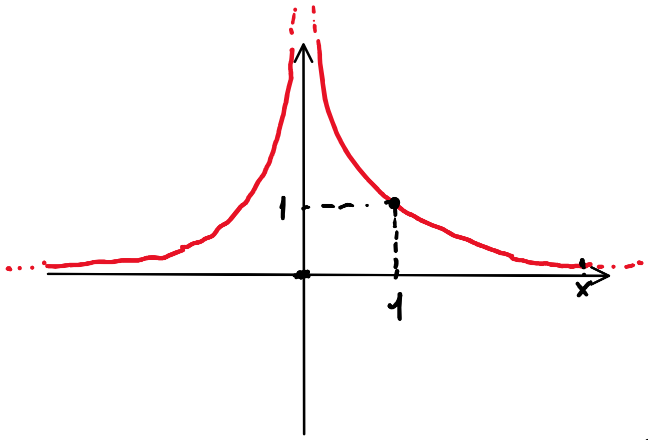
MATEMATICA - LEZIONE 18

mercoledì 29 ottobre 2025 09:03

Limiti di funzioni



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

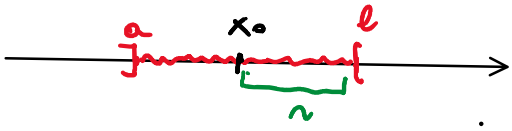
- Se x è molto grande ($x \to +\infty$) $f(x)$ si avvicina a 0.
- Se x si avvicina a 0, $f(x)$ si avvicina a $+\infty$.

OSS

Ogni intervallo $]a, b[$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ ha un CENTRO / PUNTO MEDIO e un RAGGIO:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$r = \frac{b-a}{2}$$



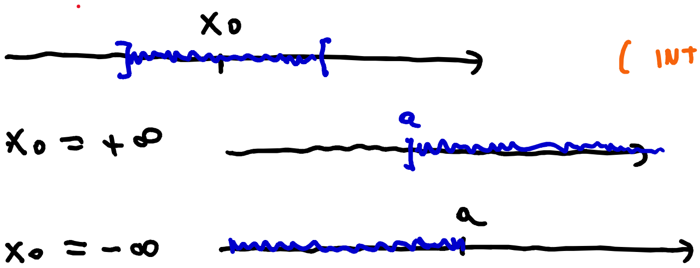
$$]a, b[=]x_0 - r, x_0 + r[$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

Def: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, un INTORNO (SFERICO) di x_0 è un qualsiasi intervallo aperto di centro x_0, cioè del tipo
$]x_0 - r, x_0 + r[$.

Def: Un INTORNO DI $+\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta del tipo:
$]a, +\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$.

Un INTORNO DI $-\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta del tipo $]-\infty, a[$ con $a \in \mathbb{R}$.



(INTORNO DI x_0)

$x_0 = +\infty$ (INTORNO DI $+\infty$)

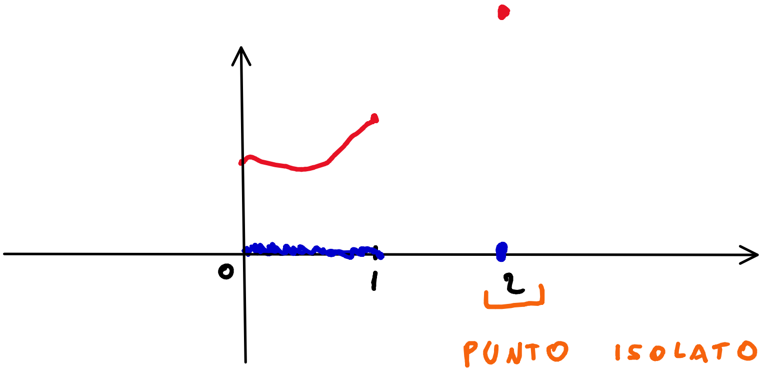
$x_0 = -\infty$ (INTORNO DI $-\infty$)

<u>Notazione</u>: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è detto AMPLIAMENTO DI $\mathbb{R}$.

Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ indichiamo con $\mathcal{I}_{x_0}$ l'insieme di tutti gli intorni di x_0

Punti di accumulazione e punti isolati

$A = [0, 1] \cup \{2\}$ e $f: A \to \mathbb{R}$



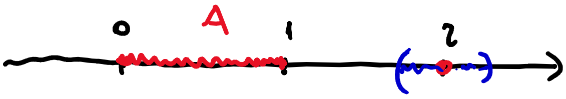
PUNTO ISOLATO DEL DOMINIO

Non ha senso chiedersi cosa succede per $x \to x_0$

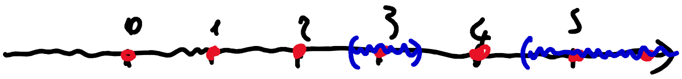
Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di A. L'insieme dei punti di accumulazione per A si indica con $\mathcal{D}(A)$ (DERIVATO DI A).

ESEMPI

- $A =]a, b[\implies \mathcal{D}(A) = [a, b]$
- $A =]2, 3] \implies \mathcal{D}(A) = [2, 3]$
- $A =]-\infty, 7[\implies \mathcal{D}(A) = [-\infty, 7]$
- $A = [0, 1] \cup \{2\} \implies \mathcal{D}(A) = [0, 1]$



- $A = \mathbb{N}$. $\mathcal{D}(A) = \{+\infty\}$



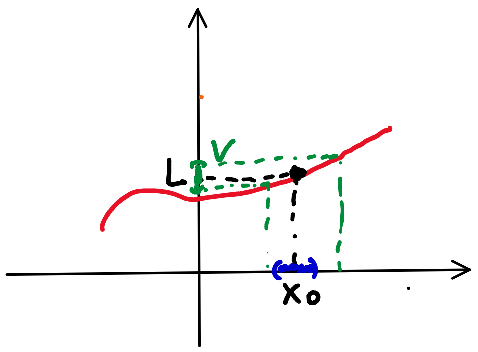
Def: Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D_r(A)$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che

L È IL LIMITE PER x CHE TENDE A x_0 (o che $f(x)$ TENDE AD L PER x CHE TENDE A x_0)

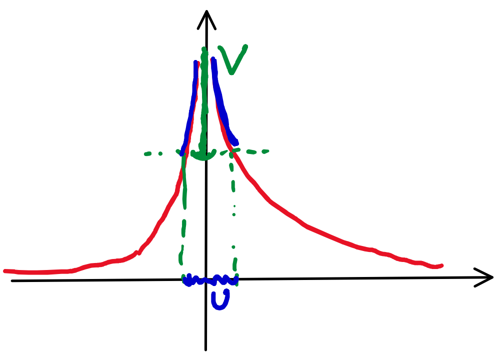
se: $\forall\, V \in \mathcal{D}_L \quad \exists\, U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c.

$\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}: \quad f(x) \in V$

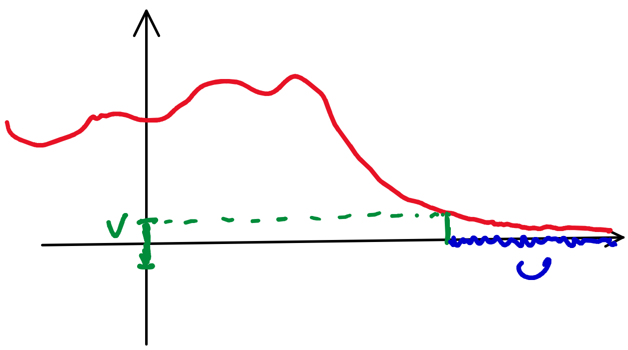
(Notazione: si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ o che $f(x) \longrightarrow L$ per $x \to x_0$)



Se $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$
$f(x) \in V$



$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

TEOREMA (UNICITÀ DEL LIMITE)

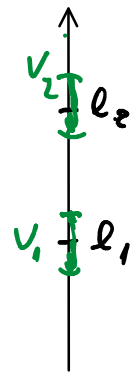
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D_r(A)$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Se esiste il limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ allora esso è unico.

