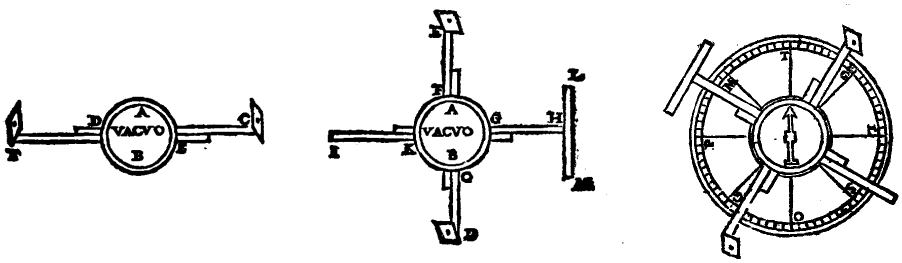
Quando chel cubo con le coſe appreſſo
Se agguaglia à qualche numero diſcreto
Trouan dui altri differenti in eſſo.
Dapoi terrai queſto per conſueto
Che'l lor produtto ſempre ſia eguale
Al terzo cubo delle coſe neto,
El reſiduo poi ſuo generale
Delli lor lati cubi ben ſottratti
Varra la tua coſa principale.
In el ſecondo de coteſti atti
Quando che'l cubo reſtaſſe lui ſolo
Tu oſſeruarai queſt'altri contratti,
Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra ſi produca ſchietto
El terzo cubo delle coſe in ſtolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi inſieme gionti
Et cotal ſomma ſara il tuo concetto.
El terzo poi de queſti noſtri conti
Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi
Che per natura ſon quaſi congionti.
Queſti trouai, & non con paßi tardi
Nel mille cinquecente, quatroe trenta
Con fondamenti ben ſald'e gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

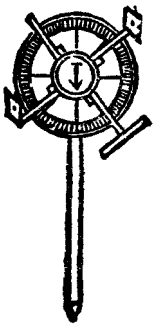
Nicolò Tartaglia
Quesiti et inventioni diverse – La Diottra

Nel **Libro Quinto** il **Tartaglia** disquisisce *"sopra el mettere, over tuore rettamente in disegno con el bossolo, li siti, paesi, e simelmente le piante delle citta, con el modo de sapere fabricare el detto bossolo, e in diversi modi, la cui scientia da **Ptolomeo** è detta Chorografia".*



"Corografia" è un altro nome della **cartografia**. Il "bossolo" è la bussola, costituita da un ago magnetico imperniato al centro di un cerchio graduato sul quale Tartaglia immagina di fissare una ***diottra***: si tratta di un rudimentale strumento di rilevazione topografica, di cui parla già **Erone di Alessandria**. Esso è costituito essenzialmente da un'asta dotata, alle estremità, di due sporgenze forate, oppure di due punte, e serve a stabilire gli allineamenti tra punti distanti. Ad essa è applicato un braccio trasversale che consente di ruotarla.





Il tutto è poi montato su di un bastone, che può essere conficcato nel terreno, in modo che il piano della bussola rimanga orizzontale.
Rispondendo al secondo quesito postogli dal suo *"honorato compare M. Richardo di Ventuorth, gentil'huomo della Maestà del Re d'Inghilterra"*, il Tartaglia descrive il modo in cui realizzare, con bussola e diottra, un disegno in scala di un paese a pianta pentagonale. La tecnica è quella della ***triangolazione***: la regione da riprodurre viene idealmente suddivisa in triangoli, che vengono poi singolarmente riportati sulla carta.

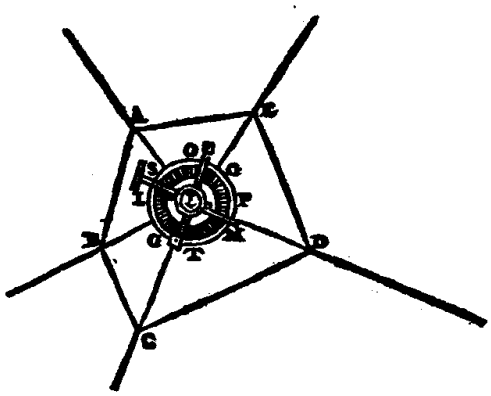
"Accio che meglio me intendiati, supponeremo che il sia un paesetto de cinque fazze, over lati, alla similitudine della sottoscritta figura .a.b.c.d.e. et che sia di tal qualita, che stando dentro in meggio, over circa al meggio di quella, et che facendo poi piantar una bacchetta in cadauno di quelli cinque angoli, over cantoni che tai bacchette si

possano vedere à una per una, hor dico, che à voler metter rettamente in disegno sopra à uno foglio di carta un'altra figura simile alla proposta .a.b.c.d.e. el si debbe piantare una bacchettina per ciascaduno delli detti cinque angoli, over cãtoni .a.b.c.d.e. et dapoi el debbe intrare nel detto sito, over loco, et andare nel mezzo di quello, over circa al mezzo (perche piu e manco del mezzo non importa) et ivi piantarvi quel bastone con el detto nostro bossolo in cima, et da poi che sara piantato bisognara torzerlo, et fermarlo talmente, che el detto bossolo stia ben assettato, cioe, che la lenguella della calamita stia giusta secondo el suo ordine, come fu detto di sopra, cioe, che la ponta di detta lenguella, over lanzetta guardi rettamente verso la Tramontana di detto istrumento, il che si conosce facilemente per mezzo di quella linea, che va da Tramontana al Ostro, di sotto della detta lenguella, over lanzetta, cioe, come se costuma in assettar quelli horologietti, che vien de Alemagna, quando se vol sapere quante hore sono, con el sole, et dapoi che tal istrumento sara talmente assettato, el si de girar la dioptra, over traguardo del detto istrumento, talmente che cignando con uno occhio per quelli dui busettini della detta dioptra (se tal dioptra havera detti busettini) chel veda una di quelle .5. bacchette piantate, overamente se la detta dioptra non havera li detti dui busettini, ma che havesse quelle due pontine acute, come di sopra fu detto, le qual due pontine à me pareno molto piu accomode che li busi, el se de guardare una di dette bacchette, et voltar tanto la dioptra, che la linea visuale se incontri con le dette due pontine de detta dioptra, et con quella bacchetta che si guardara, et fatto questo el si de annotare sopra una policetta, per qual grado (de quelli .360. se saranno .360. overamente de quelle .72. parti sel detto istrumento sara diviso in .72. parti à gradi .5. per parte) passara la detta linea visuale (il qual grado la dioptra lo fara manifesto) et per esser impossibile à dar in un piccol spatio perfetto essempio in figura à questa materia, se sforzaremo al men con parole di supplire à quello, che non si puo dar in figura, hor poniamo che à traguardare quella bacchetta posta in põto .a. la nostra linea visuale passi alli .3. gradi de Sirocco verso Ostro, fatto questo, el si de misurare quanto è dal pede del nostro istrumento alla detta bacchetta posta in ponto .a. hor poniamo che vi sia passa .54. hor dico, che di tutto questo se ne debbe far memoria sopra una policetta in questa forma, cioè à gradi tre de Sirocco verso Ostro passa .54. fatto questo, el si de voltar la detta dioptra (stando pero lo istrumento sempre fermo e fisso secondo el suo ordine) talmente, che per el medesimo modo el si veda l'altra bacchetta che seguita, poniamo quella posta in .b. et visto et notato il grado, etiam la distantia, che sara dal pie del nostro istrumento per fin al ponto .b. sopra la nostra polizetta alla similtudine dell'altra, et con tal modo, e via si de procedere à cadauna delle altre

tre bacchette poste nelli altri tre angoli, over cantoni, .c. d., et .e. et per abbreviar scrittura, poniamo che le dette cinque distantie annotate sopra alla detta polizetta vadano, et siano tanto quanto qua di sotto appare, perche cosi debbono esser notate."

A gradi. 3. de Sirocco uerſo Oſtro	paſſa.	54.
A gradi. 29. de Greco uerſo Leuante	paſſa.	63.
A gradi. 28. de Tramontana uerſo Greco	paſſa.	81.
A gradi 9. de Maiſtro uerſo Ponente	paſſa.	72.
A gradi. 5. de Garbino uerſo Oſtro	paſſa.	62.

A questo punto il Tartaglia prescrive di tracciare, sulla carta, cinque triangoli simili a quelli misurati. Basta scegliere un qualunque punto del foglio come centro, e tracciare a partire da esso *5* segmenti che formino, nell'ordine, i cinque angoli misurati, e abbiano le lunghezze annotate, secondo un'unità di misura più piccola del passo, adatta alle dimensioni del foglio. Una volta scelta questa unità di misura, essa potrà essere riportata su qualunque retta un numero qualunque di volte utilizzando un compasso. I triangoli sulla carta risulteranno simili a quelli reali in virtù di un noto **criterio di similitudine**, che si trova anche negli ***Elementi*** di **Euclide**. La figura disegnata rappresenterà allora fedelmente la pianta del paese:



La triangolazione secondo Leon Battista Alberti
Le tecniche di misurazione di Ludovico Perini

QVESITO. XXII. FATTO DA VNO VICENTI di Gaffari Adi. 13. Agoſto. 1536. In Venetia, in la Chieſa di San Giouanepolo, in la capella de San Nicolo, iſponendo io la 13. propoſitione del terzodecimo di Euclide publicamente, credendoſi lui con tal ſuo queſito di farmi totalmente reſtar confuſo.

VICENTI. Certamente uoi haueti iſpoſta queſta uoſtra lettione, ouer propoſitione tanto degnamente, quanto dir ſi poſſa. Ma uorria, che uoi me riſoluesti anchora queſto queſito.

Saggi diece di orc che tenia
De argento in ſe la ſua cuba Radice
Coſto ducati diece, hor ſtati al quia
Che alla raſon medeſima ſe dice.
Diece altri ſaggi che tenia inſerto
De argento in ſe la ſua quadra Radice
Coſta ducati nuoue intendi il merto
Proportionatamente, qual dimanda
Che ualſe il ſaggio di ciaſcun incerto
A uoi ſpirto gentil queſta ſi manda
Et perche hormai ſi ſpanda
La fama di colui che l'ha compoſta
Di Gaffari Vicenti, è la propoſta.

Nicolò Tartaglia
La Travagliata Inventione
Venezia 1551

Il titolo di questa opera in 32 pagine, dedicata al Doge di Venezia, Francesco Donato, è dovuto al fatto che il **Tartaglia** ne ideò l'argomento principale durante la disastrosa permanenza in Brescia negli anni '47-'48, come egli stesso riferisce nell'ultimo dei tre ***Ragionamenti*** che, in complessive 52 pagine, completano l'opera e sono finalizzati ad approfondire e chiarire concetti già presentati in opere precedenti.
L'opera, come lo stesso **frontespizio** riporta, illustra un metodo ingegnoso, basato sul Principio di **Archimede**, per riportare alla superficie una nave affondata, preservandone l'interezza.
Come spesso accade agli uomini geniali, Tartaglia andò oltre le possibilità tecniche del suo tempo con un'invenzione teoricamente ineccepibile, ma di non facile realizzazione nel XVI secolo.
Vengono presentate anche altre invenzioni, come il ricorso ad una campana di vetro per *stare lungo tempo sotto l'acqua in loco profondo a ricercare cose affondate.*

REGOLA GENERALE DA SV-
LEVARE CON RAGIONE E MISVRA
nõ ſolamẽte ogni affondata Naue:ma una
Torre Solida di Mettallo

Trouata da Nicolo Tartaglia, delle diſcipline Mathematice amatore intitolata la

TRAVAGLIATA INVENTIONE.

Inſieme cõ un artificioſo modo di poter andare,& ſtare plõgo tẽpo ſotto acqua,a ricercare le materie affondate,& in loco profundo.
Giontoui anchor un trattato,di ſegni delle mutationi dell'Aria, ouer di tẽpi,materia nõ men utile,che neceſſaria,a Naui-ganti,& altri.



Frontespizio della prima edizione del 1551

Nicolò Tartaglia
Il General Trattato di Numeri et Misure
Venezia 1556 - 1560

L'idea di scrivere un'opera di grande respiro, che trattasse in modo completo di Matematica pratica e teorica, era stata maturata dal **Tartaglia** nel 1548, ma la sua stesura era stata interrotta, come riferisce lo stesso autore, per opera *"dei nostri amici di Milan che m'internirno circa un anno a componer cartelli".*
Il *General trattato di numeri et misure*, meritatamente famoso, costituisce, forse, il più importante contributo alla Matematica nel XVI secolo: 740 fogli per complessive 1480 pagine, ricche di problemi, di regole, di tavole, di quadri riassuntivi, di sistemi di misura, di brani autobiografici, un vero compendio del sapere matematico e scientifico rinascimentale.
L'opera è divisa in 6 parti, di queste solo le prime 4 vennero stampate prima della morte di Tartaglia, ed alcune di esse furono oggetto di speculazione da parte dell'editore. I **frontespizi** delle prime quattro parti recano il ritratto di Tartaglia, seguito dal simbolo dell'editore Curzio Troiano dei Navo - un'immagine di San Marco in sembianza di leone rampante che stringe tra le zampe un drago - e terminano con la scritta: *NOIAR NON PUO MALIGNITA A FORTEZZA*.
La **prima parte**, in 17 libri, pubblicata nel 1556, è un trattato di aritmetica con molte applicazioni pratiche.
La **seconda parte**, in 11 libri, contiene il **triangolo aritmetico**, che porta il nome di Tartaglia, con i coefficienti delle prime dodici potenze di a+b, cioè fino a **cu.ce.ce**. (il cubo del quadrato del quadrato), il calcolo di espressioni con radicali, le regole per estrarre radici cubiche, quarte, quinte, ecc., **numeri congrui** secondo **Fibonacci** e **Luca Pacioli**, **numeri perfetti** Euclidei, numeri irrazionali, teoria delle proporzioni, quadri, tabelle, e molti problemi pratici svolti, correzioni di "errori della ***Summa*** di **Pacioli** ed errori di **Cardano**". (In tutta l'opera non mancano errori di Tartaglia).
Questa parte viene pubblicata nel 1556, ed alle pagine 41 e 42 reca notizie autobiografiche relative alla **disputa con Cardano e Ferrari**.
L'editore ereditò i libri di Tartaglia già stampati e sembra abbia sostituito, in alcune copie, le pagine 41 e 42 di questa seconda parte con quelle della prima parte recanti la stessa numerazione.
Infatti, come si legge nel libro di G.B. Gabrieli "Nicolò Tartaglia", Biblioteca Queriniana 1997, la seconda parte che si trova nella Biblioteca Marciana di Venezia, contrassegnata con il numero 19779, presenta i fogli da 37 a 42 uguali a quelli del primo libro e diversi da

quelli delle copie che si trovano nelle Biblioteche di Padova e di Brescia.
Curzio Troiano ottene il nulla osta alla stampa, in un unico volume, delle parti 3, 4, 5 e 6, nel gennaio del 1559, e dopo pochi giorni anche l'imprimatur dell'Inquisitore Frate Felice Peretto di Montaldo, che venticinque anni più tardi sarebbe divenuto Papa Sisto V. Nel luglio dello stesso anno, la Repubblica Veneta gli concesse anche i diritti editoriali per venti anni sulle ultime quattro parti.
Tuttavia, nella seconda pagina di tali parti, oltre alla riproduzione del citato privilegio del '59, vi è un secondo decreto, in latino, con il quale Filippo II, figlio di Carlo V, concede al solo Curzio Troiano i diritti editoriali per venti anni. Il decreto porta la data del 14 agosto 1556, epoca in cui Tartaglia era ancora in vita. Sembra dunque che si sia trattato di una speculazione da parte dell'editore, perché le prime quattro parti erano già state stampate a spese dell'autore e le copie stampate facevano parte del patrimonio del Tartaglia, come risulta dal testamento e dall'inventario dei beni.
La **terza parte**, costituita da 5 libri, è una esposizione di geometria pratica con molte figure e contiene la rassegna dei sistemi di misure in uso nelle principali città italiane.
La **quarta parte**, di 3 libri, è un trattato di geometria teorica, e presenta: il problema della **costruzione dell'ettagono regolare**, propostogli da **Ferrari** durante la sfida, il contenuto dei libri di **Archimede** "*Sulla sfera e sul cilindro*", la trattazione della geometria piana e solida. Vengono studiate le **lunule** di Ippocrate e viene dimostrata l'impossibilità della **quadratura del cerchio** attraverso le lunule. L'autore dichiara impossibile costruire qualsiasi **poligono** regolare con l'uso del solo compasso, si interessa della **duplicazione del cubo**, studia il settore circolare, il segmento circolare e i **poliedri regolari**.
Questa quarta parte viene messa in circolazione dopo la morte di Tartaglia. Infatti nell'inventario dei beni appare citata *"in folio"* cioè stampata, ma non rilegata, ed alla fine del frontespizio appare la data 1560, mentre il libro termina con la dicitura *...in Vinagia per Comin da Tridino MDLVI* .
La **quinta parte** è sicuramente pubblicata postuma nel 1560; la dedica è infatti firmata da Curzio Troiano ed il contenuto è annunciato nel **frontespizio**, che non reca più il ritratto di Tartaglia. Nei tre libri che la compongono, si mostra il modo di eseguire con riga e compasso tutti i problemi geometrici posti da **Euclide** ed altri, con metodi più brevi. Ci sono inseriti altri momenti polemici della disputa con Ferrari e Cardano, e viene nuovamente riportato il problema della

costruzione dell'ettagono regolare. Viene introdotta la tecnica geometrica del compasso ad apertura fissa, con cui si risolvono i problemi posti dal Ferrari nel terzo cartello, ed anche problemi di Euclide, compresa la **costruzione del pentagono regolare**.
Ed infine, la **sesta parte**, di 96 pagine, è dedicata all'**Algebra**. Dice, infatti:
*"nella quale si delucida quella antica pratica speculativa de l'Arte Magna, detta in arabo Algebra, et Almucabala, over Regola della cosa trovata da **Maumeth**, figliolo di Moise Arabo. Laquale se può dire la perfetta arte del calculare, perche la supplisse et serve, per risolvere infiniti casi, over questioni, si in Geometria come in Arithmetica, che alcuna delle altre regole (fin'hora dette) non potria servir."*
Purtroppo la morte impedì a Tartaglia di completare questo trattato. In questa parte doveva inserire finalmente la sua grande scoperta e la tanto discussa e contrastata regola generale per **la ricerca delle soluzioni delle equazioni di terzo grado**.
Ma l'editore Curzio Troiano, dopo aver raccolto gli appunti di Tartaglia, li fece sistemare da un matematico e pubblicò anche la sesta parte, dedicandola al governatore di Verona. Questa parte, pubblicata postuma, finisce con le equazioni di secondo grado o ad esse riconducibili. Impossibile che tra le carte di Tartaglia non vi siano stati problemi ed equazioni risolte di terzo grado o almeno la regola generale per risolvere le equazioni cubiche, a meno che l'editore non avesse temuto di rinnovare ed inasprire l'antica polemica e provocare un danno a se stesso nella vendita di questo libro.

La diffusione di questa opera fu notevole; nel 1578 fu pubblicata in francese a Parigi ed Anversa, con il titolo *L'Arithmetique de Nicola Tartaglia, grand mathematicien et prince de praticien*. Una seconda edizione fu stampata a Parigi nel 1615.

LA SECONDA PARTE
DEL GENERAL TRATTATO DI
NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA,

NELLA QVALE IN VNDICI LIBRI SI NOTIFICA LA PIV ELEVATA, ET SPECVLATIVA PARTE DELLA PRATICA Aritheticа, la qual è tutte le regole, & operationi praticali delle progressioni, radici, proportioni, & quantità irrationali.



MALIGNITA'



CON LI SVOI PRIVILEGII

In Vinegia per Curtio Troiano de i Navò.
M D LVI.

LA QVINTA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DE' NVMERI ET MISVRE,

DI NICOLO TARTAGLIA;

NELLA QVALE SI MOSTRA IL MODO DE ESSEQVIRE CON IL COMPASSO, ET CON LA REGHA TVTTI LI PROBLEMI GEOMETRICI DI EVCLIDE ET DA ALTRI PHILOSOPHI,

ET CON MODI PIV ISPEDIENTI, E BREVI DI QVELLI DATI DA ESSO EVCLIDE,

MATERIA NON MEN' VTILE CHE NECESSARIA A' GEOMETRICI, DESIGNATORI, PERSPETTIVI, ARCHITETTORI, Ingegneri, & Machinatori, si naturali, come Mathematici.

CON SVOI PRIVILEGII.



IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO

M. D. L X.

LA SESTA PARTE DEL GENERAL TRATTATO

DE' NVMERI, ET MISVRE,

DE NICOLO TARTAGLIA;

NELLA QVALE SE DELVCIDA QVELLA ANTICA PRATICA SPECVLATIVA DE LARTE MAGNA, *DETTA IN ARABO ALGEBRA, ET ALMVCABALA, OVER* REGOLA DELLA COSA TROVATA DA MAVMETH. FIGLIOLO DE MOISE ARABO,

LA QVALE SE PVO DIRE LA PERFETTA ARTE DEL calculare, perche la ſuppliſſe, & ſerue, per riſoluere infiniti caſi, ouer queſtioni, ſi in Geometria, come in Arithmetica, che alcuna delle altre regole (fin'hora dutte) non potria ſeruire.

GIONTOVI IN FINE MOLTI QVESITI RISOLTI per Algebra, ſi in Arithmetica, come in Geometria.





IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO. M. D. LX.

Le disfide matematiche

Nel 1500, per ottenere letture di matematica presso le pubbliche amministrazioni o presso le Università, era indispensabile dimostrare di possedere i requisiti necessari mediante pubblicazioni o vincendo gare matematiche allora assai di moda.
Le regole di questi confronti erano le seguenti: ognuno dei contendenti proponeva all'avversario un numero stabilito di problemi di vario genere, generalmente **30**. I problemi venivano depositati presso un notaio o una persona influente accettata da entrambi e dovevano essere risolti in un tempo preventivamente concordato. Veniva dichiarato vincitore da giudici scelti da entrambi chi risolveva il maggior numero di problemi dell'avversario senza errori e nel tempo stabilito.
Tra le più famose disfide ricordiamo:
La disfida tra Antonio Maria Fior e Nicolò Tartaglia
La disfida tra Ludovico Ferrari e Nicolò Tartaglia

La disfida tra Antonio Maria Fior e Nicolò Tartaglia

Sembra che, verso il **1515**, il professore di Matematica dell'Università di **Bologna**, **Scipione Dal Ferro**, abbia trovato il modo di risolvere le equazioni del tipo $x^3 + px = q$, o almeno alcuni casi numerici particolari.
La scoperta non è documentata, non avendo egli pubblicato mai le sue scoperte nè divulgato le stesse nemmeno tra i suoi colleghi e discepoli, e questo lascia molto perplessi data l'importanza della cosa. Forse il silenzio fu voluto perché ciò gli dava la possibilità di saper risolvere problemi che gli altri non erano in grado di risolvere, e quindi ciò gli procurava un grosso vantaggio in caso di **disfide matematiche**.
Tartaglia ebbe il sospetto che qualcuno avesse ottenuto qualche risultato quando, nel **febbraio del 1535**, venne in contatto con **Antonio Maria Fior**, discepolo di **Scipione dal Ferro**. Di lui scrive:
"*…se avantava che già trenta anni tal secreto gli era stato mostrato da un gran mathematico il che mi fece dubitar ch'el fusse il vero…… Lui non haveva scientia, ma solamente gran pratica… non haveva theorica.*"
Nacque tra i due una disputa che sfociò in una gara o disfida matematica.
La disfida ebbe luogo il **22 febbraio 1535** (a Venezia era il 1534 perchè l'anno cominciava il 1 marzo).
I trenta problemi posti dal Fior si risolvevano tutti con una equazione del tipo $x^3 + px = q$ e Tartaglia vinse la gara risolvendoli tutti in due ore, ricavandone onore e gloria.
Era chiaro dunque che Tartaglia possedeva il metodo generale di risoluzione di tale equazione e, come egli stesso racconta, anche di quelle del tipo: $x^3 + q = px$ e $x^3 = px + q$.
E cominciò l'assedio, da parte dei matematici del tempo, per conoscere il metodo usato. Iniziò **Zuanne de Tonini da Coi** il 10 dicembre **1536** (Quesito XXV) e continuò nel **1537** (Quesiti XXVI, XXVIII, XXIX) senza nessuna concessione da parte di Tartaglia.
Il **3 marzo 1537**, in risposta ad una lettera del 17 febbraio in cui gli veniva proposto ancora un problema di terzo grado, Tartaglia interruppe seccamente i rapporti col Tonini scrivendogli:
"*… et perche conosco, che questo vostro tanto proponere non è altro che un voler tastarme dove sia disarmato, over manco forte, per il chè ho deliberato di non voler rispondere ad alcuna vostra proposta fino a tanto che voi venereti à Venezia personalmente,….à quell'hora poi vi daro la*

resoluzione di quelle, che havevo saputo solvere et quelle che non havevo saputo solvere ma le insegnareti, pagandove però, non altro.....”
Così si chiuse la vicenda col Tonini, ma questa fu solo una avvisaglia di una vicenda il cui esito sfavorevole avrebbe tormentato Tartaglia fino alla morte.

La disfida tra Ferrari e Tartaglia

Nel **1546**, in risposta alla ***Ars Magna*** di Cardano, Tartaglia pubblica l'opera ***Quesiti et inventioni diverse***, che suscita scalpore ed interesse nel mondo scientifico del tempo. In particolare, la ricostruzione della vicenda con Cardano provocò risentimento nella cerchia del matematico milanese. Uno dei suoi esponenti era **Ludovico Ferrari**, discepolo di Cardano.
Ferrari, sdegnato per i sarcastici commenti contenuti nel **Quesito XXXVIII**, decide di prendere le difese del suo maestro ed invia a Tartaglia, il **10 febbraio 1547**, il **primo** dei **6 cartelli** con il quale ebbe inizio una delle più significatiche ed interessanti **Disfide Matematiche**. Nel primo cartello, con tono volutamente provocatorio e carico di disprezzo, annuncia a Tartaglia che intende prendere le difese del maestro:
" ...essendo sua Eccellentia impedito dal grado che tiene, ho deliberato far pubblicamente conoscere, o il vostro inganno, over (come piu tosto penso) la vostra malignità.."
Il gioco è chiaro: dirottare la gara su un terreno scientifico-culturale a lui congeniale, dettandone anche, contro la consuetudine, le regole. Infatti dice:
"...mi offerisco in Geometria, Arithmetica, et in tutte le discipline che da esse dependono, come è Astrologia, Musica, Cosmographia, prospettiva, Architettura ed altre, a disputar in luogo egualmente commodo, dinnanzi à giudici idonei publicamente con voi:...ma anchora sopra le vostre nuove invenzioni, le quali tanto vi dilettano,....mi offerisco di giucar et deporre quanti danari vorrete deporre anchor voi, infino alla somma di 200 scudi,.. Et a fine che questo mio invito non vi paia troppo privato, ho mandato una copia della presente scrittura à ciascun dei Signori infrascritti, i quali tutti si dilettano, et sanno delle mathematice..."
La copia viene infatti mandata a Tartaglia, ai tre testimoni firmatari ed a 50 studiosi delle principali città italiane.
Tartaglia non si fa pregare e risponde prontamente ad ogni cartello con un controcartello, consapevole del fatto che il Ferrari ha alle spalle **Gerolamo Cardano**.
Il primo controcartello è datato **19 febbraio 1547**:
"...disputar con ambidui largamente in Geometria, in Arithmetica,... Astronomia, Musica, Cosmografia ...et altre..., vero e ch'io non accetto, ne manco ...de disputar non solamente sopra quanti Autori, Greci, Latini et volgari,...ma anchora sopra le mie nove inventioni,.."
ed aggiunge:

"che tutti li intelligenti che sopra alle disfide hanno scritto, vogliono, che tutte le particularita, che siano di qualche avantaggio restino, nelle mani del disfidato libere, et franche.."
Al disfidato deve dunque essere concessa la scelta delle armi: per questo propone che la disputa venga fatta per iscritto, in modo che nessuno si sposti dalla propria città e si riserva di fissare l'entità del premio in palio.
Conclude in modo assai pittoresco:
" ... spero (con honesti modi) di lavarve ottimamente, el capo ad ambidui in un colpo solo, cosa che non sapria fare alcun barbier de Italia..."
Ma il **Ferrari** ignora le proposte ricevute ed insiste nella sua strategia, consapevole della carenza di istruzione umanistica del Tartaglia. Il **1 aprile 1547**, scrive il **secondo cartello**, in latino, nel quale afferma:
"se non permetterai al Cardano di pubblicare le tue scoperte, almeno concederai che ci informi sulle scoperte degli altri?"
Infine, insiste nel volere un confronto verbale pubblico in una delle seguenti città: Roma, Firenze, Pisa e Bologna e stabilisce un lasso di tempo di **10-15** giorni per le risposte ai quesiti che i contendenti si fossero scambiati.
Fortunatamente per le scienze, i cartelli oltre le pesanti ingiurie, le scortesie, gli improperi e le infinite polemiche, contenevano anche problemi da risolvere ed interessanti argomenti di carattere scientifico.
Il termine di 10-15 giorni risulta gradito al Tartaglia, che si affretta a rilanciare la stessa condizione, e alla fine del **secondo controcartello** del **21 aprile 1547** invia **31 quesiti**, e poiché le sue finanze non sono floride stabilisce un premio di 100 scudi, anziché 200. Dopo circa un mese, Tartaglia riceve il **terzo cartello** di Ferrari, datato **24 maggio 1547**, in cui il Ferrari ignora i 31 quesiti di Tartaglia e a sua volta propone i suoi 31 da risolvere, datati 1 giugno.
Tartaglia non perde tempo, risolve subito **26** dei 31 quesiti e per rispettare i termini dell'intesa li fa stampare e li spedisce subito a Milano insieme al **terzo controcartello** del **23 giugno** e del **9 luglio '47**, *"... per essere state molte feste..."*
Tartaglia è sicuro di aver vinto. Egli infatti afferma:
"... et essendo horamai dui mesi che haveti li miei nelle mani, et non havendome ne mandato la resolution pur di uno solo, senza dubbio, mandandovene io solamente la resolutione di un solo di vostri, io restaria vincitore si di scudi 100 come del honore, et se con la resolution di uno io restaria vincitore, tanto maggiormente resto vincitore, mandandovene la resolutione de tanti quanti de sopra ho anotati, et fatti con tal celerita, et pero se non voleti mancar della parola, over promessa

vostra mandatimi li detti 100 scudi quali de ragione haveti persi, et mandandomeli (come non credo) satisfaro il latore de quelli cortesemente…"
Fra i 31 quesiti proposti da **Ferrari** solo 6 sono di carattere prettamente algebrico e portano ad equazioni di 2° e 3° grado. **Il numero 17 di tali quesiti è particolarmente interessante**:
"Fatemi di otto due tal parti, che 'l prodotto dell'una nel altra moltiplicato nella loro differenza, faccia piu che possibil sia, dimostrando il tutto."
Ecco la risposta spiritosa di Tartaglia:
"Vi rispondo che la maggior parte fu 4 piu R.(5+ 1/3) et la menore fu 4 meno R.(5+1/3), el produtto e 10+2/3, qual multiplicato nella differentia che è R.(21 + 1/3) fa R.(2427 + 7/27), et questa e di frutto della nostra pianta conliquali pensavati farmi guerra, ma el vi è fallato il pensiero".
Non è molto chiaro il procedimento seguito dal Tartaglia, ma il suo risultato è esatto e stupisce come abbia saputo, con gli scarsi mezzi di calcolo a disposizione, risolvere **un problema di massimo**. Il valore di questa soluzione non venne rilevato dai contemporanei e solo più tardi ci si rese conto del notevole risultato. Nella quinta parte del ***General Trattato***, a pag.**88**, è riportata la dimostrazione di questo problema.
Ferrari inviò il **quarto cartello** il **10 agosto 1547** e Tartaglia, per concludere il suo impegno, rispose inviando la soluzione degli ultimi **5** problemi.
Ferrari non fu altrettanto sollecito e mandò la soluzione dei 31 quesiti con il **quinto cartello datato ottobre 1547**, ma pervenuto a Tartaglia il **3 gennaio 1548**, ben otto mesi dopo aver ricevuto le 31 "rasoni".
Al foglio **41** del **secondo libro del General Trattato**, Tartaglia dice:
"…vero e che circa sette mesi dapoi il detto termine di 15 giorni mi mandorno una pubblica risposta avantandosi in quella di haver risolto tutti li detti miei quesiti allor proposti, et se ben tal cosa fusse stata la verita, tai sue ressolutioni dovevano esser reputate per nulla, perche si sa bene, che a longo andare (da uno che intenda) ad ogni regolato quesito trova la via di solverlo (se possibil è) ma vedendo anchora, che in cosi longo tempo la maggior parte di quelli erano stati da lor falsamente conclusi."
A questo punto Tartaglia non sa più cosa fare, è seccato per il modo in cui viene trattato, per il ritardo con cui rispondono e **decide di tacere**. Per qualche mese la disputa sembra arenarsi.
Il **20 gennaio 1548** Tartaglia è invitato a trasferirsi a Brescia, sua città natale, per tenere due lezioni al giorno su **Euclide**, una pubblica la mattina, ed una la sera, riservata ad alcuni dottori e uomini *"di gravita"* che non volevano andare in luogo pubblico.

Durante il suo soggiorno bresciano si conclude la disfida con Cardano e Ferrari.
Il **16 giugno 1548**, dunque, invia il **quinto controcartello** al Ferrari, dichiarandosi pronto a recarsi a Milano per sostenere un pubblico confronto, che spera risolutivo.
Il **14 luglio** riceve il **sesto cartello** dal Ferrari. Negli ultimi cartelli che i due si sono scambiati vengono ribadite le posizioni di entrambi: Tartaglia, offeso dal comportamento di Cardano, ha sempre cercato di coinvolgerlo nella disputa; Ferrari, a sua volta, nega con insolenza e con sarcasmo l'intromissione di Cardano. Inoltre, mentre Tartaglia intende disputare per iscritto, probabilmente per evitare spese onerose, Ferrari insiste per uno scontro verbale in una delle quattro città già segnalate, dove certamente può contare su amicizie e conoscenze, quantomeno per riflesso a Cardano, e quindi beneficiare del fattore campo. Inoltre egli, che per primo aveva proposto di risolvere i quesiti entro 15 giorni, aveva poi di fatto ignorato tale termine.
Infatti, nel quinto controcartello, Tartaglia così scrive:
"...li miei quesiti 31 a voi proposti, perche in effetto dal giorno che fu alla fin de Aprile 1547, per fin alli detti 3 di Genaro del presente anno 1548 (faria circa mesi .8.) voi ambidui insieme con li vostri amici, haveristi potuto comodamente haver studiato (non solamente tutta la Bibia, insieme con el testamento novo) ma anchora potresti haver trovato il moto perpetuo e la **quadratura del cerchio**, *et che el sia vero voi medesimi el confessati nel vostro secondo Cartello, digando che il tempo de diese giorni over .15. al più erano a sufficentia bastanti a risolvere le questioni..."*
Nel **sesto cartello** del **14 luglio**, Ferrari si dichiara pronto a disputare con Tartaglia in Milano, ma nel frattempo lo disillude di trovare ivi anche Cardano.
Nonostante tutto, dopo la spedizione del **sesto** ed ultimo **controcartello** datata **24 luglio**, nella **prima decade dell'agosto 1548**, Tartaglia parte per Milano.
Egli così racconta:
"et trovandomi allhora in Brescia vicin a Milano ... deliberai (per por fine a far cartelli, quali hormai fastidivano gli huomini del mondo) di andar per fino a Milano et di fargli viva voce publicamente conoscere, come le dette sue rissolutioni erano state da loro la maggior parte falsamente concluse, et così calvalcai per infino a Milano, et con cartelli impressi publicamente gli invitati ambiduoi per Venerdì prossimo (che fu alli 10 di agosto 1548) a doversi trovar a hore 18 a quel tempio chiamato il Giardino di frati zoccolanti, a disputar le mie reprobationi...la qual cosa

intesa da Hieronimo Cardano (per non venir al cimento) quello di subito cavalco fuora di Milano, tal che al giorno deputato vi venne solamente Lodovico Ferraro con una gran comettiva di gentil'huomini suoi amici, et altri, et io solo con un mio fratello, che haveva menato con mi da Brescia, mi appresentai avanti al cospetto di quella moltitudine..."
Ferrari pretendeva che fosse eletta una giuria tra i presenti, che però erano tutti amici del milanese e sconosciuti al Tartaglia. Questi non poteva accettare tale proposta e così trascorsero due ore in inutili discussioni.
Venne poi data la parola a Tartaglia, che ebbe l'ingenuità di iniziare rilevando un errore del Cardano in un suo problema, così i presenti cominciarono a rumoreggiare impedendogli di proseguire. Fu data la parola al milanese che fu tanto abile da continuare a parlare fino all'ora di cena ...
"...et cosi ogn'uno fu sforzato a vodar il tempio, et andarsene a casa, onde vedendo in tal luogo non haver potuto viva voce adempir il mio intento per tener tutti dalla banda sua, per la qual cosa cominciai a dubitar anchor di peggio, per il che il giorno seguente tacitamente mi voltai alla volta di Brescia, et per altra strada, over via di quella era venuto a Milano, con intention pero di fare publicamente in stampa quello che viva voce non mi havevano voluto lasciar essequir..."
Questa grande polemica scosse gli ambienti scientifici dell'epoca ed i **12 cartelli** della sfida furono stampati a spese dei contendenti ed inviati ai più eminenti studiosi del tempo.
Il grande assente, Gerolamo Cardano, non rinunciò a sigillare la vicenda con la sua opinione e ad attribuire la vittoria al suo discepolo:
"Inde certavit cum Ioanne Colla et post cum Nicolao Tartalea, ambobus Brixiensibus Mathematicis sui temporis clarissimis, publiceque eos superavit."

È molto difficile dare un giudizio su tutta la vicenda. La scuola bolognese ha sempre parteggiato per Scipione dal Ferro, l'ambiente milanese per Cardano e quello bresciano per Tartaglia.
Certo è che lo scontro pubblico è stato impari ed in un certo senso ingiusto. Tartaglia era uomo del popolo, fisicamente svantaggiato, autodidatta, non laureato, poco abituato, se non del tutto estraneo, al mondo accademico cui invece appartenevano i suoi avversari.
Oggi, comunque, si attribuisce il merito della risoluzione delle equazioni di terzo grado sia a Scipione dal Ferro sia a Cardano sia a Tartaglia.

I 25 versi
Le formule di Tartaglia e le sostituzioni razionali di Ferrari

MEsſer Nicolò Tartalea, mi è peruenuto alle mani vn voſtro libro, intitolato Queſiti & inuentioni nuoue, nell'ultimo trattato del quale, facendo voi mentione dell'Eccellente Signor Hieronimo Cardano medico Melaneſe, il qual è hora publico Lettor di medicina in Pauia, voi non vi vergognate di dir, che egli è ignorante nelle mathematice, huomo molto tondo, degno che gli foſſe anteposto Meſſer Giouan da Coi, & lo chiamate pouerello, huomo che tien poco ſugo, & di poco diſcorſo, con altre ſimili parole ingiurioſe, le quali per tedio laſcio da parte: Sforzandoui con certe voſtre fittioni, di dar a vedere a gli ignoranti, che coſi ſia: Dico agli ignoranti, percioche giudico, non ci eſſere perſona di alcun giudicio, che per le coſe che egli ha fuori in ſtampa non lo conoſca in tutto diuerſo da quello che voi il dipingete, & che leggendo quella voſtra filatera, non gli paia legger le facetie del Piouano Arlotto: Direi Luciano de veris narrationib. ſe non foſſe che voi hauete piu ingenioſa inuentione, piu bello ſtilo, migliore ordine, & piu fiorite parole. Per dirui il vero, penſo che habbiate fatto queſto, ſapendo che il Signor Hieronimo è di coſi felice ingegno, che non ſolamente in medicina, la qual è ſua profeſſione, è di quella ſufficienza che ſi ſa, ma anchor nelle mathematice, le quali altre volte egli vsò a guiſa di giuoco, per pigliarſi alcuna ricreatione & ſolazzo, è coſi ben riuſcito che vniuerſalmente, per parlar con modeſtia, è tenuto fra

PHILIPPI NERII BONONIÆ. EX CONGR. ORAT.

Raccolta Gherardi - Museo Britannico

La disputa con Cardano

Nel **Quesito XXXI**, **Tartaglia** nomina per la prima volta un certo *"Messer Hieronimo **Cardano**, medico et delle Mathematice lettor pubblico in Milano".*
Non Cardano, ma un altro per lui, inviò a Tartaglia il seguente quesito:
" ...fatto da M. Zuanantonio libraro di Bassano per nome d'un Messer Hieronomo Cardano ..adi .2. Genaro 1539... et al presente fa stampare una sua opera in la pratica di Arithmetica et Geometria et in Algebra che sara una bella cosa. Et perche egli ha inteso voi esser stato in disputa con maestro Antoniomaria fiore et... che il detto maestro vi propose tutti li suoi 30 che vi conducevano in Algebra in un capitolo di cosa e cubo equal à numero. Et che voi trovasti regola generale à tal capitolo,..Et pertanto sua eccellenza vi prega che voi gli vogliate mandare di gratia tal regola da voi trovata, et s'el vi pare lui la dara fora in la presente sua opera sotto vostro nome, et se anchor el non vi pare, che lui la dia fora, la tenera segreta."
Nel lungo dialogo, il libraio chiedeva anche il testo delle "**30 rasoni**" scambiate con il Fior con le relative soluzioni. Inoltre, proponeva al Tartaglia **7 nuovi problemi** scelti con cura, poiché tutti conducevano ad equazioni di 3° grado, salvo uno che era di 4° grado.
La risposta di Tartaglia fu molto esplicita:
"Diceti à sua eccellenza, che quella mi perdona, che quando voro publicar tal mia invenzione la voro publicar in opere mie, et non in opere de altri, si che sua eccellenza mi habbia per iscuso."
Tartaglia consegnò invece una copia dei 30 quesiti del Fior, mentre si rifiutò di far conoscere il testo dei suoi e di mandare la soluzione dei 7 nuovi quesiti. Anzi, espresse il sospetto che ci fosse ancora lo zampino di Zuanne de Tonini da Coi e che Cardano avesse posto i 7 problemi perché erano entrambi incapaci di risolverli.

