

Esercizi sul calcolo dei limiti II.

Esercizi sulla gerarchia degli infiniti

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{\log_2 x} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} - \underbrace{x^3}_{+\infty} + \underbrace{\arctan x}_{\frac{\pi}{2}} = \quad \left(\text{molto in evidenza l'infinito di ordine superiore} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \underbrace{\left(\frac{x^3}{e^x} \right)}_0 + \underbrace{\left(\frac{\arctan x}{e^x} \right)}_0 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

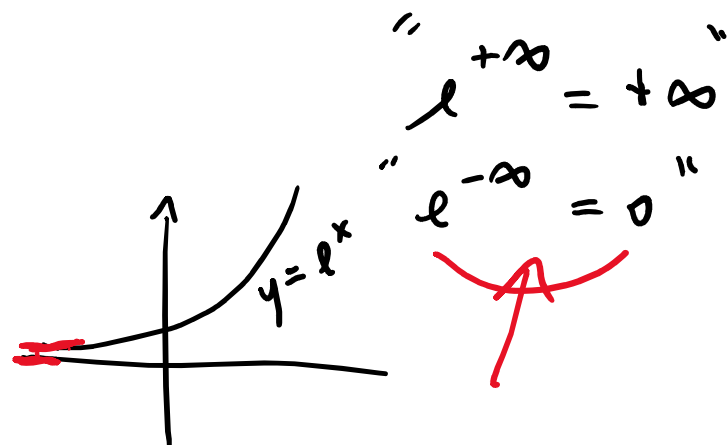
$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \underbrace{x^3}_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x^3} \right)}_0 - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\underbrace{x^3}_{+\infty} + \log_2 x}{\underbrace{x^2}_{+\infty} + 5x + \underbrace{e^{-x}}_0} = \frac{8}{3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \underbrace{\left(\frac{\log_2 x}{x^3} \right)}_0 \right)}{x^2 \left(1 + \underbrace{\left(\frac{5}{x} \right)}_0 + \underbrace{\left(\frac{e^{-x}}{x^2} \right)}_0 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$



$$\frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{1}{e^x \cdot x^2} \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} + x^3}{\log|x| + e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} \left(1 + \frac{x^3}{3^{-x}}\right)}{\log|x| \left(1 + \frac{e^x}{\log|x|}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x}}{\log|x|} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3^y}{\log y} = +\infty$$

$y = -x$
 $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

Confronto tra infinitesimi

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{\sqrt{x} + x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 + \frac{x^4}{x^2}\right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)}$$

$x^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2 - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3} = 0$$

At.
per $x \rightarrow 0$
contano le
potenze di grado
inferiore!

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \sin x}{\sqrt{x} + x^5} \left(\frac{0}{0}\right)$$

= 0

(metta in evidenza)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \left(1 + \frac{x^3}{\sin x} \right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{x^3}{\sqrt{x}} \right)}$$

(metto in evidenza gli infinitesimi "più lenti")

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^1 \cdot x^2}{\sin x} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Esercizi sui limiti notevoli.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x \cdot x} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x^2} = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^2 \cdot x^3} = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 1$$

(sostituisce $y = x^3$)

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$y = x - 2$
 $x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cdot \tan x}{x^3} =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\tan x}{x \cdot x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+x^3)}{x^3} = 0$$

$$\left(\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} &= \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{aligned} \right)$$

$y = x^3$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{5x} \cdot \sin 5x}{\cancel{5x} \ln(1+x)} = 5$$

Nei precedenti, in alternativa a moltiplicare e dividere, usando il principio di sostituzione delle funzioni asintoticamente equivalenti nei prodotti e nei quozienti, possiamo semplicemente effettuare la sostituz. degli infinitesimi equivalenti.
Ad es., nel precedente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{5x}}{\cancel{x}} = 5.$$

$$\sin 5x \sim 5x \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 \cdot \log(1+2x)}{x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 \cdot \log(1+2x)}{\tan x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \sin x^3 &\sim x^3 \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \log(1+2x) &\sim 2x \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \tan x^2 &\sim x^2 \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin 2x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2x}{\frac{1}{2}x^2} = 4$$

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \sin 2x &\sim 2x \text{ per } x \rightarrow 0 \\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2 \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = d \right)$$

$$\text{per } d = \frac{1}{3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1) \tan x^3}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln 3 \cdot x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln 3 = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \right)$$

$$3^x - 1 \sim x \cdot \ln 3 \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \tan x^3 &\sim x^3 \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \sin x &\sim x \end{aligned}$$

Qualche esercizio con le funz. irrazionali:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x + 3}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)}}{\sqrt[3]{x^3 \left(5 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ a, b \geq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}}{x \cdot \sqrt[3]{5 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{5}{x^2} \right)} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt[3]{5 + \left(\frac{4}{x} \right) + \left(\frac{3}{x^2} \right)} \right)} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