DIM Supponiamo per assurdo che $\exists\ l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ $l_1 \neq l_2$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$.

Poiché $l_1 \neq l_2$ $\exists\ V_1 \in \mathcal{D}_{l_1}$, $V_2 \in \mathcal{D}_{l_2}$ t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Per definizione di limite $\exists\ U_1, U_2 \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c.

1) $\forall x \in U_1 \cap A \setminus \{x_0\}$: $f(x) \in V_1$

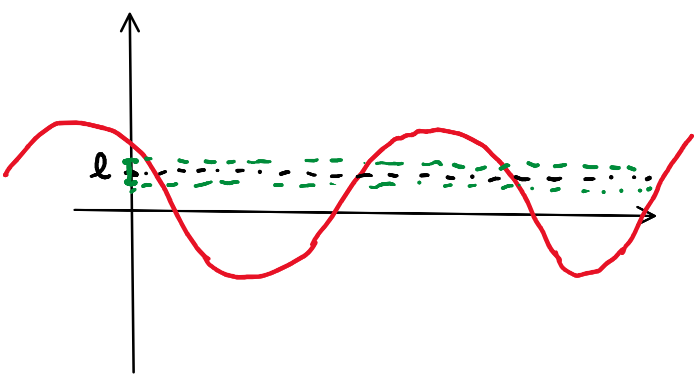
2) $\forall x \in U_2 \cap A \setminus \{x_0\}$: $f(x) \in V_2$.



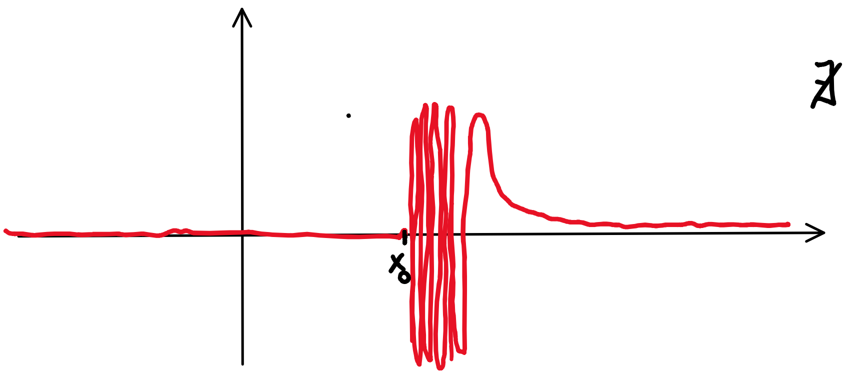
Sia $U = U_1 \cap U_2$ allora $U \in \mathcal{D}_{x_0}$ e $\forall x \in U \cap A$: $f(x) \in V_1 \ \wedge\ f(x) \in V_2$

Allora $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ASSURDO.

Può succedere che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$. Ad esempio: per funzioni che oscillano tra due valori distinti:

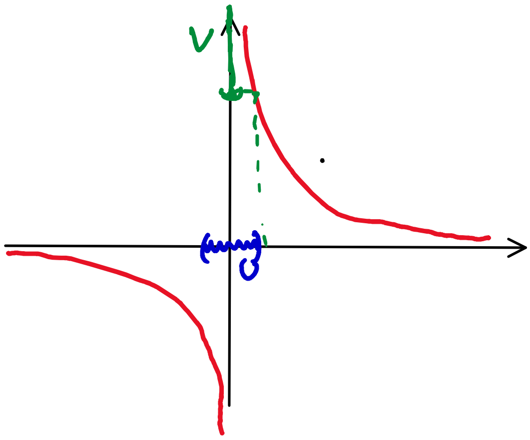


$\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$.