Il **12 febbraio 1539**, **Cardano** interviene personalmente con una lettera a tratti aggressiva, a tratti accondiscendente:
"*...e trarvi fori di fantasia che voi vi crediati essere si grande vi faro conoscere con amorevole admonitioni per le vostre parole medesime che seti più apresso alla valle che alla summita del monte, potria ben essere che in altra cosa fosti più esercitato, et valente che non dimostrati per la risposta et prima vi avviso pero che io ve ho avuto in bon conto...vi domando di gratia con che credeti parlare con li vostri scolari over con huomini..... ...li vostri libri sopra l'artigliarie ne comprai dui...delli quali uno ne dette al Signor Marchese, et l'altro tenne per mi... ....oltra cio vi*

laudai molto al Signor Marchese pensando fosti più gentil riconoscitore et più humano, et più cortese…"
Nel contempo però, per rifarsi delle insinuazioni fatte da Tartaglia sulla sua incapacità di risolvere i problemi da lui stesso proposti, **Cardano** criticò ***La Nova Scientia*** cercando di demolire alcune sue parti. La manovra fu chiaramente tesa a minimizzare la preparazione scientifica di Tartaglia. Scrive infatti:
"perche trattando de artigliaria, ch'era poco vostro mestiero, ve siti pero ingegnato di dire qualche bella cosa…"
Ed infine, Cardano insiste nel domandare la soluzione di almeno alcuni dei 7 quesiti
"…più per amicizia, et per conoscere il vostro grande ingegno, che per altro."
Conclude la lettera inviando due nuovi problemi, uno di terzo ed uno di quarto grado.
Tartaglia non si lasciò intimidire, e nella sua puntigliosa risposta ribadì i suoi sospetti e i suoi rifiuti, adducendo come scusa i troppi impegni e non dette una chiara risposta ai 7 quesiti.

Il **19 marzo 1539** Cardano ritornò alla carica con un'altra lettera, questa volta molto cortese, dalla quale traspare ancora un marcato interesse per la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado e che si conclude con l'invito a recarsi a Milano, perché il Marchese del Vasto, governatore di Milano, che aveva ricevuto in dono dal Cardano la Nova Scientia, desiderava conoscerne l'autore.
Tartaglia, timoroso di essere danneggiato da un rifiuto, parte, seppur a malincuore, per Milano. Il **25 marzo** i due si incontrano in casa di Cardano alla presenza di **Ludovico Ferrari**. Il Marchese però è assente e ritornerà a Milano il **5 aprile**, dopo la partenza di Tartaglia per Venezia.
La conversazione, riportata nel **Quesito XXXIIII**, è lunga e molto interessante. Tartaglia spiega che non ha potuto pubblicare la sua invenzione perchè molto occupato nella traduzione degli ***Elementi*** di **Euclide** (***Euclide Megarense***), e che non intende rivelarla né permettere ad altri di inserirla nelle proprie opere.
Cardano insiste, promettendo che non la svelerà ad alcuno e giura solennemente che non la pubblicherà nel lavoro che sta scrivendo.
Tartaglia si dice disposto ad accontentarlo solo dopo aver parlato con il Marchese, che evidentemente vorrebbe come garante.
Cardano promette di consegnargli una lettera per il Marchese, mettendo per iscritto il proprio impegno. Ma il Marchese è assente e tarderà a rientrare in Milano; Tartaglia è stanco e vuole rientrare a

Venezia, sicché inaspettatamente cede alle insistenze di Cardano e gli scrive di suo pugno i **25 versi** contenenti la soluzione; infine mette ripetutamente in guardia il Cardano invitandolo a mantenere il giuramento fatto, e se ne torna a Venezia.
I versi di Tartaglia però non contengono la dimostrazione teorica della formula risolutiva e Cardano non ne viene a capo.
In una lettera del **9 aprile 1539**, il Cardano rassicura Tartaglia sulla validità della promessa fatta e lo informa che sta per ultimare la stesura di una opera di matematica e, non avendo ben compreso i versi, gli chiede spiegazioni su un passaggio.
Tartaglia è preoccupato e nel rispondergli gli chiede di inviargli appena possibile una copia del lavoro, invio che, accompagnato da ringraziamenti ed encomi da parte del Cardano, è documentato nel **Quesito XXXVI**.
Cardano aggiunge però:
"Quanto al dubbio che voi haveti che non vi faccia stampare tai vostri inventioni, la mia fede che vi ho data con giuramento, vi doveva bastare,...perche sempre che vi pare...si potria sempre agiongere capitolum nonum, over capitola nona, et vi è .1000. altri rimedi, ma el ponto è qua chel non è mazor tradimento che a esser mancator di fede, et far dispiacere a chi ha fatto appiacere."
Più tardi, come egli stesso racconta nel **Quesito XXXVII**, Tartaglia viene informato da un suo discepolo, che viveva a Bergamo, dell'imminente pubblicazione di una nuova opera, da parte del Cardano.
Preoccupato, Tartaglia scrive al Cardano:
"vi dico che per molto mi rincresce di quello che per fino a quest'hora vi ho dato, attento che ho inteso da persone degne di fede, che voi seti per dar fuora un'altra opera di Algebra, et che ve andati avantando per Milano haver trovato nuovi capitoli in Algebra, ma avertite, che se voi mancareti di fede à me...vi prometto di attendervi più di quello che vi ho promesso."
E più avanti, fa esplodere tutto il suo risentimento parlando del modo di estrarre la radice cubica di 24, che Cardano gli aveva nuovamente richiesto:
" ... e se in tanto tempo non haveti saputo ritrovar medicina da medicare il detto vostro errore (che è una cosa minima) hor pensati mo se voi eri sofficiente à ritrovar il detto capitolo. Et certamente il fu gia, che vi haveva in buon conto, ma al presente vedo, che me ingannava de grosso..."
Il **18 ottobre 1539** Cardano scrive una lettera ironica e seccata:

"...credo...che stati uscito di cervello forsi per il vostro troppo studiare...non mi maraviglio degli improperij fuora di proposito, che me scriveti..."
La risposta di Tartaglia, l'ultima, è molto laconica:
"Dapoi che non mi ha giovato la mia cautella, io non vi voglio dar altra risposta ."
I rapporti tra i due sono ormai irrimediabilmente guastati.
Nel **Quesito XL**, è riportata un'ultima lettera di Cardano, datata **5 Gennaio 1540**, in cui egli informa Tartaglia che Zuanne de Tonini da Coi è a conoscenza della formula risolutiva delle equazioni cubiche scoperta, pare, insieme ad un compagno, lavorando su ciò che Antonio Maria Fior si era lasciato sfuggire sulla disfida avuta con Tartaglia. Cardano dice anche che lo stesso Tonini ha risolto molte altre questioni matematiche ed invia i testi di questi problemi, chiedendone la risoluzione.
Tartaglia decide di non rispondere, certo che i suoi "avversari" non sappiano risolvere alcun problema di terzo grado.
Ma i fatti, cinque anni più tardi, dettero torto al Tartaglia: Cardano non era poi ricercatore da poco e proprio il non aver ricevuto risposta agli ultimi quesiti lo rese più agguerrito nelle ricerche. Quando ne ebbe l'occasione, pur riconoscendo il contributo di Tartaglia alla risoluzione della equazione cubica generale, non dimenticò gli affronti ricevuti e li usò contro il Bresciano.
Nel **1545** Cardano diede alle stampe a **Norimberga** la sua opera ***Ars Magna***, inserendovi la formula risolutiva delle equazioni cubiche, formula che da quel momento venne chiamata "**formula di Cardano**".

Gerolamo Cardano (Pavia 1501 - Roma 1576)



Nato illegittimo da Facio, matematico e noto giurista milanese, dopo una infanzia infelice per maltrattamenti e salute malferma, Cardano conseguì a **Padova**, nel **1525**, la laurea in **Arti venete** e, nel **1526**, la laurea in **Medicina**.
Per due volte il Collegio dei Medici di Milano respinse la sua richiesta di esercitare la medicina in Milano: forse perché era figlio illegittimo e ciò non piaceva ai notabili e benpensanti milanesi.
Le porte di Milano si aprirono nel **1534** non per la medicina, ma per la **matematica e l'astronomia**. Ottenne infatti l'incarico di insegnare **geometria, aritmetica ed astronomia** nelle scuole Piattine, e poco dopo fu assunto come medico presso il Capitolo di S. Ambrogio, iniziando così la scalata al successo.
Cinque anni più tardi, nel **1539**, all'inizio dei suoi rapporti con **Tartaglia**, il Collegio dei Medici di Milano accolse la domanda del Cardano, ma un anno più tardi, nel **1540**, lo sostituì nella lettura di Matematica con il matematico **Zuanne de Tonini da Coi**. Nel **1543** Cardano si trasferì a **Pavia**, dove nel **'46** ottenne la cattedra di **medicina** presso l'Università.
Tornò a Milano, ormai medico rinomato in tutta Europa, poi a Pavia ed infine a **Bologna** per insegnare medicina. La sua fu un'esistenza inquieta, costellata di successi e di tragici eventi familiari. Alla fine, fu accusato di magia, imprigionato, costretto ad abiurare ed infine assolto a condizione che si ritirasse dall'insegnamento.

Fu scienziato insigne e profondo, capace di trattare con non comune competenza diversi rami del sapere, ma come uomo fu uno squilibrato dedito al vizio ed al giuoco. Si interessò, come **Lullo**, della divinazione del futuro e scrisse anche un trattato sulle chiavi del *Tarocco.*

Opere

Scrisse centinaia di opere, quasi tutte in latino, di filosofia, medicina, matematica, fisica, scienze ed astrologia. Molte di esse, purtroppo, sono andate perdute. L'***Opera omnia***, stampata a **Lugduni**, odierna Lione, nel **1663**, è costituita da 10 volumi. Il quarto volume contiene tutte le opere di matematica del Cardano. Nel **1539** fu stampata a Milano la ***Aritmetica pratica*** e nel **1545** Cardano diede alle stampe a **Norimberga** la sua opera ***Ars Magna***. L'***Ars Magna*** fu ripubblicata insieme al libro ***De regula Aliza*** nel **1570** a Basilea.

A lui si deve anche il ***Liber de ludo aleae*** che rappresenta il primo studio di **teoria della probabilità**.

L'oroscopo formulato da Cardano a Ferrari

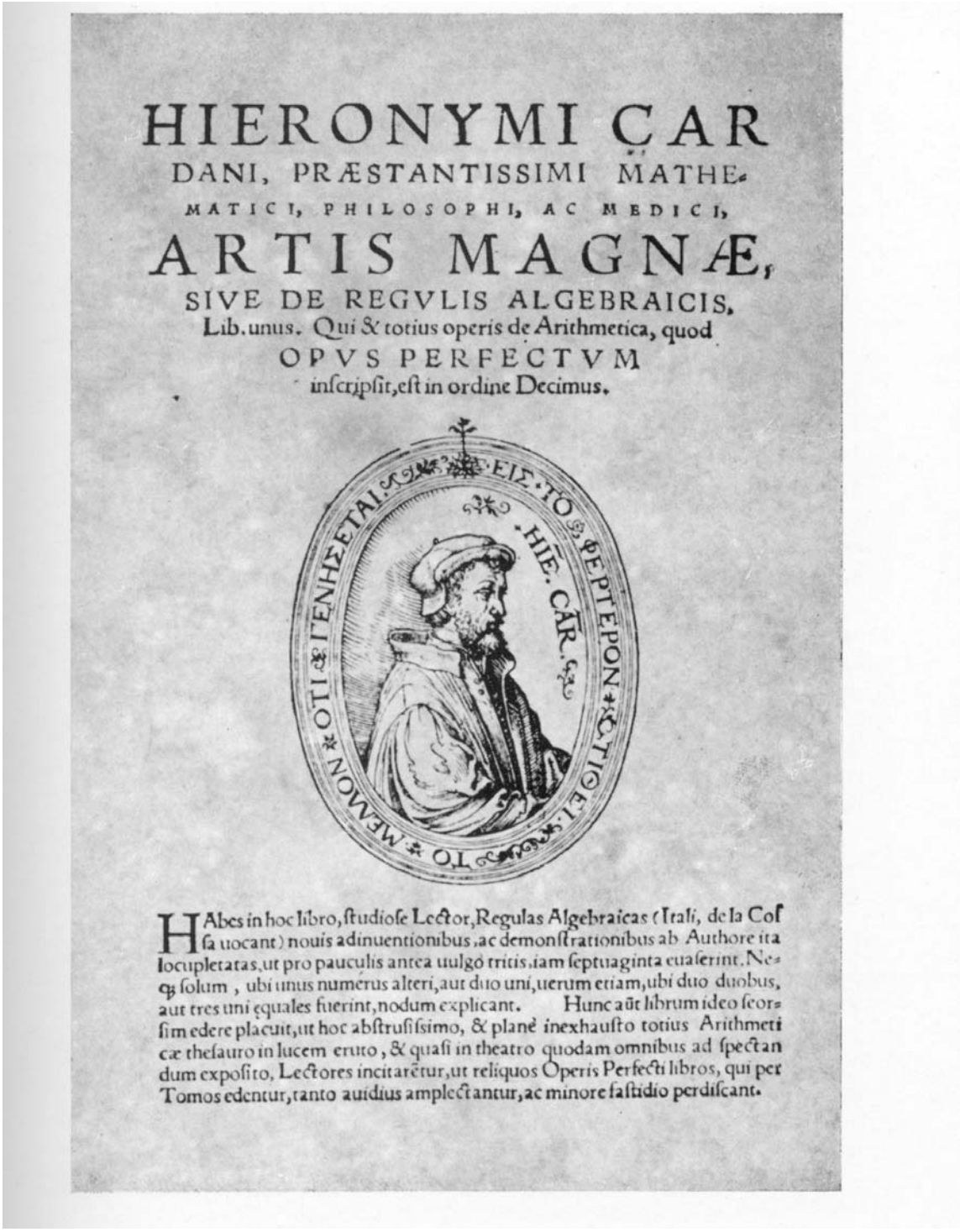
Gerolamo Cardano
Ars Magna
Norimberga, 1545

È un'opera di Algebra, e l'**Algebra**, che il Cardano chiamò *regola del modo*, deve a questa mente bizzarra e disordinata non pochi progressi.
In questa opera, Egli considera tutti i 13 possibili tipi di equazioni cubiche prive di termini negativi. Discute, per esempio, il caso "*Cubus aequatur 6 quadratis p 20*", cioè l'equazione $x^3 = 6x^2 + 20$, nel modo seguente:
"*adde 8 cubum 2, tertiae partis 6, ad 10 dimidium 20 fit 18 ab huius quadrato 324 abiice 64 cubum quadrati 2 relinquitur 260 cuius radicem adde et minue 18 habebis 18 p(lus) R. 260 et 18 m(inus) R. 260. horum R. cubicae iunctae addita tertia parte numeri quadratorum (2) constituum rem.*"
[Aggiungi 8, cubo di 2, terza parte di 6, a 10 metà di 20, si avrà 18, dal cui quadrato 324, tolto 64 (cubo del quadrato di 2), rimane 260, la cui radice aggiunta e tolta a 18, avrai 18 più R.260 e 18 meno R.260. La somma delle loro radici cubiche e della terza parte del numero del quadrato (coefficiente di x^2) costituisce la soluzione.]

Cardano venne meno alla promessa ed al giuramento fatti a **Tartaglia**, inserendo in questa opera la formula risolutiva delle **equazioni cubiche**, formula che da quel momento fu chiamata "**formula di Cardano**". La soluzione generale dell'equazione di 3° grado era stata per secoli una delle mete più ambite dagli algebristi e di fronte a questo scoglio l'Algebra aveva segnato il passo.
Cardano, ricercatore di pregio, ne era ossessionato, e nel **Caput I** dell'***Ars Magna*** considera la soluzione una cosa assolutamente eccelsa e così si esprime:
" ... dono sicuramente celeste ed illustre sì, che chi vi giunga, nulla più creda esservi di non intelligibile per lui. Ingannato da **Luca Pacioli**, *che negava la possibilità di risolvere equazioni cubiche con regola generale, non speravo di trovare, ciò che non osavo cercare."*
Parla poi dei **rapporti con Tartaglia**, infatti dice:
"... Anche ai nostri tempi, ***Scipione dal Ferro*** *bolognese trovò il capitolo del cubo e di cose uguali a numero, cosa veramente bella ed ammirevole. Poiché quest'arte supera ogni umana acutezza, la chiarezza di ogni ingegno mortale, un saggio poi della qualità degli animi e così illustre, che colui che abbia attinto a queste cose, creda che niente vi sia da non capire. Per emulazione di costui (Scipione dal Ferro) Nicolò*

*Tartaglia Bresciano, nostro amico, poichè venne in **disputa** con il discepolo di lui Antonio Maria Fior, per non essere vinto, trovò lo stesso capitolo ed egli, supplicato con molte preghiere, me lo confidò..”*
“….. Scipione dal Ferro bolognese già trenta anni prima trovò questo capitolo, lo affidò ad Antonio Maria Fior veneto, che essendo una volta venuto in disputa con Nicolò Tartaglia Bresciano, diede occasione che Nicolò trovasse il capitolo ed avendolo affidato senza dimostrazione a noi, che lo chiedevamo con insistenza, fiduciosi di questo aiuto, cercammo la dimostrazione...”
Nel **1546**, in risposta alla ***Ars Magna*** di Cardano, Tartaglia pubblicò l’opera ***Quesiti et inventioni diverse***, che suscitò molto interesse nel mondo scientifico del tempo. In particolare, la ricostruzione della vicenda con Cardano suscitò imbarazzo e provocò risentimento nella cerchia del matematico milanese.
L’*Ars Magna* contiene anche la risoluzione per radicali delle equazioni di quarto grado, risultato che è dovuto a **Ludovico Ferrari**.

Il frontespizio dell’Ars Magna
Le equazioni di terzo grado
Le equazioni di quarto grado



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

ΤΟ ΜΕΜΟΝ ΟΤΙ ΓΕΝΗΣΕΤΑΙ ΕΙΣ ΤΟ ΔΙΗΝΕΚΕΣ ΤΟ ΔΕ ΤΕΡΠΕΙΝΟΝ ΚΤΗΣΕΤΑΙ

HIE. CAR.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgo tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Frontespizio, con ritratto dell'autore, di un raro esemplare dell'edizione di Giovanni Petreio, Norimberga – Biblioteca Vaticana

Ludovico Ferrari (Bologna 1522 - Bologna 1565)

Fu prima amanuense al servizio di **Cardano** e poi suo discepolo. A 18 anni ottenne una pubblica lettura di Matematica in Milano ed a 21 anni scoprì la regola generale per la **risoluzione delle equazioni di quarto grado** in occasione di una gara matematica vinta con Zuanne de Tonini da Coi. Negli anni **'47-'48** fu occupato nella **disfida con Tartaglia**, successivamente, per otto anni, assunse la direzione del Catasto milanese, poi si trasferì a Bologna, dove conseguì la laurea in filosofia, che non riuscì a mettere a frutto poiché morì l'anno dopo.

Dopo la scoperta del metodo di **risoluzione delle equazioni cubiche**, Ferrari fu indirizzato dal suo maestro Cardano allo studio delle equazioni di quarto grado, per le quali egli fornì forse il metodo più elegante di soluzione, riconducendo il problema a quello della risoluzione di una equazione di terzo grado.
Fu merito indiscusso di Ludovico Ferrari anche la scoperta delle *sostituzioni razionali*, che permettono di trasformare *l'equazione cubica completa* in un'altra equazione cubica equivalente, priva del termine di secondo grado.
Data infatti l'equazione

$$(1) \qquad y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

se si pone $y = x - a/3$, si ottiene

$$(x - a/3)^3 + a(x - a/3)^2 + b(x - a/3) + c = 0,$$

da cui

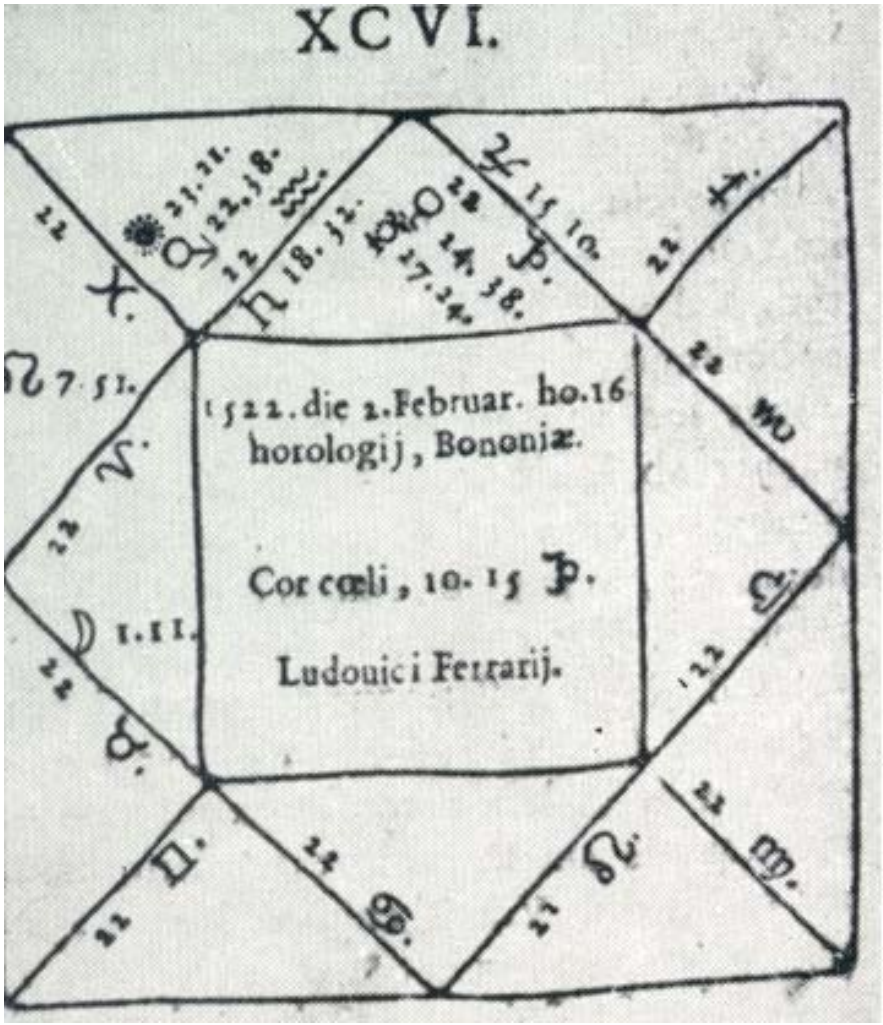
$$x^3 - a^2x/3 + bx + 2a^2/27 - ab/3 + c = 0$$

e quindi, posto $p = -a^2/3 + b$ e $q = 2a^2/27 - ab/3 + c$,

le soluzioni della (1) sono date da $y = x - a/3$, con x soluzione della equazione

$$x^3 + px + q = 0.$$

XCVI.


1522. die 2. Februar. ho. 16
horologij, Bononiæ.
Cor cœli, 10. 15 ♑.
Ludouici Ferrarij.

Rafael Bombelli (Bologna, 1526 - ?)

Fu ingegnere di professione. Non si conosce la data precisa della sua morte.
Scrisse un Trattato di ***Algebra***, sua unica opera, nel 1560. Il libro fu però pubblicato nel 1572 e costituì il principale testo di riferimento, fino ai tempi di **Leibniz**, per chiunque volesse dedicarsi a studi algebrici. In esso risolse una gran quantità di esercizi, molti dei quali si trovavano già nell'***Ars Magna*** di **Cardano**, e trattò anche la risoluzione delle **equazioni di quarto grado**.
La regola di **Tartaglia** per la risoluzione delle equazioni cubiche godeva di una singolare fortuna: pur contenendo strane entità, incomprensibili per i matematici dell'epoca, e cioè radici quadrate di numeri negativi, era però combinata in modo che nei passaggi successivi tali quantità si eliminavano ed il risultato finale conteneva solo numeri reali.
Fu merito del Bombelli intuire che occorreva dare significato a tali entità.

La risoluzione delle equazioni cubiche secondo Bombelli

Una pagina dell'*Algebra* di Rafael Bombelli

Ancora si può procedere nella equatione di questo Capo in un'altro modo: come se si hauesse ad agguagliare 1 a 15 p. 4: pigliasi il terzo de le Cose, che è 5 cubati fa 125, et questo si caua del quadrato della metà del num.° che è 4, restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, darà $\mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 121]$, che aggiunta con la metà del numero, sarà

1 eguale a 15 p. 4 $\tilde{\mathrm{R}}$ p. $\mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 121]$, che pigliatone il creator Cubico, et aggiunto col suo residuo sarà $\sqrt[3]{\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{p}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 121]}\ \mathrm{p}.\ \sqrt[3]{\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{m}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]}$. et tanto uale la cosa: Et benche questo modo si possa più tosto chiamar sofistico, che altrim.ti come fu detto innanti nel Capitolo di Censi, et N.° eguali a Cose, che pure nell'operationi serue senza difficoltà niuna, et assai uolte si troua la ualuta de la Cosa per numero, come questo, che.

5 — 15 — 4 — 125 — 13 5 — $\mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]$

Soma $\mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]$ caua $\mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]$

$\sqrt[3]{\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{p}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]}\ \mathrm{p}.\ \sqrt[3]{\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{m}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]}$

Creatore $\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{p}\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 1]\ \mathrm{p}.\ \tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{m}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 1]$

$\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{m}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 1]$

Somma 4: et tanto uale la Cosa.

sa creatore, e'l Creatore di $\sqrt[3]{\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{p}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}\ 121]}$ sara $\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{p}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 1]$, che aggiunto col suo residuo, che è $\tilde{\mathrm{R}}\ \mathrm{m}.\ \mathrm{R}[0\ \mathrm{m}.\ 1]$, che aggiunti insieme, fanno 4, che è la ualuta de la cosa.

Le equazioni algebriche di terzo grado

Benchè si sappia oggi, via il **teorema fondamentale dell'algebra**, che tutte le equazioni algebriche a coefficienti reali hanno soluzione nel campo complesso **C**, tuttavia non sempre si sanno determinare le soluzioni di una equazione di grado qualsiasi. Certamente, sono note da moltissimo tempo le formule risolutive generali delle *equazioni di 1° e di 2° grado* e dal XVI secolo di quelle di *3° e 4° grado*. Successivamente, **Evariste Galois** ha provato l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di *5° grado* e **Abel** ha dimostrato che non esistono formule generali di risoluzione per equazioni di *grado superiore al quarto*. Va comunque detto che una delle ricerche più appassionanti per i matematici di tutti i tempi è stata proprio quella di una formula generale di risoluzione delle equazioni di terzo grado. Una precisazione è però doverosa: nel corso della storia le soluzioni sono state ricercate negli insiemi numerici di volta in volta noti e quindi, quasi fin dagli inizi, e per molto tempo solo tra i numeri reali positivi. Ricordiamo alcuni contributi:
IV secolo a.C.: **Menecmo**, discepolo di **Eudosso** da Cnido, risolve graficamente l'equazione $x^3 = a^2b$ cercando le ascisse **positive** delle intersezioni, diverse dall'origine, delle due parabole $y^2 = bx$ e $x^2 = ay$.
XI secolo d.C.: **Omar Ibrahim Al Khayami**, poeta e matematico persiano, scrive un'algebra che include problemi ed equazioni di terzo grado che risolve geometricamente ricorrendo alla intersezione di due coniche, come avevano già fatto Menecmo ed **Archimede**. Il suo merito è di aver trovato un metodo grafico generale per tutti i casi di equazioni di terzo grado. Data l'equazione:

(1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
si pone
(2) $x^2 = 2py \ , \ p \neq 0$ *(parabola)*
e si ottiene
(3) $2pxy + 2apy + bx + c = 0$ *(iperbole)*

Risolvendo graficamente il sistema formato dalle equazioni (2) e (3), le ascisse **positive** dei punti intersezione delle due curve rappresentano le radici della (1).
È bene sottolineare che si parla sempre di **soluzioni positive**, e si tratta sempre di **metodi geometrici**.
Per quanto riguarda i **metodi algebrici**, viste le difficoltà e gli insuccessi, gli algebristi spesso e senza troppe esitazioni, dichiaravano il caso impossibile, oppure procedevano a tentoni.

XIII secolo: **Leonardo da Pisa**, detto Leonardo **Pisano** e più noto come **Fibonacci**, nella sua opera ***Flos*** tentò di risolvere l'equazione

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

propostagli da Giovanni **Panormita**, astronomo di **Federico II**, e pervenne al sorprendente valore approssimato ***1,3688081075***.

XV secolo: **Luca Pacioli**, matematico tenuto in grande considerazione, nell'opera ***Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*** del **1494**, alla ***Distinctio Octaua-Tractatus Sextus***, ***al foglio 149***, elenca otto tipi di equazioni di grado superiore al secondo e scrive testualmente:

censo de censo equale nu.o
censo de censo equale a cosa
censo de censo equale a censo
imposibile censo de censo e censo equale a cosa
imposibile censo de censo e cosa equale a censo
censo de censo e nu.o equale a censo
censo de censo e censo equale a nu.o
censo de censo equale a nu.o e censo

Per capire le affermazioni originarie di Luca Pacioli è necessario conoscere il **linguaggio matematico** dell'epoca, (**Secoli XV e XVI**).
Il segno **+** e il segno **–** non esistevano, essi compaiono per la prima volta in una aritmetica commerciale del tedesco **Johann Widmann** nel **1489**. Così il segno **=** è inserito per la prima volta in un'opera dell'inglese **Robert Recorde** nel **1557**. Questi segni entreranno nell'uso comune dopo quasi un secolo**.**
La terminologia del tempo è spiegata nella seguente tabella:

1500	***significato***	***già nel 1800***
cosa	*incognita*	x
censo	*seconda potenza della cosa*	x^2
cubo	*terza potenza della cosa*	x^3
censo de censo	*quarta potenza della cosa*	x^4
primo relato	*quinta potenza della cosa*	x^5

censo de cubo *cubo de censo*	*sesta potenza della cosa*	x^6
secondo relato	*settima potenza della cosa*	x^7
censo de censo de censo (CE.CE.CE)	*ottava potenza della cosa*	x^8
Cubo de cubo	*nona potenza della cosa*	x^9
R.U.CU.	*radice universale cubica del polinomio che segue il simbolo*	

Le otto equazioni di Luca Pacioli, oggi, si scrivono così:

1. $ax^4 = b$ Si riconduce ad una equazione di secondo grado. Si pone $x^2=y$ e si risolve l' equazione $ay^2 = b$
2. $ax^4 = bx$ Soluzioni: $x = 0$, $x = \sqrt[3]{(b/a)}$
3. $ax^4 = bx^2$ Soluzioni: $x = 0$, $x = \sqrt[3]{(b/a)}$
4. $ax^4 + bx^2 = cx$ Si riconduce ad $ax^3 + bx = c$
5. $ax^4 + bx = cx^2$ Si riconduce ad $ax^3 + b = cx$
6. $ax^4 + b = cx^2$ Con la posizione $y = x^2$,
7. $ax^4 + bx^2 = c$ si riconducono ad equazioni
8. $ax^4 = bx^2 + c$ di secondo grado

L'autorevolezza di Luca Pacioli fu tale che la affermazione di impossibilità per le equazioni di tipo 4 e 5 fu accettata dagli algebristi del tempo e costituì un freno nella ricerca delle soluzioni delle equazioni di terzo grado.
Ma la prima metà del secolo XVI vide la risoluzione, in qualche modo sofferta e contrastata, del problema, con il contributo di diversi matematici: **Scipione dal Ferro**, **Tartaglia**, **Cardano**, **Ferrari** e **Bombelli**.

Al principio del **1500**, cominciarono a circolare voci di progressi nel campo algebrico, tanto è vero che nel **1530** il matematico **Zuanne de Tonini da Coi** inviò a **Tartaglia**, perché li risolvesse, questi due problemi:
1) *Trovatime un numero, qual multiplicato per la sua radice più tre, mi faccia cinque.* [Si risolve con l'equazione $x^2(x+3) = 5$]
2) *Similmente trovatime 3 numeri, ma chel secondo sia 2 più del primo, et chel terzo sia pur 2 più del secondo, et che multiplicato el primo fia el secondo, et quel produtto fia el terzo, faccia 1000.*

[Si risolve con l'equazione: $x(x+2)(x+4) = 1000$ ovvero $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$]

La lettera di risposta di **Tartaglia** è molto polemica ed enigmatica e non costituisce una prova dell'avvenuta scoperta della regola generale per la risoluzione delle equazioni di terzo grado. La lettera è riportata nel **Quesito XIIII** dei ***Quesiti et inventioni diverse***:
….li quali capitoli per fin à questo tempo è stato giudicato da fra Luca et altri esser imposibili à risolverli per regola generale, credendovi con tai quesiti di farvi cavallero sopra di me, et da farsi tenere un grandissimo Mathematico, come che ho inteso che fati con tutti li altri professori di tal scientia li in Bressa,...et dico che vi doveresti alquanto arrossire, a proponere da rissolvere ad altri, quello che voi medesimo non sapeti rissolvere.... Io non dico che tai casi siano imposibili, anci il primo, cioe quello de cubo et censo equal à numero io me persuado di havervi trovato la sua regola generale, ma per al presente la voglio tacere....

Non è chiaro se, nel **1530**, Tartaglia conoscesse o meno la regola generale; forse conosceva solo quella adatta a risolvere alcuni tipi di equazioni di terzo grado, sempre nei limiti imposti dalle conoscenze del tempo in cui visse: coefficienti positivi, radici sempre positive.
Tuttavia, quando nel **1535** Tartaglia sostenne la **disfida matematica** con **Antonio Maria Fior**, egli propose all'avversario un problema che in termini attuali si traduce nella equazione $x^3 + 40x^2 = 2888$, che si ottiene per $n=19$ dalla forma più generale $x^3 + (2n+2)x^2 = 8n^2$.
Aggiungendo ai due membri $4nx$ [nel nostro caso $4 \cdot 19x$] e scomponendo si ottiene

$$(x + 2n)(x^2 + 2x - 4n) = 0 \qquad [\,(x + 38)(x^2 + 2x - 76) = 0].$$

La soluzione sarà quindi $x = \sqrt{77} - 1$, (naturalmente quelle negative $x = -38$ ed $x = -1-\sqrt{77}$ erano considerate false).
Il 22 febbraio 1535 Tartaglia sostenne la disfida con Antonio Maria Fior e risolse i **30** problemi posti dall'avversario, in due ore, perchè:
"….tutti conducevano l'operatore in el capitolo de cosa e cubo equal a numero [cioè alla equazione $x^3 + px = q$] *…e poi .....per havervi trovato circa giorni .8. avanti regola generale...."*
La vittoria di Tartaglia suscitò interesse in tutti i matematici dell'epoca e tale interesse coinvolse anche **Cardano** ed il suo discepolo **Ferrari**. I rapporti tra i due matematici e Tartaglia non furono buoni e si arrivò ad uno scontro diretto.

Tartaglia mise la sua invenzione in **25 versi**, non sempre chiari, per cautelarsi dal pericolo che altri pubblicassero la sua splendida scoperta. I suoi versi sono inseriti nel **Quesito XXXIIII**.

La disputa tra Cardano e Tartaglia
La disfida tra Ferrari e Tartaglia

Bombelli risolve un'equazione di terzo grado

La risoluzione trigonometrica delle equazioni di secondo e terzo grado

Curiosità: una soluzione di Philippe de La Hire

Le equazioni algebriche di quarto grado

Luca Pacioli, nella ***Summa***, aveva discusso equazioni di quarto grado risolvendole con metodi quadratici, ove possibile, e dichiarando le altre impossibili. La risoluzione, in questi ultimi casi, era legata alla risoluzione di **equazioni cubiche**. Fu, quindi, in un certo senso ovvio che, una volta acquisito il metodo di soluzione per le equazioni di terzo grado con **Tartaglia** e **Cardano**, si passasse a completare lo studio di quelle di quarto grado.
Cardano spinse il suo allievo **Ludovico Ferrari** ad occuparsene e, di fatto, questi risolse elegantemente il problema riconducendolo alla determinazione della soluzione di una equazione cubica opportunamente costruita, detta **risolvente cubica di Ferrari**.
Cardano stesso nella ***Ars Magna*** ne discute venti casi, considerati distinti perché non si consideravano quantità negative.
Presentiamo il primo caso esaminato, e cioè l'equazione del tipo

(1) $$x^4 + ax^2 + b = cx$$

La tecnica consiste nel trasformare la (1) nella uguaglianza tra due quadrati, in modo che, eguagliando le basi, si giunge ad una equazione di secondo grado in x e quindi alle soluzioni.
1° passo: si trasforma il primo membro di (1) in un quadrato, se già non lo è; aggiungendo ad ambo i membri $2\sqrt{b}x^2 - ax^2$ si ottiene:

(2) $$(x^2 + \sqrt{b})^2 = 2\sqrt{b}\,x^2 - ax^2 + cx$$

2° passo: si tratta ora di trasformare il secondo membro in un quadrato, conservando la stessa proprietà per il primo, che sarà quindi del tipo $(x^2 + \sqrt{b} + y)^2$.
La chiave fondamentale è la seguente: per ogni y, usando la (2) si ottiene:

$$\begin{aligned}(x^2 + \sqrt{b} + y)^2 &= (x^2 + \sqrt{b})^2 + y^2 + 2y(x^2 + \sqrt{b}) = \\ &= 2\sqrt{b}\,x^2 - ax^2 + cx + y^2 + 2y(x^2 + \sqrt{b}) = \\ &= (2\sqrt{b} - a + 2y)x^2 + cx + y^2 + 2y\sqrt{b}\end{aligned}$$

e quindi si può determinare y in modo che il secondo membro, che è quadratico in x, sia un quadrato, ed a tal fine basta annullarne il discriminante, ottenendo

$$c^2 - 4(2\sqrt{b} - a + 2y)(y^2 + 2y\sqrt{b}) = 0$$

che è una equazione di terzo grado in y, detta appunto **risolvente** di Ferrari.

Occorre osservare che a quei tempi le dimostrazioni ritenute veramente accettabili erano di natura geometrica e non algebrica.

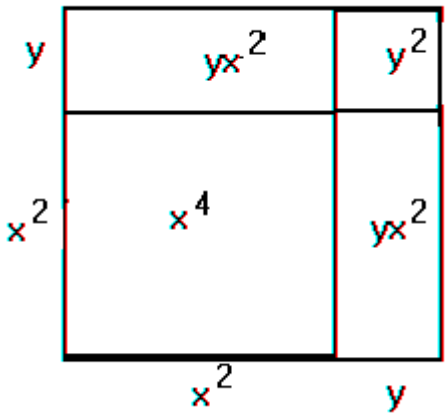
Ad esempio **Bombelli** dà un metodo geometrico di soluzione per l'equazione $x^4 = ax + b$. Con il procedimento appena descritto l'equazione si traduce in:

(3) $(x^2 + y)^2 = x^4 + y^2 + 2x^2y = ax + b + y^2 + 2x^2y$

e la risolvente cubica è $a^2 - 8y(b + y^2) = 0$.

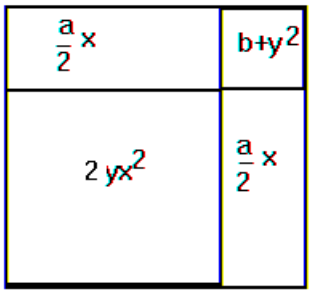
La dimostrazione di **Bombelli** appare come la perfetta traduzione geometrica dei precedenti passaggi algebrici, con l'unico artificio geometrico di rappresentare i due membri dell'equazione con figure quadrate uguali.
Dovendo, pertanto, seguire questa linea di dimostrazione, si considerano due quadrati uguali A) e B).
In A), che rappresenta il primo membro della (3), e cioè $(x^2 + y)^2$,

A)



è stato aggiunto al quadrato x^4 lo *gnomone* $2yx^2 + y^2$, ottenendo ancora un quadrato, qualunque sia la scelta di y.
Aggiungendo al secondo membro, $ax + b$, la stessa quantità $2yx^2 + y^2$, si avrà lo stesso quadrato, per cui, considerato un ulteriore quadrato B) uguale ad A), occorrerà riempirlo con $ax + b + 2yx^2 + y^2$ in modo da ottenere poi il valore di y.
In B) si ha allora:

B)



Quindi risulta $(a/2)x = \sqrt{2yx^2}\ \sqrt{b + y^2}$ ovvero $a^2 - 8y(b + y^2) = 0$ e quindi la **risolvente cubica**.
La teoria delle equazioni di quarto grado è sviluppata in 59 pagine dell'***Algebra*** del **Bombelli**. Egli analizza tutti i 42 casi che si possono presentare e per questo motivo alcuni storici gli attribuiscono la paternità della risoluzione generale delle equazioni di quarto grado.
Egli inizia la trattazione su questo tipo di equazioni nel libro secondo, considerando l'equazione del tipo $x^4 + ax = b$ *(Capitolo di potenza di potenza e Tanti eguale a numero)* e, a differenza di quanto era accaduto per le equazioni di grado minore, non vi è traccia di ragionamento geometrico. Solo alla fine Bombelli annuncia un successivo libro di problemi *"riserbandomi poi con più mio agio e commodità di dare al mondo tutti questi Problemi in dimostrazioni geometriche"*. Per lungo tempo, poi, il libro annunciato non fu trovato e si pensò che il lavoro geometrico non fosse stato neppure portato a termine o non fosse stato addirittura scritto. Fu **Bortolotti** che ritrovò l'ultima fatica di Bombelli.

Le formule di Tartaglia
(o formule di Cardano)

Nei primi nove dei suoi versi, Tartaglia considera il caso

$$x^3 + px = q.$$

Egli afferma che si deve porre:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}, \quad u - v = q, \quad uv = \frac{p^3}{27}$$

Si ottiene, allora:

$$u = v + q, \quad v^2 + qv = \frac{p^3}{27}$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}$$

e

$$v = -\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}$$

La seconda radice è negativa e quindi da scartare.
Segue:

$$u = q + v = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e da $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ si ottiene:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

I nove versi successivi si riferiscono al caso

$$x^3 = px + q$$

e con procedimento analogo, si trova:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Infine, Tartaglia considera il caso

$$x^3 + q = px$$

Gli ultimi quattro versi hanno carattere storico.
Si noti che nelle equazioni considerate manca sempre il termine in x^2.
Oggi, la formula risolvente della equazione di terzo grado, si ottiene sostanzialmente come ha fatto Tartaglia nel XVI secolo. Precisamente, considerata l'equazione $x^3 + px + q = 0$, si pone $x = u + v$ e sostituendo si ottiene:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Imponendo che il valore del prodotto uv sia tale che $3uv + p = 0$, risulta

$$uv = -\frac{p}{3}, \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q$$

e u^3, v^3 sono le soluzioni di $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$.
Quest'ultima equazione viene citata come **risolvente di Hudde** e le sue soluzioni sono :

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e quindi

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ed essendo $x = u + v$, si ottiene

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Si deve, invece a **Ludovico Ferrari**, la scoperta delle **sostituzioni razionali**, che permettono di trasformare l'equazione cubica completa in un'altra equazione cubica, priva del termine di secondo grado e quindi risolubile con la formula di Tartaglia. Data infatti l'equazione

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

se si pone $y = x - \frac{a}{3}$ si ottiene

$$(x - \frac{a}{3})^3 + a(x - \frac{a}{3})^2 + b(x - \frac{a}{3}) + c = 0$$

da cui

$$x^3 - \frac{a^2 x}{3} + bx + \frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

e quindi

$$x^3 + px + q = 0, \qquad y = x - \frac{a}{3}$$

La ricerca di metodi per la risoluzione delle equazioni di terzo grado fu oggetto di studio, anche in tempi successivi, da parte di molti algebristi tra i quali **François Viète**, **Etienne Bézout**, **Christian Huygens** ed **Eulero**. Ricordiamo anche il metodo di **Arthur Cayley** che usò le funzioni Hessiana H e Jacobiana Q, il metodo di **Giuseppe Lagrange** che sfruttò le relazioni tra le radici ed i coefficienti della equazione ed il metodo di

Tschirnhausen, metodi che si differenziano tutti notevolmente da quello classico di Hudde.