Se fosse stato $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \cdot \sqrt{\dots} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \cdot \sqrt{\dots}$$

Per esercizio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 2x + 4}}{\sqrt[3]{x^2 - 3x}} \quad (= +\infty)$

$$x^{\frac{5}{2}} \sqrt{1 + \dots}$$

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \dots}$$

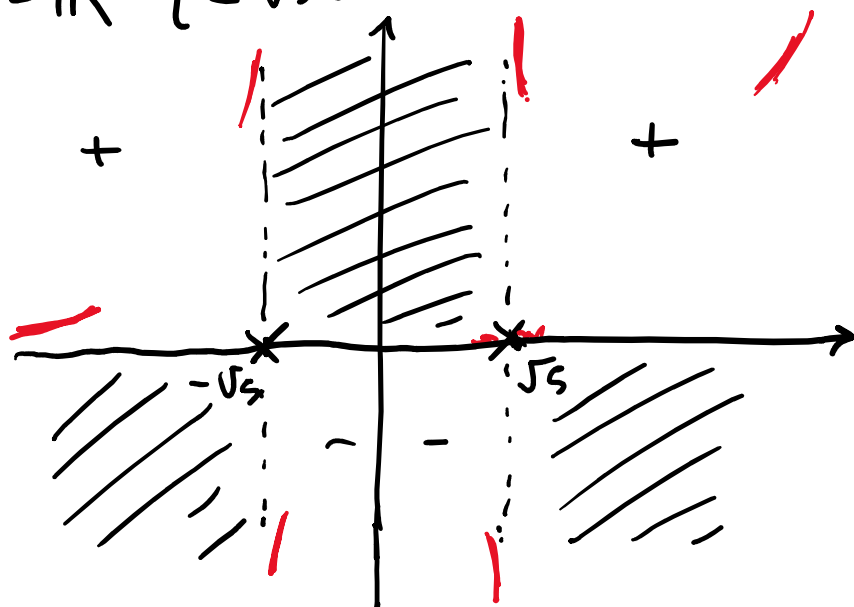
Determinare di dominio, segno ed eventuali asintoti di una funzione.

$$1) f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 5}$$

$$D: x^2 - 5 \neq 0$$

$$x^2 \neq 5 \quad x \neq \pm \sqrt{5}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm \sqrt{5}\}$$



Per determinare il dominio, ricorda:

- denominatori $\neq 0$
- radicandi di radici di indice pari ≥ 0
- argomento del logaritmo > 0
- argomento della tangente $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- argomento di arcoseno e arccos compreso tra -1 e 1

$$Zeri: f(x) = 0$$

$$\frac{e^x}{x^2 - 5} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad e^x = 0 \quad (\forall x \in D)$$

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Segno: } f(x) > 0$$

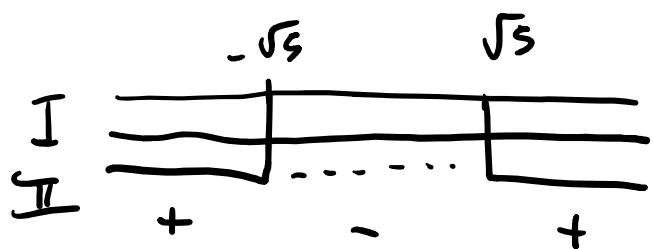
$$\frac{e^x}{x^2 - 5} > 0$$

II

$$I: e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\pi: x^2 - 5 > 0 \quad x^2 > 5 \quad x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$$

$$\text{II: } x^2 - 5 > 0 \quad x^2 > 5 \quad x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5},$$



$$f(x) > 0 \quad \text{per } x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per } -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}.$$

limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 5} = +\infty \quad \text{(non c'è asint. orizz. dx)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 5} = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ e^x \cdot \frac{1}{x^2 - 5} \end{array} \right)$$

$y = 0$ è asintoto orizzontale dx

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^+} \frac{e^x}{x^2 - 5} = \left(\frac{e^{\sqrt{5}}}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}^-} \frac{e^x}{x^2 - 5} = \left(\frac{e^{\sqrt{5}}}{0^-} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}^+} \frac{e^x}{x^2 - 5} = \frac{e^{-\sqrt{5}}}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ le rette
 $x = \sqrt{5}$ e
 $x = -\sqrt{5}$
 sono asintoti
 verticali sia destra-
 che sinistra.

Asintoto obliquo destro?

