$$y'' + by' + cy = 0$$

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = 0 \\ y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

<u>ES</u>

$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

RISOLVIAMO

$$y'' - 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

- $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 4$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - 2c_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 2 - 2c_2 - 2c_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ -4c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{3}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$y'' + by' + cy = g(x) \quad (*)$$

$g : I \to \mathbb{R}$ continua

la soluzione generale di $(*)$ è la somma della soluzione generale $y_0(x)$ di $y'' + by' + cy = 0$ e di una soluzione $y_p(x)$ di (*)

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Il problema è quindi calcolare $y_p(x)$

Noi usiamo il METODO DI SOMIGLIANZA

- $$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{x^2 + 5x - 1}$$

$g(x)$ è un polinomio di II grado

Considero prima l'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1, \quad \lambda = 2$$

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = x^2 + 5x - 1$$

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$

$$2Ax^2 + x(-6A + 2B) + 2A - 3B + 2C = x^2 + 5x - 1$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 5 \\ 2A - 3B + 2C = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ -3 + 2B = 5 \\ 1 - 3B + 2C = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 2B = 8 \Rightarrow B = 4 \\ 1 - 12 + 2C = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 4 \\ 2C = 10 \quad C = 5 \end{cases}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$$

Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}}_{y_0(x)} + \frac{1}{2}\underbrace{x^2 + 4x + 5}_{y_p(x)}$$

In generale, se $g(x)$ è un polinomio di grado n, si cerca $y_p(x)$ come un polinomio di grado n. TRANNE CHE NEL CASO IN CUI $\lambda = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica

. .

Se $\lambda = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità k $(k=1,2)$, allora

$$y_p(x) = x^k\, Q(x),$$ con $Q(x)$ polinomio di grado n.

$$y'' - y' = 3x^2 + 1$$

Equazione omogenea $\quad y'' - y' = 0$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \underline{\lambda = 0} \lor \lambda = 1$$

$$y_0(x) = c_1 e^0 + c_2 e^x = c_1 + c_2 e^x$$

Supponiamo di prendere (SBAGLIANDO)

$$\left[\begin{array}{l} y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \\ y_p'(x) = 2Ax + B \qquad y_p''(x) = 2A \\ 2A - 2Ax + B = 3x^2 + 1 \quad !! \end{array}\right] \text{No!}$$

La soluzione particolare corretta è

$$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_p''(x) = 6Ax + 2B$$

$$y_p''(x) - y_p'(x) = 3x^2+1$$

$$6Ax + 2B - \underbrace{3Ax^2} - 2Bx - C = 3x^2+1$$

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \\ -6 - C = 1 \end{cases}$$

$$C = -7$$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + x(-x^2 - 3x - 7)$$

$g(x) = e^{\gamma x}$, con γ t.c. $\gamma \neq 0$ che non è soluzione del polinomio caratteristico

$y_p(x) = K e^{\gamma x}$

(Es) $y'' + y = e^{3x}$

omogenea associata

$$y'' + y = 0$$

Equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$$

$y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$$y_p(x) = k e^{3x} \qquad y_p'(x) = 3k e^{3x}$$

$$y_p''(x) = 9k e^{3x}$$

$$y_p''(x) + y_p(x) = e^{3x}$$

$$9k \cancel{e^{3x}} + k \cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}}$$

$$10k = 1 \qquad k = \frac{1}{10} \qquad y_p(x) = \frac{1}{10} e^{3x}$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{10} e^{3x}$$

In generale, se $g(x) = e^{\gamma x}$, $\gamma \in \mathbb{R}^*$,

$y_p(x) = K e^{\gamma x}$, A MENO CHE γ non

sia soluzione del polinomio caratteristico di

molteplicità h. In tal caso

$$y_p(x) = K x^h e^{\gamma x}$$

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1$$

reale di molteplicità 2

$$y_p(x) = K x^2 e^x$$

$$y_p'(x) = K\left(2x e^x + x^2 e^x \right)$$

$$y_p''(x) = K\left(2e^x + 2x e^x + 2x e^x + x^2 e^x \right)$$

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = e^x$$

$$\cancel{K x^2 e^x} + \cancel{4K x e^x} + 2K e^x - \cancel{4K x e^x} - \cancel{2K x^2 e^x}$$

$$+ \cancel{K x^2 e^x} = e^x$$

$$2K e^x = e^x \Leftrightarrow 2K = 1 \qquad K = \frac{1}{2}$$

· Se $g(x) = P(x)\, e^{\gamma x}$. $\gamma \in \mathbb{R}$

(se $\gamma = 0$ $e^0 = 1$)

$P(x)$ polinomio di grado n

Allora, se γ NON è soluzione del polinomio caratteristico

$$y_p(x) = Q(x)\, e^{\gamma x}$$

$Q(x)$ polinomio di grado n

Se γ è soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità k, allora

$$y_p(x) = x^k\, Q(x)\, e^{\gamma x}$$

$$y'' - y = \cos x$$

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = \cos x$$

$$-2A\cos x - 2B\sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos x$$

$$y'' + y = \cos x + \sin x$$

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$$

$$y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

DEVO SCEGLIERE

$$y_p(x) = x\,(A \cos x + B \sin x)$$

$$y_p'(x) = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y_p''(x) = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x$$

$$+ x(-A \cos x - B \sin x)$$

$$y_p''(x) + y_p(x) = \cos x + \sin x$$

$$-A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x \cancel{- x(A \cos x + B \sin x)}$$

$$\cancel{+ x(A \cos x + B \sin x)} = \cos x + \sin x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x + \sin x$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

REGOLA GENERALE

$$g(x) = e^{\gamma x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$$

$P(x)$, $Q(x)$ polinomi

Se $\gamma \pm i\beta$ NON È SOLUZIONE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$$y_p(x) = e^{\gamma x}\left(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right)$$

$M(x)$ è un polinomio di grado il massimo

$N(x)$ tra il grado di $P(x)$

e $Q(x)$

- Se $\gamma \pm i\beta$ è soluzione del polinomio caratteristico

$$y_p(x) = x\, e^{\gamma x}\left(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right)$$

$$y'' + 4y = x + \cos x$$

$$y'' + by' + cy = g_1(x) + g_2(x) \qquad (*)$$

$y_p^1(x)$ SOLUZIONE PARTICOLARE DI

$$y'' + by' + cy = g_1(x)$$

$y_p^2(x)$ soluzione particolare di

$$y'' + by' + cy = g_2(x)$$

la soluzione di $y'' + by' + cy = g_1(x) + g_2(x)$

è $y(x) = y_0(x) + y_p^1(x) + y_p^2(x)$

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda = \pm 2i$$

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)$$

$$y'' + 4y = x$$

$$y_p(x) = ax + b$$

$$y'_p(x) = a \qquad y''_p(x) = 0$$

$$4ax + 4b = x \qquad \begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\underline{y_p(x) = \frac{1}{4}x}$$

$$y'' + 4y = \cos x$$

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$y'_p(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$y''_p(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x + 4A\cos x + 4B\sin x = \cos x$$

$$3A\cos x + 3B\sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases} \qquad \underline{y_p(x) = \frac{1}{3}\cos x}$$

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{3} \cos x$$

$$\begin{cases} y'' + 4y = x + \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$