Esaminiamo ora i vari casi che si presentano in relazione alla realtà delle radici. Poniamo:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

l'espressione che compare sotto radice nella formula di Tartaglia, ovvero il discriminante della risolvente di Hudde, detto anche discriminante della equazione cubica poiché il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione ammetta due radici uguali.
Si distinguono tre casi:

1) $\Delta > 0$

I due radicali cubici ammettono, ciascuno, tre radici di cui una reale. Siano A e B tali radici reali. La formula dà allora nove valori per la x.
Indichiamo con $1, \epsilon_1, \epsilon_2$ le tre radici terze dell'unità cioè le radici dell'equazione $x^3 - 1 = 0$. Si ha:

$$1, \quad \epsilon_1 = \frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2}, \quad \epsilon_2 = \frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2}$$

Si ottiene un gruppo ciclico generato da una qualsiasi radice complessa non reale che indichiamo semplicemente con ϵ. Si hanno le relazioni:

$$\epsilon^3 = 1, \quad \epsilon + \epsilon^2 + 1 = 0$$

Le radici dei due radicali sono:

$$A, \quad \epsilon A, \quad \epsilon^2 A, \quad B, \quad \epsilon B, \quad \epsilon^2 B$$

Tenendo conto del vincolo $3AB+p=0$, si ottengono come radici della equazione cubica i tre valori:

$$x_1 = A + B, \quad x_2 = \epsilon A + \epsilon^2 B, \quad x_3 = \epsilon^2 A + \epsilon B$$

2) $\Delta = 0$

In questo caso i due radicali cubici sono uguali ed indicato con A la radice reale comune, le tre radici dell'equazione cubica sono:

$$x_1 = 2A. \quad x_2 = x_3 = \epsilon A + \epsilon^2 A = -A$$

Esse sono dunque reali, una semplice ed una doppia.

3) $\Delta < 0$

Necessariamente deve risultare $p < 0$. In questo caso sotto i radicali cubici appaiono numeri complessi coniugati, ma le tre radici dell'equazione sono ancora reali.
Per via algebrica è assolutamente impossibile liberare la formula di Tartaglia dai numeri complessi coniugati; tutti i tentativi fatti in questo senso, nei secoli scorsi, sono rimasti infruttuosi.
Questo caso è noto come **caso irriducibile**.
Cardano si accorse per primo di questo inconveniente, nel tentativo di risolvere l'equazione:

$$x^3 = 9x + 10$$

cioè $x^3 - 9x - 10 = 0$ in cui si ottiene:

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{-2}}$$

Dopo pochi anni, questo stesso caso irriducibile suggerirà a **Rafael Bombelli** l'idea di introdurre i **numeri immaginari**.
Cardano e Bombelli nelle loro opere risolvono molte equazioni

di questo genere ricorrendo a particolari artifici. Per esempio, con riferimento alla equazione precedente, si aggiunge 8 ad entrambi i membri e scomponendo si ottiene:

$$(x+2)(x^2-2x+4) = 9(x+2)$$

da cui:

$$x = -2. \quad x = 1 \pm \sqrt{6}$$

La soluzione data da Cardano è $x = 1 + \sqrt{6}$.

Per curiosità riportiamo alcuni problemi di terzo grado con le soluzioni svolte al tempo di Tartaglia

A. Problema proposto da **Tartaglia** al **Ferrari** nel secondo controcartello:

Io mi trovo .27. cu.cu. piu .36. primi relati piu .54. secondi relati piu .8. equal à .1000. Ve adomando se questo et altri capitoli simili sono solubili per regola generale, over no, et essendo solubile che valse la cosa.

Risposta di Ferrari nel suo quinto cartello:

Dico che questo capitolo ed altri simili sono solubili per via generale. Adunque. .1. cu.piu due terzi, co. saranno uguali a .3. e un terzo. Seguito il capitolo e trovo la cosa valer R.V.cu. R..2. et 575 settecentovintinovesimi, piu uno e due terzi men R.V.cu: R..2. et 575 settecentovintinovesimi men uno e due terzi.

L'equazione proposta da Tartaglia corrisponde a:

$$(3x^3 + 2x)^3 = 10^3$$

e quindi basta risolvere:

$$x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} = 0$$

e la soluzione è :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{2+\frac{575}{729}}+(1+\frac{2}{3})} - \sqrt[3]{\sqrt{2+\frac{575}{729}}-(1+\frac{2}{3})}$$

B. Cardano nella sua **Ars Magna** considera tutti i 13 possibili tipi di equazioni cubiche prive di termini negativi.
Cubus aequatur 6 quadratis p 20.

$$x^3 = 6x^2 + 20$$

adde 8 cubum 2, tertiae partis 6, ad 10 dimidium 20 fit 18 ab huius quadrato 324 abiice 64 cubum quadrati 2 relinquitur 260 cuius radicem adde et minue 18 habebis 18 p(lus) R. 260 et 18 m(inus) R. 260. horum R. cubicae iunctae addita tertia parte numeri quadratorum (2) constituum rem .

Aggiungi 8, cubo di 2, terza parte di 6, a 10 meta' di 20, si avra' 18 dal cui quadrato 324 , tolto 64 (cubo del quadrato di 2) , rimane 260 la cui radice aggiunta e tolta a 18, avrai 18 piu R.260 e 18 meno R.260. La somma delle loro radici cubiche e della terza parte del numero del quadrato (coefficiente di x^2) costituisce la soluzione.
Se si pone $x = y + 2$, si ottiene $y^3 - 12y - 36 = 0$
e quindi

$$x = \sqrt[3]{18+\sqrt{324-64}} + \sqrt[3]{18-\sqrt{324-64}} + 2$$

$$x = \sqrt[3]{18+\sqrt{260}} + \sqrt[3]{18-\sqrt{260}} + 2$$

Nicolò Tartaglia **I versi del Tartaglia**
Ludovico Ferrari
François Viète
Christian Huygens
Eulero
Arthur Cayley
Giuseppe Lagrange
Rafael Bombelli **I numeri complessi**
Gerolamo Cardano e **L'Ars Magna**
La disputa tra Cardano e Tartaglia

Bombelli risolve un'equazione di terzo grado

Nel tentativo di risolvere l'equazione:

$$x^3 = 15x + 4$$

usando la formula di Tartaglia, ottiene:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Sfruttando poi il risultato di un esercizio precedente, dopo aver constatato che

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3$$

$$2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3$$

trova:

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

È in questa occasione che Bombelli inventa le dizioni:
piu di meno (p.d.m.) per indicare $+\sqrt{-1}$
meno di meno (m.d.m.) per indicare $-\sqrt{-1}$
e stabilisce le **regole del moltiplicare**:
più via più di meno, fa più di meno:

$$+(+\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1}$$

meno via più di meno, fa meno di meno:

$$-(+\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$

più via meno di meno, fa meno di meno:

$$+(-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$

meno via meno di meno, fa più di meno:

$$-(-\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1}$$

più di meno via più di meno, fa meno:

$$(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = -1$$

più di meno via meno di meno, fa più:

$$(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = +1$$

meno di meno via più di meno, fa più:

$$(-\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = +1$$

meno di meno via meno di meno, fa meno:

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1$$

Gauss, molto più tardi, userà per primo la lettera **i** per indicare $\sqrt{-1}$.
In questo modo, il Bombelli prova che è possibile ottenere soluzioni reali per le equazioni cubiche anche nel caso **irriducibile**, cioè quando sotto la radice quadrata nella formula di **Tartaglia** appaiono numeri negativi.
Leibniz lo definì *eccezionale maestro dell'arte analitica.*

La risoluzione delle equazioni di terzo grado

I numeri complessi

Carl Friedrich Gauss

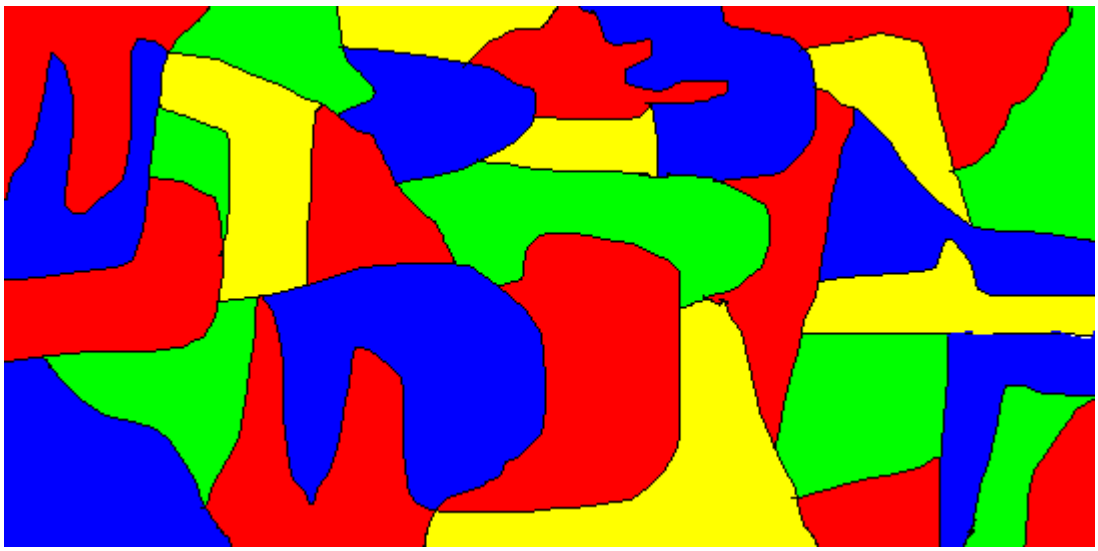
Nicolò Tartaglia

Gottfried Wilhelm Leibniz

Un commento di John Wallis al caso irriducibile

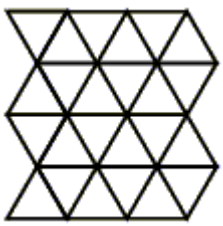
Le tassellature

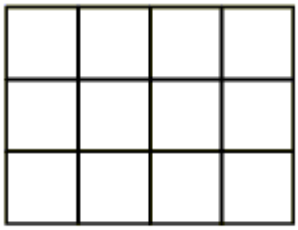
Una ***tassellatura*** del piano è un insieme di figure piane limitate che, disposte in maniera opportuna, ricoprono il piano senza sovrapporsi, né lasciare spazi vuoti.

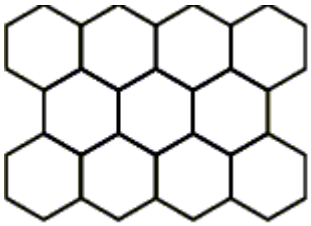


Il **teorema dei quattro colori** ci assicura che è sempre possibile colorare tutte le figure con solo quattro colori in modo che due figure aventi in comune un tratto (esteso, non ridotto ad un punto) del contorno non abbiano mai lo stesso colore. I matematici sono sempre stati convinti della validità di questa proprietà, ma solo nel 1976, all'Università dell'Illinois, USA, ne fu trovata una dimostrazione, che si avvale dell'ausilio del computer: la grande conquista consiste nell'aver ridotto tutte le possibili "carte geografiche" ad un numero finito (per quanto elevatissimo) di casi. Questi sono stati quindi verificati ad uno ad uno da un programma appositamente creato.

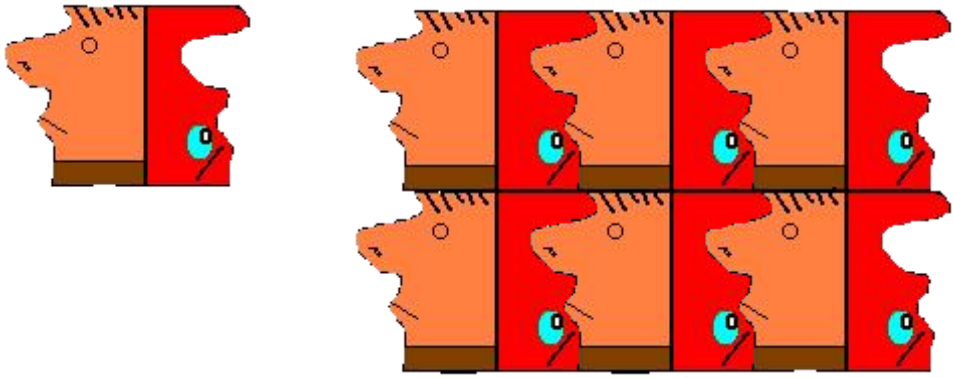
La particolare tassellatura della figura precedente è comunque, di per sé, poco significativa dal punto di vista matematico, in quanto non presenta alcuna regolarità. Sono invece interessanti le tassellature composte a partire da un numero finito di forme. Esistono figure che, da sole, tassellano il piano. Tra i poligoni regolari ciò avviene solo per i triangoli, i quadrati e gli esagoni:





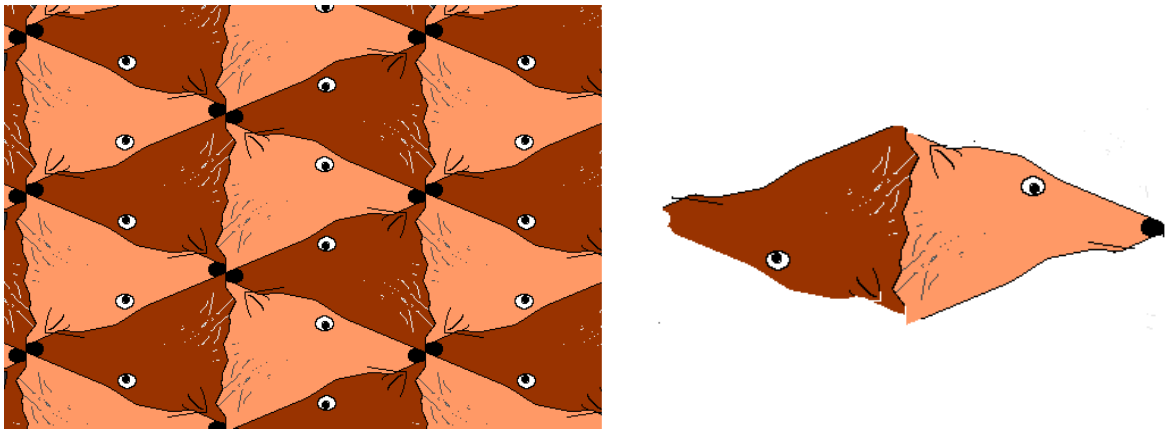


Si ottengono tassellature simili con i triangoli isosceli, i rettangoli o i parallelogrammi, o anche con figure più fantasiose:



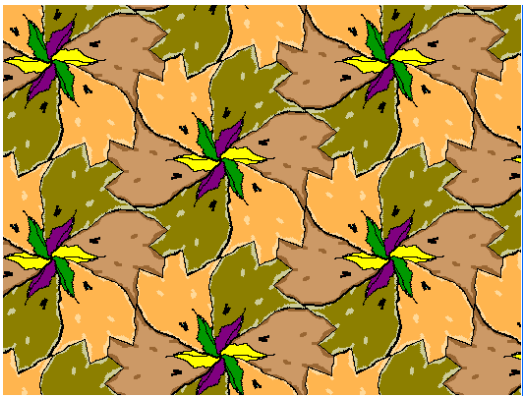
La figura che tassella si chiama **modulo**.
Le tassellature viste sinora presentano un'interessante proprietà: se si immagina di estenderle all'intero piano, e le si sposta a destra o a sinistra, in alto o in basso di un numero qualunque di moduli, si ottiene la stessa tassellatura di partenza. Si dice che la tassellatura è ***invariante per traslazioni***.

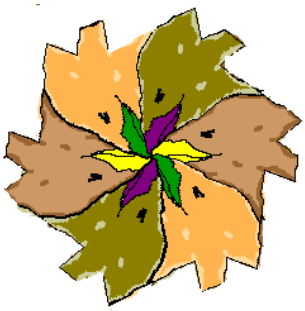
Se il modulo è formato da più di una figura, si possono presentare anche altri tipi di simmetria.



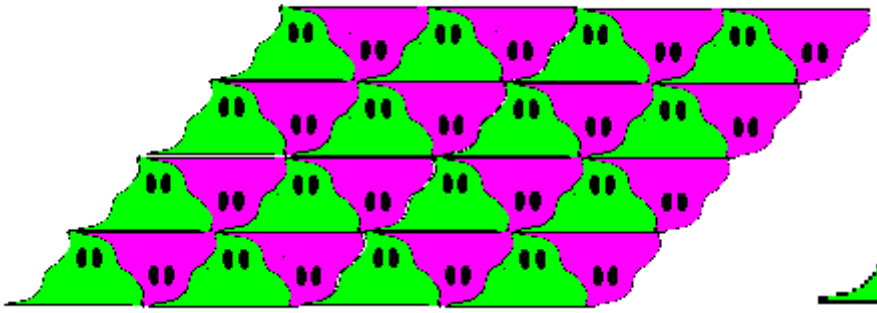
Qui il modulo è formato da due figure uguali, una è capovolta rispetto all'altra (ossia ruotata di 180° gradi).
La tassellatura è quindi ***invariante per rotazioni*** di 180°, oltre ad essere invariante per traslazioni verticali ed orizzontali di un numero pari di moduli, e per traslazioni oblique di un numero qualunque di moduli.

La prossima tassellatura è invariante per rotazioni di 60°:

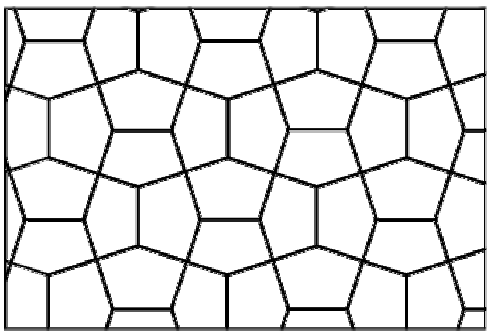




Il modulo è formato da 6 figure uguali.
Esistono anche tassellature ***invarianti per simmetria speculare***:

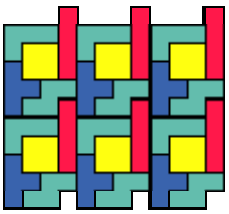


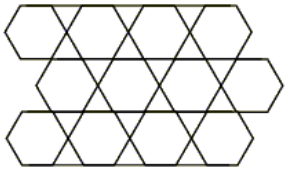


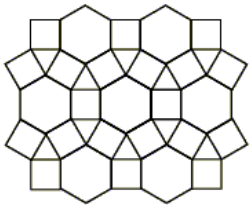


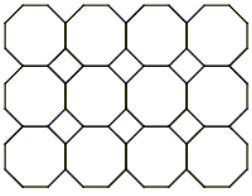


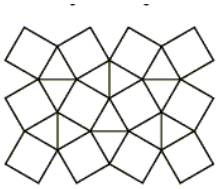
Diamo ora alcuni esempi di tassellature composte da più figure diverse:



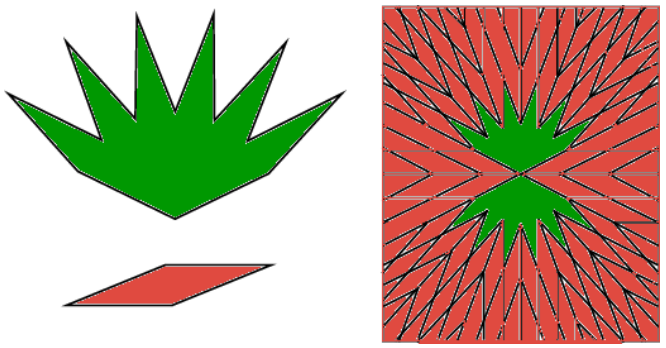




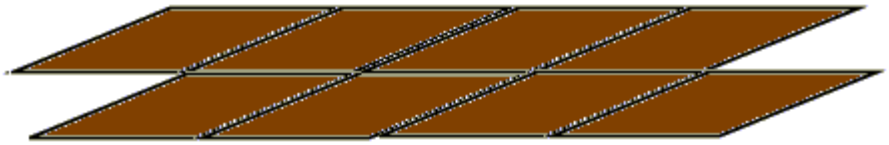




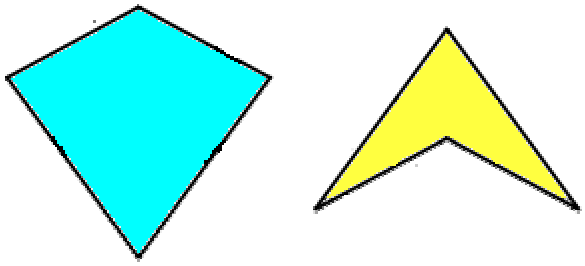
Tutte le tassellature viste finora sono invarianti per traslazioni. Ne esistono altre che non sono invarianti rispetto a nessuna traslazione:



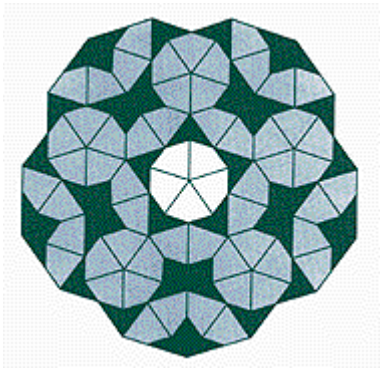
Queste si dicono ***aperiodiche***. Per lungo tempo si è pensato che, dato un numero finito di figure che danno luogo ad una tassellatura aperiodica, le stesse figure, disposte diversamente, potessero sempre dare luogo ad una tassellatura periodica. Nell'esempio della figura precedente, il rombo dà chiaramente luogo ad una tassellatura periodica:

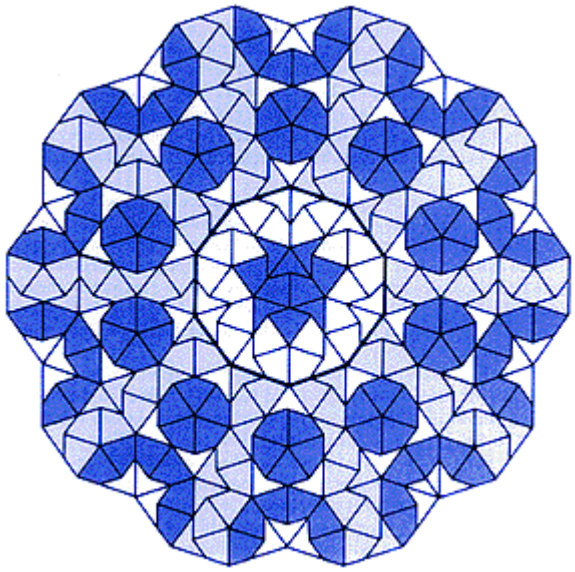


Oggi sappiamo che quella congettura non è vera: nel 1974 il matematico inglese **Roger Penrose**, dell'Università di Oxford, trovò due figure che non tassellano periodicamente:



Esse sono chiamate ***aquilone*** e ***freccia***, e danno luogo ad infinite diverse tassellature aperiodiche. Eccone due particolari:





Le possibili tassellature di Penrose sono tante quante i numeri reali: Esse presentano una simmetria pentagonale, cioè sono invarianti per rotazioni di 72° intorno al loro centro.
Si possono studiare anche le tassellature di superficie diverse, come, ad esempio, la sfera, oppure il **toro**:





Queste tassellature hanno proprietà diverse da quelle del piano: in particolare, le figure che tassellano il piano non necessariamente tassellano la sfera e il toro, e viceversa. È facile dimostrare che gli esagoni, ad esempio, non tassellano la sfera. La prova si effettua **per assurdo**: si nega la tesi e se ne deduce una contraddizione. Supponiamo dunque che gli esagoni tassellino la sfera. Allora esiste un **poliedro** convesso le cui facce sono tutte esagonali. Sia f il numero di queste facce. Ognuna di esse ha 6 lati, ma ogni lato è comune a due facce: quindi il numero degli spigoli è $s = 3f$. I vertici di ogni faccia sono 6, ma ogni vertice è comune a tre facce: quindi i vertici sono complessivamente $v = 2f$. Ora, secondo la **formula di Eulero** dovrebbe valere

$$v - s + f = 2.$$

Invece, nel nostro ipotetico caso si ha:

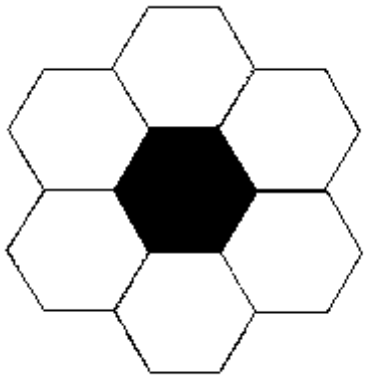
$$v - s + f = 2f - 3f + f = 0.$$

Poiché la formula di Eulero non ammette eccezioni, il nostro ipotetico caso è impossibile.

È invece possibile tassellare la sfera con esagoni e pentagoni:



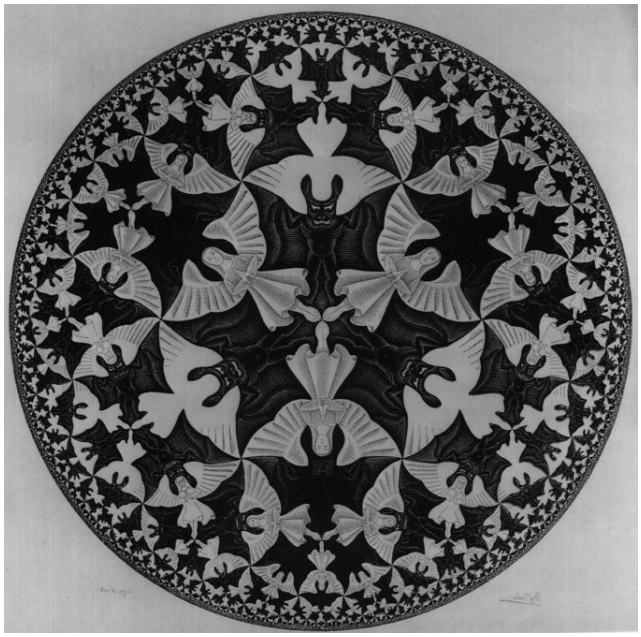
La tassellatura del pallone da calcio, a sua volta, non può essere trasferita sul piano: infatti sul piano è impossibile disporre cinque esagoni attorno ad un pentagono.

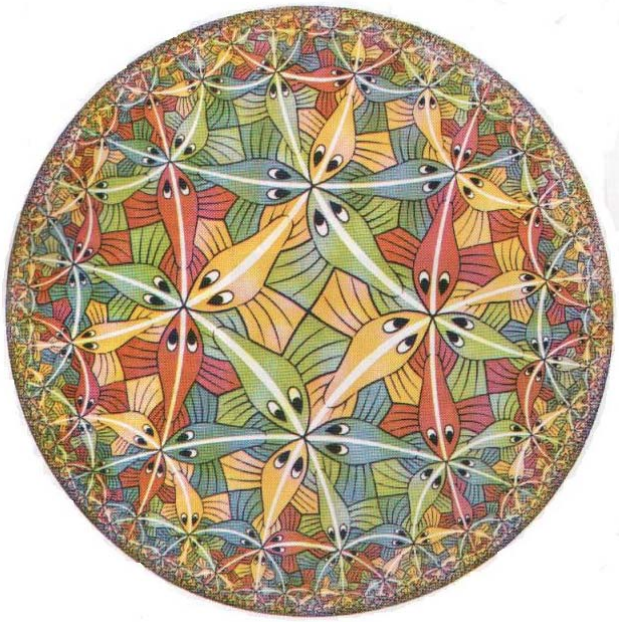


Per convincersene, basta misurare gli angoli: come ci insegna la **trigonometria sferica**, gli angoli sul piano sono diversi da quelli sulla sfera.

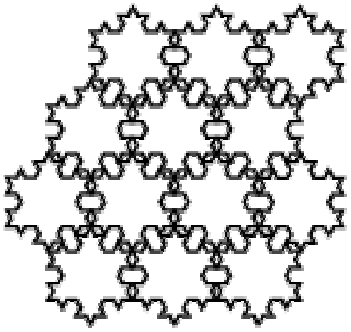
Curiosità

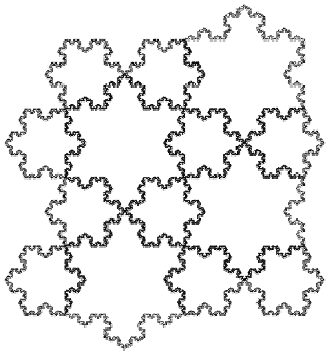
- Le tassellature sono alla base di molti quadri dell'incisore olandese **Maurits Cornelis Escher** (1898-1972). L'opera ***Angeli e demoni*** rappresenta una tassellatura del **disco di Poincaré**, un modello del **piano iperbolico**. Un'altra tassellatura ha come motivo i pesci.

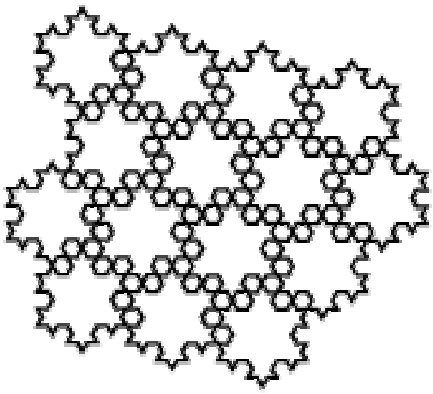




- È possibile costruire diverse tassellature del piano a partire da alcuni **frattali**, ad esempio la ***curva di Koch***.





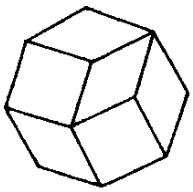


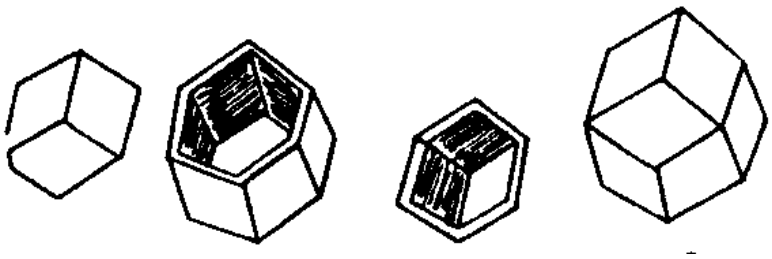
- Recentemente la collaborazione internazionale tra matematici e fisici ha portato a scoprire che le strutture atomiche di alcune leghe metalliche presentano la stessa forma di una tassellatura aperiodica.

- Le tassellature sono alla base dei mosaici, che fecero la loro prima comparsa nella zona dell'Egeo nel secondo millennio prima di Cristo. Bellissimi esempi di tassellature si trovano nell'arte islamica:
  - **Decorazione di un mausoleo**
  - **Finestra di una moschea del Cairo**

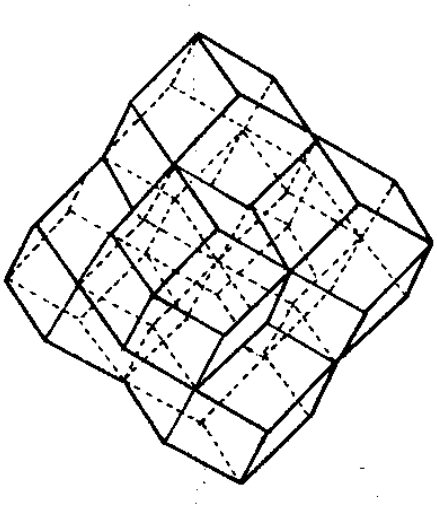
- Il concetto di tassellatura può essere esteso, in modo naturale, allo spazio tridimensionale. Questo può essere tassellato con cubi o parallelepipedi uguali, ma anche utilizzando insieme **tetraedri** e **ottaedri**.

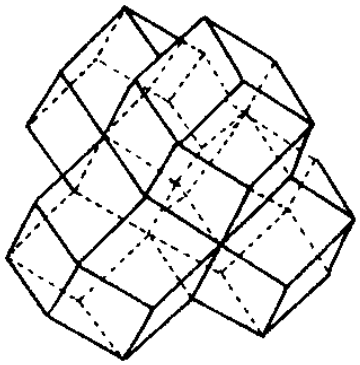
- Il matematico tedesco **Keplero** trovò altri poliedri che tassellano lo spazio. Il più semplice è il cosiddetto *rombododecaedro,* così costruito:





Egli lo considerava una sorta di fusione tra il **cubo** e l'ottaedro. Ecco le due possibili disposizioni del rombododecaedro:





In una sua **opera minore** sulle forme esagonali, Keplero osserva che le cellette degli alveari altro non sono che rombododecaedri scoperchiati: la loro forma deriverebbe dunque dall'esigenza di riempire lo spazio nel modo più semplice e funzionale.

Simmetrie e tassellatura secondo Hermann Weyl



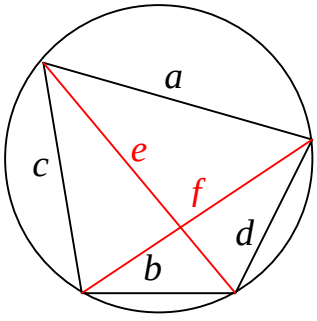
Decorazioni del mirhab della madrasa-mausoleo di Qalaun, eretta tra il 1284 e il 1293

Claudio Tolomeo (sec. II d.C.)



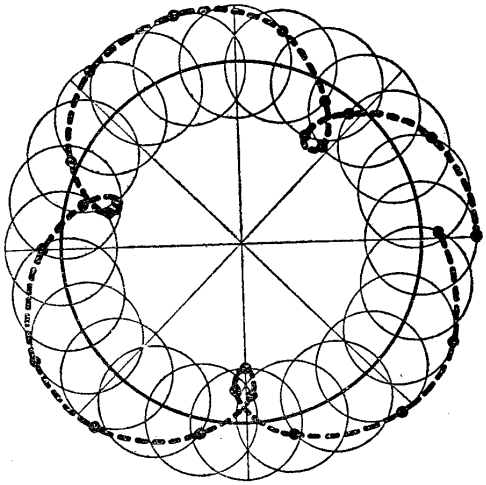
Non sono noti i dati biografici di questo scienziato egiziano: date e luoghi di nascita e di morte sono sconosciuti, si sa solo, con certezza, che la sua vita si svolse ad Alessandria nella prima metà del secolo II d.C.; presumibilmente fu attivo tra l'11° anno del regno di Adriano (127 d.C.) e il 14° anno del regno di Antonino (151 d.C.). Il vero cardine delle sue ricerche furono le osservazioni astronomiche, sue e di autori precedenti, che egli raccolse e rielaborò nella sua opera principale, in tredici libri, da lui intitolata ***Sintassi Matematica***. Questa passò alla storia col nome di ***Almagesto***. Si pensa che tale nome sia derivato dal greco *meghisté* ("la più grande"), con l'aggiunta del prefisso arabo *al*. A quest'opera si ispirò **Giovanni di Sacrobosco**, autore del principale trattato astronomico del Medio Evo.

Tolomeo si avvaleva, nei suoi calcoli sui moti dei pianeti, della *teoria delle corde,* una forma primitiva di trigonometria, inventata da Ipparco di Rodi, un matematico greco del sec. I a.C., che consisteva nello studio della relazione tra le corde di un cerchio e le lunghezze degli archi sottesi. Egli utilizzava il sistema sessagesimale di origine **babilonese**, che consiste nel suddividere il cerchio in 360 settori, quelli che noi oggi chiamiamo *gradi*. Delle sue ricerche in geometria ci è rimasto un teorema che porta il suo nome, e che riguarda proprio le corde di un cerchio. L'enunciato è il seguente: *dato un quadrilatero inscritto in un cerchio, il rettangolo costruito sulle diagonali è pari alla somma dei rettangoli costruiti sui lati opposti.* In formule:



$$ef = ab + cd$$

La teoria astronomica tolemaica, che sopravvisse fino al Rinascimento, poneva al centro dell'Universo la Terra, immobile e circondata da tante sfere concentriche quanti erano i restanti corpi celesti, a loro volta racchiuse in una sfera motrice esterna, che, ruotando, avrebbe messo in movimento tutte le altre. Secondo Tolomeo ogni pianeta avrebbe ruotato intorno alla Terra descrivendo, inoltre, piccole orbite circolari (***epicicli***) sulla propria sfera di appartenenza: quindi la traiettoria risultante doveva essere una **epicicloide**.



Guardando il cielo Tolomeo ricavava anche previsioni astrologiche, studiava lo **zodiaco** trovando le congiunzioni favorevoli, secondo una sua teoria dell' "armonia delle sfere" che seguiva le leggi degli accordi musicali. La sua opera astrologica ***Tetrabiblion***, nella versione latina ***Opus quadripartitum***, fu punto di riferimento per tutto il Medio Evo. Ma, soprattutto, Tolomeo voleva leggere, nel firmamento, le distanze tra i luoghi sulla Terra e realizzare una precisa carta dell'*Ecumene,* cioè di tutta la terraferma abitata all'epoca. Voleva aggiungere rigore matematico al metodo adottato dal cartografo **Marino di Tiro**, che, a suo parere, troppo si era affidato alle testimonianze di militi e viaggiatori. I primi sei degli otto libri della ***Geografia*** di Tolomeo contengono le latitudini e le longitudini di ben 8000 località. Il resto è costituito da **carte geografiche**, realizzate secondo la tecnica della proiezione ortogonale e della quadrettatura data da meridiani e paralleli.



Il frontespizio dell'edizione cinquecentesca in latino della *Geografia* di Tolomeo a cura del geografo fiammingo Gerardo Mercator.

Al sistema geocentrico di Tolomeo si opporranno, a partire dal secolo XVI, **Copernico**, **Tycho Brahe** e **Galileo**.

Il calcolo tolemaico della circonferenza terrestre, molto al di sotto della misura reale, verrà riconosciuto valido, con lievi correzioni, fino a tutto il Medio Evo. Senza questo errore, forse, Cristoforo Colombo non si sarebbe mai avventurato per mare a *"buscar l'oriente per l'occidente"*.

Curiosità



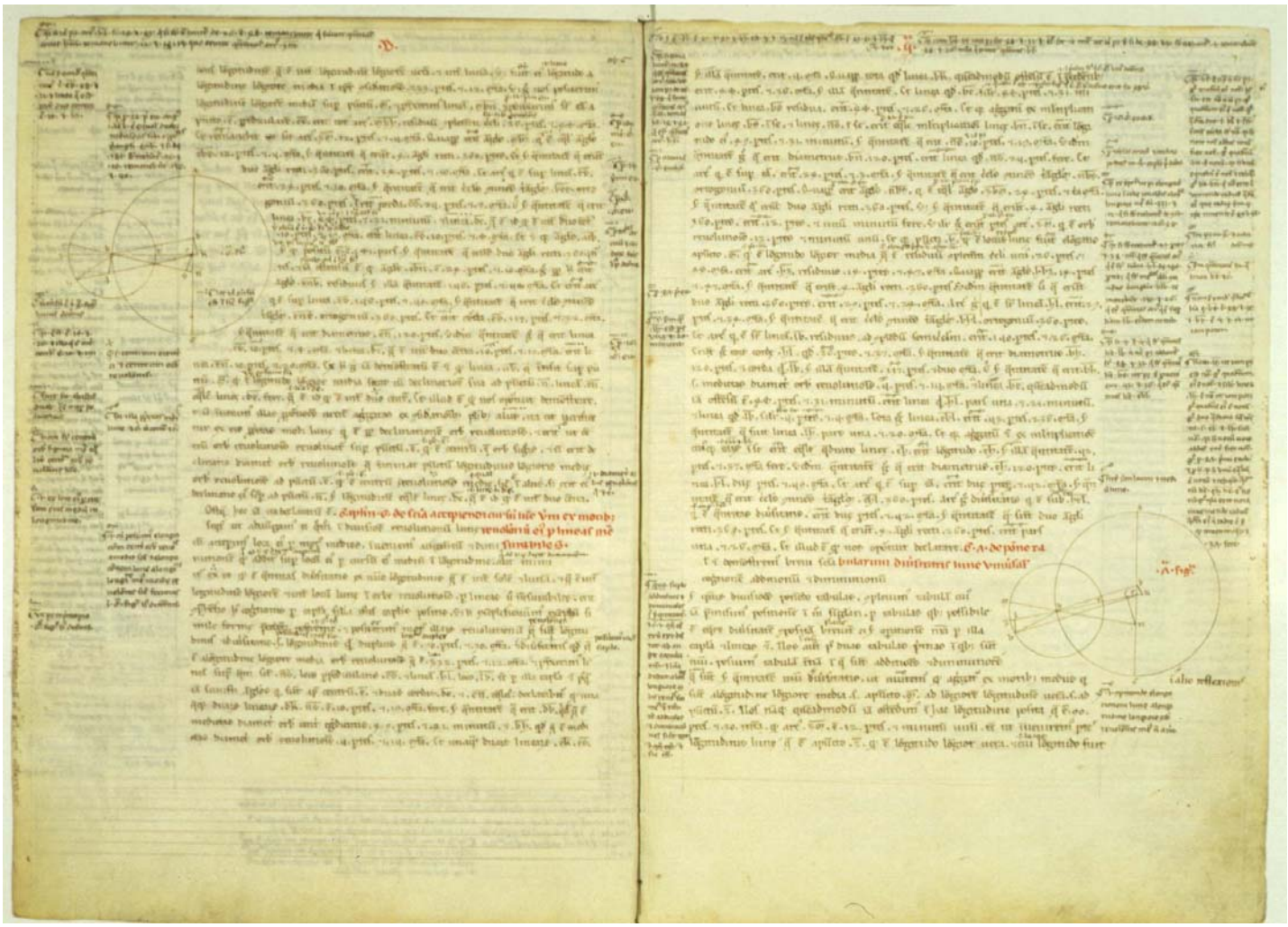
In questo ritratto, realizzato nel 1500, Tolomeo appare con un **astrolabio** in mano e … una corona in testa. L'artista lo ha evidentemente confuso con gli omonimi re d'Egitto: Tolomeo fu infatti il nome di tutti gli appartenenti alla dinastia dei Lagidi, discendenti del nobile macedone Lago, che occuparono il trono di Alessandria dopo la morte di Alessandro Magno, dal 323 al 30 a.C.. Tolomeo I e Tolomeo II diedero vita alla **scuola matematica alessandrina**, che fece capo ad **Euclide**. Cleopatra era la sorella di Tolomeo XIII e Tolomeo XIV.