$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

Per $x \to 0$ il comportamento di $f(x)$ è differente alla destra e alla sinistra di 0.

Per queste situazioni introduciamo le definizioni di limite destro e sinistro

<u>Def</u>: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA (oppure un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DESTRO) per A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di $A \cap]x_0, +\infty[$.

(L'insieme dei punti di accumulazione da destra si indica con $D_r^+(A)$)

Analogamente x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di $A \cap]-\infty, x_0[$.
(L'insieme dei punti di accumulazione da sinistra per A si indica con $D_r^-(A)$)

ESEMPIO

$A = [0, 7]$ (oppure $A =]0,7[$, $[0,7[$ e $]0,7]$)

$D_r^+(A) = [0, 7[$ e $D_r^-(A) =]0, 7]$

$D_r(A) = [0, 7]$

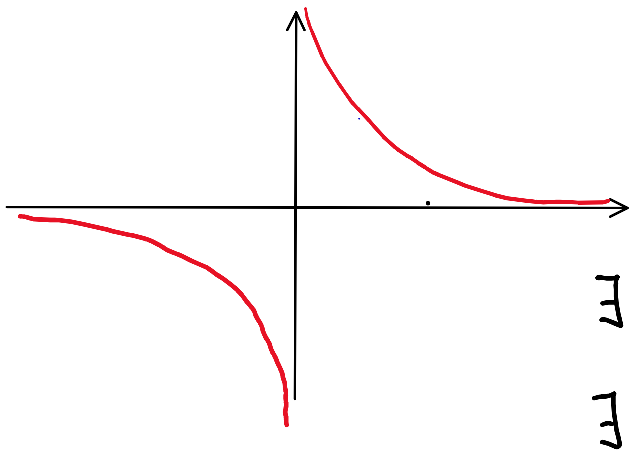
Def: Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_r^+(A)$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che L è il LIMITE DESTRO di $f(x)$ per x che tende a x_0 se (o LIMITE DA DESTRA di $f(x)$ per x che tende a x_0)

$\forall V \in \mathcal{D}_L \ \exists U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap A \cap]x_0, +\infty[$: $f(x) \in V$. (si scrive: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$)

Analogamente, se $x_0 \in D_r^-(A)$ si dice che L è il LIMITE SINISTRO di $f(x)$ per x che tende a x_0 se:

$\forall V \in \mathcal{I}_L \ \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap A \cap]-\infty, x_0[$ $f(x) \in V$.

ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{x}$.



Abbiamo detto che $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ ma

$\exists \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e

$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

OSS: Sia $x_0 \in D_r^+(A) \cap D_r^-(A)$.

1) Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ allora

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ e $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

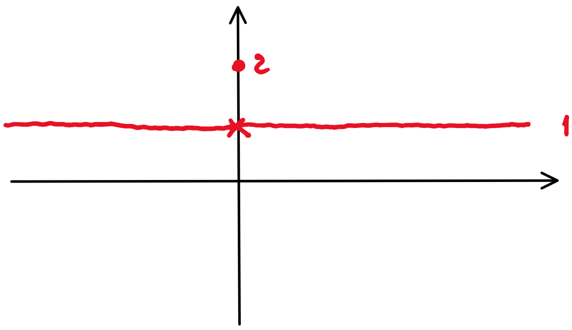
2) Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ o se uno dei due limiti non esiste, allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

3) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Nota: Il limite non vede mai il valore di $f(x)$ nel punto x_0 (ammesso che $x_0 \in A$).

