CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2018/19

Appello del 28 gennaio 2019

1. Sia n un intero positivo. Si consideri l'insieme

$$H = \{\sigma \in S_{2n} \mid \sigma(1) \neq 2\}.$$

(a) Determinare tutti i valori di n per i quali H è un sottogruppo di S_{2n}.
(b) Provare che H contiene un sottogruppo commutativo di S_{2n} avente ordine 2^{n-1}.
(c) Provare che H contiene un sottogruppo di S_{2n} avente ordine $(n!)^2$.

2. Dato un intero n maggiore di 1, si consideri l'applicazione

$$\varphi_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_n$, $\varphi_n(\alpha) = \alpha^2$.

(a) Determinare tutti i valori di n per i quali $\varphi_n^{-1}([0]_n) = \{[0]_n\}$.
(b) Determinare tutti i valori di n per i quali φ_n è surgettiva.

3. Sia $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Dato un primo positivo p, sia $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ la sua riduzione modulo p.

(a) Per $p = 5$ determinare una fattorizzazione di $\overline{f}(x)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.
(b) Determinare due primi $p > 5$ tali che $\overline{f}(x)$ sia riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.