Carta del mondo di Tolomeo

Pagine dell'*Almagesto* di Tolomeo dai codici della Biblioteca Vaticana

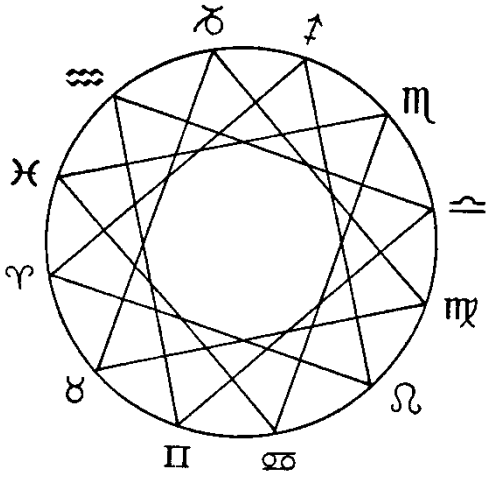


Edizione greca del sec. IX



Versione latina (sec. XIII-XIV)

Lo zodiaco secondo Tolomeo



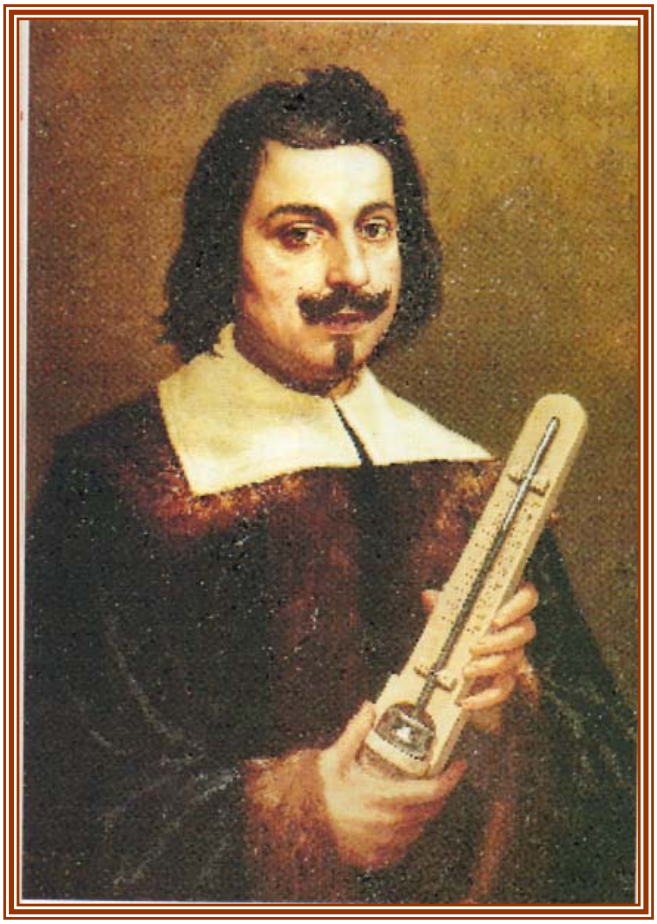
Il culto dello zodiaco risale alla più remota antichità: **Tolomeo** fu solo uno dei tanti cultori: l'astrologia, già presente nelle prime civiltà mesopotamiche, appartiene anche alla tradizione cinese, e se ne sono trovate tracce anche nell'America precolombiana.
I dodici segni zodiacali noti in occidente prendono il nome da altrettante diverse costellazioni, che occupano una certa fascia circolare del cielo. Le loro posizioni possono essere rappresentate da punti di una circonferenza posti a distanze uguali. Questi sono, presi a tre a tre, i vertici di quattro triangoli equilateri inscritti nella circonferenza stessa, e detti *trigoni.* I vertici di ciascun trigono sono segni zodiacali associati allo stesso elemento:

- Acquario, gemelli, bilancia: segni d'aria
- Pesci, cancro, scorpione: segni d'acqua
- Ariete, leone, sagittario: segni di fuoco
- Toro, vergine, capricorno: segni di terra

I trigoni sono legati ad eventi meteorologici ed astronomici. L'associazione ideale dei segni zodiacali ai pianeti non ha basi scientifiche vere e proprie, ed è variata nel corso della storia. L'orientamento di ogni trigono è invece determinato dalla direzione assunta dai venti quando la Luna transita su uno dei segni del trigono stesso.

Lo zodiaco egizio
Lo zodiaco e Vitruvio
L'oroscopo formulato da Cardano a Ferrari

Evangelista Torricelli (Faenza 1608- Firenze 1647)



Allievo di **Galileo**, è forse più conosciuto come inventore del barometro che come matematico. Eppure la maggior parte delle sue scoperte riguarda i baricentri, le aree e perimetri di figure piane delimitate da curve, ed i volumi dei solidi di rotazione da esse generati. Contende a **Roberval** il merito di aver determinato per primo l'area sottesa alla **cicloide**, e a lui si deve anche il calcolo della lunghezza della **spirale logaritmica**, una curva introdotta da **Archimede**.
L'influenza di quest'ultimo pervade tutta l'opera matematica e fisica di Torricelli, sia nei contenuti, sia nella forma. Il Nostro, fra l'altro, riprende dal famoso scienziato siracusano il problema della quadratura della parabola, per presentarne ben 21 diverse risoluzioni: egli utilizza a questo scopo sia l'antico **metodo di esaustione**, sia il nuovo **metodo degli indivisibili** introdotto da **Cavalieri**. Con le stesse tecniche determina i baricentri di molte figure piane e solide.

Buona parte degli scritti di Torricelli riguarda il calcolo del volume e delle superficie dei solidi di rotazione: nel trattato ***Nova per armillas stereometria*** egli studia le superficie che sono unioni di corone circolari (che lui chiama *armille*, dal nome latino del braccialetto), e dedica un **capitolo** ai corpi solidi concavi o "*vasiformi*".

Proseguendo le ricerche di Galileo, Torricelli studiò il moto dei gravi e dei proiettili e si servì delle nozioni di cinematica acquisite per determinare **le tangenti alla parabola** e ad altre curve, come l'**ellisse** e la spirale logaritmica. Scrisse un trattato sul galleggiamento dei corpi, intitolato ***Soluzione di un problema intorno alle cose che stanno nell'umido***.

Torricelli ci ha lasciato alcuni frammenti sparsi contenenti numerose proposizioni ed osservazioni di geometria, e raccolti sotto il titolo, curioso e suggestivo, di ***Campo di tartufi***. Ne citiamo una delle tante che riguardano i **poligoni regolari**:

"L'essagono al circolo ha la proportione che l'ambito del triangolo alla periferia. Il circolo al dodecagono sta come la periferia all'ambito dell'essagono, adunque ex æquo l'essagono al dodecagono sta come l'ambito del triangolo all'ambito dell'essagono e questo è vero in tutti i poligoni che habbiano i lati di numero doppi, e siano tre i poligoni, etc. […]"

Nel linguaggio di Torricelli, *ambito* significa *area* e la *periferia* corrisponde al nostro *perimetro*.

Introdusse il concetto di **integrale** *indefinito*, ossia di funzione (detta *primitiva*) di cui una funzione assegnata è la derivata. Calcolò anche integrali impropri, ossia integrali su intervalli che non sono chiusi e limitati. Egli provò, ad esempio, che l'area compresa tra un ramo d'**iperbole** ed i suoi asintoti è infinita.

Per gli importanti risultati ottenuti, Torricelli è considerato uno dei principali precursori del **calcolo infinitesimale**, della disciplina che oggi chiamiamo analisi, ma che allora era considerata una nascente branca della geometria. E la geometria era per Torricelli la regina della scienze.
Accolto nell'**Accademia dei Lincei**, tenne presso di questa una serie di lezioni di vario argomento, tra cui una ***Prefazione in lode delle matematiche***, in cui disse:

"Non troverete una sola proposta nella Geometria la quale non lasci esquisitamente appagato l'animo di chi l'ha intesa.
Non si trova che nei libri classici della Matematica da due secoli in qua si sia già mai scoperta un'ombra di fallacia, non per altro, se non perché le verità Geometriche ritrovate una volta sola, subito che sono scoperte, escludono le contradizioni, e s'impossessano dell'eternità."

Torricelli maturò l'idea del **barometro** tirando le somme dalle osservazioni e dalle esperienze di cui da tempo si parlava in Europa. Nella prima metà del Seicento si era diffusa la convinzione che il liquido contenuto in un tubo, chiuso all'estremità superiore, e rovesciato dentro un recipiente, non potesse mai oltrepassare una certa altezza. Galilei, nei suoi ***Discorsi***, sulla base dell'esperienza dei

fontanieri, affermava che questa altezza, nel caso dell'acqua, è di circa 18 braccia (circa 10,5 metri), misurate dalla superficie dell'acqua contenuta nel recipiente. Questa congettura venne di fatto confermata da vari esperimenti, anche se non era chiara la causa del fenomeno. Torricelli ebbe l'idea di utilizzare un liquido molto più pesante dell'acqua, il mercurio. Se, come egli pensava, l'altezza massima di risalita del liquido dipendeva unicamente dal peso della colonna di liquido, che doveva eguagliare quella della colonna d'aria gravante sulla medesima superficie, allora il mercurio avrebbe permesso di ridurre le proporzioni dell'esperimento. Nel 1644 compié, insieme all'amico e collega Cavalieri, la famosa esperienza dell'*argento vivo* (questo è il nome popolare del mercurio): l'altezza raggiunta dalla colonna di mercurio era di soli 76 cm. Il mercurio contenuto nel tubo pesava esattamente quanto un volume d'acqua che avesse riempito un tubo della medesima sezione fino ad un'altezza di 18 braccia. La notizia dell'esperimento si diffuse ben presto in Francia grazie a **Mersenne**, con cui Torricelli era in corrispondenza, e i **Pascal**, Blaise e suo padre Etienne, decisero di ripetere l'esperimento in maniera spettacolare, sulla pubblica piazza, con acqua e vino. Per l'occasione fecero costruire dei tubi di vetro lunghissimi, che eressero fissandoli ad alberi di navi. Le altezze raggiunte dai due liquidi impiegati confermarono i loro calcoli. In seguito il giovane Pascal avrebbe salito una montagna recando con sé la colonnina di mercurio, osservando così come questa scendeva all'aumentare dell'altitudine, ovvero al diminuire del peso della colonna d'aria sovrastante. Furono queste le prime scoperte ed intuizioni intorno alla pressione atmosferica, dalle quali si sarebbe sviluppata quella disciplina della fisica, oggi chiamata *fluidostatica,* che studia il comportamento di liquidi e gas in stato di quiete.

Curiosità

- Torricelli fu il primo a determinare il *centro isogonico* del triangolo, ossia il punto del piano tale che la somma delle sue distanze dai tre vertici sia minima.

- Torricelli scrisse un trattato sull'uso della **prospettiva** in pittura.

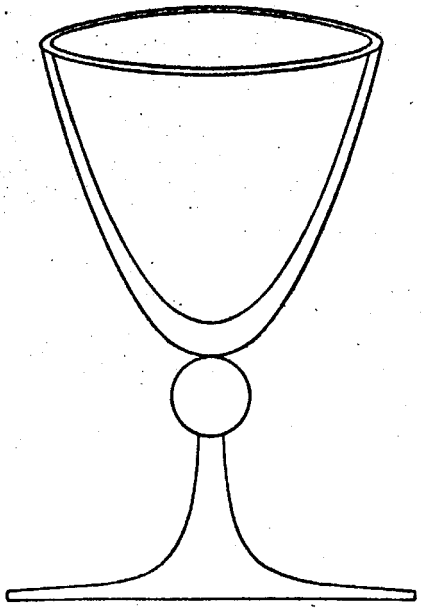
- Torricelli inventò anche una squadra per artiglieri, ossia una sorta di goniometro che permetteva di leggere la portata del cannone in funzione della sua inclinazione. Un simile strumento era stato

ideato da **Tartaglia**: esso è raffigurato nelle sue opere di balistica, come, ad esempio, nella ***Nova Scientia***.

Una lettera di Cavalieri a Torricelli

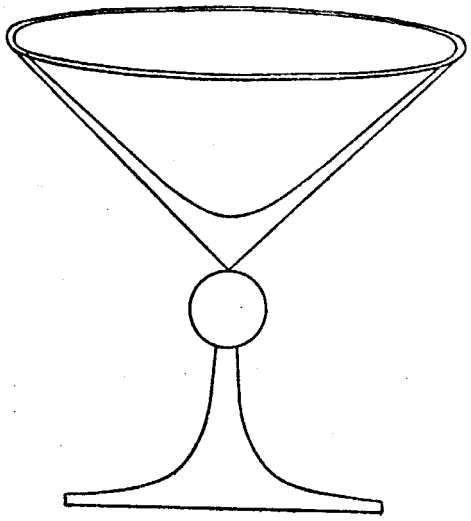
Una lettera di Torricelli su spirale e parabola

Torricelli calcola il volume del paraboloide rotondo

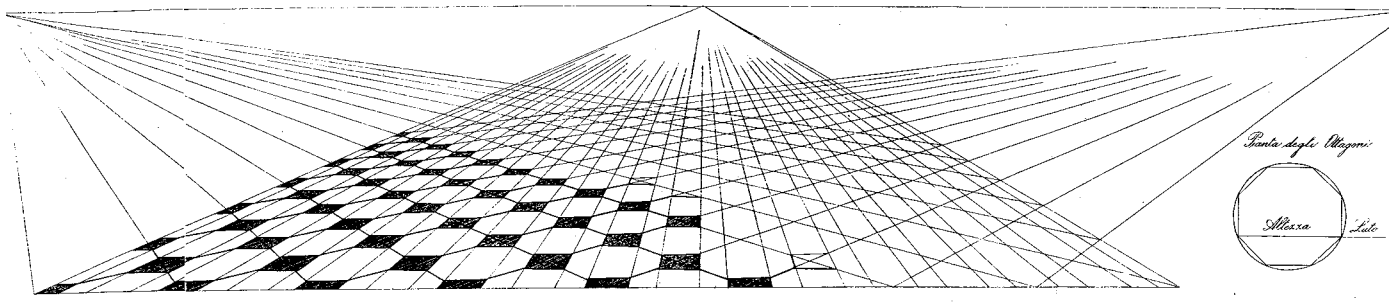


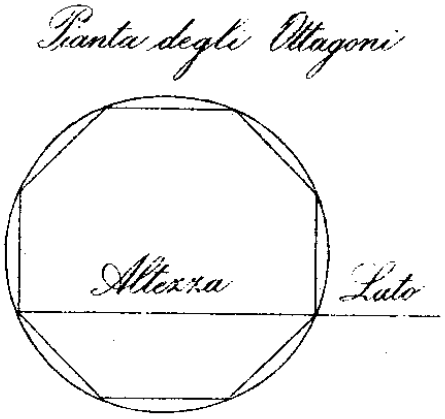
PARS PRIMA

DE SOLIDIS VASIFORMIS.



Evangelista Torricelli : prospettiva di un pavimento ad ottagoni





La prospettiva secondo Leon Battista Alberti

La prospettiva secondo Albrecht Dürer

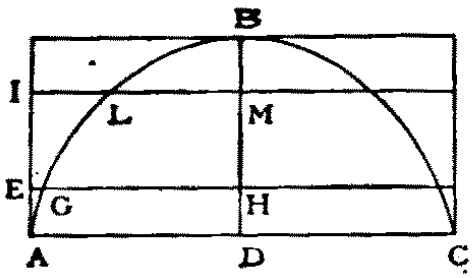
Il volume del paraboloide rotondo secondo Torricelli

Evangelista Torricelli calcola il volume di un segmento del paraboloide rotondo (il solido ottenuto facendo ruotare un arco di parabola, comprendente il vertice, intorno al suo asse) utilizzando la **teoria degli indivisibili**, ideata da **Bonaventura Cavalieri**. Ecco il testo originale latino: il solido viene chiamato *conoide.*

PROPOS. III

Conoidis parabolici mensura

Sumantur aequales BM, DH, et cum ostendatur supra circulum EH ad armillam ex EG esse ut recta BD ad DH, sive ut DB ad BM, sive ut circulus IM ad ML, aequalis erit armilla ex EG circulo ex LM, et hoc semper, et propterea conoides reliquo solido aequale.



Ed ecco la traduzione nel moderno linguaggio matematico:

Si consideri il cilindro circoscritto al paraboloide. Dato un punto *M* dell'asse, sia *H* l'altro punto dell'asse tale che *BM=DH.* Il rapporto tra l'area del cerchio di raggio *EH* e l'area della corona circolare di sezione *EG* è

$$EH^2/(EH^2-GH^2) = BD/DH,$$

dove l'uguaglianza deriva dalle proprietà metriche della **parabola** (espresse dalla sua **equazione cartesiana**). Per la stessa ragione

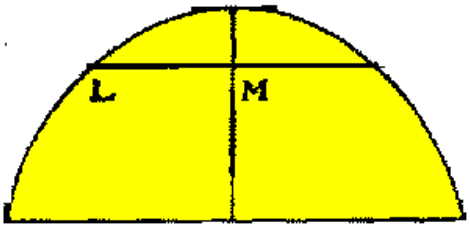
$$BD/DH = DB/BM = IM^2/ML^2 = EH^2/LM^2.$$

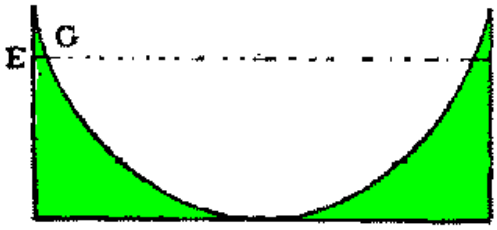
Pertanto

$$EH^2-GH^2 = LM^2.$$

Dunque la corona circolare di sezione *EG* ha la stessa area del cerchio di raggio *LM.* Quindi le sezioni trasversali del paraboloide e della

figura ottenuta prelevando questo dal cilindro sono a due a due uguali, come mostra il disegno:

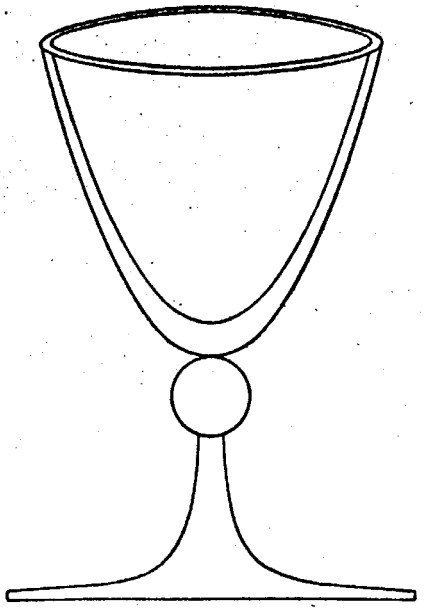




Dal **principio di Cavalieri** segue allora che le due figure hanno lo stesso volume. Se ne conclude che ***il volume del paraboloide è la metà di quello del cilindro circoscritto***.

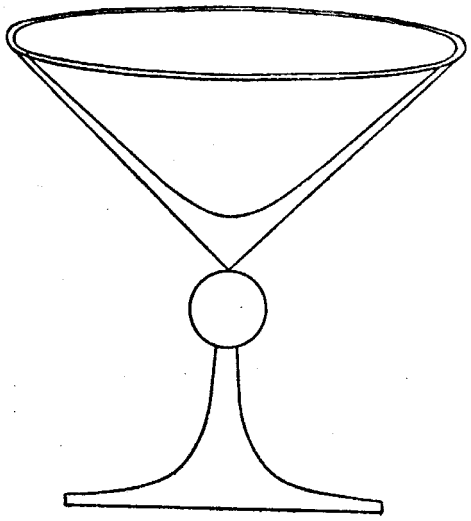
Questo procedimento è molto più semplice rispetto al **metodo di esaustione**.

Torricelli calcola il baricentro della calotta sferica



PARS PRIMA

DE SOLIDIS VASIFORMIS.



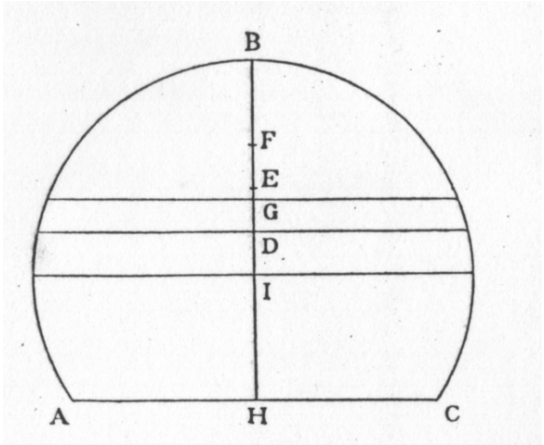
Il baricentro della calotta sferica

Torricelli, nel trattato ***De centro gravitatis planorum et solidorum***, dimostra che il baricentro della calotta sferica (che egli chiama *berrettino*) coincide sempre col punto medio del suo asse di rotazione *(saetta).* La dimostrazione utilizza il **metodo di esaustione**, suddividendo la superficie in strati, di altezza sufficientemente piccola, che costituiscono le sue sezioni trasversali. Il ragionamento avviene per ***reductio ad absurdum***. Per ovvi motivi di simmetria, il baricentro deve in ogni caso trovarsi sull'asse. Si suppone che il baricentro non coincida con il punto medio, che verrà indicato con *D*, ma con un altro punto dell'asse, chiamato *E.* Ciò conduce ad una contraddizione. Precisamente si prova che, se il baricentro è in *E*, allora non può essere in *E.*

Per capire la prova, occorre inoltre ricordare che la superficie di ogni strato (quella che è più propriamente chiamata *zona sferica*) è proporzionale alla sua altezza (in particolare è indipendente dalla sua collocazione rispetto al centro della sfera).

Propos°

Il centro del berrettino sferico sempre sta nel mezzo della saetta.



Sia il berrettino sferico ABC e mezzo della saetta D. Dico, se non è D, sia, per esempio, se può, E, e divisa BD bifariam in F, e poi DF bifariam in G, finché resti DG minore di DE, seghisi tutta BH in parti uguali alla DG, e tirinsi perpendicolari alla saetta, saranno dunque i berrettini come le saette, cioè in proporzione aritmetica ab unitate, e però tutte le zone saranno uguali al minor berrettino, e fra di loro. Et avendo ciascuna il centro nel suo asse, et essendo tutte uguali, il centro di tutte dovrà essere fra il centro delle due medie, cioè dovrà essere nella retta IG, ma è fuori di essa, essendo supposto E. Ergo etc.

Con questo risultato, che è oggetto di un **carteggio** con **Cavalieri**, Torricelli smentisce un risultato di **Paolo Guldino**, che aveva erroneamente collocato il baricentro della calotta semisferica.

Ritroviamo un'argomentazione simile a quella usata da Torricelli nel calcolo del **baricentro del paraboloide rotondo**, presentato da **Galileo** nei suoi ***Discorsi***.

Una lettera di Torricelli su spirale e parabola

UNA LETTERA INEDITA
DI EVANGELISTA TORRICELLI

SUPPLEMENTO AL CARTEGGIO DI E. TORRICELLI

A p. 256 del Vol. III delle Opere *di* E. TORRICELLI (*Faenza*, 1919) *è fatto cenno di una lettera del sommo Faentino, della quale era bensì nota l'esistenza, ma di cui gli editori non erano riusciti ad avere visione e trarre copia. Ora la signora* MARIE TANNERY, *di cui sono noti lo zelo e l'intelligenza con cui prosegue l'opera del suo compianto Marito, avendo avuta notizia che quella lettera stava per essere posta in vendita a Parigi al pubblico incanto, chiese ed ottenne di prenderne copia ; col suo consenso essa può venire qui posta a disposizione di tutti. Si osservi che così resta spiegato come* MICHELANGELO RICCI *nella risposta* (*op. cit. p.* 261) *parli di una «lettera delle spirali» direttagli dal* TORRICELLI.

GINO LORIA

Molt' Ill^re^ sig^re^ Pron Mio Col^mo^

Promettevo di mandar certi vetri col Procaccio di dom^ca^ pross^ma^ ; e poi non fu possibile, perchè non potei recuperarne uno che havevo prestato ad un sig^re^. Hora l'ho havuto, e lo manderò con due altri che ho levati da i miei occhialoni acciò il P. MERSENNE possa eleggersene uno. Havrei caro saper dal P. MERSENNE chi sia stato l'autor in Francia che hà detto di mostrar la linea curva parabolica eguale ad una spirale Archimedea ; io hó conseguito ancor'io tal dimostrazione, poichè dimostro quamlibet lineam spiralem ab ARCHIMEDE definitam, et quemlibet ipsius arcum partèm, sive ex centro incipiat sive non ; et sive primam revolutionem excedat, sive non, cuidam curvae lineae parabolicae aequalem esse. Avviserò poi a V. S. qual sia la d^a^ parabola. Di più hò dimostrato, che un'altra sorte di linee spirali si provano eguali à linee rette. Dirò la definizione in un modo solo, havendola in

Mersenne

Archimede

tre modi diversi, due di quali (che saranno quei che per hora taccio) danno la descrizione della sud^a linea.

Si recta linea AB in infinitum producta intelligatur, ad partes D. et manente altero ipsius termino A ipsa recta AB circumventatur circulari et equabili latione: eodem verò tempore punctum aliquod B eandem lineam percurrat sive versus centrum A, sive ad partes contrarias, hac lege ut gradus velocitatis puncti B in sua linea AB, in eadem ratione crescat, sive decrescat, cum distantiis à centro A. Exempl. gr. quando punctum B erit in C,

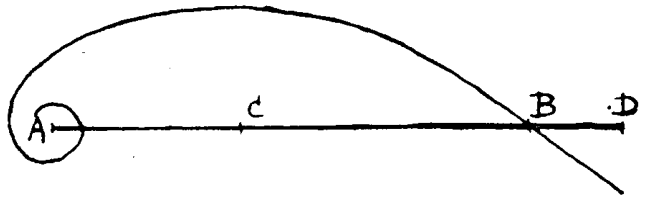


Fig. 1

impetus ipsius in C sit ad impetum in B ut CA, ad AB. quando verò erit in D, impetus eius ad impetum in B sit ut DA ad AB. et sic semper etc. punctum huiusmodi curvam quandam lineam spiralem describet, cuius quaelibet portio sive incipiat ab A, sive non, cuidam rectae lineae aequalis demonstratur. Quasdam alias passiones habet haec linea, quas etc. e vi nasce una bella curiosità, et è: che io credo che la spirale si aggiri intorno al punto A, et non pervenga ad esso se non doppo infinite revoluzioni; nondimeno tutta la spirale BCA non sarà infinita, mà ne anco dupla della retta AB. poi che la descritta da me nella proposta figura è dupla in potenza della retta AB.

Reverisco V. S. con tutto l'aft^o d V s 17 Gen^o 645
Dev^imo et aff^imo s^re
D. m.Mre VANGELISTA TORRICELLI.

Se parrà a V S potrà conferir queste mie baie col P. MERSENNE. Quanto poi à communicarle col F. MAGIOTTI e NARDI non gli dò solam^te il consenso, ma ne la supp^co, quando gli venga l'occas^ne. Che poi le spirali d'Archimede siano tutte d'una spezie o vogliam dir simili fra di loro, e differenti solam^te magnitudine come i circoli, e le parabole, è tanto noto che nulla più. Mà che le spirali mie siano d'infinite sorti come l'ellissi, e le hiperbole, secondo la proporzione dei due impeti retto e circolare che sono nel punto B, la qual proporzione hà infiniti casi. Questo solo vi è di differenza che le spezie dell'hiperb^e et ellissi hanno poi infiniti individui, mà le spezie delle mie spirali hanno uno individuo solo. Per esempio la descritta spirale BCA è unica di quella sua spezie; cioe ritenendo quella proporzione di moti che nel descriverla hò presi nel punto B, la linea non può venir più grande, ne più piccola.

Al m. Ill^re sig^re Pron. Col.^mo U. S. M. ANG^LO RICCI
Racc^to al sig.^re PROSPERO RICCI
Roma

Galleria del triangolo aritmetico

Il triangolo aritmetico (**figura**) è un triangolo formato da file di numeri sovrapposte: nella *n*-esima riga dall'alto compaiono, nell'ordine, i coefficienti dello sviluppo del binomio di Newton $(a+b)^n$. Come scoperto da **Pascal**, il coefficiente *k*-esimo della riga *n*-esima, denotato con

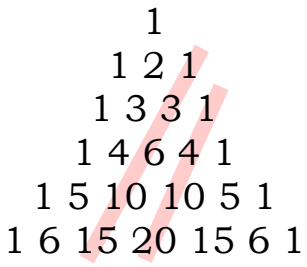
$$\binom{n}{k}$$

è un numero che emerge dal calcolo delle combinazioni: è infatti pari al numero di modi diversi di prelevare *k* elementi da un insieme che ne comprende *n* (**formula**).

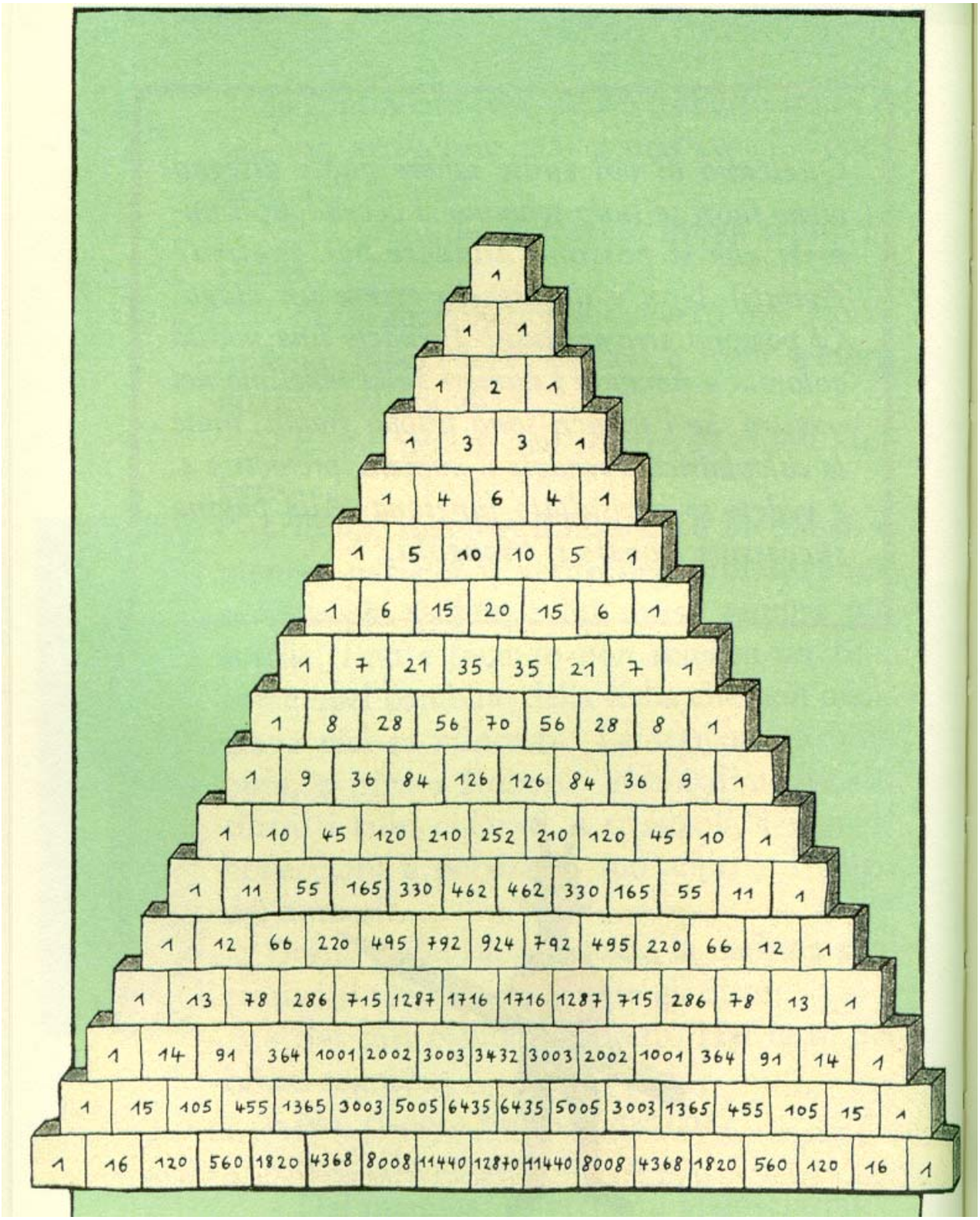
L'ideazione di questo triangolo viene fatta risalire per lo più a **Tartaglia** (1499-1557) o a **Pascal** (1623-1662), che vi dedicò, nel 1654, il ***Trattato del triangolo aritmetico***. Ma la sua origine è sicuramente anteriore al sec. XIII: un codice vaticano dell'epoca, un'edizione degli **Elementi** di **Euclide**, presenta, in una nota a margine, un triangolo aritmetico **(1)** in cui i coefficienti binomiali, dati per i valori di *n* da 1 a 10, e scritti secondo la notazione greca, si leggono in senso verticale. In senso orizzontale si leggono invece i **numeri poligonali**.
In un'aritmetica del matematico cinese **Tschu-Schi-Kih**, ***Il prezioso specchio dei quattro elementi***, del 1303, si trova la tavola **(2)**.
L'esemplare stampato più antico del triangolo aritmetico **(3)** è forse quello impresso sul frontespizio della prima edizione (1527) di un'aritmetica del matematico tedesco **Petrus Apianus** (1495-1552).
Nel 1544 **M.Stifel**, nella sua opera ***Arithmetica Integra***, ne propone una nuova versione **(4)**. I triangoli di **Tartaglia (5)** e di **Pascal (6)** sono gli ultimi in ordine di tempo. Chiude la carrellata un triangolo giapponese **(7)**, tratto dall'opera ***Sampo Doshi-mon*** di **Murai Chuzen**, del 1781.

Curiosità

- Vedete cosa appare se nel triangolo aritmetico si visualizzano solo i **numeri pari**, oppure solo i **multipli di cinque**.
- Dal triangolo aritmetico è possibile ricavare facilmente i **numeri** di lati dei **poligoni costruibili** con riga e compasso.
- La terza e la quarta diagonale discendenti da sinistra a destra forniscono, rispettivamente, la successione dei **numeri triangolari** e dei **numeri piramidali**:



Il **triangolo aritmetico** secondo **G. A. Alberti**T



Da “Il mago dei numeri” di H.-M. Enzensberger

δυαδικαὶ συζυγίαι
τριαδικαὶ συζυγίαι

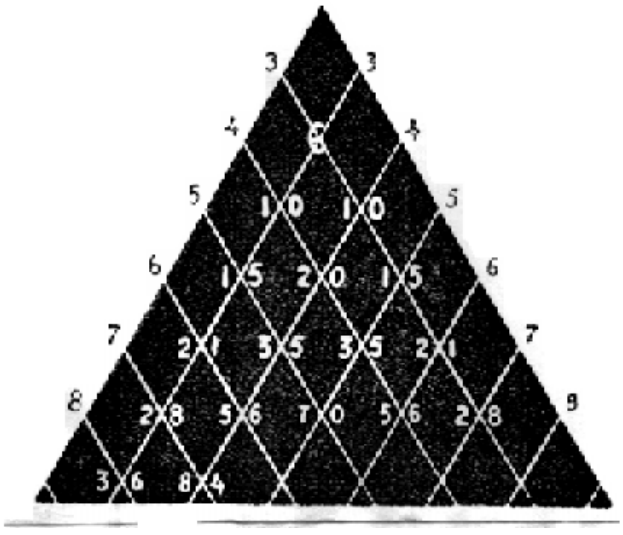
* Quadratum vacuum

α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	ϑ	ι
	α	γ	ϛ	ι	ιε	κα	κη	λϛ	με
		α	δ	ι*	κ	λε	νϛ	πδ	ρκ
			α	ε	ιε	λε	ο	ρκϛ	σι
				α	ϛ	κα	νϛ	ρκϛ	σνβ
					α	ζ	κη	πδ	σι
						α	η	λϛ	ρκ
							α	ϑ	με
								α	ι
									α

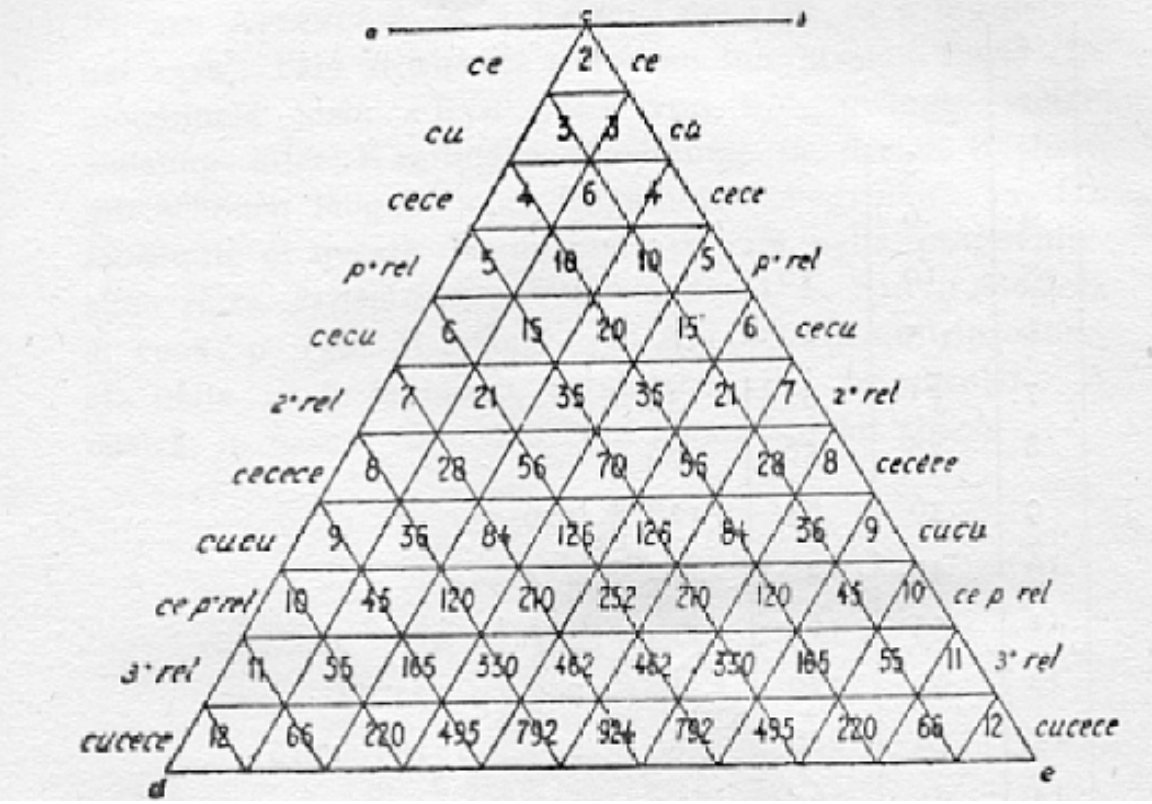


Eyn Newe
Vnnd wolgegründte
vnderweysung aller Kauffmanß Rech-
nung in dreyen Büchern/mit ſchönen Re
geln vñ fragſtucken begriffen. Sunder-
lich was fortl vnnd behendigkait in der
Welſchē Practicavñ Tollern gebraucht
wirdt/ des gleychen fürmalß nider in
Teützſcher noch in Welſcher ſprach nie
gedrückt. durch Petrum Apianū
von Leyßnick/ō Aſtronomei
zū Jngolſtat Ordina-
riū/ verfertiget.

