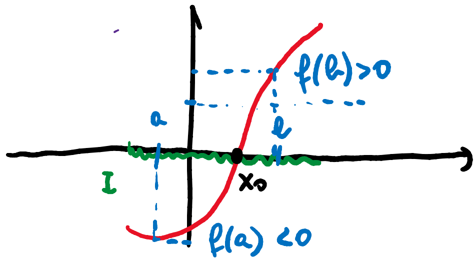
MATEMATICA - LEZIONE 18

lunedì 6 novembre 2023 09:03

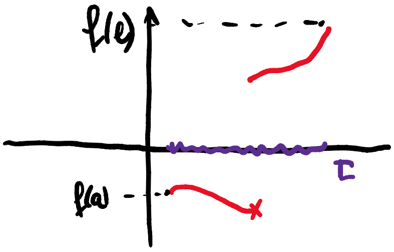
Teoremi sulle funzioni continue.

TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in I. Siano $a, b \in I$ tali che $a < b$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.



la continuità è necessaria:



f non è continua e non ci sono zeri.

Il teorema è utile per dimostrare l'esistenza di soluzioni di equazioni che non si riescono a risolvere esplicitamente.

ESEMPIO

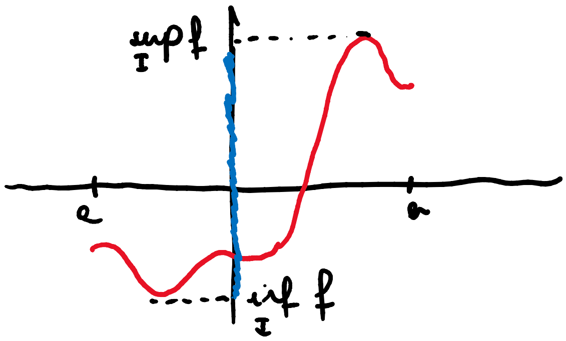
Consideriamo l'equazione $e^x + x - 2 = 0$. Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x - 2$.

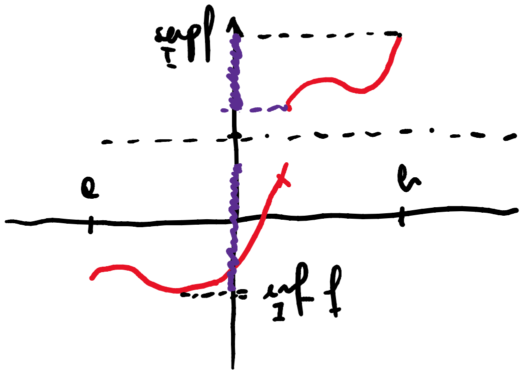
$$f(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$$
$$f(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 0$$

f è continua perché somma di funzioni continue.
Per il teorema degli zeri $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0$.
Quindi esiste una soluzione dell'eq.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora $\forall \alpha \in (\inf_I f, \sup_I f)$ $\exists x_0 \in I$ t.c. $f(x_0) = \alpha$ (cioè f assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$)





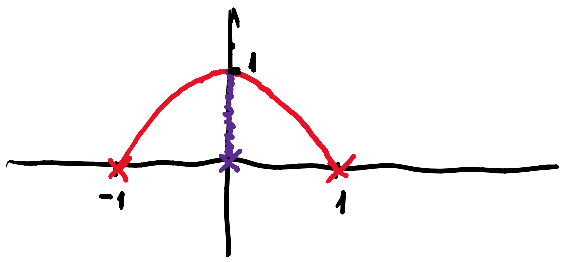
α $f(x)=\alpha$ non ha soluzioni.

OSS Sotto le ipotesi del teorema, $f(I)$ è un intervallo. Più precisamente: $(\inf_I f, \sup_I f) \subseteq f(I) \subseteq [\inf_I f, \sup_I f]$

ESEMPIO

$$f: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 1 - x^2$$

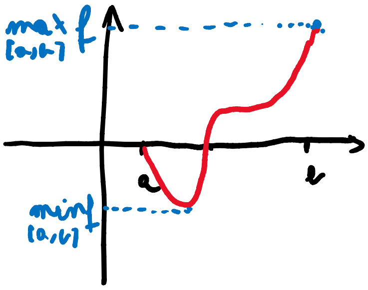
$$f((-1,1)) = (0, 1]$$



Intervallo chiuso e limitato.