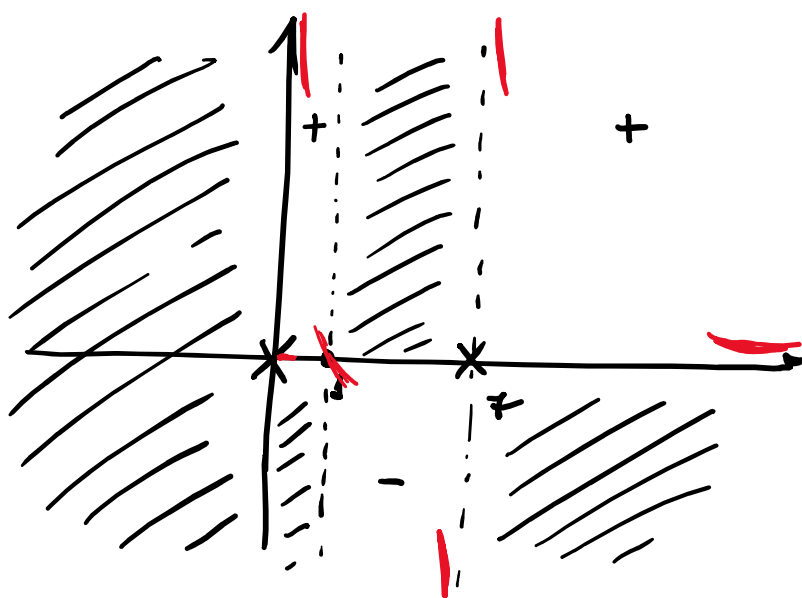
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2 - 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 - 5x} = +\infty$$

$\Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo.

$$2) f(x) = \frac{\log x}{|x| - 7}$$

$$D: \begin{cases} |x| - 7 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| \neq 7 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \pm 7 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$D =]0, +\infty[\setminus \{7\}$$



$$\text{zeri: } f(x) = 0$$

$$\frac{\log x}{|x| - 7} = 0 \quad (\Rightarrow \log x = 0 \quad (x \in D))$$

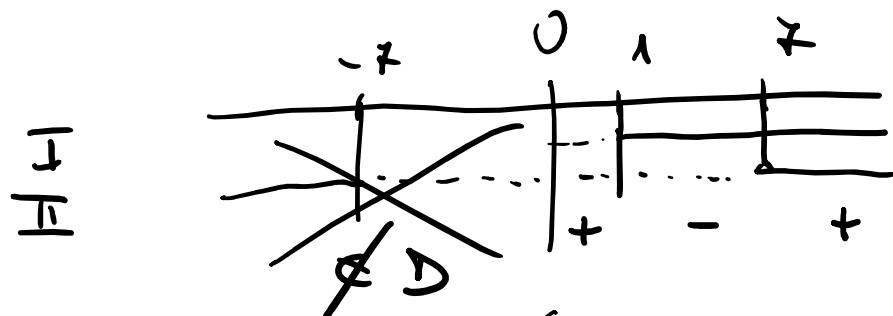
$$x = 1$$

$A(1, 0)$ è p.to di intersec.
con l'asse della x

$$\text{Segno: } \frac{\log x}{|x| - 7} > 0$$

$$I: \log x > 0 \quad x > 1$$

$$II: |x| - 7 > 0 \quad |x| > 7 \quad x < -7 \vee x > 7$$



Il dominio è $]0, +\infty[\setminus \{7\}$

7 -

(Oss. In realtà, poiché nel dominio risulta $x > 0$, nell'espressione di f si può eliminare il valore assoluto.)

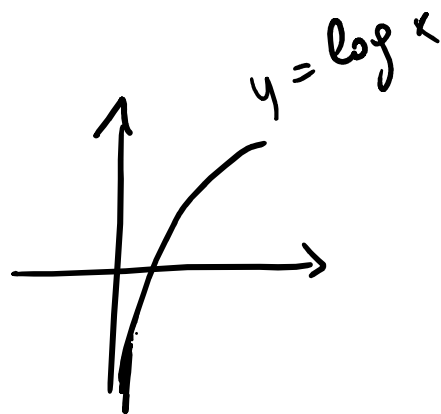
limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{|x| - 7} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ è asintoto orizz. di } x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{|x| - 7} = \frac{-\infty}{-7} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{\log x}{|x| - 7} = \frac{\log x^{>0}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{\log x}{|x| - 7} = \frac{\log x^{>0}}{0^-} = -\infty$$



la retta $x = 7$ è asintoto verticale di x e di x .

Per esercizio:

$$3) f(x) = e^{\frac{x+2}{x-3}}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
Asintoti: $x = 3$ asint. vert. di x
 $y = e$ asint. orizz. di x e di x

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

$D =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$
Asintoti: $y = x + \frac{5}{2}$ asint. obliquo di x ;
 $y = -x - \frac{5}{2}$ asintoto obliquo di x