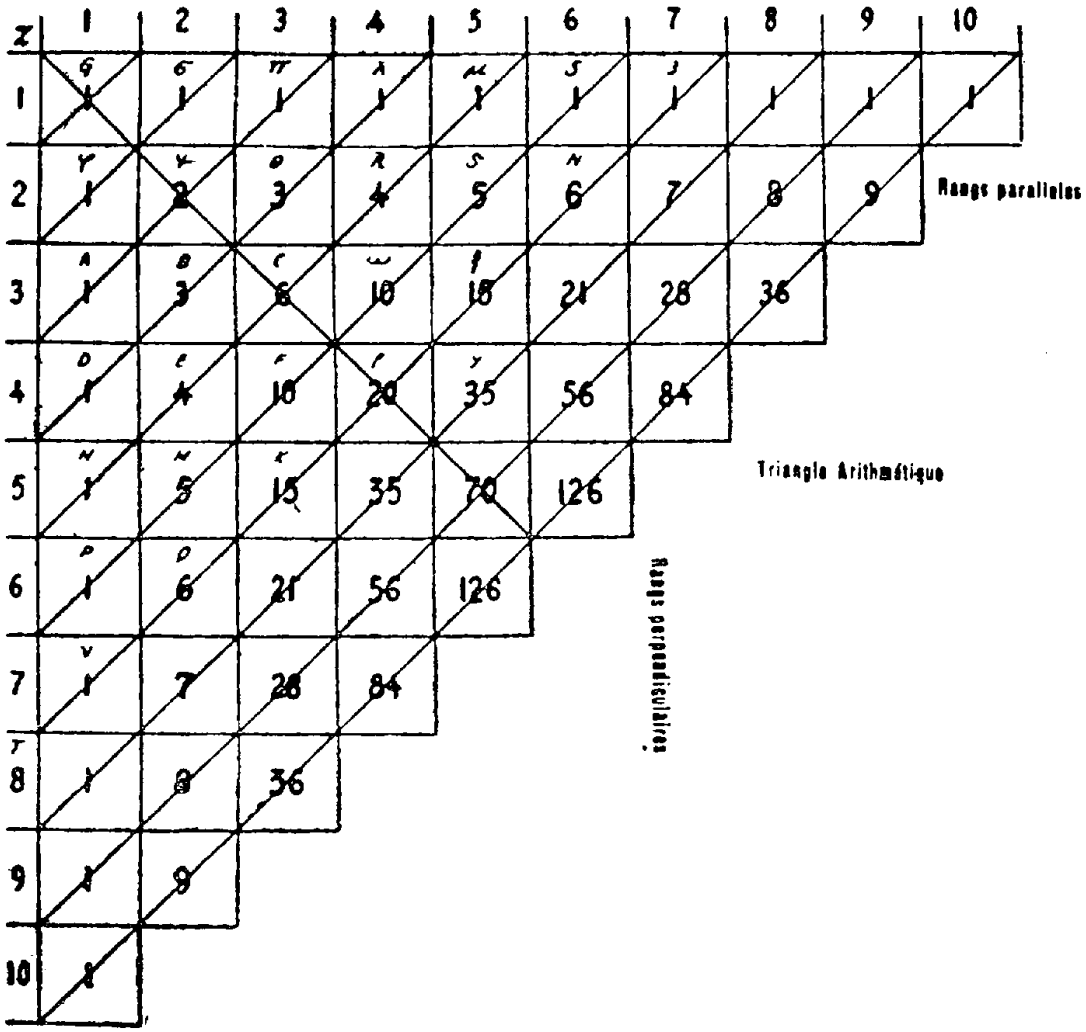
Il triangolo di Pascal come è stato stampato la prima volta nel 1527. È la pagina del titolo della aritmetica di Pietro Apiano (Ingolstadt, 1527), di oltre un secolo precedente le ricerche di Pascal sulle proprietà del triangolo

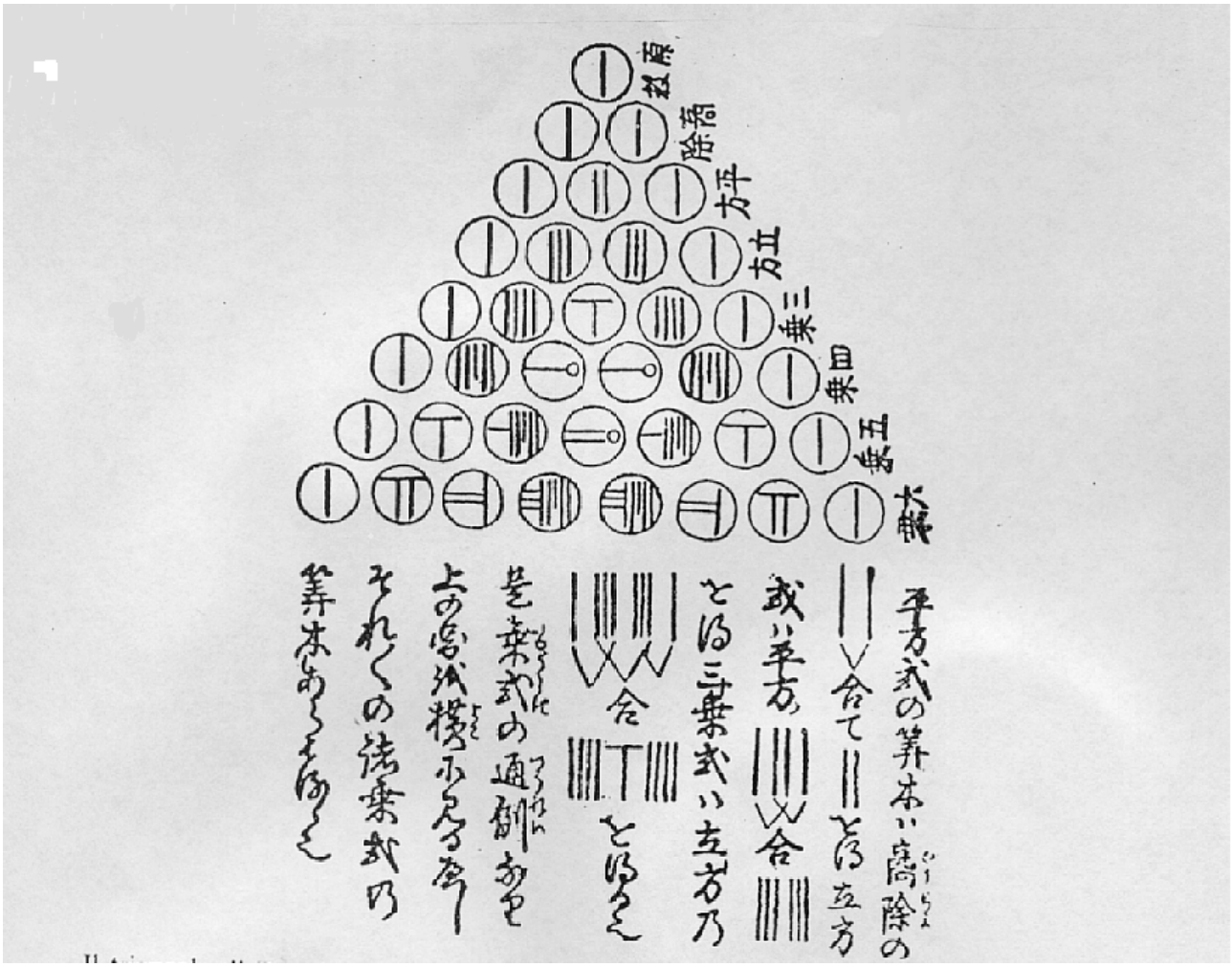


1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310



Dal ***General Trattato di Numeri et Misure***, Venezia, 1556.
Le diciture lungo i lati del triangolo sono i **nomi delle potenze**.


Rangs parallèles
Triangle Arithmétique
Rangs perpendiculaires.

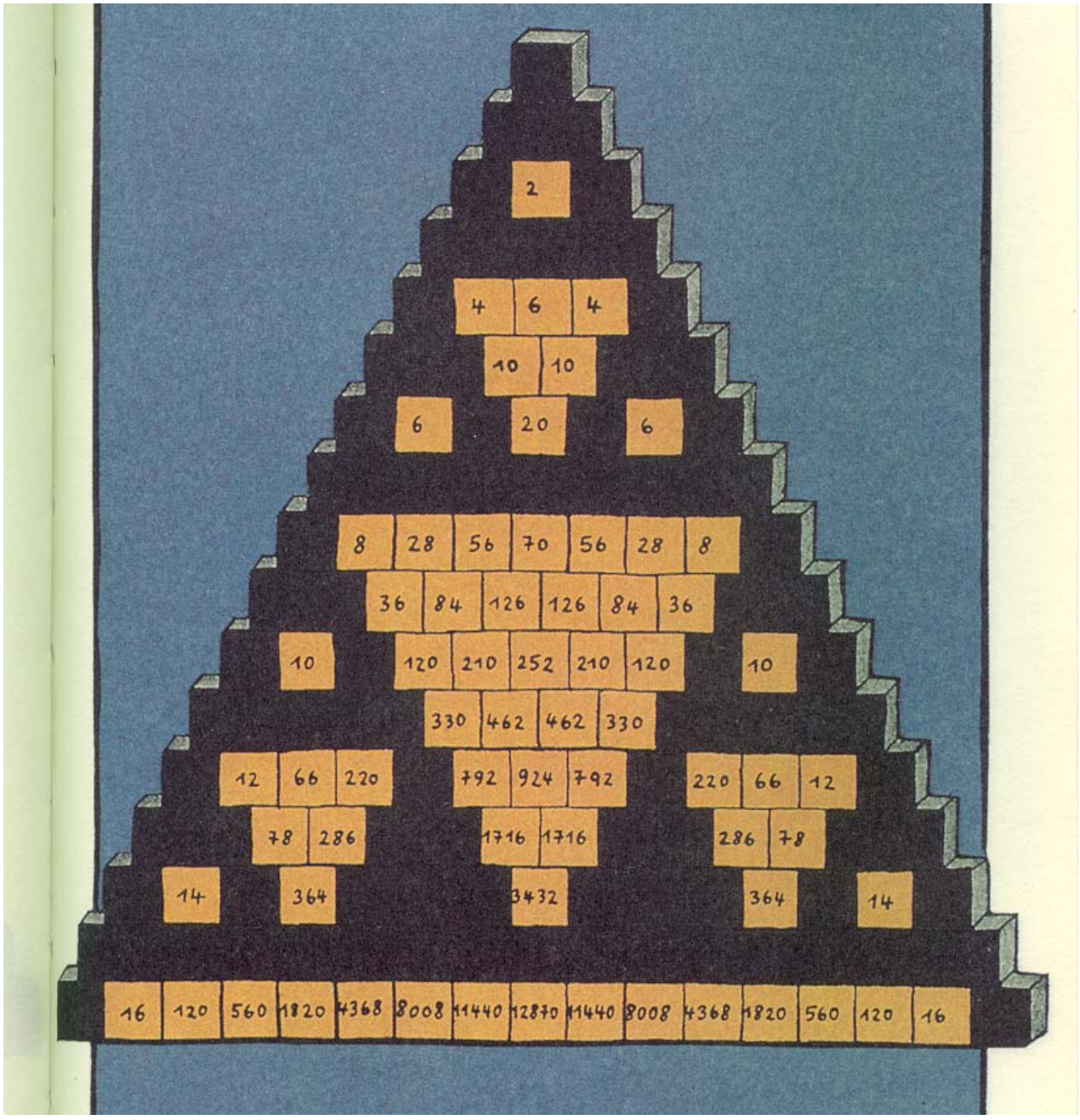


Le cifre sono scritte secondo la **notazione a bastoncini**, anticamente diffusa anche in Cina.

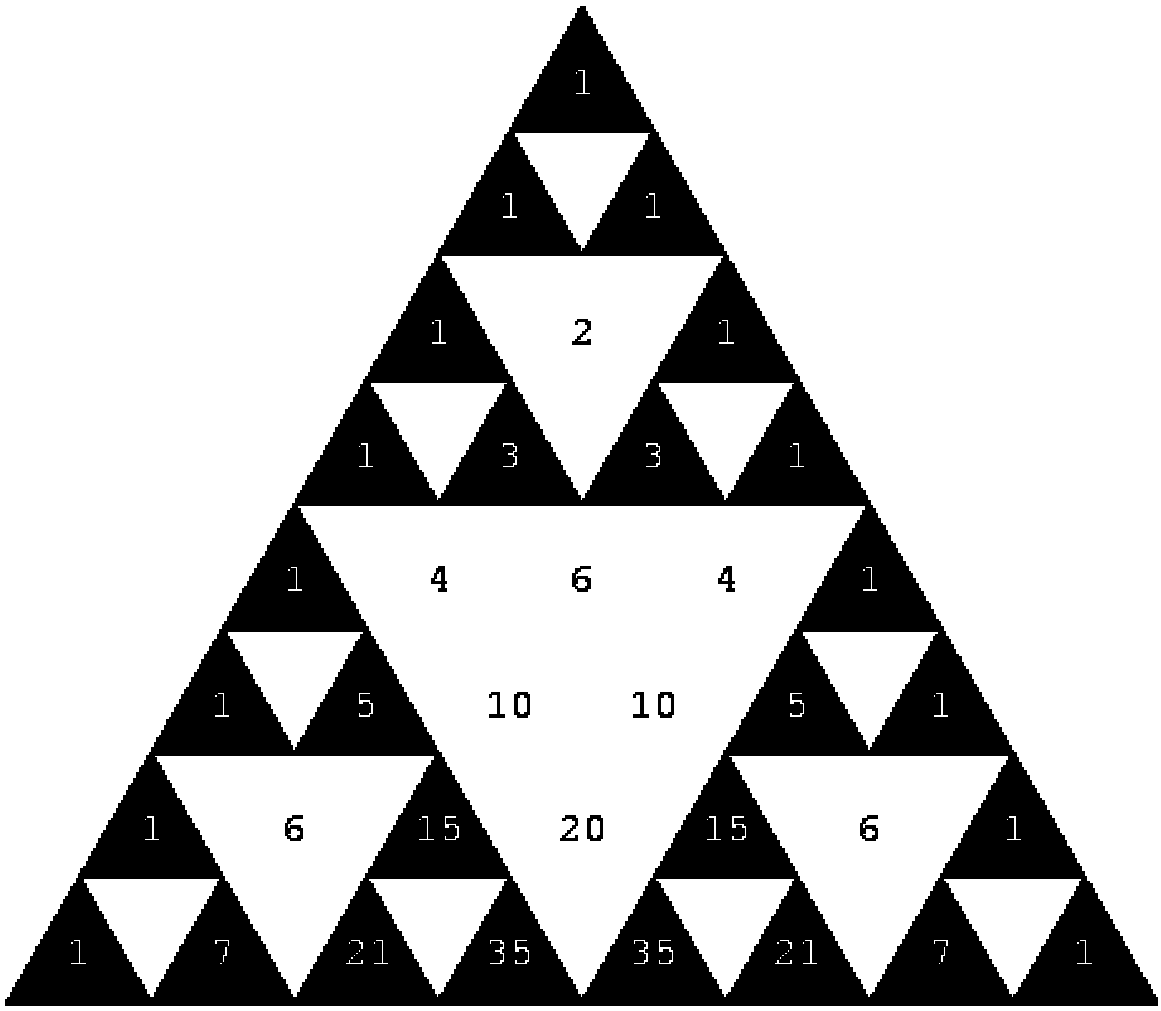
I numeri pari nel triangolo aritmetico

Il motivo formato dai numeri pari nel **triangolo aritmetico** ricorda quello di un particolare frattale poligonale, detto **crivello di Sierpinski**.

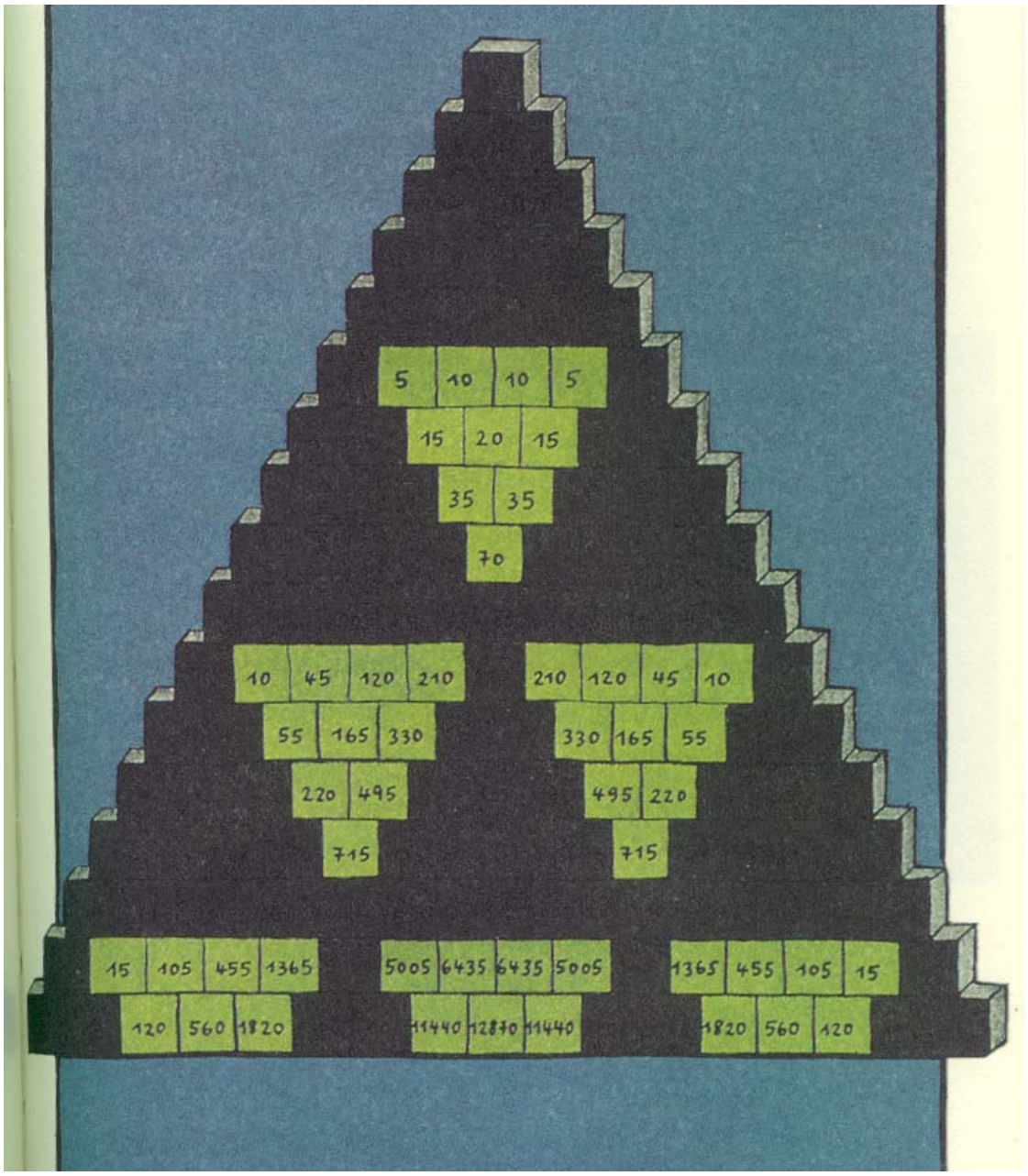
Per convincersene, basta vedere le prossime due immagini.



Da "Il mago dei numeri" di H.-M. Enzensberger


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

I multipli di cinque nel triangolo aritmetico



Da “Il mago dei numeri” di H.-M. Enzensberger

Il triangolo aritmetico e i poligoni costruibili

Alcuni matematici, diversi anni fa, hanno notato una singolare – e per ora inspiegabile – relazione fra i coefficienti del **triangolo aritmetico** ed i **poligoni costruibili**. Nelle prime 32 righe del triangolo si sostituisca 0 ad ogni coefficiente pari ed 1 ad ogni coefficiente dispari:

1	1	1
1 1	1 1	3
1 2 1	1 0 1	5
1 3 3 1	1 1 1 1	15
1 4 6 4 1	1 0 0 0 1	17
1 5 10 10 5 1	1 1 0 0 1 1	51
1 6 15 20 15 6 1	1 0 1 0 1 0 1	85
1 7 21 35 35 21 7 1	1 1 1 1 1 1 1 1	255
1 8 28 56 70 56 28 8 1	1 0 0 0 0 0 0 0 1	257

Per ovvi motivi di spazio, nella figura 1 questa operazione è stata compiuta per le prime 9 righe soltanto. Allora in ogni riga compare la rappresentazione binaria di un numero (scritto a lato): i 32 numeri così ottenuti, tutti dispari, sono numeri di lati di poligoni costruibili con riga e compasso secondo il **criterio** di **Gauss**. Ecco l'elenco completo dei numeri:

1,3,5,15,17,51,85,255,257,771,1285,3855,4369,13107,21845,65535,
65537,196611,327685,983055,1114129,3342387,5570645,
16711935,16843009,50529027,84215045,252645135,286331153,
858993459,1431655765,4294967295.

Si intende che un **poligono** con un solo lato è un segmento…

Tycho Brahe (Danimarca 1546-Boemia 1601)



In gioventù fu diviso tra vari interessi, come la medicina, l'alchimia, e l'astrologia, che egli cercò di riconciliare con la ragione e la religione. La storia della sua formazione universitaria appare molto movimentata e discontinua. Egli approdò definitivamente all'astronomia nel 1572, in seguito all'avvistamento, nella costellazione di Cassiopea, di una supernova che ancor oggi porta il suo nome.
Nel 1576 ottenne da Re Federico II di Danimarca un ingente finanziamento per la creazione di un **osservatorio**, battezzato **Uraniborg** (cioè *Castello Celeste*), che fu realizzato sull'isola di Hveen, e dove Tycho Brahe lavorò, ricevendo un vitalizio, fino al 1597. Qui egli compì le sue osservazioni astronomiche esclusivamente ad occhio nudo: il **cannocchiale** avrebbe cominciato a diffondersi solo anni più tardi, grazie all'intraprendenza di **Galileo**.

Nel 1599 giunse a Praga, dove fu nominato astronomo imperiale da Rodolfo II. Ebbe **Keplero** come assistente, che, alla sua morte, gli succedette nella carica.

Tycho Brahe sviluppò una teoria astronomica che si colloca a metà strada fra il sistema geocentrico di **Tolomeo** ed il sistema eliocentrico di **Copernico**. Da un lato la Terra è considerata immobile, dall'altro si ammette che i pianeti ruotino intorno al Sole, anche se questo, però, ruota a sua volta intorno alla Terra. Per questo particolare, che rappresenta una sostanziale differenza rispetto al sistema copernicano, soggetto alla **condanna della Chiesa**, il sistema ticonico fu favorevolmente accolto dai Gesuiti.

Per calcolare le dimensioni e le distanze dei corpi celesti Tycho Brahe ricorreva alla **parallasse**, che egli calcolava sulla base di rilevamenti effettuati con vari strumenti, tra cui il **quadrante astronomico**.

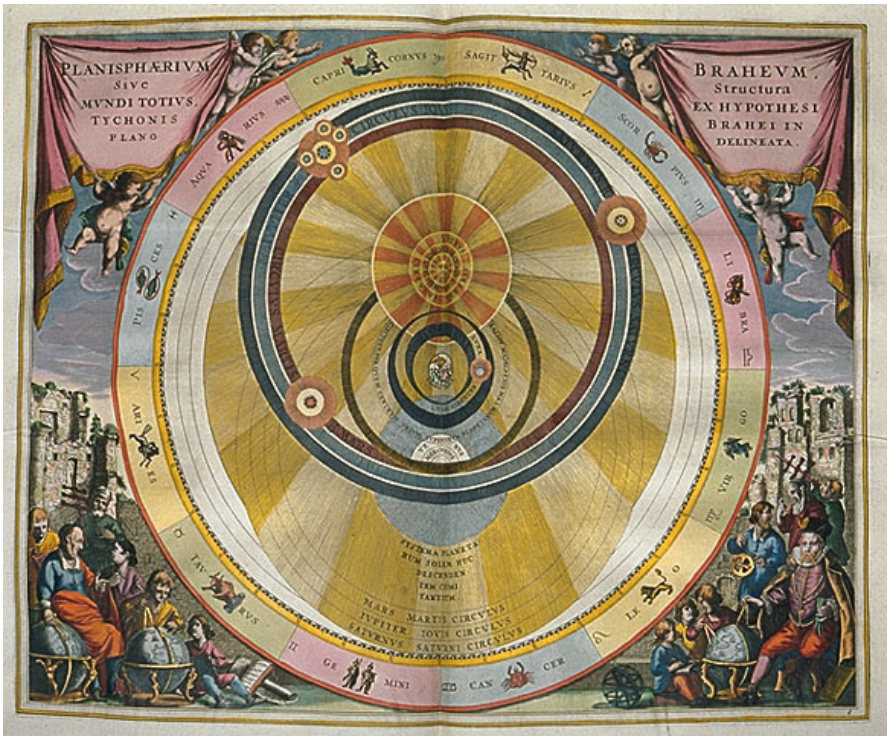
Leopardi, nella sua *Storia dell'astronomia,* rimprovererà a Tycho Brahe il tributo reso all'occultismo, a *"quella mostruosa produzione dell'orgoglio, e quel pazzo allievo della follia".*

Una pagina autografa di Tycho Brahe

Tycho Brahe alla corte di Rodolfo II



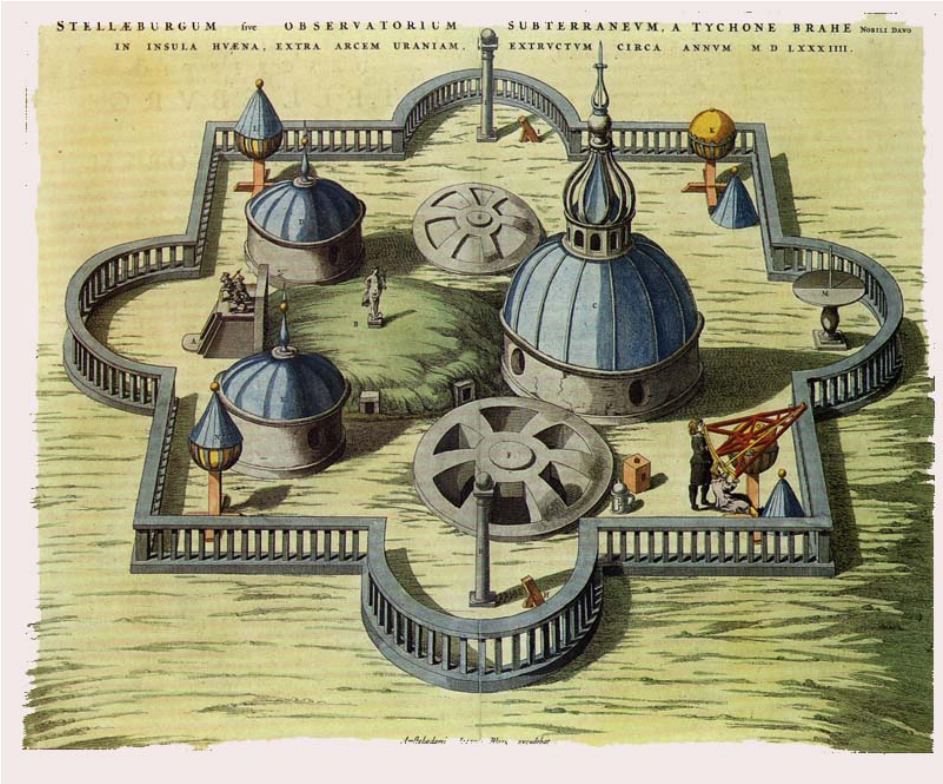
Il sistema ticonico



La tomba di Tycho Brahe

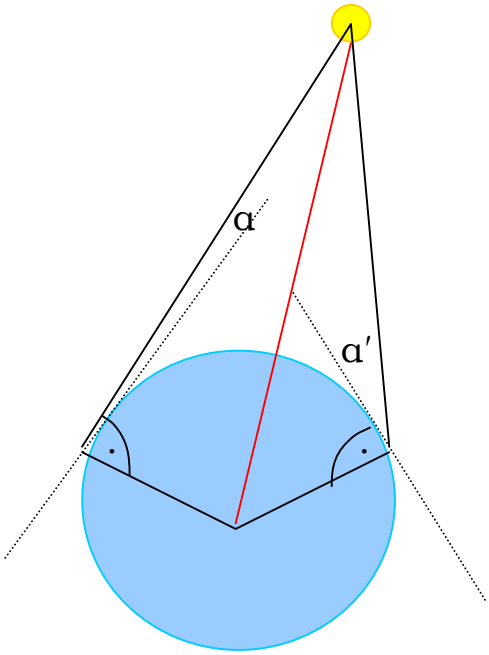


L’osservatorio *Uraniborg* di Tycho Brahe a Hveen (Copenhagen)



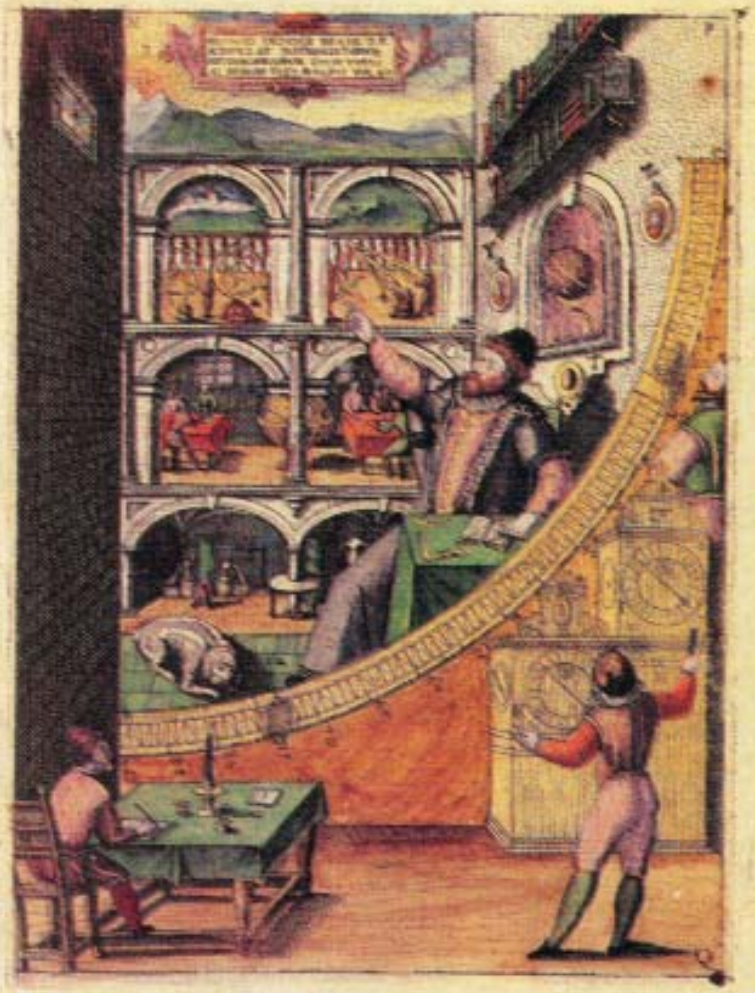
La parallasse

È una misura ottenuta determinando gli angoli zenitali (quelli che misurano l'altezza sull'orizzonte) con cui un certo corpo celeste viene visto da due diversi punti del globo posti sullo stesso parallelo, e diametralmente opposti. Essa permette di calcolare la distanza del corpo celeste dalla Terra, essendo note le dimensioni di quest'ultima.

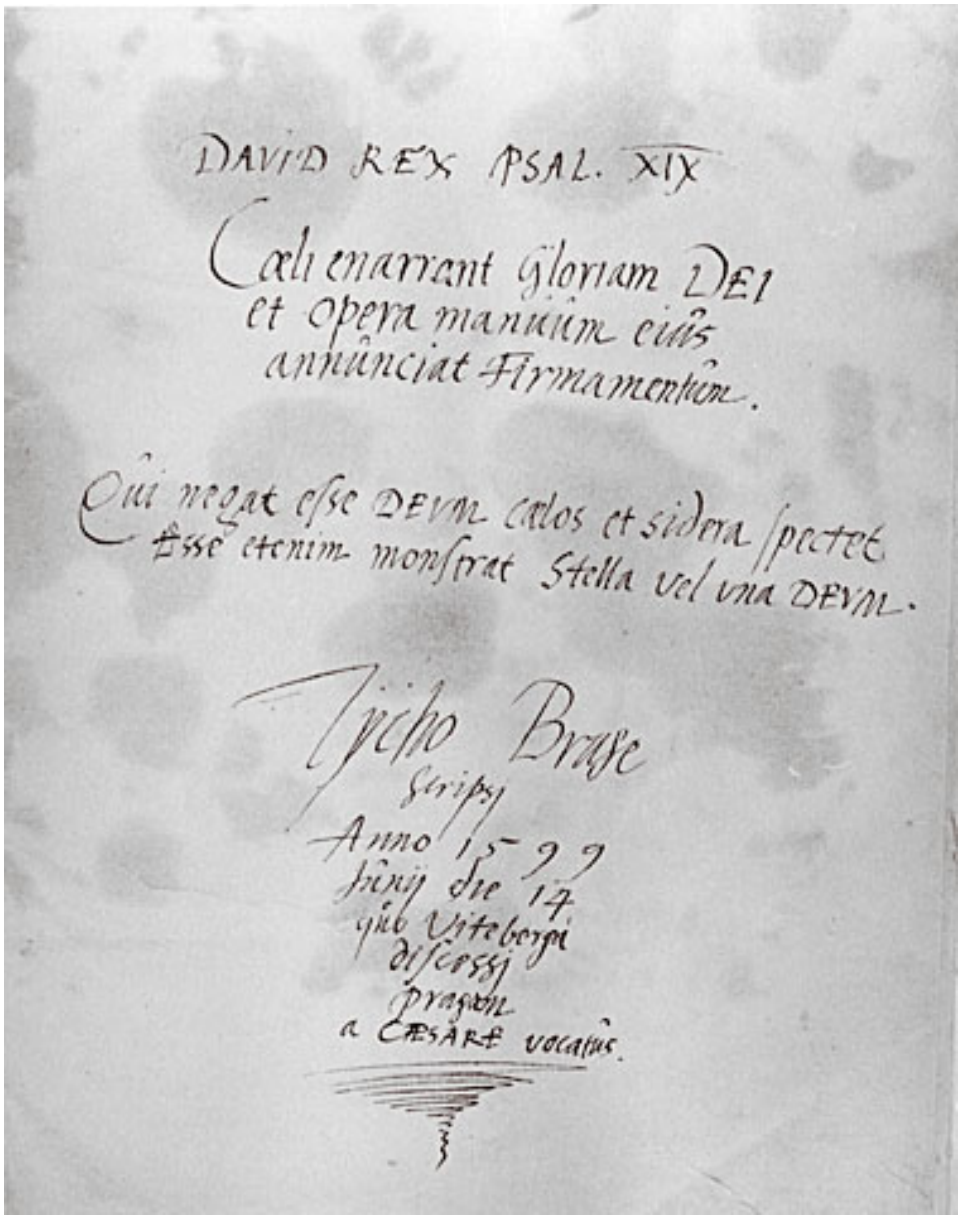


Inoltre, conoscendo solo la distanza sulla Terra tra i due luoghi di osservazione, ed assumendo che i raggi della stella (ad esempio quelli solari) giungano paralleli sulla superficie terrestre, dagli angoli α e α′ è possibile risalire al valore del raggio terrestre, e quindi alla lunghezza dell'Equatore. In questo modo il matematico greco **Eratostene** determinò la misura della Terra.

QVADRANS MVRALIS
SIVE TICHONICVS.

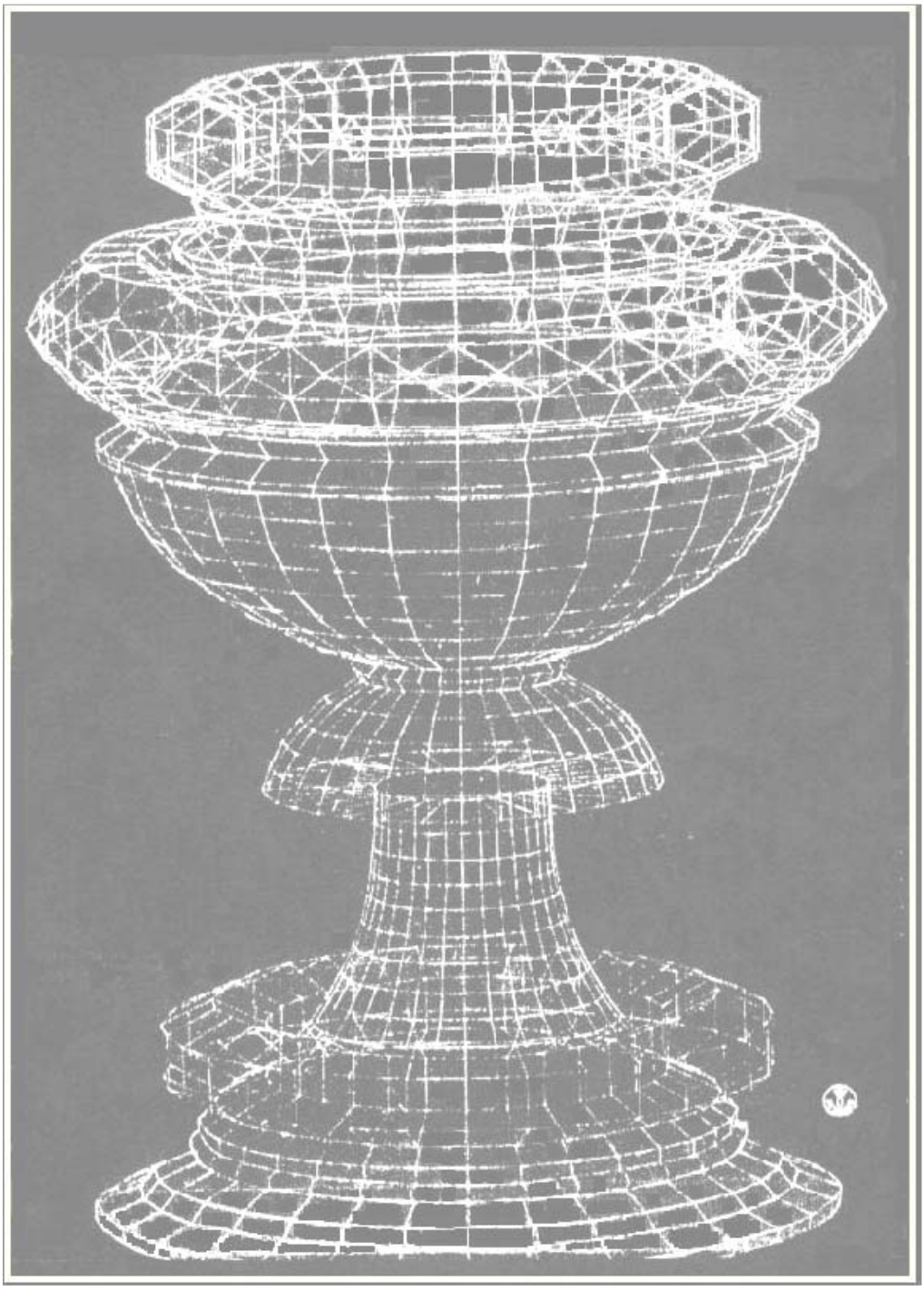


EXPLI-



La citazione latina di un brano dei Salmi recita: *I cieli narrano della gloria di Dio e il Firmamento annuncia l'opera delle sue mani. Chi nega l'esistenza di Dio guardi i cieli e gli astri: anche una sola stella prova che Dio è.*
La data è quella del 17 giugno 1599, il giorno in cui, come scrive Tycho Brahe, egli si recò a Praga per rispondere alla chiamata dell'Imperatore.

Studio prospettico di un calice (Paolo Uccello)



Curiosità

Georg Vega
Thesaurus logarithmorum completus
Lipsia, 1794

Il libro ha come sottotitolo ***"ex arithmetica logarithmica, et ex trigonometria artificiali Adriani Vlocci"*** ed è una presentazione del materiale di Adrian Vlock, rivisto, corretto ed ordinato da Georg Vega.
Contiene tavole logaritmico-trigonometriche precedute da una introduzione scritta su due colonne per pagina, una in latino e l'altra in tedesco, dal titolo
"De proprietatibus logarithmorum maxime memorabilibus"
"Von den merkwürdigsten Eigenschaften der Logarithmen"

Una pagina originale

§. 10.

Problema.

Ope tabulae II. anguli ſive arcus dati logarithmum trigonometricum decem expreſſum notis decimalibus exacte reperire.

Solutio.

1) Si angulus datus minor quam 2° aut major quam 88° eſt, ſolasque unitates integras minutorum ſecundorum ſine aliqua fractione continet, aut intra 2° et 88° tantummodo decades minutorum ſecundorum ſine unitatibus ſimplicibus complectitur, inſcriptio tabulae columnarumque ejus clariſſime oſtendit, quomodo logarithmus trigonometricus quaeſitus inveniri exſcribique poſſit; ut ſupervacaneum ſit, rem vel uno exemplo declarare.

2) Sin angulus datus $p+n$ intra 2° et 88° etiam unitates ſimplices minutorum ſecundorum $= n$ cum partibus eorum decimalibus aut ſine tali fractione continet, logarithmus trigonometricus ei reſpondens, ut formulae paginae 630. docent, computatur. Coëfficiens $\frac{1}{2}n\,(10-n)$ pro iis caſibus, ubi n aut omnino nullas partes decimales aut certe praeter partes decimas nullam aliam fractionem decimalem continet, eadem pagina jamjam evolutus eſt. At ſi tali in caſu n praeter unitates integras minutorum ſecundorum fractionem decimalem pluribus notis expreſſam indicat, coëfficiens $\frac{1}{2}n\,(10-n)$ aut peculiari computatione evolvendus, aut ope tabulae prioris paginae 630. facili aeſtimatione definiendus eſt. Eadem pagina 630. etiam partes proportionales differentiis ſecundis variis reſpondentes $\frac{1}{2}n\,(10-n).\frac{1}{100}D''$ computatae reperiuntur, quae haud exiguum uſum ſaepenumero praeſtare poſſunt.

Exempla.

I. Quaeratur log. ſin. 2° 18′ 45″, reperieturque ope formulae primae paginae 630. pro $p = 2°\,18'\,40''$ et $n = 5$ hoc modo:

log. ſin. 2° 18′ 40″	= 8.6055804181	62.63 $= \frac{1}{100}D''$
$n.\frac{1}{10}D'$	$= 5 \times 521391.8 =$ 2606959	12.5 $= \frac{1}{2}n\,(10-n)$
$\frac{1}{2}n\,(10-n).\frac{1}{100}D''$	$= 12.5 \times 62.63 =$ 783	626.3
log. ſin. 2° 18′ 45″	= 8.6058411923	125.3
		31 3
		783

Pars proportionalis differentiae ſecundae 783 hic per *multiplicationem contractam* computata eſt. Poteſt etiam ope tabulae ſecundae paginae 630. ſic definiri. Cum hic differentia ſecunda $6263 = 6000 + 263$ ſit, ac pro 5 ad 6000 pars proportionalis 750, ad 263 autem 33 pertineat, pars proportionalis quaeſita eſt $= 750 + 33 = 783$.

§. 10.

Aufgabe.

Mittelſt der Tafel II. zu einem gegebenen Winkel oder Bogen den zugehörigen trigonometriſchen Logarithmus mit zehn Decimalziffern genau zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Winkel unter 2° oder über 88° iſt, und bloſse Einheiten der Sekunden ohne einige Bruchtheile bey ſich führet, oder aber zwiſchen 2° und 88° nur allein Zehner der Sekunden ohne die Einheiten enthält, ſo zeiget es die Aufſchrift der Tafel und der Spalten derſelben ganz deutlich, wie man den geſuchten trigonometriſchen Logarithmus aufzuſchlagen, und abzuſchreiben habe, ſo daſs es überflüſſig iſt, auch nur ein Beyſpiel anzuführen.

2) Wenn der gegebene Winkel $p+n$ zwiſchen 2° und 88° auch Einheiten der Sekunden $= n$ mit oder ohne deren Decimaltheilchen enthält, ſo wird der zugehörige trigonometriſche Logarithmus nach Anweiſung der auf Seite 630 befindlichen Formeln berechnet. Der Coefficient $\frac{1}{2}n\,(10-n)$ für jene Fälle, wo n entweder gar keine, oder wenigſtens über die Zehntel keine ferneren Decimaltheilchen enthält, iſt auf der nämlichen Seite bereits entwickelt. Wenn hingegen in dieſem Falle n nebſt den ganzen Einheiten der Sekunden auch noch einen aus mehreren Ziffern beſtehenden Decimalbruch vorſtellet, ſo muſs der Coefficient $\frac{1}{2}n\,(10-n)$ entweder beſonders berechnet, oder aber mittelſt der erſteren Tafel auf Seite 630 durch eine leichte Schätzung beurtheilet werden. Auf der nämlichen Seite 630 ſind auch für verſchiedene zweyte Differenzen die zugehörigen Proportionaltheile $\frac{1}{2}n\,(10-n).\frac{1}{100}D''$ berechnet, welche in verſchiedenen Fällen gute Dienſte leiſten können.

Beyſpiele.