ESEMPI

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



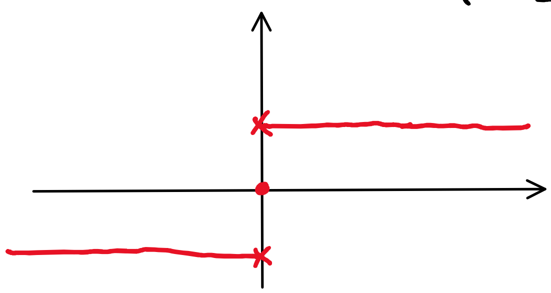
$f(0) = 2$ ma

$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\exists \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



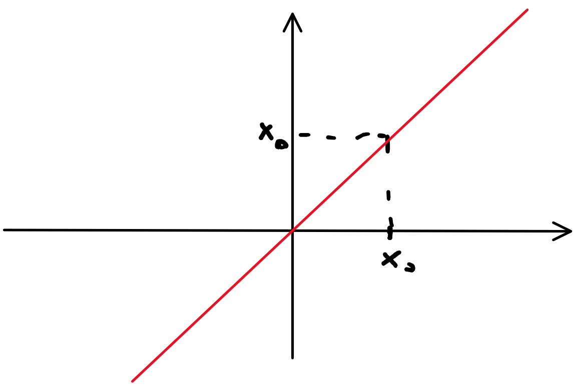
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

ma $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

Limiti di alcune funzioni elementari

1) $f(x) = x$

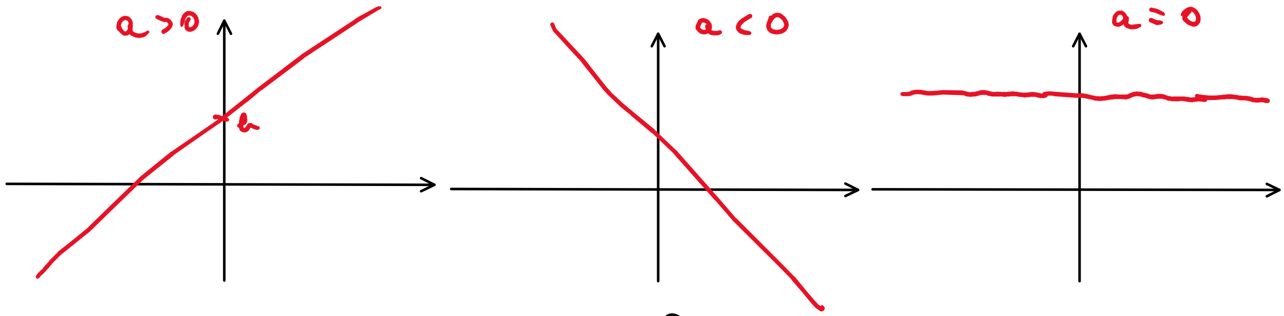


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

2) $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a x_0 + b \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} ax + b = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \\ b & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

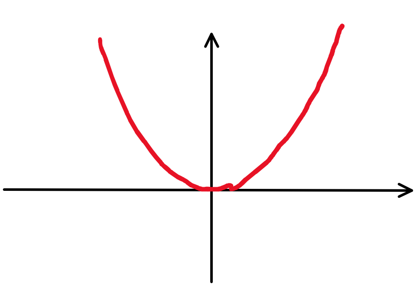
3) Potenze Naturali

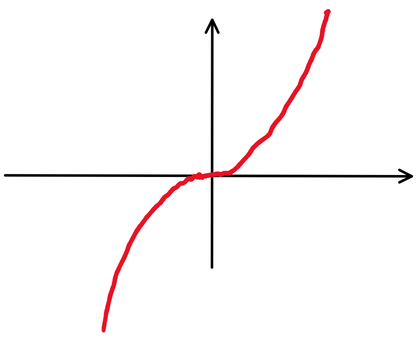
$f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ se $x_0 \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

