

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2023/24

Appello del 6 giugno 2024

1. Sia data in S_{21} la permutazione

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)(15, 16, 17, 18, 19, 20, 21).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{21} :

$$C(\sigma) = \{\alpha \in S_{21} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}.$$

- (a) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma)$ avente ordine 210.
(b) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

2. Dato un intero n , sia $N = n^3 + 2n^2 - n - 2$. Determinare gli insiemi degli n per i quali

- (a) $\text{MCD}(N, 450) = 2$;
(b) $N^{3456} \equiv 1 \pmod{3}$;
(c) $N^{98765} \equiv 2 \pmod{5}$.

3. Dato un numero primo $p > 0$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2-1} + x^{2p},$$
$$g(x) = x^p - x.$$

- (a) Determinare, al variare di p , il numero delle radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .
(b) Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(f(x), g(x))$.