I. Es ſey log. ſin. 2° 18′ 45″ zu ſuchen, ſo wird ſolcher mittelſt der erſten Formel der Seite 630 für $p = 2°\,18'\,40''$, und $n = 5$ auf folgende Art gefunden:

log. ſin. 2° 18′ 40″	= 8.6055804181	62.63 $= \frac{1}{100}D''$
$n.\frac{1}{10}D'$	$= 5 \times 521391.8 =$ 2606959	12.5 $= \frac{1}{2}n\,(10-n)$
$\frac{1}{2}n\,(10-n).\frac{1}{100}D''$	$= 12.5 \times 62.63 =$ 783	626.3
log. ſin. 2° 18′ 45″	= 8.6058411923	125.3
		31 3
		783

Der Proportionaltheil der zweyten Differenz 783 iſt hier mittelſt der *abgekürzten Multiplikation* berechnet worden. Man kann ſolchen auch mittelſt der zweyten Tafel der Seite 630 auf folgende Art beſtimmen. Da hier die zweyte Differenz $6263 = 6000 + 263$ iſt, und mit 6000 der Proportionaltheil 750, mit 263 aber 33 für 5 zuſammen gehöret, ſo iſt der geſuchte Proportionaltheil $= 750 + 33 = 783$.

Marco Vitruvio Pollione
I dieci libri dell'architettura
Trad. di Mons. Daniel Barbaro
Venezia, 1629

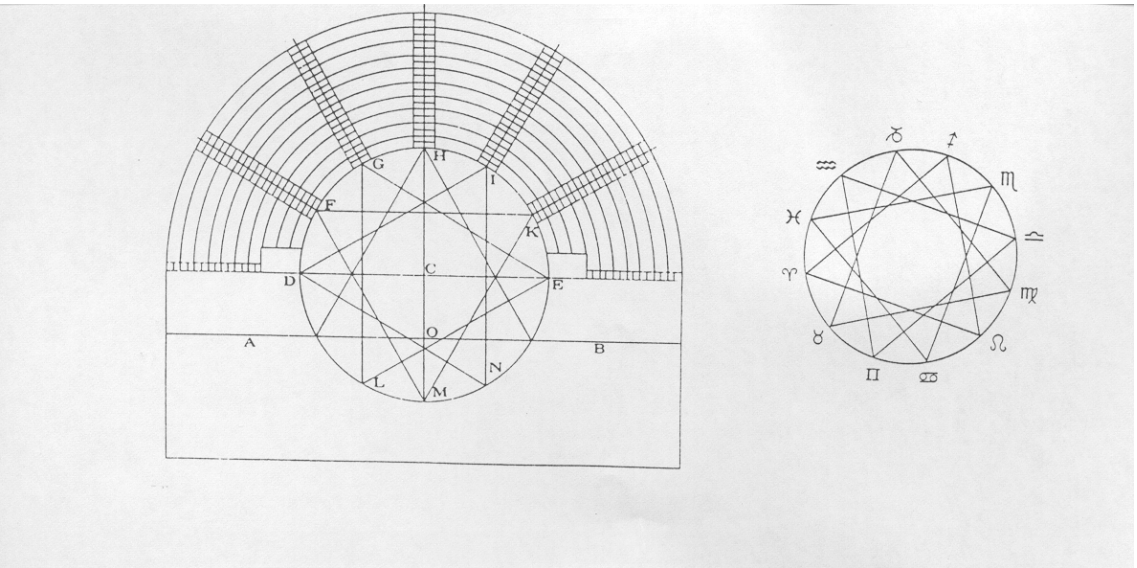
L'opera originale latina, scritta presumibilmente fra il 27 ed il 23 a.C., e dedicata all'imperatore Augusto, è un trattato onnicomprensivo di architettura, che abbraccia tutti gli aspetti della costruzione di edifici, dalla formazione dell'architetto alla filosofia dell'arte. Questo lavoro, unico dell'antichità ad essere sopravvissuto, venne riscoperto nell'Umanesimo e nel Rinascimento, e fu preziosa fonte d'ispirazione per artisti come **Leonardo da Vinci** e **Leon Battista Alberti**.
I fondamenti dell'estetica vitruviana sono la *proportio*, l'*euritmia* e la *symmetria:* essi trovano la loro massima espressione nell'armonica struttura della **figura umana**, alla quale tutte le creazioni artistiche ed architettoniche, come i templi e i teatri, devono rifarsi. Così Francesco di Giorgio Martini la sceglie come modello per la pianta urbana:
"Siccome dice Vitruvio tutta l'arte e la ragione tratta essere dal corpo umano ben composta proporzionata… Parmi di formare la città rocca e castello a guisa del corpo umano e che al capo la rocca sia, le braccia le sue aggiunte e recinte mura, le quali circulando partitamente leghi il resto di tutto el corpo."
(cit. dall'Introduzione di L. Migotto a *M.V. Pollione, De Architectura Libri X,* Studio Tesi, Pordenone 1990, pag. XIII)

E **Pacioli** scrive, nella sua ***De Divina Proportione***:
"Dal corpo umano ogni mesura con sue denominazioni deriva e in esso tutte sorti de proporzioni e proporzionalità se ritrova con lo deto de l'Altissimo mediante li intrinseci secreti de la natura […] e così come dice el nostro Vitruvio, a sua similitudine dobiam proporzionare ogni edificio."
(ibidem)

Come Vitruvio afferma nel **Libro Terzo**, la proporzione, che i greci chiamano *ἀναλογία*, *"est ratae partis membrorum in omni opere totoque com modulatio, ex qua ratio efficitur symmetriarum"*, o, con le parole del Barbaro *"è scambievole habitudine di due quantità sotto un istesso genere."* Poco più avanti Vitruvio passa ad una dettagliata **descrizione** delle parti del volto e del corpo in termini numerici.

L'opera è ricca di riferimenti alla suggestione magica che, soprattutto da **Pitagora** in poi, i numeri interi hanno saputo provocare fra i sapienti.
Nel **Libro Terzo** leggiamo la **storia** dei numeri 6 e 10, considerati perfetti, e nella prefazione al **Libro Quinto**, Vitruvio, per giustificare la suddivisione dell'opera in tanti volumi, così dice ad Augusto:
"Del resto anche Pitagora e i suoi seguaci vollero esporre i loro precetti in volume secondo un sistema cubico e costruirono un cubo di 216 versi stabilendo che un trattato non dovesse essere composto da più di tre cubi. Il cubo è un solido composto da superficie piane uguali e quadrate, quando viene gettato rimane fermo poggiando su una delle due facce, finché qualcuno non lo sposti, come avviene nel gioco dei dadi quando i giocatori li gettano sul tavolo. E pare appunto che i pitagorici si siano ispirati a questa similitudine perché quel dato numero di versi rimanga impresso e fisso nella memoria, proprio come il cubo, qualunque sia la mente in cui è riversato. Anche i comici greci interruppero la lunghezza di un atto inframmezzandovi le parti corali. Quindi, dividendo l'azione secondo una proporzione cubica, alleggeriscono grazie alle interruzioni la recitazione degli attori."
(ibidem, pag. 197)

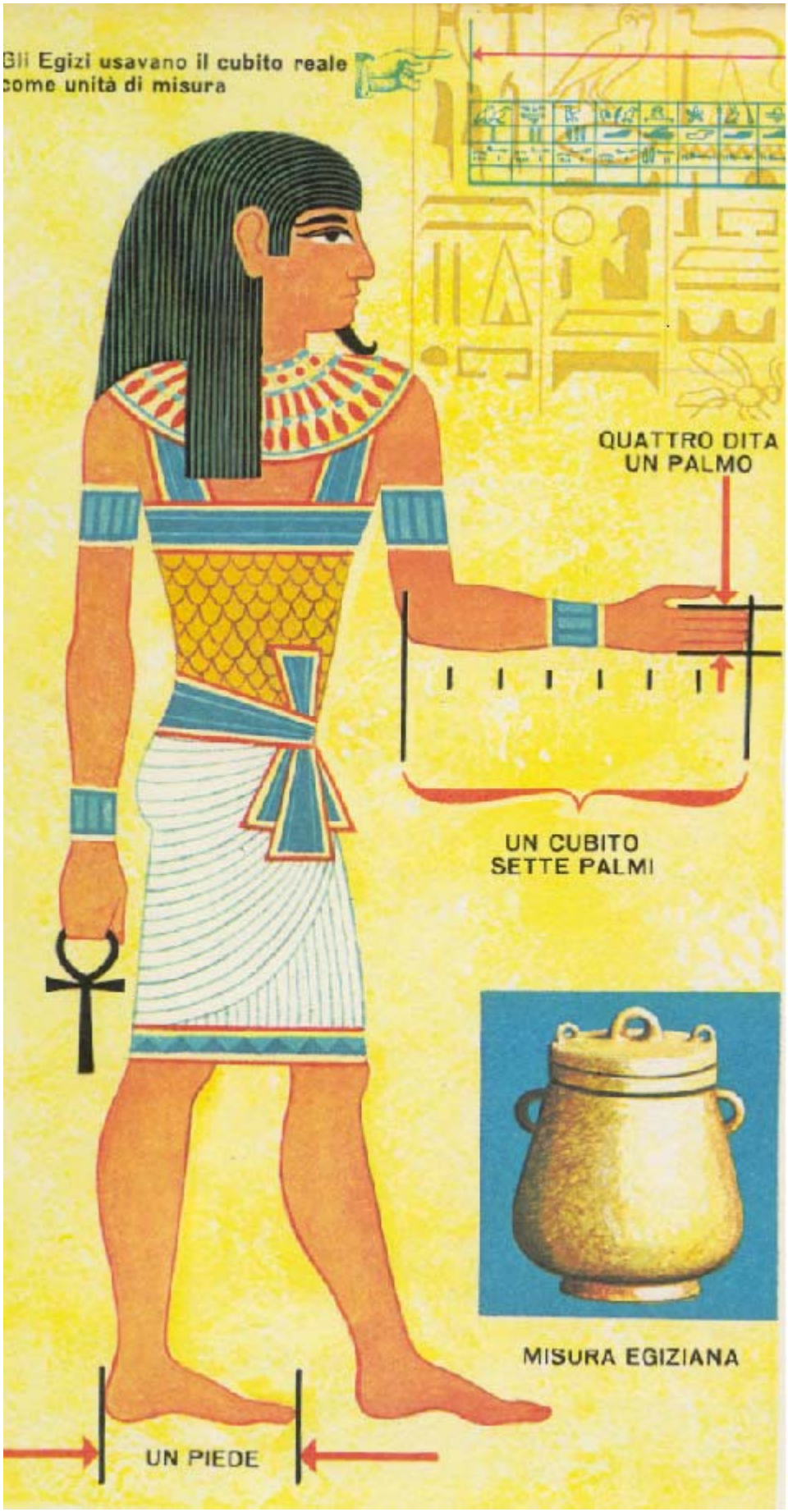
Il **Libro Quinto** è dedicato alla progettazione dei teatri, che, secondo la tradizione dell'antica Grecia, devono essere costruiti in base alla **teoria delle armonie musicali**, nata con **Pitagora**, e perfezionata da **Aristosseno**: per migliorare l'acustica, all'interno del teatro dovranno essere collocati vasi bronzei di amplificazione, ognuno di misura tale da emettere, quando percosso, una particolare nota. Il Migotto osserva che la pianta del teatro vitruviano, non dissimile da quella greca, rispecchia la cosmologia classica, riproducendo lo schema dello **zodiaco**, e rappresentando, nella sua forma circolare, la perfezione divina:

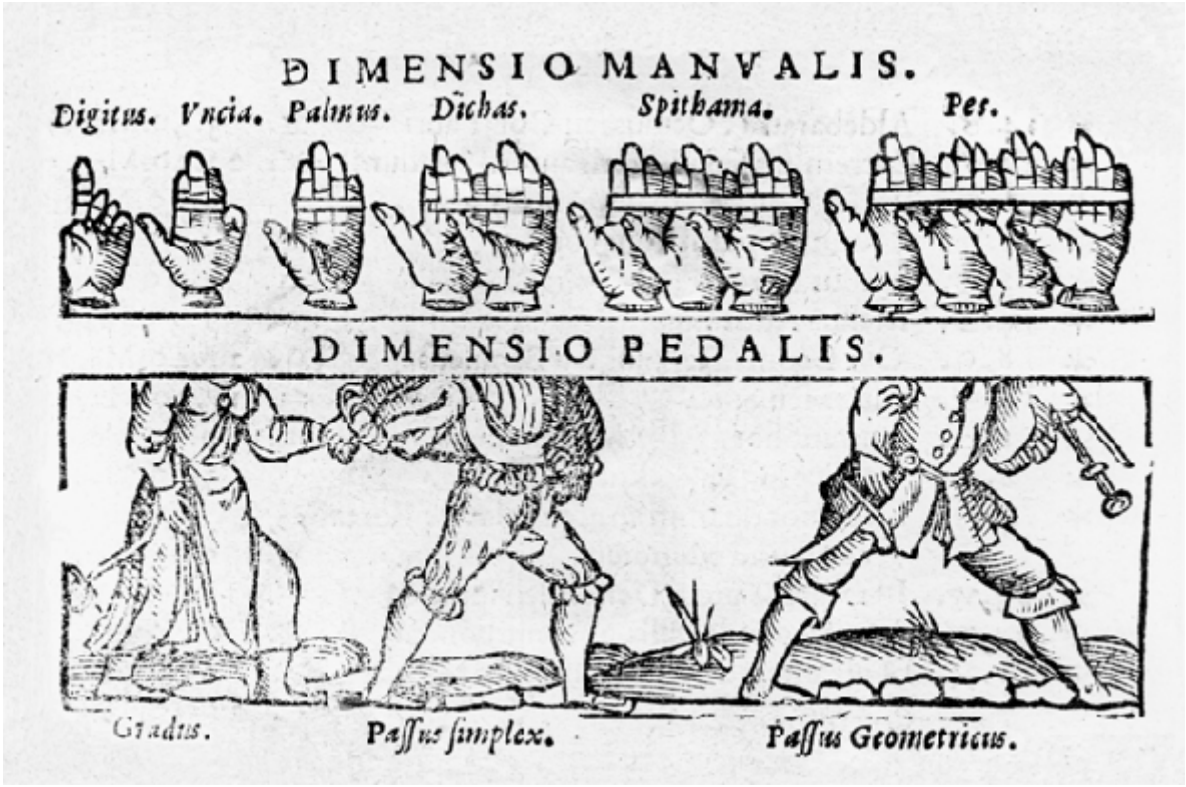


All'astronomia è dedicato tutto il **Libro Nono**: Vitruvio la chiama, in realtà, *gnomonica*. In effetti l'argomento centrale di questo volume è il metodo che consente di misurare il tempo mediante l'ombra di un palo conficcato nel terreno (lo *gnomone* della meridiana), utilizzando i risultati delle osservazioni astronomiche dell'epoca. Per introdurre il discorso sulla scienza, il Nostro ricorda alcune importanti acquisizioni matematiche del mondo greco, come il **teorema di Pitagora**, il principio di **Archimede** e la **duplicazione del cubo**.

Il **Libro Decimo** è una raccolta di invenzioni meccaniche, tra cui troviamo l'**odometro**, e lo **strumento** per misurare la velocità di una nave, entrambi ripresi dall'**Alberti** nei suoi ***Ludi matematici***.

Le misure con mani e piedi





da: *Cosmographia, sive descriptio universi orbis* di Peter Apian, a cura di Gemma Frisius, Anversa, 1584.

Il sei ed il dieci come numeri perfetti

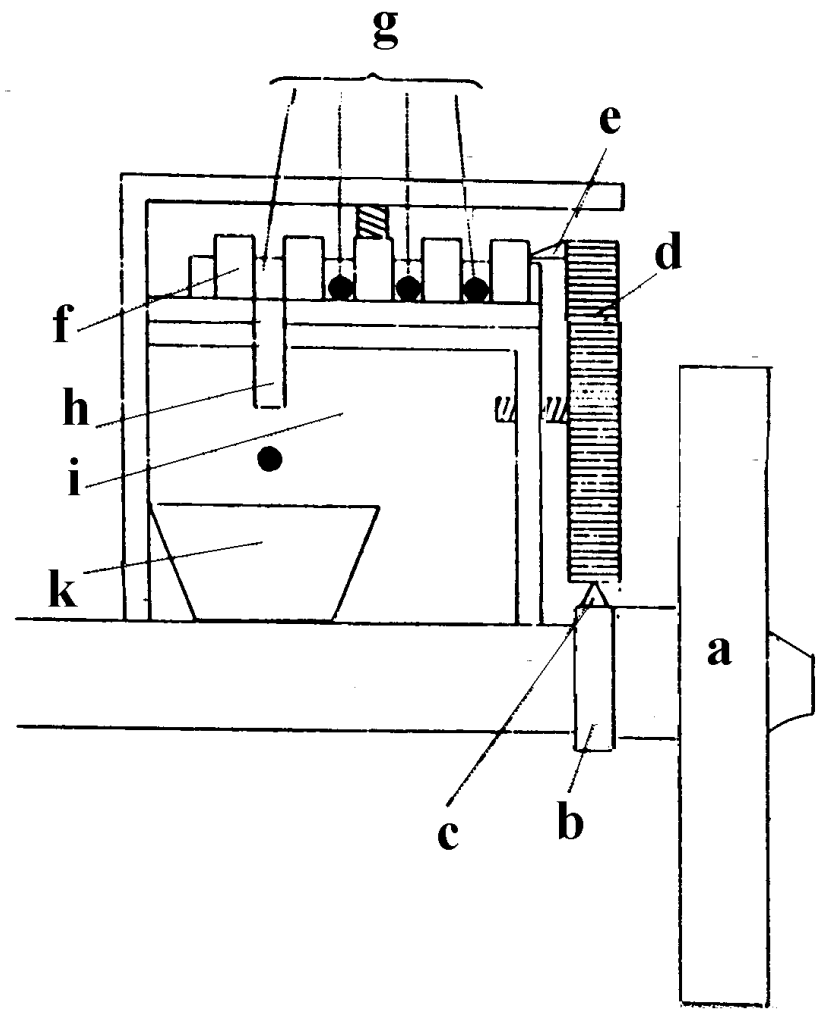
Così **Vitruvio**, nel **Libro Terzo** del suo trattato ***De architectura***, narra le origini del culto dei numeri, praticato da molti popoli della antichità.

"Del resto anche le unità di misura indispensabili per ogni tipo di intervento sono state prese dalle parti del corpo, quali il pollice, il palmo, il piede, il cubito e furono fissate in un numero perfetto, che i greci chiamano τέλεον. Come numero perfetto gli antichi individuarono il dieci, ricavato dal numero delle dita di entrambe le mani (dal palmo fu ricavato il piede). Siccome la natura ha ricavato il numero dieci dalle dita di entrambe le mani, anche Platone lo considerò un numero perfetto, in quanto la decina è composta dall'insieme delle singole unità che i greci chiamano μόναδες. Infatti appena formiamo altri numeri come l'undici e il dodici notiamo che, superata la decina, non sono perfetti finché non arrivano a formarne un'altra, in quanto le singole unità sono come piccole parti di questo numero. I matematici, invece, ritengono che il numero perfetto sia il sei in quanto esso, secondo i loro calcoli, è armonicamente scomponibile e il numero uno ne rappresenta la sesta parte, il due la terza, il tre ne è la metà, il quattro ne rappresenta i due terzi (bes) o δίμοιρον, il cinque ne è i cinque sesti o πεντάμοιρον, e il sei è il numero perfetto. Percorrendo i numeri superiori fino a raddoppiarlo, troviamo il sette ἑφεκτον con l'aggiunta di un'unità, poi l'otto επίτριτος o tertiarum aggiungendone un terzo, e il nove detto sesquialter o ἡμιόλιος con l'aggiunta di una metà; sommandovi i due terzi si ottiene la decina detta secondo bes o ἐπιδίμοιρον; aumentandolo poi di cinque sesti si ha l'undici quintarium detto ἐπίπεμπτον; il dodici infine è il risultato doppio del numero semplice o διπλασίωνα. Lo si è inoltre considerato come numero perfetto anche perché la misura del piede corrisponde a un sesto dell'altezza complessiva; e un ulteriore elemento di perfezione è dato dal fatto che col numero di sei piedi si delimita la statura di una persona, e infine si è notato che il cubito corrisponde a sei palmi e a ventiquattro pollici. Sembra che anche le città greche abbiano adottato questo criterio avendo suddiviso la dracma, che è l'unità di misura del loro sistema monetario, in sei parti uguali (come al cubito corrispondono sei palmi), coniando monete di rame simili agli assi, che essi chiamano "oboli"; e inoltre riferendosi al pollice che è la ventiquattresima parte del cubito hanno coniato i quadranti o quarti di obolo che alcuni chiamano dicalchi, altri tricalchi. I nostri antenati invece considerarono in un primo tempo come perfetto il numero dieci e a un denaro fecero corrispondere dieci monete di bronzo tanto che ancor oggi nel significato

etimologico del termine denarius viene indicato il numero dieci. La quarta parte di esso pari a un valore di due assi e mezzo fu chiamata sesterzio. Ma poi accortisi che sia il sei che il dieci erano numeri perfetti li sommarono e ottennero come risultato ottimale il sedici. Una conferma la trovarono nella misura del piede; infatti, togliendo due palmi da un cubito rimane un piede di quattro palmi, ma un palmo corrisponde a quattro pollici, di conseguenza un piede risulta essere di sedici pollici e a un denario corrispondono altrettanti assi di bronzo."
(cit. da *Marco Vitruvio Pollione, De architectura Libri X*, trad. di L. Migotto, Studio Tesi, Pordenone 1990, pagg.127,129).

Aggiungiamo che, per motivi diversi da quelli indicati da **Vitruvio**, il numero dieci era considerato sacro dai seguaci di **Pitagora**. Inoltre il numero sei è il primo di quelli che i matematici ancor oggi chiamano **numeri perfetti**.

L’odometro secondo Vitruvio

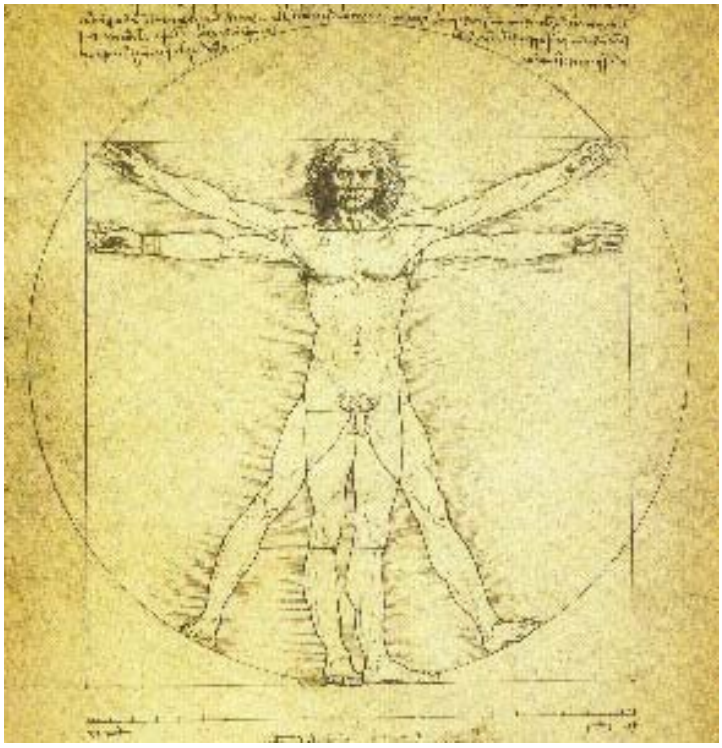


a	rota raedae	b	tympanum
c	denticulus tympani	d	tympanum cum quadringentis denticulis
e	denticulus prominens	f	tympanum planum dentatum
g	foramina	h	canaliculus
i	capsus raedes	k	vas aeneum

L’odometro secondo Leon Battista Alberti

Le proporzioni del corpo umano secondo Vitruvio

Nel **Libro Terzo** del trattato ***De architectura*** **Vitruvio** descrive le misure ideali del volto e del corpo umano. Su queste si basa il famoso disegno di **Leonardo da Vinci** che rappresenta un uomo inscritto in un cerchio.



Leonardo da Vinci, *Le proporzioni del corpo umano*, Venezia, Galleria dell'Accademia

"Il centro naturale del corpo umano è l'ombelico; infatti, se una persona si distendesse a terra supina a braccia e gambe divaricate, puntando il compasso sull'ombelico e tracciando una circonferenza, questa toccherebbe entrambe le estremità dei piedi e delle mani. Nondimeno, com'è possibile inscrivere il corpo in una circonferenza così se ne può ricavare un quadrato; misurando la distanza dai piedi alla sommità del capo e riportandola a quella che intercorre tra un estremo e l'altro delle braccia aperte si costaterà che le misure in altezza e larghezza coincidono come nel quadrato tracciato a squadra."
(cit. da *Marco Vitruvio Pollione, De Architectura Libri X,* trad. di L. Migotto, Studio Tesi, Pordenone 1990, pag. 127).

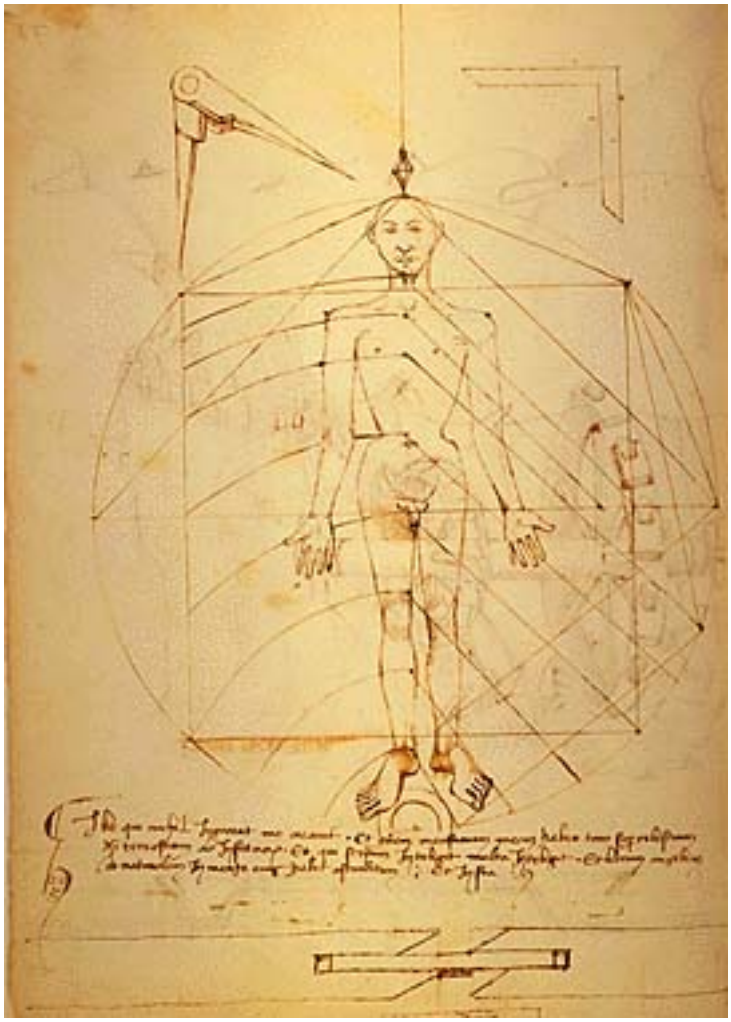
A titolo di curiosità riportiamo la teoria sviluppata da **Vitruvio** nella **versione del Barbaro**, arricchita di commenti, edita nel 1629.

"Vuole Pomponio Gaurico, che la giusta altezza sia di nove teste, altri alquanto più. Il ***Cardano*** *nel libro della sottilità dice. Questa esser la forma del corpo humano perfecto, la faccia è la decima di tutte le lunghezze dal nascimento de i capelli all'estremo del pollice del piede. La faccia si divide in tre parti eguagli: l'una si fa dalla radice de i capelli alla sommità del naso: altra è la lunghezza del naso: la terza è dal fine del naso al mento. La lunghezza della bocca è uguale alla lunghezza dell'occhio, & la lunghezza dell'occhio è quanto lo spacio da un'occhio all'altro di modo, che in tre parti si divida lo spacio, che è dall'uno angolo dell'occhio allo angolo dell'altro, cioè due occhi, & lo spacio che vi è di mezo, & tutto questo è doppio alla lunghezza del naso. Di modo che la lunghezza dell'occhio & l'apritura della bocca sia doppia alla nona parte della lunghezza della faccia, & perquesto addiviene, che la lunghezza del naso sia sesquialtera[1] all'apritura della bocca & alla lunghezza dell'occhio la qual lunghezza del naso essendo tripla allo spacio ch'è dal naso alla bocca, ne segue che questo spacio sarà la misura dell'apritura della bocca, & della lunghezza dell'occhio. Il circuito della bocca è doppio alla lunghezza del naso, & triplo all'apritura. Adunque tutta la lũghezza della faccia è sesquialtera al circuito della bocca, & allo spacio, che è dall'angolo esteriore d'un occhio, all'angolo esteriore, dell'altro: percioche questo spacio è quanto il circuito della bocca. Il circuito del naso da basso è pari alla sua lunghezza. Il circuito della orecchia, è uguale al circuito della bocca. Il foro della narice è la quarta parte della lunghezza dell'occhio, & in tal guisa è disposta la misura del corpo humano, come qui sotto si vede.*

La faccia parti diciotto, tra due angoli esteriori de gli occhi parti dodici, la lunghezza del naso parti sei: il circuito da basso del naso parti sei: la lunghezza dell'orecchia parti sei: dalle radici de' capelli al naso parti sei: dal mento al sottonaso parti sei, la lunghezza della bocca parti quattro, la rotondità della bocca parti dodici, dalla cima della testa al fine di dietro parti ventiquattro, dalla sommità del petto alle somme radici de i capelli parti trenta, dalla forcella sopra il petto alla cima della testa parti trentasei, il circuito dell'orecchia parti dodici, la lunghezza dell'occhio parti quattro, la distanza tra l'uno occhio & l'altro parti quattro, dal sottonaso alla bocca parti due, dalla bocca al mento parti quattro, il foro del naso parte una, l'ambito della fronte di sopra parti diciotto, dalla giontura della mano alla sommità del dito di mezo la palma parti diciotto, dal mento alla sommità della testa parti ventiquattro, il piede parti venti, il cubito parti trenta, il petto parti trenta. Tutto il corpo parti cento & ottanta."

[1] Sesquialtera: in rapporto di tre a due.

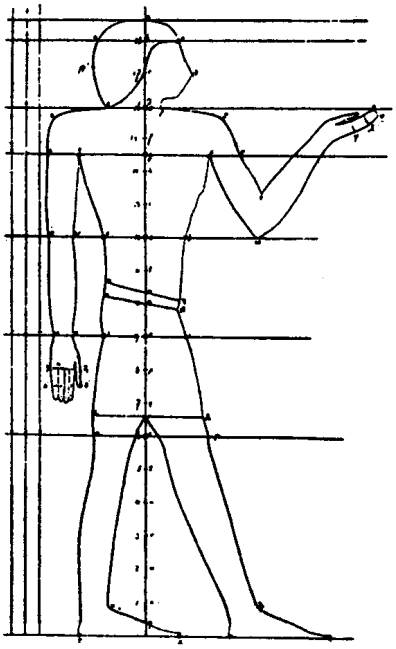
Alcune delle proporzioni descritte da **Vitruvio** sono basate sul **rapporto aureo**.



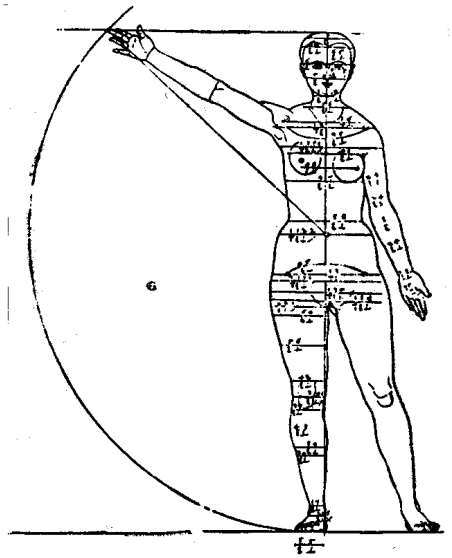
da: Marino di Iacopo, detto Il Taccola (Siena 1382-1458),
***De Ingeneis, Libri I-II*, Cod. Lat. Monacensis 197 II**
Bayerische Staatsbibliothek, Monaco di Baviera

Le proporzioni del corpo umano secondo altri autori

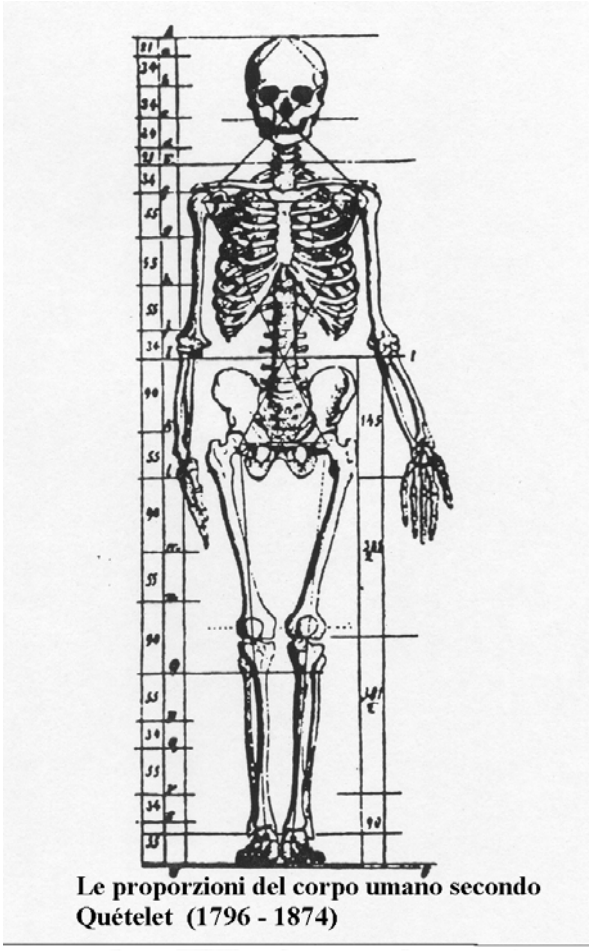
Le proporzioni del corpo umano



nell'Antico Egitto



secondo Albrecht Dürer



Le proporzioni del corpo umano secondo Quételet (1796 - 1874)

[Le proporzioni secondo Vitruvio]

[Le proporzioni secondo Dürer]

Matematica e Biologia

Vito Volterra
Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie
Paris, 1931

(*Lezioni sulla teoria matematica della lotta per la vita*
Parigi, 1931)

In quest'opera viene applicato il **calcolo infinitesimale** allo studio degli ecosistemi formati da più specie animali. Il **Capitolo I** è dedicato al caso di due sole specie, nel **caso in cui una si nutre dell'altra** e nel caso, più generale, in cui le azioni reciproche sono di tipi diversi. L'analisi viene successivamente estesa ad un numero qualunque di specie. Il **Capitolo IV**, l'ultimo del libro, è dedicato alle *"azioni ereditarie comparate in biologia e in meccanica"*, ossia al ruolo della "memoria del passato" nell'evoluzione dei sistemi, in fisica come nella scienza della vita.

L'autore dice, nella **Prefazione**: *"In seguito a conversazioni con il Sig. D'Ancona, che mi chiedeva se fosse possibile trovare qualche via matematica per studiare le variazioni nella composizione delle associazioni biologiche, ho cominciato le mie ricerche su questa materia alla fine del 1925. Le ho proseguite durante i primi mesi dell'anno seguente, e, allo stesso tempo, ho redatto la mia prima memoria sulle fluttuazioni biologiche, dove ho esposto i miei metodi e ho dato le leggi biologiche che ne derivano. Essa è stata pubblicata dall'**Accademia dei Lincei** nel corso dello stesso anno. Poiché questa edizione è andata presto esaurita, ne è uscita una nuova, con alcune modifiche e aggiunte, nelle memorie del Comitato Talassografico Italiano. In particolare vi si trova aggiunta una parte riguardante i casi in cui interviene l'eredità."*

A proposito dello scopo dello studio, nell'**Introduzione** leggiamo:

*"1. Si sono ben fatte delle applicazioni della matematica alla biologia. Ci sono, in primo luogo, le ricerche sulle questioni fisiologiche relative ai sensi, alla circolazione del sangue, al movimento degli animali, che si possono vedere come capitoli dell'**ottica**, dell'acustica, della idrodinamica, della meccanica dei corpi solidi e che, in seguito, non hanno dato luogo alla costituzione di nuovi metodi fuori dell'ambito della fisica matematica classica.*

La biometria, al contrario, con dei procedimenti propri, ha creato un insieme di studi nuovi e originali. In particolare essa ha fatto ricorso al ***calcolo delle probabilità*****.**
D'altra parte si è utilizzata la geometria in ricerche recenti sulla forma e la crescita degli esseri organici per descrivere le forme stesse e il loro sviluppo; ci si è serviti di essa come si era già fatto da lungo tempo in astronomia.
Si potrebbero ancora citare altre applicazioni analoghe della matematica, ma, senza estenderci a tanto, parliamo d'ora in poi di quelle a cui è dedicata quest'opera.
Le associazioni biologiche sono costituite da diverse specie in uno stesso ambiente. Normalmente gli individui di queste associazioni si contendono lo stesso cibo oppure certe specie vivono alle spese di altre di cui esse si nutrono. Esse possono persino aiutarsi a vicenda. Tutto ciò rientra nel fenomeno generale della lotta per la vita.
Il carattere quantitativo di questo fenomeno si manifesta nelle variazioni, in un ambiente circoscritto, dei numeri di individui che costituiscono le diverse specie. In certe condizioni queste variazioni consistono in fluttuazioni intorno a valori medi, in altre esse indicano una scomparsa o un accrescimento progressivi di certe specie.
In quest'opera noi effettuiamo uno studio teorico di queste variazioni nelle associazioni biologiche; partiamo da fatti conosciuti e da ipotesi verosimili per trarne, mediante la matematica, il maggior numero possibile di conclusioni.

2. Ma innanzitutto diamo, con qualche esempio, un'idea dell'interesse pratico di un simile studio.
In primo luogo ***l'industria della pesca*** *è direttamente interessata dalle variazioni della ripartizione e delle densità numeriche delle diverse specie di pesci che vivono insieme. Così il dott. Umberto D'Ancona ha tratto dalle statistiche sulla pesca durante la guerra ed i periodi vicini la seguente tabella indicante le percentuali di pesci appartenenti alla classe dei Selaci, nella pesca totale e in alcuni porti:*

	1905	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
Trieste	-	5,7	8,8	9,5	15,7	14,6	7,6	16,2
Fiume	-	-	-	-	-	11,9	21,4	22,1
Venezia	21,8	-	-	-	-	-	-	-

	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Trieste	15,4	-	19,9	15,8	13,3	10,7	10,2
Fiume	21,2	36,4	27,3	16	15,9	14,8	10,7
Venezia	-	-	30,9	25,3	25,9	26,8	26,6

Ciò prova, durante il periodo 1915-1920, in cui la pesca era meno intensa a causa della guerra, un accrescimento relativo della classe dei Selaci che, particolarmente voraci, si nutrono di altri pesci. Le statistiche inducono dunque a pensare che una diminuzione nell'intensità della distruzione favorisca le specie più voraci. Ciò è stato ottenuto per via matematica negli studi di Volterra, studi che egli aveva intrapreso su consiglio di D'Ancona e che l'avevano condotto in particolare a questo risultato ben prima che egli venisse a conoscenza delle precedenti statistiche.

In ***agricoltura****, si capisce come possa essere utile lo studio delle fluttuazioni di certi parassiti delle piante, quando essi sono combattuti dai propri parassiti. Si parlerà alla fine dell'opera degli studi sperimentali di questa natura.*

La questione si presenta molto complessa. Certamente esistono delle circostanze ambientali periodiche come quelle che, per esempio, dipendono dalla successione delle stagioni, e che producono delle oscillazioni forzate o di carattere esterno nel numero degli individui delle diverse specie. Accanto alle azioni periodiche esterne che sono state studiate più che altro dal punto di visto statistico, non ne esistono forse delle altre di carattere interno con dei periodi propri, indipendenti dalle cause esterne e che a quelle si sovrappongono? L'osservazione suggerisce una risposta affermativa. Così certe ***malattie infettive*** *come il paludismo subiscono, nella loro esistenza, delle fluttuazioni che non sapremmo attribuire alla sola variazione delle condizioni dell'ambiente. Vedremo come lo studio matematico spiega e precisa questa intuizione. Schematizzeremo i fenomeni assumendo delle ipotesi forse grossolane, ma semplici, che permetteranno di effettuare degli sviluppi matematici abbastanza semplici e trascureremo in generale le variazioni nelle azioni esterne, per studiare quello che potremo chiamare il fenomeno interno puro."*

La matematica applicata alla genetica: la drosofila

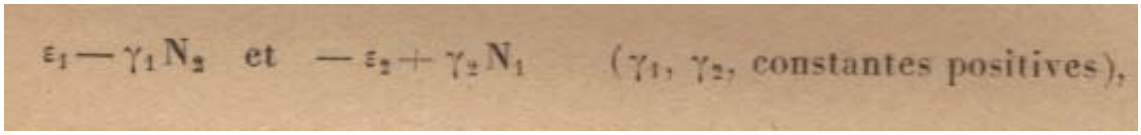
Teoria Matematica della lotta per la vita – Capitolo II

In questo brano **Vito Volterra** studia un sistema formato da due specie, di cui una si nutre dell'altra. Indicati con $N_1 = N_1(t)$ e $N_2 = N_2(t)$ i numeri di individui delle due specie nel generico istante t, egli dimostra che la relazione tra N_1 e N_2 può essere rappresentata, nel **piano cartesiano**, da una curva chiusa, costruibile punto per punto con riga e compasso, a partire da due curve ausiliarie.

Il metodo adottato è basato sulla nozione di ***equazione differenziale***: questo è il problema di determinare una funzione incognita sulla base di una data relazione tra questa e le sue derivate. Tale strumento è largamente usato in fisica: l'evoluzione temporale di un sistema meccanico, ad esempio, può essere descritta tramite un'equazione che mette in relazione il valore assunto $f(t)$ da una certa grandezza f nel generico instante t e la velocità con cui essa varia nel tempo, espressa dalla derivata prima $f'(t)$ (quella che **Newton** chiamava la ***flussione*** del *fluente* f). Tra coloro che dettero i principali contributi alla teoria delle equazioni differenziali ricordiamo **Eulero**, **Riccati** e **Lagrange**.

