

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2014/15**

**Appello del 26 gennaio 2015**

1. Siano date in  $S_{18}$  le seguenti due permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2)(3, 4)(14, 15, 16, 17, 18) \\ \tau &= (1, 4, 2, 3)(5, 6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13)\end{aligned}$$

- (a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .
- (b) Determinare un sottogruppo ciclico di  $S_{18}$  contenente  $\langle \sigma \rangle \cup \langle \tau \rangle$ .

2. Dato l'anello di matrici  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ , si consideri l'applicazione

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$$

$$\text{tale che, per ogni } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ([a]_3, [d]_7).$$

Sia inoltre  $B$  un sottoanello non banale di  $A$  tale che la restrizione di  $\varphi$  a  $B$  sia un omomorfismo di anelli.

- (a) Trovare  $B$  commutativo e dotato di unità.
- (b) Trovare  $B$  commutativo e privo di unità
- (c) Trovare  $B$  non commutativo.

3. Sia  $f(x) = 4x^7 + 3x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ .

- (a) Determinare una fattorizzazione di  $f(x)$  in  $\mathbb{Q}[x]$ .
- (b) Dire, giustificando la risposta, se la riduzione di  $f(x)$  modulo 3 si decompone in  $\mathbb{Z}_3[x]$  nel prodotto di fattori lineari.