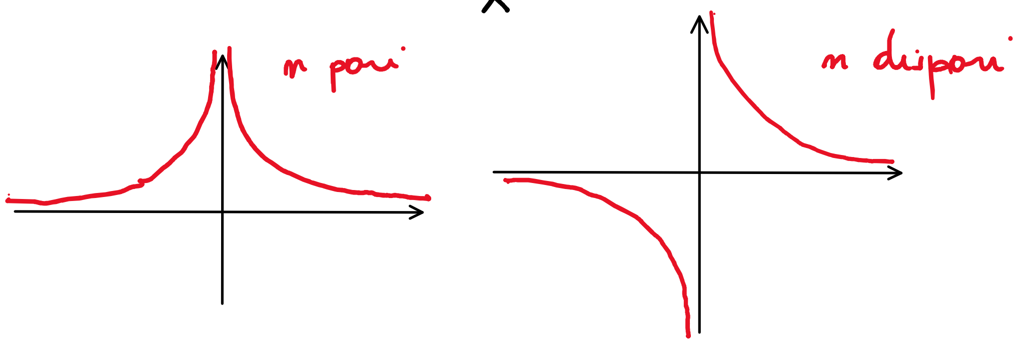
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$





4) Potenze intere negative

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

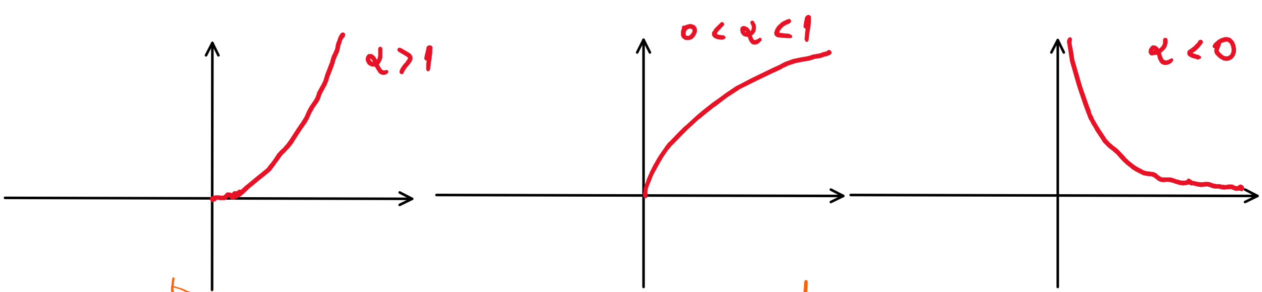


- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \nexists & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

(perché $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$)

5) Potenze Reali

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$



In questi due casi i limiti sono gli stessi

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$: $\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$
- Se $x_0 = +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$
- Se $x_0 = 0$: $\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

OSS Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

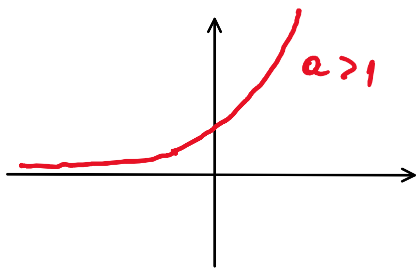
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b} f(x)$$

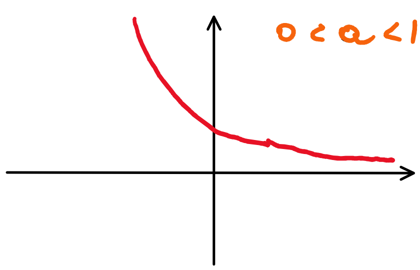
ESEMPI

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x \to +\infty} x^{-\frac{4}{3}} = 0$$

6) Esponenziali: $f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.