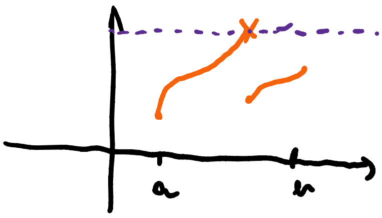
TEOREMA DI WEIERSTRASS

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$. Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora $\exists \max_{[a,b]} f$ e $\min_{[a,b]} f$.



Tutte le ipotesi sono necessarie:

- Il teorema non vale se f non è continua.



$\sup_{[a,b]} f$ non è un max.

- Se l'intervallo non è chiuso il teorema non vale:

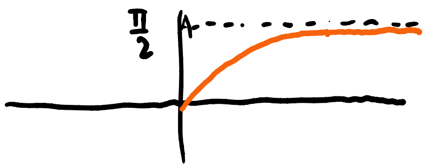
$$f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 1 - x^2$$

$$f((-1,1)) = (0, 1]$$

non c'è un minimo.

- Il teorema non vale se l'intervallo non è limitato

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \arctan x$$



$$f([0, +\infty)) = [0, \tfrac{\pi}{2})$$

$\nexists \max_{[0,+\infty)} f$.

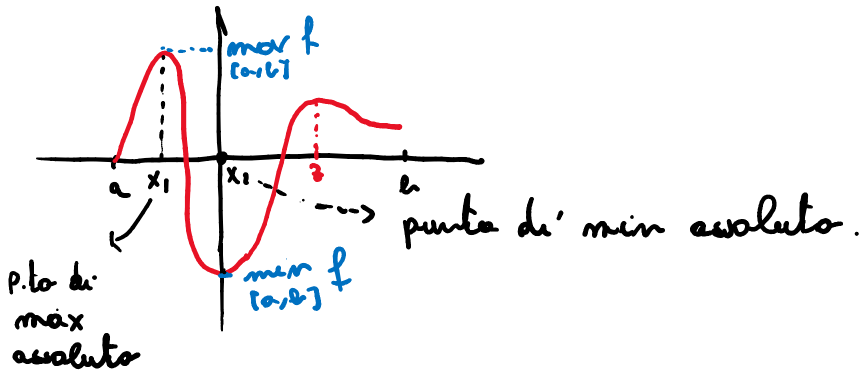
OSS Sotto le ipotesi del teorema di Weierstrass si può dire che $\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f \qquad e \qquad f(x_2) = \max_{[a,b]} f$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in A$.

Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per f in A se $f(x_0) = \min_A f$ (cioè $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in A$).

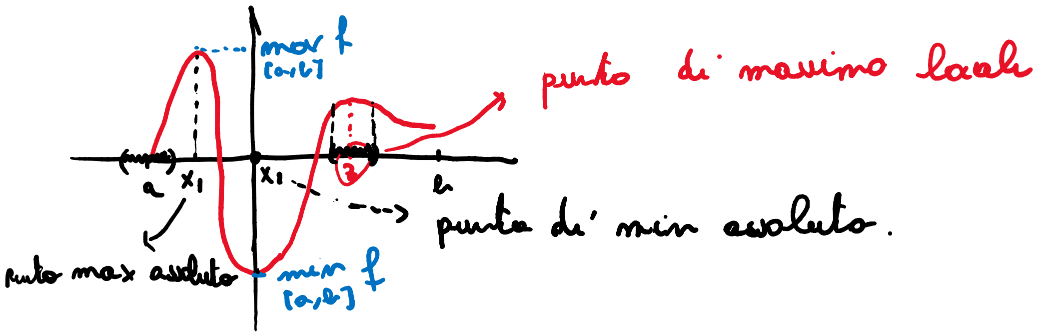
Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO per f in A se $f(x_0) = \max_A f$ (cioè $f(x_0) \ge f(x)$ $\forall x \in A$).



Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$.

Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO LOCALE PER f IN A se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in A \cap U$.