DUE SPECIE DI CUI UNA DIVORA L'ALTRA

Nell'ambiente in cui vivono queste specie, la prima, divorata, avrebbe, se fosse da sola, un certo coefficiente d'accrescimento[1] *che noi supporremo costante e positivo, sia esso* ε_1. *La seconda, che si nutre unicamente o principalmente degli individui della prima, avrebbe, se fosse da sola, un coefficiente d'accrescimento che supporremo costante e negativo, sia esso* $-\varepsilon_2$. *Quando le due specie coesistono in un ambiente circoscritto la prima si svilupperà tanto meno velocemente quanti più saranno gli individui della seconda, e quest'ultima tanto meglio quanto più numerosa sarà la prima. Un'ipotesi, molto semplice da fare, è che i coefficienti d'accrescimento siano della forma*


$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ et $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$ (γ_1, γ_2, constantes positives),

[1] Se $N(t)$ è la funzione che indica il numero di individui della specie al generico istante t, il coefficiente di accrescimento della specie è definito come il rapporto $N'(t)/N(t)$, dove la funzione a numeratore è la derivata prima di $N(t)$.

il che conduce alle equazioni differenziali delle variazioni delle specie:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), & \dfrac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0). \end{cases}$$

Si perviene a queste attraverso delle considerazioni molto meno grossolane sulla dipendenza reciproca delle specie, ragionando come segue:

Consideriamo, più in generale, due specie, che, separatamente sole nell'ambiente, avrebbero dei coefficienti di accrescimento, di cui io non preciso il segno, λ_1 e λ_2. Quando esse coesistono, si supporrà che gli incontri tra gli individui di specie diverse, il cui numero nell'unità di tempo è $\alpha N_1 N_2$ (α=cost.), abbia un'influenza sulle specie, che si traduce per esse in accrescimenti algebrici β_1 e β_2 del numero di individui corrispondente ad un numero n (fissato sufficientemente grande) di incontri, accrescimenti che si considereranno immediati. Allora, nel tempo dt, le specie crescono rispettivamente di

$$dN_1 = \lambda_1 N_1\, dt + \alpha N_1 N_2 \frac{\beta_1}{n} dt,$$

$$dN_2 = \lambda_2 N_2\, dt + \alpha N_1 N_2 \frac{\beta_2}{n} dt,$$

da cui il sistema differenziale

$$(5) \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(\lambda_1 + \mu_1 N_2), \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(\lambda_2 + \mu_2 N_1)$$

avendo posto

$$\mu_1 = \frac{\alpha\beta_1}{n}, \qquad \mu_2 = \frac{\alpha\beta_2}{n}.$$

Nel caso iniziale che ci interessa,

$$\lambda_1 > 0, \qquad \lambda_2 < 0,$$

e, poiché gli incontri sono favorevoli alla seconda specie, e nocivi per la prima,

$$\mu_1 < 0, \qquad \mu_2 > 0,$$

di modo che le equazioni (5) sono allora della forma (4).

Dalle equazioni (5) si deduce, in tutti i casi, (supponendo N_1, N_2 *>0),*

$$\mu_2 \frac{dN_1}{dt} - \mu_1 \frac{dN_2}{dt} = \mu_2 \lambda_1 N_1 - \lambda_2 \mu_1 N_2,$$

$$\lambda_2 \frac{\frac{dN_1}{dt}}{N_1} - \lambda_1 \frac{\frac{dN_2}{dt}}{N_2} = \mu_1 \lambda_2 N_2 - \mu_2 \lambda_1 N_1,$$

da cui

$$\mu_2 \frac{dN_1}{dt} + \lambda_2 \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} - \mu_1 \frac{dN_2}{dt} - \lambda_1 \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = 0,$$

che si integra secondo

$$\mu_2 N_1 + \lambda_2 \log N_1 - (\mu_1 N_2 + \lambda_1 \log N_2) = \text{const.}$$

ossia

(*)

$$N_1^{\lambda_2} e^{\mu_2 N_1} = C\, N_2^{\lambda_1} e^{\mu_1 N_2} \qquad (C = \text{const.}).$$

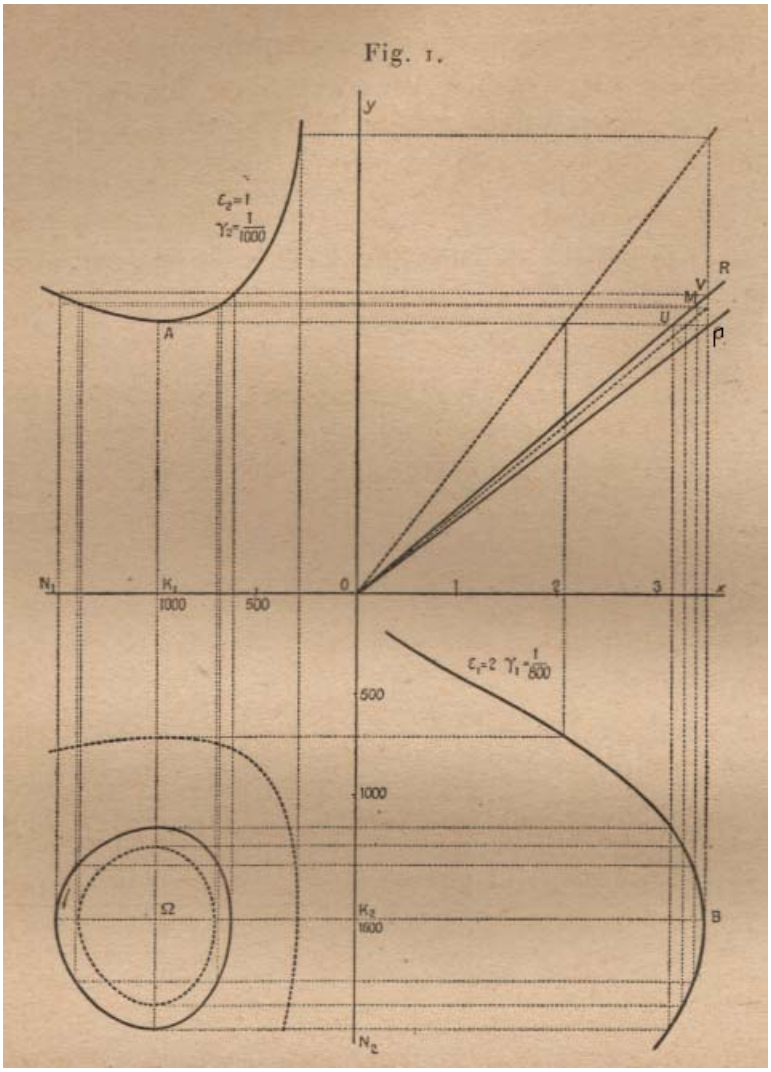
Studiamo questa curva nel piano (N_1, N_2).
Poniamoci nel caso iniziale della specie divorante e della specie divorata:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0, \qquad \lambda_2 = -\varepsilon_2 < 0, \qquad \mu_1 = -\gamma_1 < 0, \qquad \mu_2 = \gamma_2 > 0.$$

Per costruirla, si tracceranno le curve ausiliarie:

$$(\mathcal{L}_1) \qquad Y = N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1},$$
$$(\mathcal{L}_2) \qquad X = N_1^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2},$$

e si dedurrà la curva cercata grazie alla relazione Y=CX.



Su due rette ortogonali, segniamo gli assi OX, ON_1, e OY, ON_2 come nella figura 1. Nel secondo e nel quarto quadrante tracciamo le due curve ausiliarie $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. […]. Le tangenti nei punti A e B di minimo e di massimo si intersecano in un certo punto P. Siano OR una retta dell'angolo POY, M un punto variabile del segmento UV di questa retta, delimitato dalle intersezioni con le precedenti tangenti in A e B. Ad esso corrispondono due punti con lo stesso Y su $\mathcal{L}_1$, due punti con lo stesso X su $\mathcal{L}_2$, e conducendo da questi punti le parallele a OY e OX rispettivamente, [si hanno] quattro punti del terzo quadrante, le cui coordinate (N_1,N_2) *soddisfano la relazione (*), dove C è posto*

uguale alla pendenza della retta OR nel primo quadrante.
Quando M descrive UV, questi quattro punti generano tutta la curva (*) per questo valore della costante.
A tutte le condizioni iniziali possibili corrispondono tutte le rette OR dell'angolo POY, come si vede costruendo il punto (X,Y) corrispondente ai valori iniziali di N_1 *e* N_2*.*
La curva (*), inoltre, è reale solo nel caso in cui C è almeno uguale alla pendenza di OP.

Matematica e arte

K. Chandrasekharan
Hermann Weyl (1885-1985): Centenary Lectures
Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1986

(*Hermann Weyl (1885-1985): Lezioni del centenario*)

Citiamo dal contributo di R. Penrose, a proposito del libro *"Symmetry"* di H. Weyl, 1952:
"Questo non era propriamente un libro di arte o di estetica, ma raccolse molte idee dal mondo dell'arte, della matematica, della fisica e della biologia, e le unificò in termini del concetto di simmetria. C'è forse anche un accenno di una sottile interazione tra i ruoli di simmetria ed asimmetria nell'arte nel libro di Weyl. La ***fig.1****, tratta dal libro - una fotografia di una statua greca del sec. IV a.C. - mostra un'opera d'arte con una magnifica simmetria, che conferisce a quest'opera le sue particolari qualità artistiche.*
[...] La ***fig.2*** *illustra qualcosa che è tratto dal mondo della biologia. Illustra la stella marina ed altre creature, ciascuna delle quali presenta una notevole simmetria pentagonale. Ciò è da mettere in contrapposizione alla simmetria esagonale dei* ***fiocchi di neve*** *della* ***fig.3*** *- tratta dal mondo della fisica. In effetti esiste un argomento ricorrente, elegantemente riproposto nel libro di Weyl, che mostra che per ogni struttura cristallina (come quella dei fiocchi di neve appena citati) possono comparire simmetrie speculari, triangolari, quadrangolari o esagonali, ma le simmetrie pentagonali sono vietate. V'è incompatibilità fra l'esatta simmetria traslazionale, che un cristallo perfetto deve possedere, ed una simmetria rotazionale pentagonale. Così pare che mentre la simmetria pentagonale può essere riscontrata nel mondo dell'arte o della biologia, non la possiamo trovare nelle strutture cristalline della fisica. Weyl esibì anche simmetrie di tipo cristallino tratte dal mondo dell'arte - molti motivi moreschi e, in particolare, una splendida finestra trecentesca di una moschea del Cairo* ***(fig.4)***

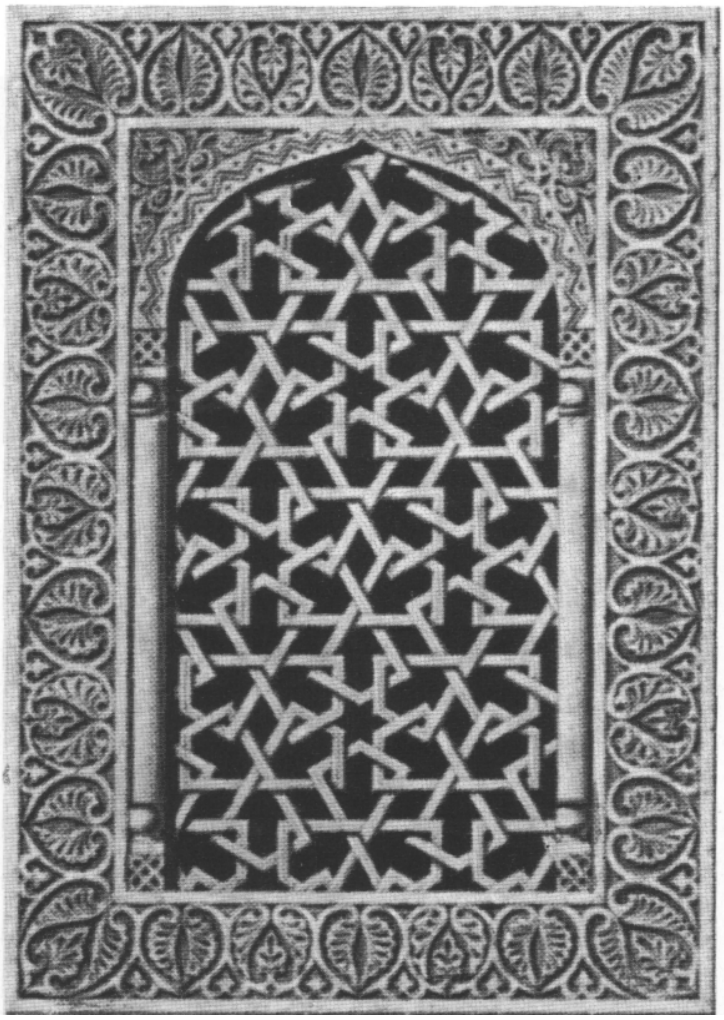
Si dia ora uno sguardo alla ***fig. 5****. Anche se a prima vista essa sembra avere la regolarità di una struttura cristallina, un più attento esame rivela che non è esattamente ripetitiva - e, per di più, sembra presentare forti caratteristiche della proibita simmetria pentagonale! [...] [In realtà] il motivo è formato da quattro diverse figure: pentagoni regolari, rombi,*

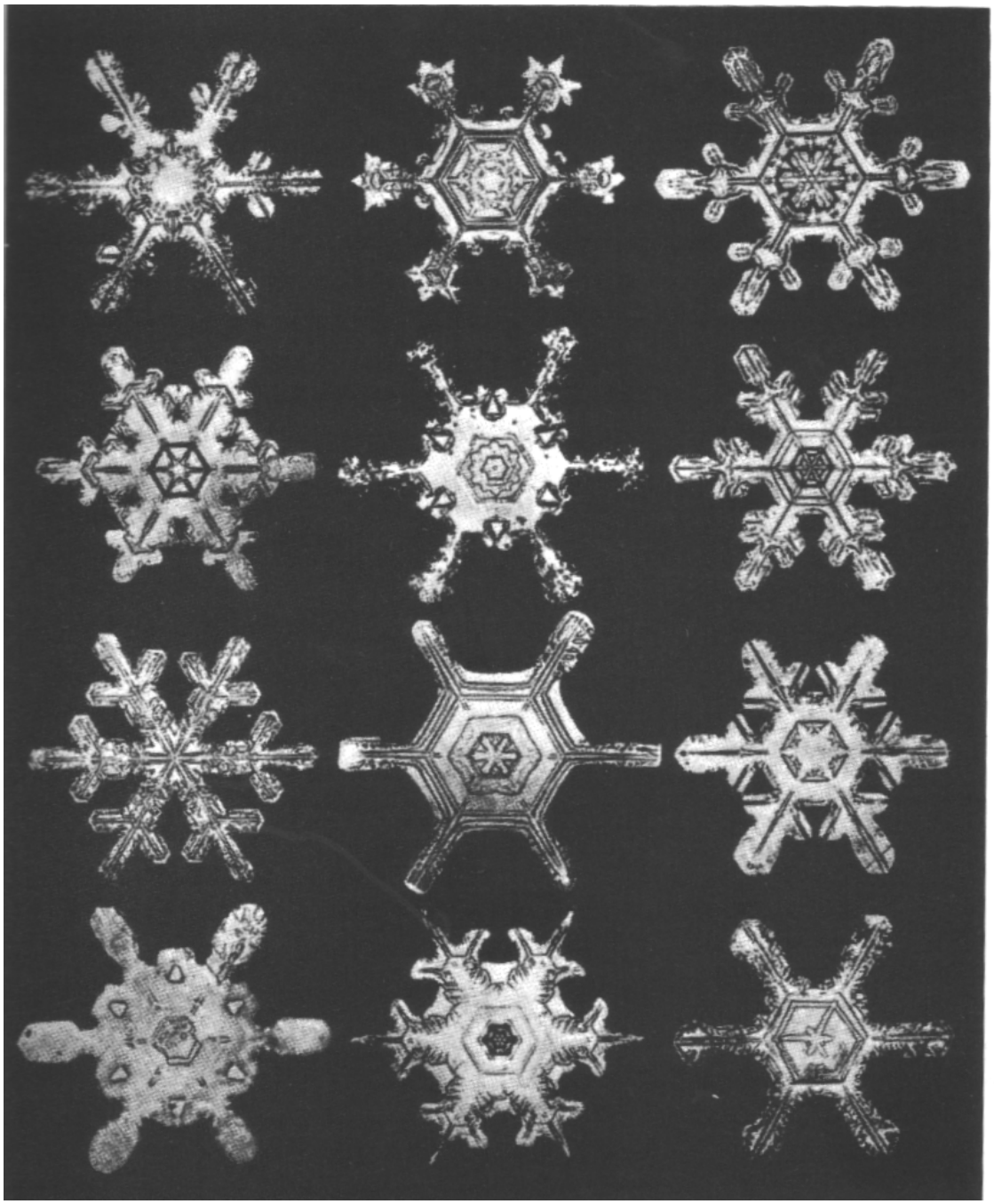
pentagrammi (cioè stelle a cinque punte) e "semi-stelle" a tre punte [...]. Una siffatta disposizione di forme che ricoprono lo spazio senza interstizi e senza sovrapposizioni si dice una ***tassellatura****."*

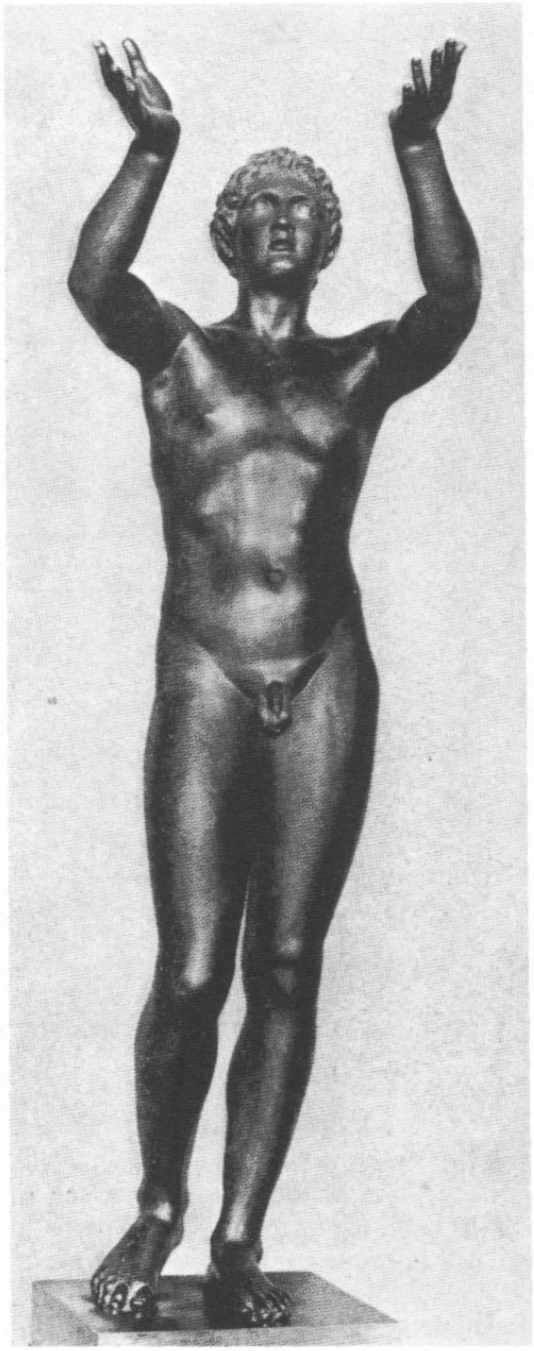
La natura, nel frattempo, ha smentito l'ipotesi di Weyl, che, del resto, era una convinzione ben radicata nel mondo scientifico. Nel 1984 il fisico israeliano Daniel Schechtman ha, infatti, scoperto una lega di alluminio e manganese che presenta una simmetria pentagonale, analoga a quella di certe **tassellature aperiodiche**. Oggi sono note più di cento sostanze aventi la stessa proprietà, che sono state chiamate quasi-cristalli.

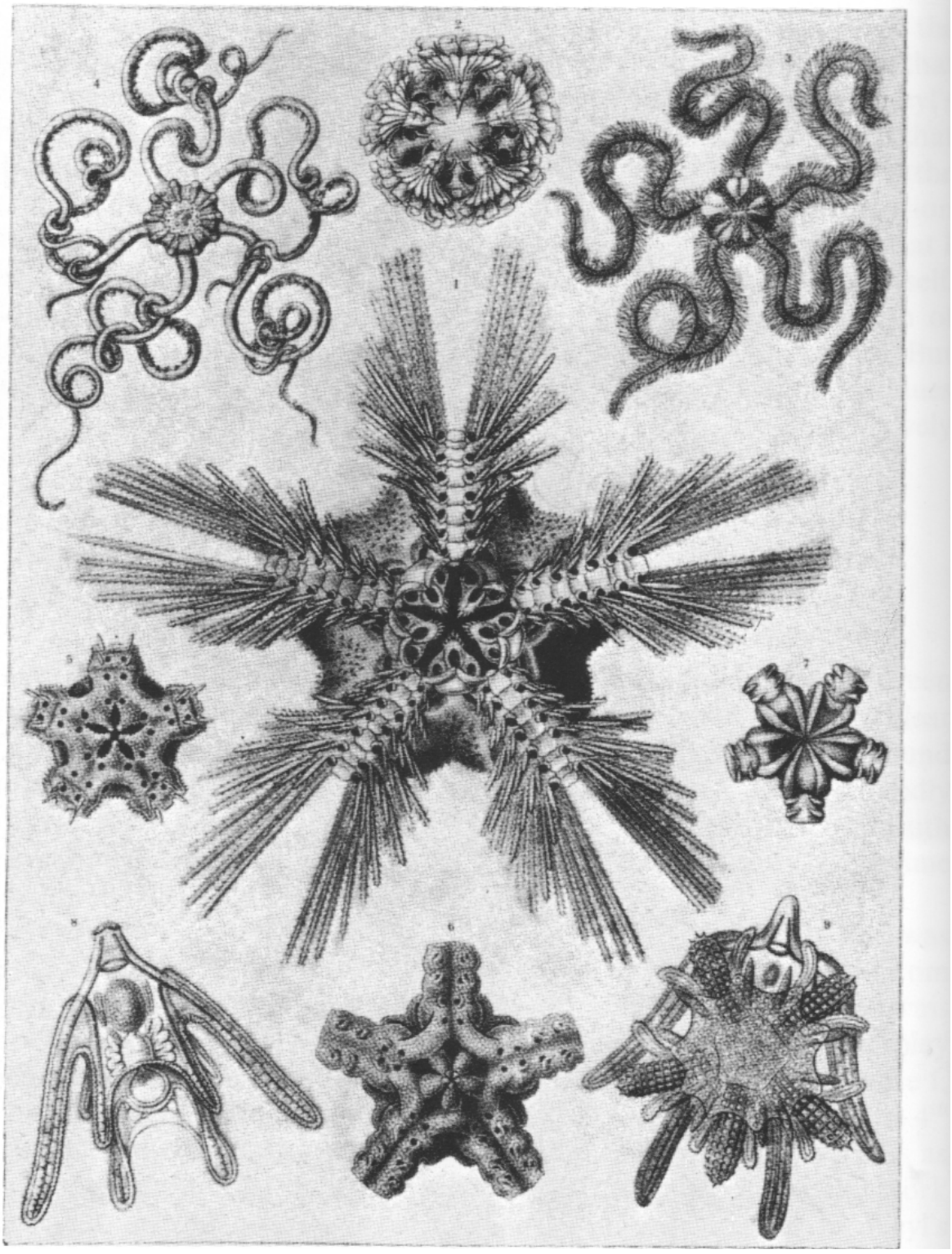
Keplero e la forma dei fiocchi di neve

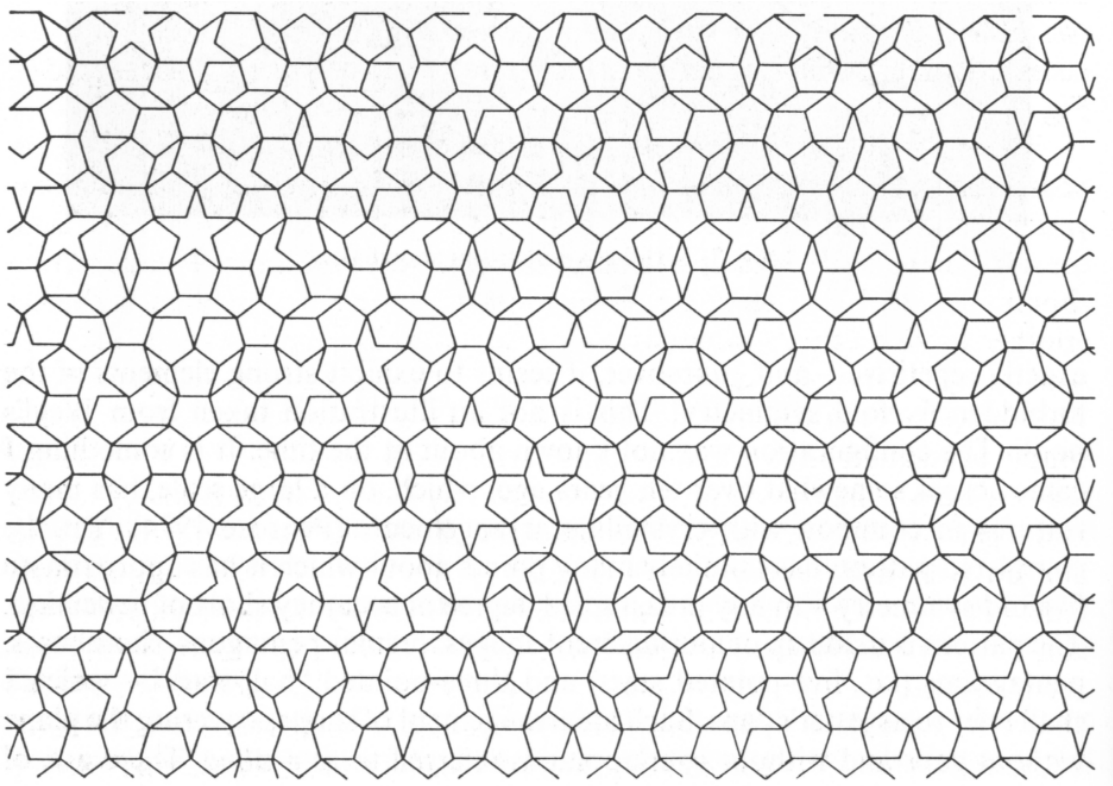
I poligoni











L'astrolabio

Questo antico strumento di misura permetteva ai naviganti di orientarsi con le stelle. Esso consisteva essenzialmente di due parti:

- la ***rete***, una piastra circolare arabescata raffigurante la volta celeste;
- la ***madre***, un anello contenente una piastra circolare piena, detta ***timpano***. Questo era sottostante alla rete, a cui era imperniato nel punto centrale. Il timpano portava incisi i meridiani e paralleli terrestri, sulla madre erano invece riportati i gradi astronomici.

Facendo ruotare opportunamente la madre, era possibile ottenere una proiezione della volta celeste sul piano terrestre, e riconoscere così la propria posizione.



Astrolabio latino in ottone, di datazione incerta, conservato presso il Museo Astronomico e Copernicano di Roma



Particolare del timpano di un astrolabio arabo del 1096

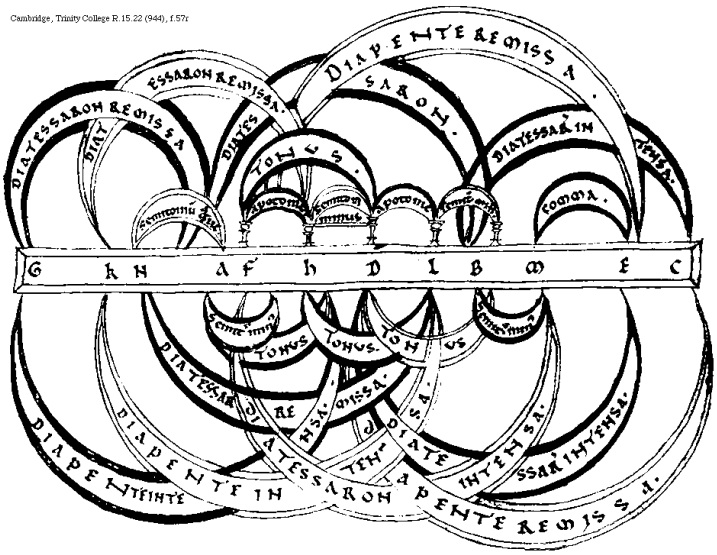
L’uso dell’astrolabio

Severino Boezio (Roma 480 ca. – Pavia 526)



Tra gli scrittori romani che trattarono di Aritmetica ricordiamo: Terenzio Varrone, contemporaneo di **Archimede**, **Vitruvio**, **Plinio** e **Seneca**. Dopo gli ultimi due, che vissero nel I secolo d.C., occorre arrivare al V secolo per incontrare una figura degna di rilievo come, appunto, **Severino Boezio**. Questo letterato latino, che pare avesse compiuto i suoi studi in Atene, visse in Italia ai tempi di Teodorico, re degli Ostrogoti. Da questi egli fu prima nominato console nel 510, ma successivamente perseguitato e giustiziato per questioni religiose. È ricordato tra i martiri cristiani. Traduttore dei classici greci, scrisse soprattutto di filosofia, teologia e logica, ed in matematica non seppe dare alcun contributo veramente originale. Gli va però riconosciuto il merito di aver raccolto l'eredità di **Pitagora** e di **Euclide** nei suoi saggi ***De institutione musica libri quinque***, ed ***Euclidis Megarensis geometriae libri duo***. Quest'ultima opera è di dubbia autenticità, anche se pare che Boezio abbia effettivamente scritto una versione latina degli ***Elementi***. Tradusse in latino le ***Institutiones arithmeticae*** di **Nicomaco Geraseno**. Scrisse il ***De arithmetica*** che divenne poi la base dell'insegnamento della aritmetica nel primo periodo del Medio Evo. Si occupò anche di logica e dedicò due trattati al **sillogismo**.

A questo periodo di stasi in Occidente si contrappone in Oriente l'attività degli Arabi, che assimilarono e diffusero la cultura greca ed indiana (**la numerazione indo-arabica**). I successivi importanti contributi appariranno in Italia, nel XIII secolo, ad opera del **Fibonacci**.



Una rappresentazione degli intervalli musicali dal *De institutione musica*

Boezio e Pitagora in un'incisione degli inizi del Cinquecento. Il primo, per eseguire una divisione, applica una delle tecniche di calcolo medievali, mentre il secondo fa – con molta fatica – i conti con l'abaco.
La donna sullo sfondo rappresenta lo spirito dell'Aritmetica, che sorride a Boezio, innovatore della matematica. Non a caso egli indica col dito il simbolo dello zero.

L'illustrazione è una xilografia tratta dalla *Margarita Philosophica* di Gregor Reisch.



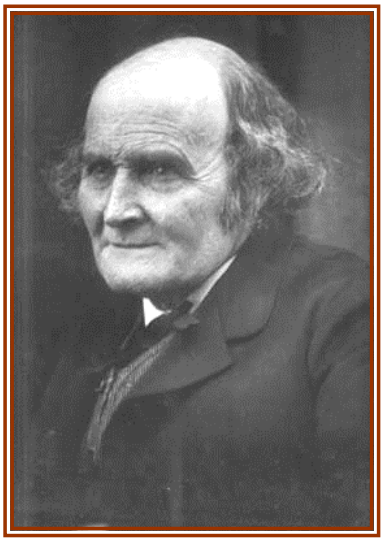
Il metodo usato da Boezio nell'immagine è la cosiddetta **divisione a galea**. Il confronto tra Boezio e Pitagora rappresenta la contrapposizione che si sviluppò, verso la fine del Medio Evo, tra i

matematici: da una parte stavano gli *abacisti,* difensori del tradizionale calcolo effettuato con l'ausilio di tavolette e oggetti mobili, dall'altra gli *algoristi,* sostenitori delle operazioni con carta e penna, basate sulle manipolazioni dei numeri secondo schemi generali. Il loro nome deriva da **Al'Khuwarizmi**, il matematico arabo che è considerato uno dei padri dell'**algebra**.

Una miniatura raffigurante Boezio in carcere



Arthur Cayley (Richmond, Inghilterra, 1821 – Cambridge, Inghilterra, 1895)



Come **Gauss**, fu un precoce genio matematico, dalla brillante carriera scolastica. A soli diciassette anni si iscrisse all'università, al prestigioso Trinity College di Cambridge. Qui egli sarebbe diventato professore, dopo aver esercitato per alcuni anni l'avvocatura: l'attività di giurista fu una parentesi che non interruppe, però, la lunga serie delle sue pubblicazioni scientifiche. Quanto a produttività, fu secondo solo ad **Eulero**. Molti furono i riconoscimenti ed i titoli onorifici conferitigli.

Le sue ricerche riguardano in parte il **calcolo infinitesimale**, per il resto si collocano a metà strada fra l'algebra e la geometria. Una parte fondamentale della sua opera ruota intorno alle **matrici**. Il prodotto di queste ultime costituisce, insieme all'algebra degli **ottoniani**, uno dei primi esempi di operazione non commutativa. Ciò provò la possibilità e l'importanza di creare un'algebra svincolata dalle proprietà del campo dei numeri reali, compiendo, rispetto a **Boole**, un passo avanti nella direzione dell'*algebra astratta*. In questo senso vanno anche intesi gli studi compiuti da Cayley su particolari operazioni definite in insiemi (**gruppi**) aventi un numero finito di elementi.

D'altro lato la **teoria del determinante** sviluppata da Cayley dimostrò come l'algebra potesse intervenire in maniera decisiva nello studio delle trasformazioni geometriche. Non fu Cayley ad inventare i determinanti: essi fecero la loro prima comparsa in Europa in un

lavoro di Cramer del 1750, mentre, in Giappone, il matematico Seki Kōwa li aveva già ideati nel 1683.
Al Nostro spetta il merito di averli applicati alle trasformazioni lineari dello spazio, inquadrandoli in un contesto più generale, la teoria degli ***invarianti algebrici****:* dato un luogo geometrico, definito da una o più equazioni polinomiali, **Cayley** ed il suo amico **Sylvester** furono in grado di determinare le proprietà dei coefficienti che rimangono inalterate rispetto ai cambi di coordinate. Nelle opere di Cayley ampio spazio è dedicato allo studio delle curve e superficie ed alla risoluzione delle equazioni algebriche.

Cayley ebbe l'idea della geometria a *n* dimensioni, che fu ripresa da **Riemann** e da **Klein**, ed aprì la strada ad una modellizzazione unificata delle **geometrie non euclidee**.

La matematica di Cayley svolse un ruolo cruciale nella **fisica quantistica** di **Heisenberg** e nella **teoria della relatività** di **Einstein**.

Matematica e Informatica
Il testo di Matematica e la sua evoluzione nella didattica

Claudio Di Comite, Palmira Ronchi
Pascal e matematica
Bari, 1991

Un testo scolastico di introduzione alla programmazione matematica, destinato agli allievi del biennio delle superiori. Il linguaggio PASCAL viene utilizzato per implementare vari algoritmi elementari, come quelli per la determinazione del **massimo comun divisore** di due interi e per la **divisione di due polinomi** sulla base del **Teorema di Ruffini**.

Eratostene (Cirene, 276 a.C. – Alessandria, 194 a.C.)



Quest'uomo, la cui cultura spaziava in molti campi, fu chiamato dal re Tolomeo III a dirigere la Biblioteca d'Alessandria, occupando la carica che era stata, un tempo, di **Euclide**. Scrisse un trattato sulla matematica della **scuola platonica**, andato perduto, il cui contenuto ci è parzialmente noto tramite le opere di autori che ad esso si ispirarono, come **Teone da Smirne**.

Eratostene propose una soluzione al problema della **duplicazione del cubo**, ma egli è noto, soprattutto, per aver inventato il famoso **crivello** (un algoritmo per trovare tutti i numeri primi compresi in un dato intervallo) e per aver calcolato la circonferenza terrestre, basandosi sulla lunghezza delle ombre (equivalentemente: sulla inclinazione dei raggi solari rispetto al suolo) in due diverse località, Siene (l'attuale città egiziana di Assuan) ed Alessandria, nel giorno del solstizio d'estate. La lunghezza trovata da Eratostene è espressa in *stadi:* purtroppo non si conosce, con certezza, l'equivalente in metri di questa unità di misura. Secondo l'ipotesi più accreditata sul valore dello stadio, Eratostene avrebbe sbagliato il calcolo del diametro di soli 74 km!
La possibilità di determinare distanze sulla base dell'altezza del Sole è all'origine del metodo della **parallasse**, utilizzato dagli astronomi di tutte le epoche.

Curiosità Pare che Eratostene non godesse della stima dei suoi contemporanei. Sembra infatti che questi ultimi gli avessero affibbiato il nomignolo "Beta", come dire: "secondo in tutto".

Il mondo abitato secondo Eratostene

La bellezza secondo Hogarth

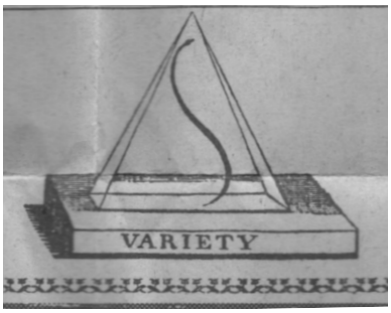
Il pittore inglese **William Hogarth** (Londra, 1697 –1764) formulò una teoria estetica a carattere matematico, che influenzò anche la letteratura romantica.

Di lui dice **George David Birkhoff**:

*"L'artista Hogarth nella sua **Analisi della bellezza** (1753) tentò un'analisi dei fattori estetici nella pittura. Il problema estetico qui è vago e difficile. Non fece altro che elencare fattori formali come simmetria, varietà, uniformità, semplicità, intrigo, quantità e il fattore di rappresentazione convincente. Egli assegnava una bellezza speciale ad una linea serpentina che chiamava Linea della Bellezza."*



Tavola I dell'*Analisi della bellezza*



La linea della bellezza

Il principio d'induzione

Questo metodo dimostrativo è un'applicazione dell'assioma **P5** del **sistema formale per l'aritmetica elementare** elaborato da **Giuseppe Peano** e Richard Dedekind alla fine dell'Ottocento.

In generale il principio d'induzione si applica per dimostrare enunciati della forma seguente:

La proprietà $P(n)$ vale per ogni numero naturale $n \geq n_0$, dove n_0 è un numero naturale fissato.

1. Si constata dapprima che vale $P(n_0)$. **(Base dell'induzione)**
2. Quindi si prova che se la proprietà vale per $n \geq n_0$, allora essa vale anche per $n+1$, cioè $P(n)$ implica $P(n+1)$. **(Passo induttivo)**
3. Si conclude che siccome vale $P(n_0)$, vale $P(n_0+1)$, e siccome vale $P(n_0+1)$, vale $P(n_0+2)$, e così via.

Con questa tecnica è possibile provare, ad esempio, la validità della seguente formula per tutti i valori interi positivi di n:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\bullet)$$

Essa ci dice che la somma dei primi n numeri interi positivi è uguale all'espressione a secondo membro.

Applicare il principio d'induzione significa trovare un modo generale per derivare logicamente l'enunciato per $n+1$ dall'enunciato per n. Una volta che ciò è stato fatto, basterà verificare la nostra formula per $n=1$: infatti da ciò discenderà, secondo il modo generale, la validità della formula per $n=2$, dalla quale seguirà poi la validità per $n=3$, e così via: questa catena di deduzioni percorrerà, passo dopo passo, l'intera sequenza dei numeri interi positivi.

Formalizziamo il principio d'induzione applicandolo al nostro caso. Indichiamo con $P(n)$ la formula (•). Il più piccolo valore per cui dobbiamo dimostrare la validità di $P(n)$ è $n_0=1$.

1. Base dell'induzione: $P(1)$ vale.

L'enunciato $P(1)$ è quello ottenuto ponendo $n=1$ nella (•) (la sostituzione va effettuata ogni qual volta compare n):

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$$

Si tratta ora di controllare che questa uguaglianza è vera. Il secondo membro è certamente uguale a 1. Il primo membro è la somma ridotta ad un solo addendo, i=1, che, naturalmente, vale anch'essa 1.

2. Passo induttivo: se per $n\geq 1$, vale $P(n)$, allora vale $P(n+1)$.

Dobbiamo provare l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per $n\geq 1$. Assumiamo dunque che $P(n)$ valga per qualche $n\geq 1$, come ipotesi (***ipotesi induttiva***) e ne deduciamo $P(n+1)$, che è la formula ottenuta sostituendo, nella (1), tutti gli n con $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Proviamo che il primo membro è uguale al secondo utilizzando l'identità $P(n)$.

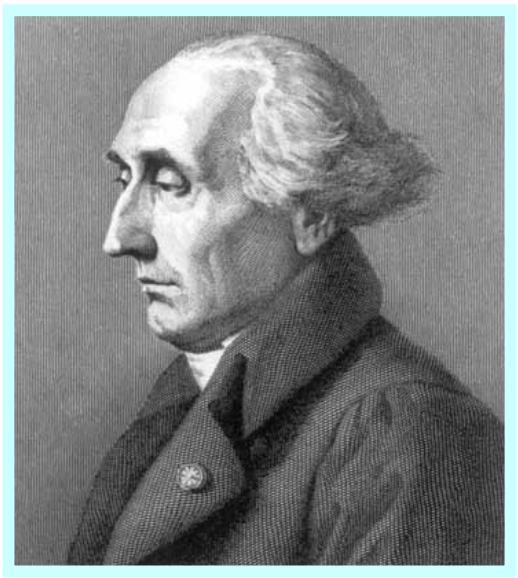
$$\sum_{i=1}^{n+1} i \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{(**)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'uguaglianza (∗) si ottiene mettendo in evidenza nella somma l'ultimo addendo, che è $n+1$: si è così decomposta la somma degli addendi 1, 2, …, n, $n+1$ come somma degli addendi da 1 a n, più $n+1$. Per scrivere la (∗∗) abbiamo utilizzato la $P(n)$, che ci consente di sostituire la somma $\sum_{i=1}^{n} i$ con $\frac{n(n+1)}{2}$. Le restanti uguaglianze sono determinate da trasformazioni algebriche elementari.

Ciò conclude la dimostrazione per induzione del nostro enunciato.

Nota: Il numero che compare a secondo membro della (•) è l'n-esimo **numero triangolare**.
Un aneddoto narra che il piccolo **Gauss**, alle scuole elementari, scoprì da solo la (•) e la applicò per calcolare velocemente la somma dei primi 100 numeri interi positivi.

Joseph-Louis Lagrange (Torino, 1736 – Parigi, 1813)



Questo matematico fu battezzato come Giuseppe Lodovico Lagrangia: era nato a Torino da genitori piemontesi, ma il suo nome venne successivamente francesizzato. Egli trascorse a Parigi la parte più lunga ed importante della sua carriera. L'equivoco sulla sua vera nazionalità è al centro di un **aneddoto** che lo vede protagonista insieme a **Mascheroni**.

