CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2021/22

<u>Appello del 2 novembre 2022</u>

1. Sia data, in S_{10}, la permutazione

$$\sigma = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10).$$

(a) Determinare due distinti sottogruppi H e K di S_{10} aventi ordine 8 e tali che $H \cap \langle \sigma \rangle$ e $K \cap \langle \sigma \rangle$ non siano il sottogruppo banale.

(b) Determinare un sottogruppo L di S_{10} avente ordine 24 e tale che $L \cap \langle \sigma \rangle$ non sia il sottogruppo banale.

(c) Dire se il centralizzante di σ^5 (il sottogruppo formato dagli elementi di S_{10} che commutano con σ^5) è un gruppo ciclico.

2. Dati gli interi n ed m maggiori di 1, si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_n, [b]_m) = [a+b]_n$.

(a) Determinare l'insieme delle coppie (n, m) per le quali φ è ben definita.

(b) Per tali coppie, determinare $\left|\varphi^{-1}([0]_n)\right|$.

(c) Per tali coppie, provare che $\varphi^{-1}([0]_n)$ è un sottogruppo ciclico di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

3. Dato un numero primo positivo p, si consideri il seguente polinomio di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3+p^2+p} + x^{p^2+p} + x^p + 1.$$

Determinare, al variare di p, il numero delle radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$.