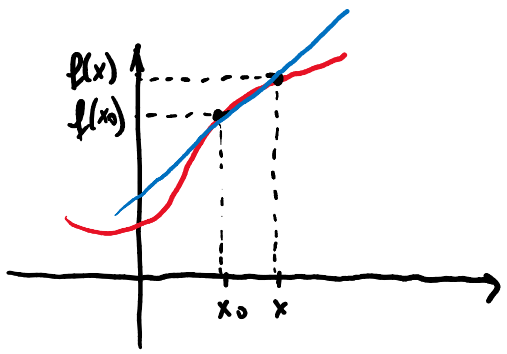
Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER f in A se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x_0) \ge f(x)$ $\forall x \in A \cap U$



a e b sono punti di minimo locale.

Derivate.

Idea: Vogliamo definire "la pendenza" del grafico di una funzione in un punto.



La retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ ha equazione

$$y = mx + q \quad \text{con}$$

$$\begin{cases} f(x_0) = m x_0 + q \\ f(x) = m x + q \end{cases}$$

Quindi $f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$

cioè $m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Def: La quantità $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice RAPPORTO INCREMENTALE di f nell'intervallo di estremi x_0 e x. Rappresenta la pendenza della retta secante il grafico di f nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Per definire la pendenza del grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ dovremo calcolare $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in A \cap D(A)$. Si dice che f è DERIVABILE in x_0 se esiste finito il limite

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. In tal caso tale limite si dice DERIVATA di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

OSS 1

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{h = x - x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

OSS 2

Molto spesso il punto x_0 in cui si calcola la derivata si indica con x e non con x_0. In tal caso:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ci sono tanti modi per indicare la derivata:

$$f'(x), \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad \dot{f}(x), \quad f^{(1)}(x), \quad (f(x))'$$

Interpretazione geometrica della derivata

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap Dr(A)$. Se f è derivabile in x_0 definiamo RETTA TANGENTE al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ la retta di equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

OSS Tra tutte le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$ la retta tangente, se esiste, è quella che approssima meglio il grafico di f. Cioè se $m, q \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (mx+q)}{x-x_0} = 0 \iff \begin{cases} m = f'(x_0) \\ q = -f'(x_0)x_0 + f(x_0)\end{cases}$$

<u>Ricordare</u>: la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap D_R(A)$.
Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

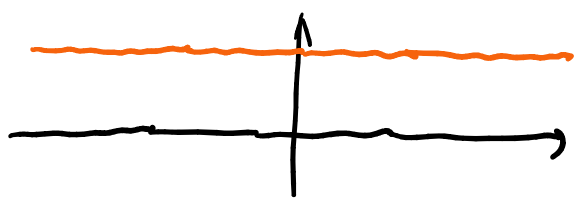
<u>DIM</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

<u>Derivate di alcune funzioni elementari</u>

1) Funzioni costanti

$f'(x) = c$

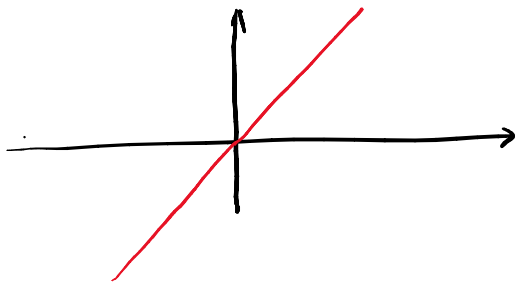


$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

<u>Ricordare</u>:

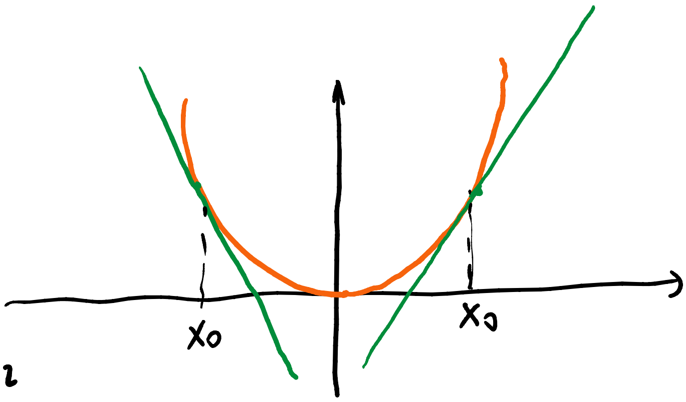
- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(c)' = 0$

