

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2023/24**

**Appello del 6 giugno 2024**

1. Sia data in  $S_{21}$  la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)(15, 16, 17, 18, 19, 20, 21).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di  $S_{21}$  :

$$C(\sigma) = \{ \alpha \in S_{21} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha \}.$$

- (a) Determinare un sottogruppo di  $C(\sigma)$  avente ordine 210.
- (b) Dire se  $C(\sigma)$  è abeliano.

2. Dato un intero  $n$ , sia  $N = n^3 + 2n^2 - n - 2$ . Determinare gli insiemi degli  $n$  per i quali

- (a)  $\text{MCD}(N, 450) = 2$ ;
- (b)  $N^{3456} \equiv 1 \pmod{3}$ ;
- (c)  $N^{98765} \equiv 2 \pmod{5}$ .

3. Dato un numero primo  $p > 0$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{p^2-1} + x^{2p},$$

$$g(x) = x^p - x.$$

- (a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .
- (b) Determinare, al variare di  $p$ ,  $\text{MCD}(f(x), g(x))$ .