Avviato inizialmente agli studi classici, conobbe le opere di **Euclide** e di **Archimede**, ma non furono quelle a conquistarlo alla matematica. In effetti egli avrebbe conservato per tutta la vita un deciso disinteresse nei confronti della geometria classica. A questa egli preferì sempre il **calcolo infinitesimale** (***Teoria delle funzioni analitiche,*** 1797) che amava applicare ai problemi di meccanica. Scoprì il fascino di questo tipo di studi leggendo un'opera sulla forza gravitazionale scritta da **Edmund Halley**, l'osservatore dell'omonima cometa, nonché amico di **Newton**. Sulla scia dell'ammirazione provata per il famoso fisico inglese, fin dalla più giovane età iniziò a maturare quelle idee che sarebbero confluite nel suo capolavoro, la ***Meccanica Analitica***, edito nel 1788. La sua predilezione per i problemi fisici, riguardanti i moti dei corpi, non gli impedì, comunque, di dedicarsi ad altre branche della matematica. Conseguì importanti risultati in **teoria dei numeri**, risolvendo alcuni dei problemi che **Fermat** aveva lasciato alla posterità. Dimostrò, tra l'altro, che ogni numero naturale può essere scritto come la somma di al più quattro quadrati perfetti: questo è un caso particolare del problema di Waring, che sarà risolto

nella sua generalità da **Hilbert** nel Novecento. Il metodo ideato da Lagrange per la risoluzione delle equazioni algebriche avrebbe fornito il punto di partenza alla **teoria di Galois**. Il suo metodo per la risoluzione approssimata è basato sulle **frazioni continue**. Si occupò anche di calcolo delle probabilità e di trigonometria.

La carriera scientifica di Lagrange ebbe un avvio precoce: era ancora adolescente quando divenne professore di scuola. Appena ventenne fondò l'Accademia delle Scienze di Torino. Gli anni successivi lo avrebbero portato attraverso l'Europa, in una serie di viaggi coronati da straordinari successi personali, che egli visse, però, con notevole distacco. Godette dei favori del re di Sardegna, conobbe l'imperatore Federico il Grande di Prussia, frequentò Napoleone Bonaparte, che gli conferì le massime onorificenze imperiali. Rivestì importanti incarichi all'Accademia di Berlino e all'Accademia delle Scienze di Parigi, insegnò all'Ecole Normale e all'Ecole Polytechnique.

Nonostante la sua eccezionale carriera, Lagrange non abbandonò mai la sua grande moderazione, che emerge dalle sue dichiarazioni scritte. Egli a volte minimizzava il valore dei suoi risultati, rapportandolo all'enorme fatica che gli erano costati. Fu questa tendenza alla autocritica, unita ad un grande amore per la perfezione, a far sì che egli rifacesse più volte lo stesso lavoro, non restandone, come egli stesso ammetteva, quasi mai contento. Questo tratto della sua personalità, messo in evidenza da Bell, lungi dall'essere segno d'insicurezza, era anzi frutto di un carattere forte ed equilibrato, anche se incline all'apatia. Come sottolinea Maracchia, *"Lagrange possedeva in sé quella stabilità che egli stesso aveva dimostrato (1776) per il sistema solare, risultato secondo il quale le variazioni non possono essere che periodiche e che ebbe notevoli ripercussioni scientifiche e filosofiche."* Il Nostro è ricordato come iniziatore del moderno **calcolo delle variazioni**, che egli aveva concepito da adolescente, e che, a distanza di anni, continuò a considerare il meglio della sua produzione scientifica. Quando le sue teorie furono attaccate, egli seppe rispondere alle critiche con fermezza ed ironia.
Nella seconda metà della sua vita, l'affaticamento per il prolungato impegno intellettuale, la dolorosa esperienza del Terrore, e la traumatica perdita dei suoi amici più cari incisero profondamente sul suo animo. Egli conobbe periodi di melanconica inattività, in cui arrivò perfino a dichiarare il proprio disgusto per la matematica. L'amore della sua giovane seconda moglie riuscì a risollevarlo.

Poco tempo prima di morire, ormai malato, sentendosi venire meno le forze, scrisse: *"Voglio morire; sì, voglio morire e ne sono contento, ma mia moglie non vuole; avrei preferito in questo momento una donna meno buona, meno sollecita e rianimarmi e che mi avesse lasciato spegnere dolcemente. Ho finito la mia carriera, ho acquistato una certa celebrità in matematica, non ho odiato nessuno, non ho fatto nessun male e bisogna bene che me ne vada, ma mia moglie non vuole."*

Lo storico della matematica Howard Eves definisce Lagrange *"il primo vero analista"*, il fondatore di uno stile espositivo moderno, conciso e rigoroso, decisamente diverso dalla prolissità e dall'approccio intuitivo di **Eulero** e di **Newton**. Con lui la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ cessò di essere un oggetto dai contorni indistinti, non fu più il quoziente di quantità evanescenti, o di infinitesimi, ma prese ad essere, più semplicemente il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$ in serie di potenze:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + 1/2\, f''(x)h^2 + \ldots..$$

Lagrange stesso riconobbe invece in **Fermat** *"il primo inventore dei nuovi calcoli"*.

Curiosità: Philippe de la Hire risolve un'equazione di terzo grado

In un manoscritto conservato presso la Bibliothèque Nationale di Parigi, il geometra francese **Philippe de La Hire** (Parigi, 1640-1718) risolve vari tipi di equazioni di terzo grado. Uno di questi è da lui chiamato *"potenza cubica affetta sotto il quadrato negativo"*. Ne è un esempio l'equazione

$$x^3 - 7x^2 = 14580,$$

in cui il "numero affetto" è -7, che è il coefficiente del "quadrato", ed è negativo. Il termine noto 14580 è invece detto "numero semplice".

Il procedimento di de La Hire – che riproduciamo qui sotto in forma di algoritmo – permette di determinare dapprima una radice approssimata, che successivamente viene corretta. In questo senso, ricorda da vicino il ***metodo di falsa posizione*** inventato dagli **Egizi**, e rimasto in uso durante tutto il Medioevo.

1. Estrai la radice cubica di 14580. La sua parte intera è 24.
2. Calcola $24 + 1/3 \cdot 7$. La sua parte intera è 26.
3. Eleva 26 al cubo. Trovi 17576.
4. Sottraine $7 \cdot 26^2$. Ottieni 12844.
5. Poiché $12844 < 14580$, concludi che 26 è una radice approssimata per difetto.
6. Calcola $14580 - 12844 = 1736$.
7. Dividi 1736 per $3 \cdot 26^2 + 1 + 3 \cdot 26 - 2 \cdot 26 \cdot 7 - 7 = 1736$. Ottieni 1.
8. Calcola $26 + 1 = \mathbf{27}$. Verifichi che questa è la radice esatta.

È chiaro che il metodo di de La Hire, in generale, permetterà di trovare solo un'approssimazione razionale della radice cercata.

La risoluzione delle equazioni di terzo grado

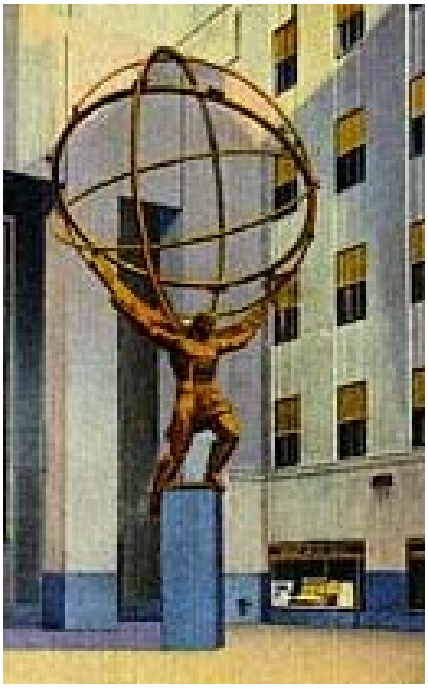
Il Teorema di de La Hire sulla cicloide

La proiezione cartografica di de La Hire

Il problema della longitudine

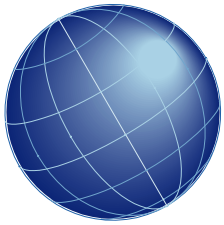
La scrittrice statunitense Dava Sobel così introduce il suo saggio storico *Longitudine:*

"Una volta, quand'ero bambina, durante la passeggiata del mercoledì, mio padre mi comprò una palla di filo di ferro con tante perline, che divenne la mia passione. Toccandola, potevo appiattirla in una spirale da stringere fra le mani, oppure riaprirla di scatto facendola diventare una sfera cava. E quando aveva ripreso la forma rotonda, sembrava una minuscola Terra, perché i fili formavano lo stesso reticolo di cerchi intersecantisi che a scuola avevo visto sul mappamondo – le sottili linee nere della latitudine e della longitudine. Quelle poche perline colorate scivolavano a caso lungo i sentieri metallici, simili a navi trascinate dai marosi.
Mio padre mi portò in spalla dalla Quinta Strada al Rockefeller Center, dove ci fermammo a guardare la statua di Atlante, che sostiene cielo e terra.

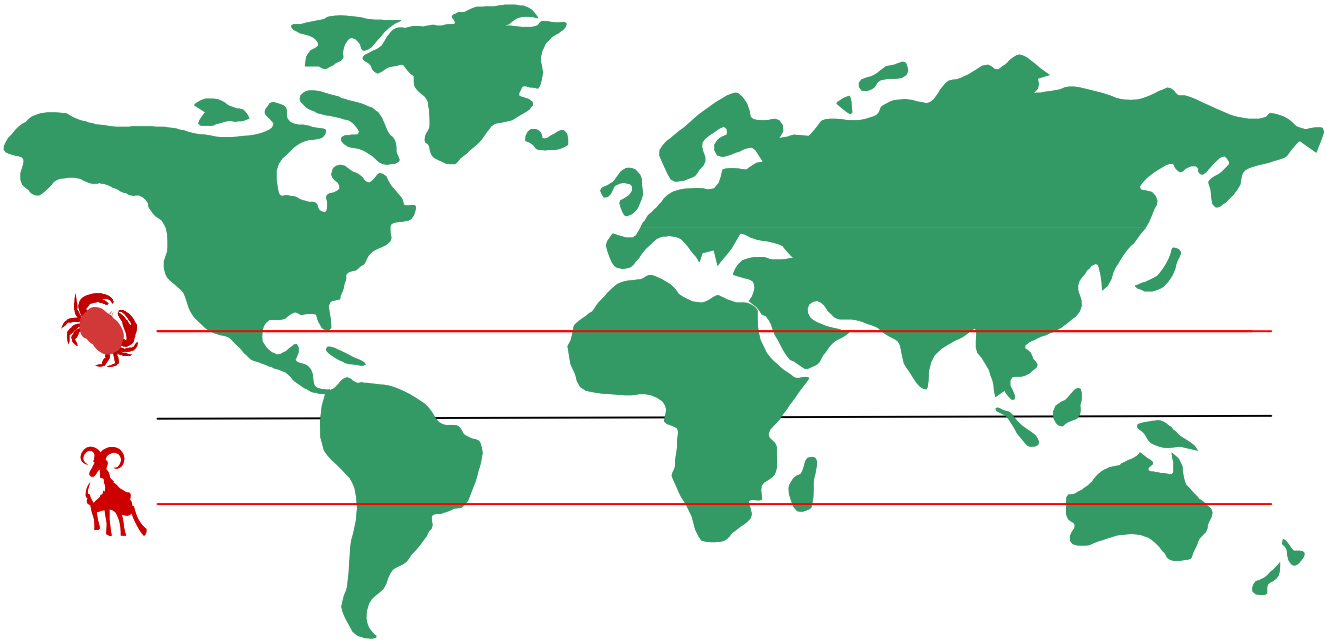


Il globo di bronzo sorretto da Atlante, simile al giocattolo che tenevo in mano, era una sfera cava, definita dalla linee immaginarie dell'Equatore, dell'Eclittica, del Tropico del Cancro, del Tropico del Capricorno, del Circolo Polare Artico, del meridiano fondamentale.
Già allora la griglia della carta millimetrata che avvolge il globo era ai miei occhi un potente simbolo delle terre e delle acque del pianeta.
Sono sempre le linee della latitudine e della longitudine che definiscono il mondo con un'autorevolezza che non avrei mai immaginato quaranta o più anni fa. Il loro tracciato rimane fisso mentre sotto il reticolo tutto cambia: con la deriva dei continenti in un mare che si dilata sempre più; e i confini delle nazioni ripetutamente ridisegnati dalla guerra e dalla pace.

Da bambina, imparai un trucco per ricordare la differenza tra longitudine e latitudine. Le linee di latitudine, i paralleli, sono davvero paralleli l'uno all'altro perché cingono il globo, dall'Equatore ai poli, in una serie di anelli concentrici sempre più stretti.



I meridiani vanno nell'altra direzione: annodano il Polo Nord al Polo Sud con grandi cerchi della stessa lunghezza, che convergono tutti ai confini della Terra.
Le linee della latitudine e della longitudine cominciarono a intersecare il nostro modo di rappresentare il mondo fin dall'Antichità, almeno tre secoli prima della nascita di Cristo. Già nel 150 d.C. il cartografo e astronomo ***Tolomeo*** *le aveva tracciate nelle ventisette carte geografiche del suo primo atlante del mondo. […]*
L'Equatore indicava per Tolomeo il parallelo di grado zero. Non era una scelta arbitraria, ma indicata da autorevoli predecessori, che a loro volta l'avevano derivata dalla natura, osservando i moti dei corpi celesti. Il Sole, la Luna e i pianeti passano quasi esattamente sopra l'Equatore. E nello stesso modo – obbedendo al Sole perché segnano il limitare settentrionale e quello meridionale del suo moto apparente nel corso dell'anno – si definiscono il Tropico del Cancro e il Tropico del Capricorno.



Tolomeo era invece libero di fissare il meridiano fondamentale, la linea di longitudine di grado zero, ovunque gli garbasse. Egli scelse di farlo scorrere lungo le Isole Fortunate (che adesso si chiamano isole Canarie e arcipelago di Madera) al largo della costa nordoccidentale dell'Africa. I successivi cartografi spostarono di volta in volta il meridiano fondamentale alle isole Azzorre e di Capo Verde, a Roma, a Copenhagen, a Gerusalemme, a San Pietroburgo, a Pisa, a Parigi, a Filadelfia, prima di fissarlo da ultimo a Londra. Il mondo gira, e quindi ogni linea da polo a polo può servire come punto di riferimento.

L'identificazione del meridiano fondamentale è una questione squisitamente politica. […]

Ogni marinaio un po' avveduto può misurare la latitudine dalla lunghezza del giorno, dall'altezza del Sole, dalle note stelle di riferimento sopra l'orizzonte. Cristoforo Colombo seguì una rotta quasi rettilinea attraverso l'Atlantico quando salpò il parallelo nel suo viaggio del 1492; e la tecnica l'avrebbe senza dubbio portato alle Indie se non si fossero messi di mezzo gli americani.

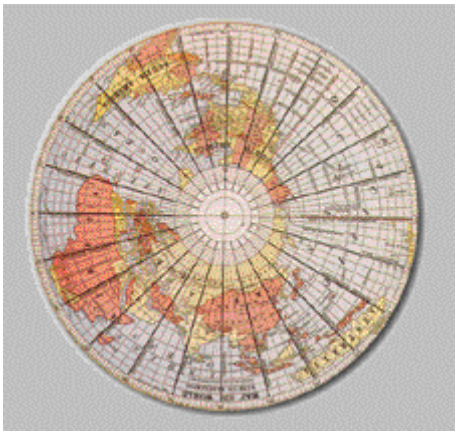




La misura dei meridiani di longitudine, invece, è influenzata dall'ora. Per calcolare la longitudine in alto mare bisogna sapere non soltanto che ora è a bordo della nave in un dato momento ma anche che ora è, in quello stesso istante, nel porto di partenza o in un altro luogo di cui si conosca la longitudine. Le ore segnate dai due orologi rendono possibile al navigante la trasformazione della differenza oraria in distanza geografica. Poiché la Terra impiega 24 ore per completare un'intera rotazione di 360°, un'ora equivale a 1/24 di giro, ovvero a 15°. Quindi la differenza di un'ora tra la posizione della nave e il punto di partenza indica un avanzamento di 15° di longitudine verso oriente o occidente."

(op. cit., trad. di G. Lonza e O. Crosio, Rizzoli, Milano 1999, pagg. 7-10)

Precisamente, se, ad esempio, sulla nave sono le 10, e nel luogo di riferimento sono le 11, la nave è avanzata di 15 gradi verso occidente: se fosse proceduta verso oriente, a bordo sarebbero le 12.



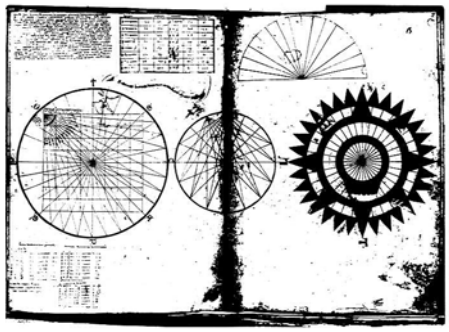
Ecco spiegato, in breve, il principio su cui si basano i fusi orari.

Una navigazione rapida e sicura non poteva prescindere dal problema della longitudine, che divenne pressante verso la fine del Medioevo, col moltiplicarsi dei

viaggi d'esplorazione e degli scambi commerciali via mare.
Molti matematici dei secoli XIV e XVI si erano impegnati nella ricerca di una soluzione. Una delle principali strade seguite era quella di orientarsi mediante il moto dei corpi celesti. D'altronde fin dai tempi più remoti i naviganti avevano determinato la latitudine guardando al Firmamento, utilizzando, ad esempio, l'**astrolabio**. Nel frattempo le conoscenze astronomiche si erano affinate: confrontando il cielo, così come appariva dalla nave, con quanto riportato su apposite mappe stellari, dette *effemeridi*, si poteva calcolare la propria posizione rispetto a meridiani e paralleli. Un'altra possibilità era quella di basarsi sulle fasi lunari, come suggerito da **Newton**, o sulle posizioni dei satelliti di Giove, come suggerito da **Galileo**: su invito del re Filippo III di Spagna egli aveva ideato una sorta di scafandro metallico, con un telescopio incorporato, che, una volta calato sul capo, doveva permettere osservazioni astronomiche accurate anche dall'instabile ponte di una nave. Ma questo apparato, chiamato *celatone,* si rivelò del tutto inadeguato. D'altra parte i fenomeni visibili ad occhio nudo, come le eclissi di sole o di luna, erano troppo rari per poter servire da riferimento, se non per misurazioni occasionali: il matematico persiano **Al-Biruni**, ad esempio, si era servito dell'eclisse di luna del 24 maggio del 997 d.C. per calcolare la longitudine tra le città di Kath e Baghdad.

Il beccheggio ed il rollio, che avevano causato il fallimento dell'invenzione galileiana, impedivano anche il corretto funzionamento degli orologi a pendolo realizzati da **Huyghens**: se questi, una volta imbarcati, avessero continuato a segnare l'ora del porto di partenza, il problema sarebbe stato risolto. Così, per tutto il Seicento, si cercarono vie alternative per misurare il tempo in navigazione. Per un certo periodo, la scoperta del magnetismo terrestre sembrò aprire una nuova strada: la misura dell'angolo (*declinazione magnetica*) formato dalla direzione indicata dall'ago della bussola (*polo nord magnetico*) con quella segnalata dalla stella polare (*polo nord geografico*) pareva offrire un criterio matematico sicuro per determinare la longitudine: i dati potevano essere letti su apposite carte nautiche.





Purtroppo la bussola non si rilevò uno strumento sufficientemente affidabile, e, d'altra parte, gli errori di misurazione anche piccoli incidevano molto seriamente sulla precisione del risultato.
Sotto la spinta delle iniziative promosse da alcuni sovrani europei, fioccarono le proposte più stravaganti, per lo più di improbabile realizzazione: dai segnali acustici e luminosi emessi da postazioni marine fisse in determinate ore del giorno, ad espedienti tanto esoterici quanto crudeli come quello della polvere di simpatia. Intingendo in questa sostanza miracolosa la lama con cui era stata procurata una ferita, il dolore sarebbe stato riacceso a distanza. Si trattava allora di ferire un cane, portarlo a bordo, e fare in modo che il taglio non si rimarginasse per tutta la durata del viaggio. Una persona, nel porto di partenza, avrebbe intinto la lama nella polvere ogni giorno, sempre alla stessa ora. In quel momento l'animale si sarebbe lamentato, fungendo da segnale orario. Un colorito resoconto di questa ed altre idee strampalate è presentato da Umberto Eco nel suo romanzo *L'isola del giorno prima,* interamente dedicato al problema della longitudine.

Su proposta di un collegio di esperti, tra cui Newton e **Edmund Halley**, nel 1714 la regina Anna d'Inghilterra promulgò il ***Longitude Act***, che stanziò ricche ricompense in denaro per la soluzione del problema, istituendo un'apposita commissione permanente.
Il quinto astronomo reale **Maskelyne** pubblicò, a cavallo tra il Settecento e l'Ottocento, tabelle basate sulle fasi lunari, che divennero molto popolari tra i naviganti. Esse misuravano la longitudine rispetto alla sede del Royal Observatory, cioè assumendo come meridiano 0 quello passante per la cittadina di Greenwich, presso Londra. Questa convenzione, sancita ufficialmente nel 1884 dalla Conferenza internazionale dei meridiani di Washington, è rimasta in vigore fino ai giorni nostri.
Il premio previsto dal *Longitudine Act* fu assegnato nel 1803, su proposta dello stesso Maskelyne, all'orologiaio inglese Thomas Earnshaw, che aveva realizzato, dopo molti decenni di tentativi, quello che venne giudicato il primo *cronometro* veramente efficiente. Si trattava dell'ultimo perfezionamento di un'invenzione risalente alla prima metà del Settecento: era stato John Harrison il primo a concepire un rivoluzionario meccanismo che rendeva gli orologi insensibili al moto delle onde ed alle variazioni di temperatura e di pressione atmosferica incontrate in alto mare. La concorrenza con l'*Almanacco Nautico* di Maskelyne aveva però impedito che a Harrison venisse riconosciuto il giusto merito.

La classificazione dell'algebra secondo Nesselmann (1842)

La notazione usata per scrivere l'algebra ha conosciuto tre fasi storiche di sviluppo:

- l'***algebra retorica***, nella quale il testo di matematica non differisce, nella forma, da un normale brano di prosa letteraria: non vi compaiono simboli, ma solo parole. La matematica si scrive esattamente come la si leggerebbe ad alta voce. Ciò è quanto avveniva agli albori, nella **matematica babilonese** ed **egizia**. Successivamente altri autori continuarono la tradizione, fino all'era moderna:
  - **Iamblico**, filosofo greco (ca. 245- ca. 325 d.C.), biografo e commentatore di **Pitagora**;
  - gli algebristi arabi e persiani, in particolare **Al-Khuwarizmi**.
  - **Fibonacci** ed altri matematici europei del tardo Medioevo, come il tedesco **Regiomontano** (1436-1476), ma anche, in parte, **Pacioli**, **Cardano** e **Tartaglia**;

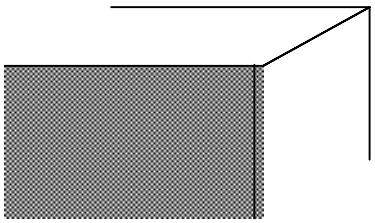
- l'***algebra sincopata***, nella quale, pur continuando a prevalere la parola, compaiono abbreviazioni e simboli: è questo, ad esempio, il modo di scrivere di **Diofanto**, di **Bombelli** e di **Vieta**, oltre che della **matematica indiana**.

- l'***algebra simbolica***, quella dei nostri giorni, in cui il linguaggio, ridotto a pochi segni essenziali, ha raggiunto un alto grado di concisione.

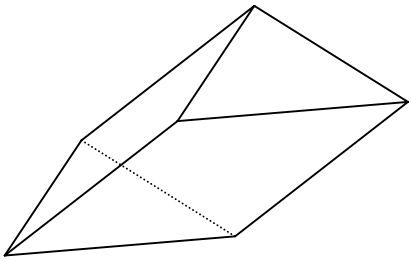
Storia dell'algebra

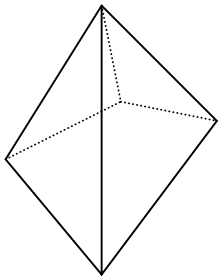
I poliedri

Si dice ***poliedro*** una regione dello spazio delimitata da un insieme finito di piani. Una regione siffatta può anche essere illimitata: è il caso del *diedro,* delimitato da due soli piani incidenti:



Noi considereremo soltanto poliedri limitati. Sono poliedri limitati, ad esempio, i prismi e le piramidi.





Un poliedro si dice *convesso* se, per ogni coppia di suoi punti, esso contiene tutto il segmento che li congiunge.

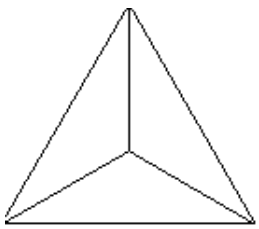
Per tutti i poliedri limitati e convessi vale la nota ***formula di Eulero***:

$$v - s + f = 2,$$

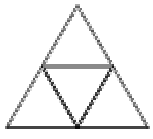
ove *v,s* ed *f* sono, nell'ordine, il numero di vertici, il numero di spigoli ed il numero di facce. Questa formula fu **generalizzata** da **Cauchy**.

Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e tutti gli angoli solidi sono uguali. In tal caso i vertici giacciono tutti su di una sfera. Esistono solo cinque poliedri regolari:

- Il ***tetraedro***

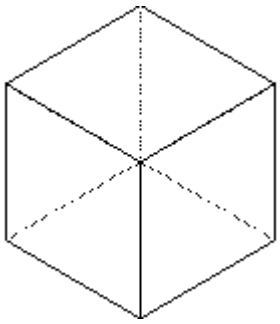


4 vertici
6 spigoli
4 facce

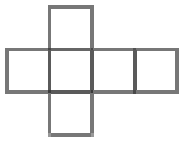


sviluppo

- il ***cubo* o *esaedro***

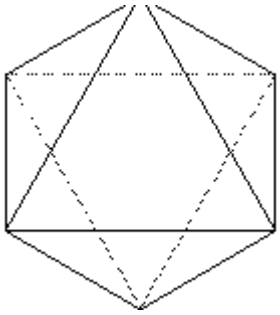


8 vertici
12 spigoli
6 facce

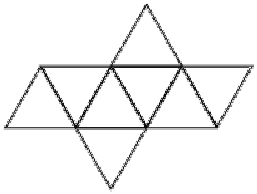


sviluppo

- l'***ottaedro***

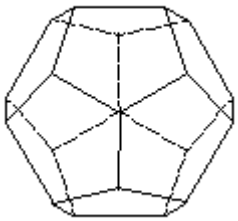


6 vertici
12 spigoli
8 facce

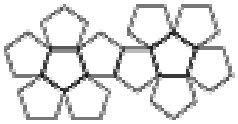


sviluppo

- il ***dodecaedro***

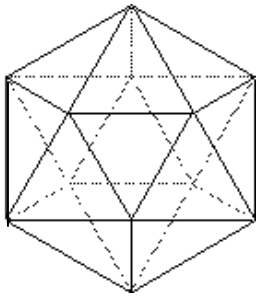


20 vertici
30 spigoli
12 facce

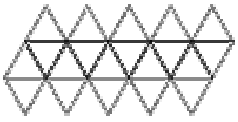


sviluppo

- l'***icosaedro***



12 vertici
30 spigoli
20 facce



sviluppo

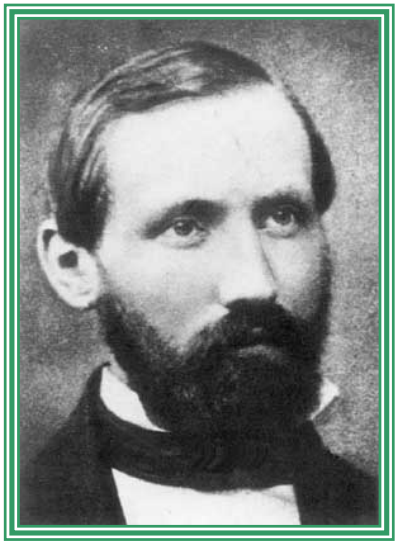
I poliedri regolari sono anche noti col nome di ***solidi platonici***, poiché vengono citati nel ***Timeo*** di **Platone**, dove assumono precisi significati cosmologici.

Euclide li tratta nel **Libro XIII** dei suoi ***Elementi***, ne determina le misure e descrive i procedimenti per costruirli.

Keplero li immagina nell'universo, come involucri dei pianeti del sistema solare.

I poliedri semiregolari di Archimede hanno facce che sono ancora poligoni regolari. Essi affascinarono **Piero della Francesca**: a cinque di essi dedicò un trattato, in cui confluirono elementi artistici e matematici.

Georg Bernhard Riemann (1826-1866)



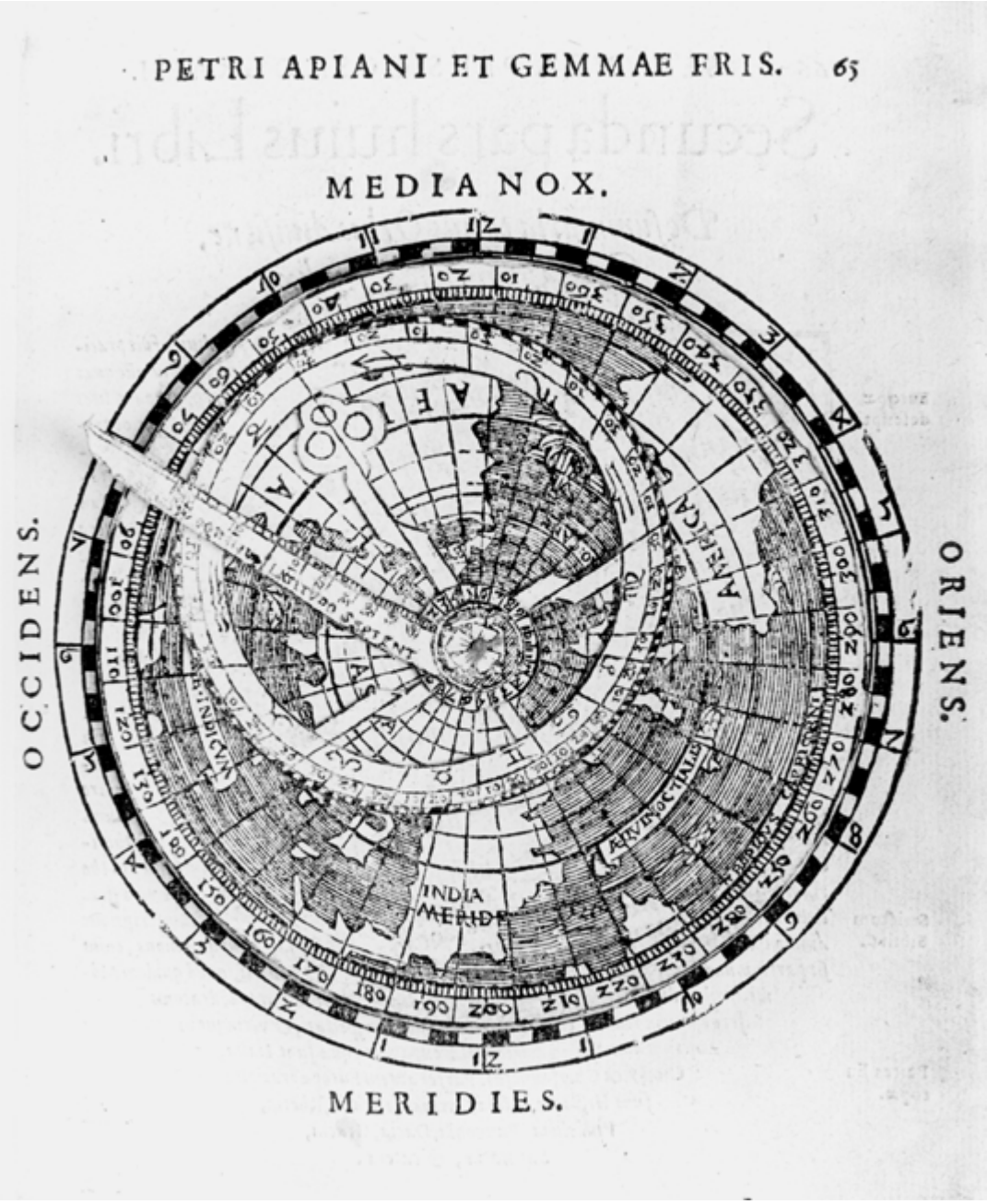
La produzione scientifica di questo matematico tedesco è quantitativamente poco rilevante, anche perché egli passò gran parte della sua breve vita ad inseguire vari interessi, per colmare una grande ed irrequieta fame di sapere. A ciò si aggiunsero un carattere timido ed un desiderio di perfezione che gli impedivano di portare sulla carta idee che non fossero ben ponderate ed approfondite. Ma quei pochi scritti che ci ha lasciato sono veri fiori matematici, forse i più bei frutti che una mente avrebbe potuto far maturare dalle letture di **Legendre**, dalle lezioni di **Jacobi**, **Dirichlet**, **Steiner** e **Eisenstein**, dalla collaborazione col fisico **Weber** e dalla frequentazione di **Gauss** all'Università di Göttingen, dove Riemann compì la parte più importante della sua carriera. La cattedra di Gauss, a cui succedette **Dirichlet**, alla morte di quest'ultimo divenne infine sua.

Il nome di Riemann è solitamente associato al **calcolo infinitesimale**, in cui, grazie ad intuizioni geniali, riuscì a portare elementi nuovissimi, provenienti da altre discipline, come l'algebra, la topologia, la geometria. Gli studi da lui compiuti sugli spazi astratti a *n* dimensioni (**geometria Riemanniana**) avrebbero tracciato, a decenni di distanza, la via matematica per la **teoria della relatività**. Ciò non è sicuramente dovuto al caso: gran parte della matematica di Riemann nasce da riflessioni sui fenomeni del mondo fisico.

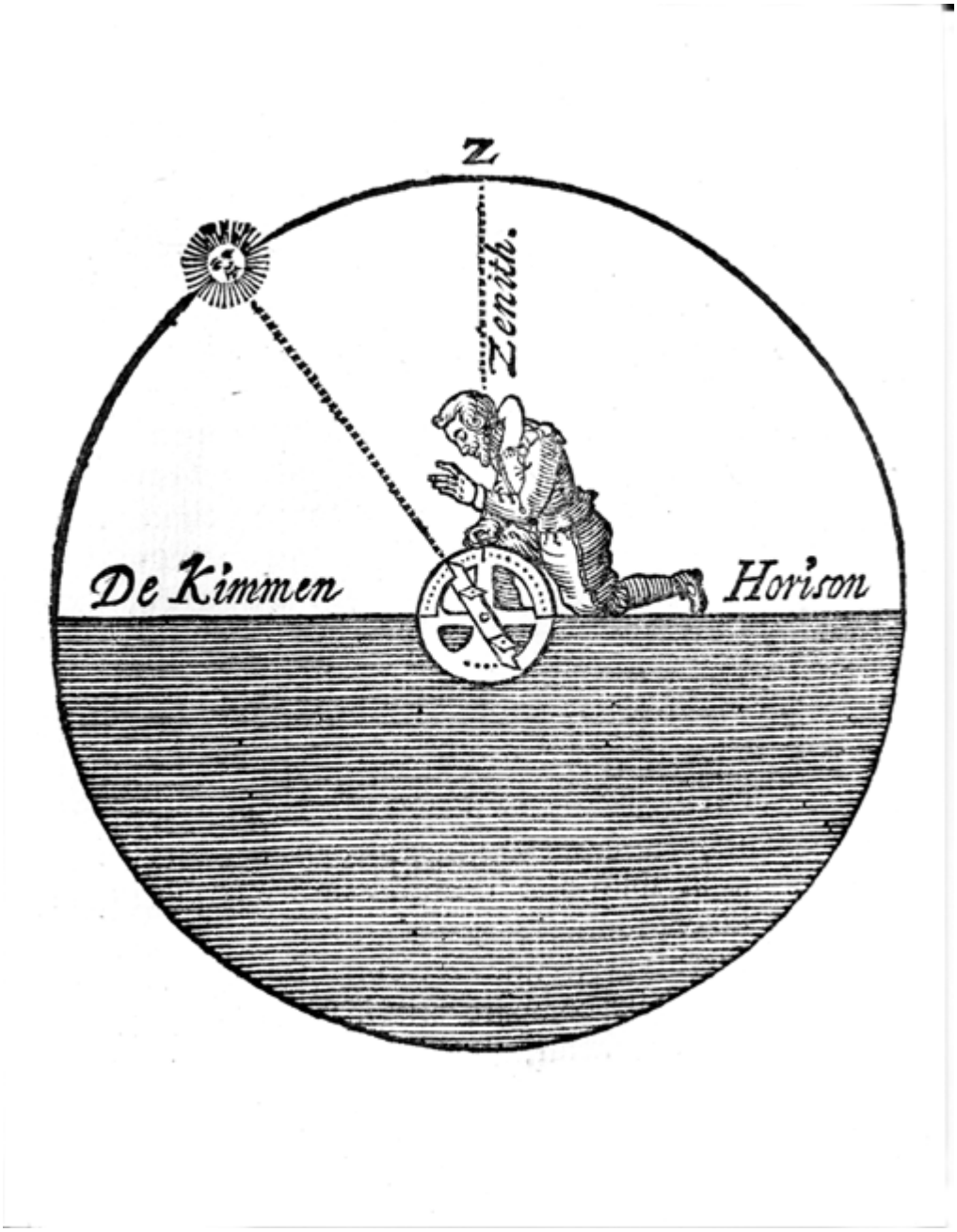
Giovanni di Sacrobosco (Halifax, Inghilterra, ? – Parigi 1256)

Il cognome con cui questo matematico inglese è noto è la traduzione latina del toponimo del suo luogo d'origine, che all'epoca si chiamava *Holywood*. Pubblicò nel 1250 il trattato ***De Sphaera Mundi***, nato dalla rielaborazione dell'***Almagesto*** di **Tolomeo**. L'opera fu diffusa in tutta Europa, conobbe moltissime edizioni manoscritte e a stampa, in diverse lingue; fino al Seicento fu il principale testo astronomico di riferimento. Sacrobosco fu frate agostiniano ed insegnò a Parigi.

La descrizione e l'uso dell'astrolabio (in immagini)

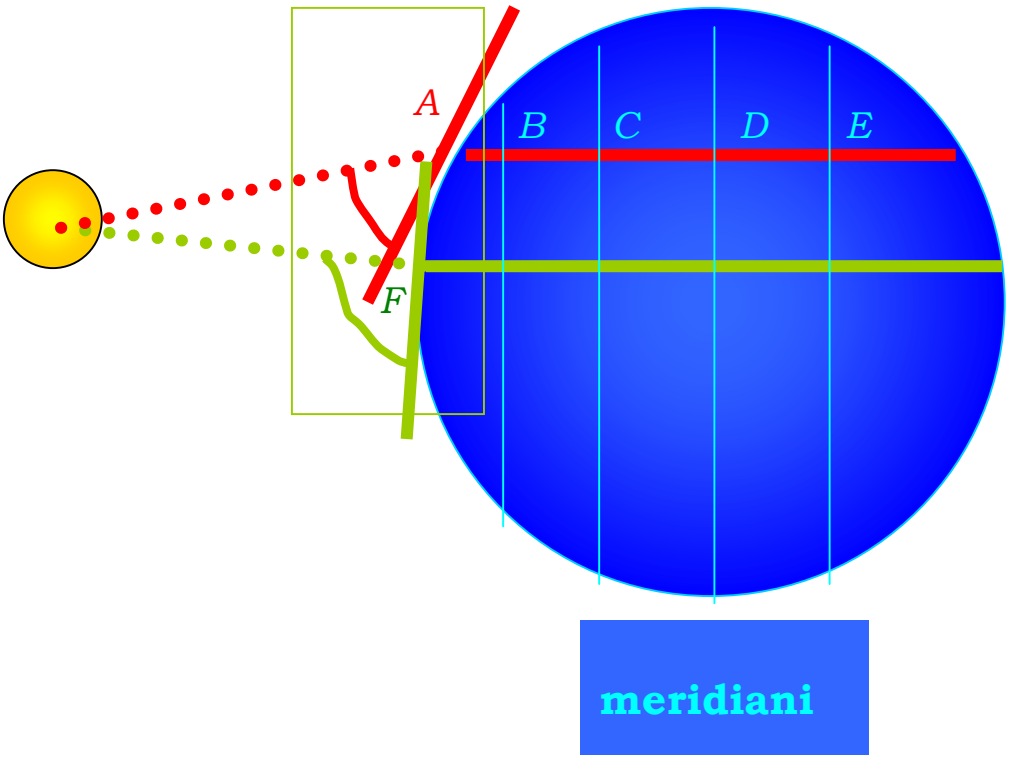


da un trattato tedesco del sec. XVI



Da un trattato olandese del sec. XVII

L'**astrolabio** permetteva di determinare l'altezza degli astri sull'orizzonte, da cui si poteva ricavare la latitudine: l'angolo sotto il quale appare il Sole a mezzogiorno, ad esempio, varia da un parallelo all'altro.



Gli angoli misurati nei punti *A* ed *F,* che si trovano rispettivamente sul parallelo rosso e su quello verde, sono diversi. Per ovvi motivi di simmetria, lo stesso angolo misurato in *A* si ritrova, a mezzogiorno, spostandosi lungo il parallelo rosso, nei punti *B, C, D, E, F*. Dunque l'altezza del Sole non ci permette di sapere su quale meridiano ci troviamo. Non a caso, per molti secoli, la **determinazione della longitudine** ha costituito un grande problema per i naviganti.

François Viète (Vieta) (1540 -1603)



A questo matematico francese, a volte citato come Francesco Vieta, dobbiamo una completa rielaborazione del linguaggio algebrico.
Tra le innovazioni più significative contenute nel suo scritto ***"In artem analyticem isagogé"*** del 1591, sono fondamentali:
- la **legge di omogeneità,** secondo la quale non sono confrontabili grandezze geometriche che hanno un numero diverso di dimensioni;
- il **sistema notazionale,** che segna il passaggio definitivo dall'**Algebra sincopata** all'**Algebra simbolica**. Per la prima volta si considerano equazioni algebriche con coefficienti costituiti da lettere e non da numeri e si formulano in tutta generalità le regole che ne determinano la soluzione. Viète indicava le quantità note con le consonanti, e le incognite con le vocali. Questo particolare simbolismo verrà ripreso e modificato da **Descartes**.
L'opera del Viète è scritta in modo assai rigoroso dal punto di vista matematico, ma in uno stile piuttosto oscuro e per questo motivo fu compresa da pochi e non ebbe tra i suoi contemporanei la fortuna che avrebbe meritato di avere.

Curiosità Viète è ricordato come il primo decrittatore della storia: sotto re Enrico IV di Borbone decifrò le lettere in codice inviate dagli spagnoli ai cattolici francesi.

La risoluzione approssimata delle equazioni algebriche

La classificazione dell'algebra secondo Nesselmann