2) $f(x) = x$



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

3) $f(x) = x^2$



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Ricordare :

- $f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$
- $(x^2)' = 2x$

4) $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che $x > 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h \cdot \frac{x}{x}} = \lim_{h \to 0} x^{\alpha - 1} \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}}_{\to \alpha}$$

$$= x^{\alpha - 1} \cdot \alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Ricordare: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

ESEMPIO

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^{\frac{5}{4}})' = \frac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}}$

$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

· OSS

· Se $\alpha \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f(x) = x^\alpha$ è definita in $\mathbb{R}$ e
$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

· Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, allora
$f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

· Se $f(x) = \sqrt[m]{x^n}$ e $M.C.D(m,n) = 1$ allora

$f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} = \frac{n}{m} \sqrt[m]{x^{n-m}}$ $\forall x \neq 0$ per cui la funzione è definita.

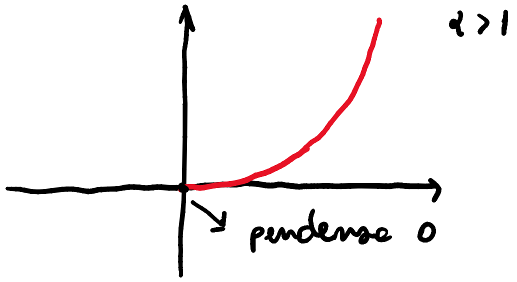
OSS 2

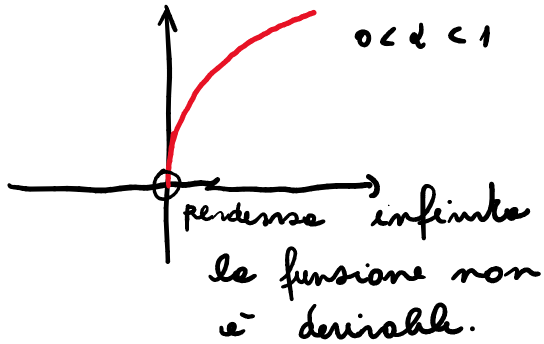
· Se $x = 0$, $f(x) = x^\alpha$ è definita in $x=0$ solo se $\alpha > 0$.
In tal caso:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ ? & \alpha < 1 \end{cases}$$

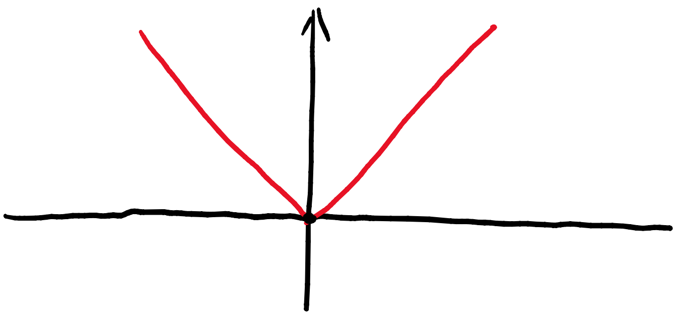
Se $0<\alpha<1$: $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$

$f(x) = x^\alpha$ non è derivabile in 0 se $0<\alpha<1$





5) $f(x) = |x|$



f è derivabile in 0?

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists \quad \text{perché}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{ma} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Quindi f non è derivabile in x.

Se $x \neq 0$, f è derivabile in x e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}.$$

oss $f(x) = |x|$ è un esempio di funzione continua ma non derivabile in un punto del suo dominio.

6) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x} \frac{(e^{h} - 1)}{h}$$

$$= e^{x} \cdot 1 = e^{x}.$$

7) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

Ricordare:

$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \underbrace{\frac{(\cos h - 1)}{h}}_{?} + \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \cos x$$

$$= \lim_{h \to 0} - h \sin x \frac{1 - \cos x}{h^{2}} + \frac{\sin h}{h} \cos x$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

7) $f(x) = \cos x$, $f'(x) = - \sin x$

Ricapitoliamo:

$(c)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$(e^{x})' = e^{x}$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x} \qquad \text{se } x \neq 0.$$