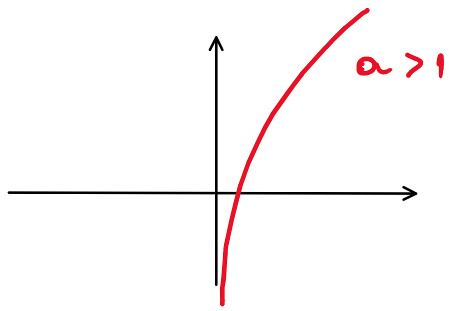
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$
- Se $x_0 = +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$
- Se $x_0 = -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1. \end{cases}$

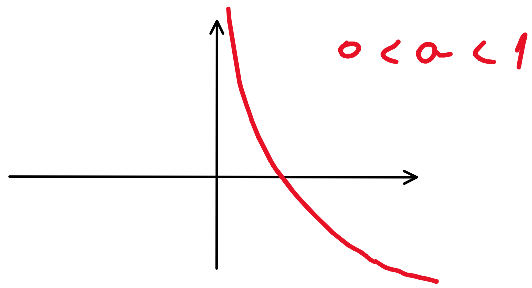
7) Logaritmi

$$f(x) = \log_a x \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Nota :

$\mathrm{Dom}(f) =]0, +\infty[$. $\mathrm{Dr}(]0, +\infty[) = [0, +\infty]$

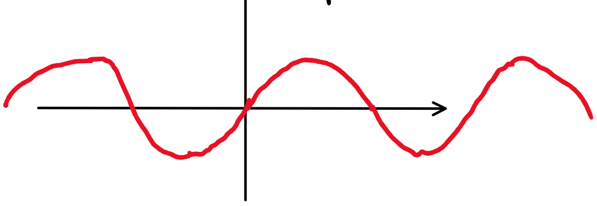


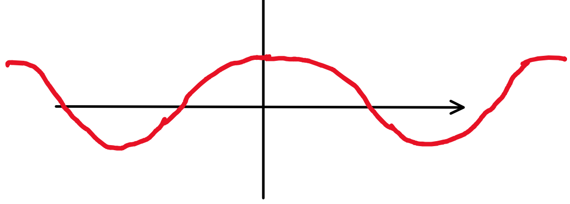


- Se $x_0 \in]x_0, +\infty[$: $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$
- Se $x_0 = +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
- Se $x_0 = 0$: $\lim_{x \to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

8) Funzioni seno e coseno

$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f(x) = \cos$





- Se $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

  $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

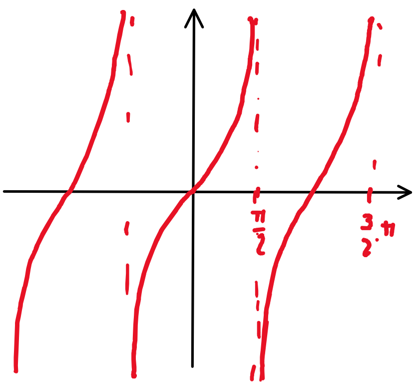
- Se $x_0 = \pm\infty$

  $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin x$ e $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$

9) Tangente

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$



- Se $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$: $\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$
- Se $x_0 = \pm\infty$ $\quad \nexists \lim_{x \to \pm\infty} \tan x$

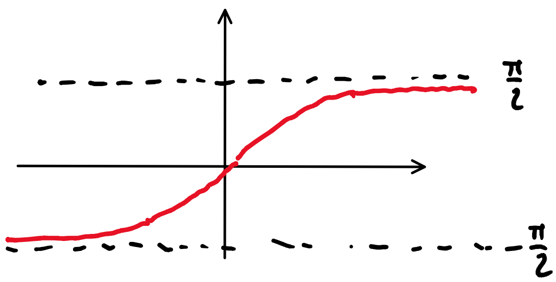
- Se $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \tan x = +\infty$$

10) Arcotangente

$f(x) = \arctan x$



$$\lim_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

11) Arcsin e arccos

Se $f(x) = \arcsin x$ o $f(x) = \arccos x$

$\text{Dom}(f) = [-1, 1]$ ($[-1, 1]$ è chiuso)

$\text{Dr}(\text{Dom}(f)) = [-1, 1]$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in [-1, 1].$$