Corso di laurea in Chimica -Traccia A
Esame-esonero di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

31 gennaio 2018

1. Calcolare somma e prodotto delle soluzioni dell'equazione nel campo complesso

$$|z-2|-1=\sqrt{-1}+iz+i^{121}+i\left(\frac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{12}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x)=|x+2|^3\ln|x+2|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-x}\cdot(e^{x-1}-1)}{\ln x\cdot\log_2\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)(x^3-1)^{x-1}}.$$

4. Studiare, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, l'integrabilità in senso improprio della funzione

$$g(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\arctan x^{\alpha}}$$

negli intervalli $]0,1]$, $[1,2]$ e $]\pi,\frac{5}{3}\pi]$.

5. Data la funzione

$$h(x)=\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) calcolare, se ha senso, l'integrale in senso improprio in $[1,+\infty)$.

N.B. Coloro che hanno superato il primo esonero devono fare solo gli ultimi 3 esercizi.

Svolgimento

1. Poiché $\sqrt{-1} = \{i, -i\}$, $i^{121} = i^{120}\cdot i = (i^4)^{30}\cdot i = 1^{30}\cdot i = i$,

$$\left(\frac{\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = \cos \cancel{12}^{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{\cancel{8}_{4}}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{\cancel{8}_{4}}\right)\cdot\cancel{12}^{3} = \cos\frac{3}{2}\pi - i\,\text{sen}\frac{3}{2}\pi = i$$

l'equazione data è equivalente a

$$|z-2| - \cancel{1} = i + iz + i + \cancel{i^2} \quad \lor \quad |z-2| - \cancel{1} = -\cancel{i} + iz + \cancel{i} + \cancel{i^2}$$

Posto $z = a + ib \Rightarrow |z-2| = |a-2+ib| = \sqrt{(a-2)^2+b^2}$ e quindi la 1ª equazione diventa

$$\sqrt{(a-2)^2+b^2} = 2i + ai - b \iff \begin{cases}\sqrt{(a-2)^2+b^2} = -b \\ a+2=0\end{cases} \iff \begin{cases}\sqrt{4+b^2} = -b \\ a=-2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-2 \\ -b \geq 0 \\ 4+\cancel{b^2} = \cancel{b^2}\end{cases}$$ impossibile. Dunque la 1ª eq. non ha soluzioni. La 2ª equazione invece diventa

$$\sqrt{(a-2)^2+b^2} = ai - b \iff \begin{cases}\sqrt{(a-2)^2+b^2} = -b \\ a = 0\end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ -b\geq 0 \\ 4+\cancel{b^2} = \cancel{b^2}\end{cases} \quad \emptyset$$

Conclusione: l'equazione assegnata non ha soluzioni.

2. $f(x) = |x+2|^3 \ln|x+2|$ $\quad$ I.D: $|x+2| > 0 \iff x+2 \neq 0$

I.D $= \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad$ f simmetrica rispetto a $x = -2$

$$\begin{cases} x=0 \\ y = 8\ln 2\end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ |x+2|^3 \ln|x+2| = 0 \end{cases} \Rightarrow x+2=0 \lor \ln|x+2| = 0$$

$\Rightarrow x=-2$ Non acc. $\lor$ $|x+2| = 1 \Rightarrow x+2=1 \lor x+2=-1$

$x=-1 \lor x=-3$

$(-1,0)$ $(-3,0)$ intersezioni con asse x

$$f(x)\geq 0 \iff |x+2|^3\ln|x+2| \geq 0 \iff \ln|x+2|\geq 0 \iff |x+2|\geq 1$$

$$\iff x+2\leq -1 \lor x+2 \geq 1 \iff x\leq -3 \lor x\geq -1$$

Asintoti verticali

$$\lim_{x \to -2} |x+2|^3 \ln|x+2| = 0 \cdot (-\infty) = 0$$ perché ln è infinito in 0 di ordine comunque piccolo

$\Rightarrow \nexists$ As. verticali ma f è prolungabile per continuità in $x=0$

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x+2|^3 \ln|x+2| = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$ $\nexists$ as. orizzontali

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x+2|^3 \ln|x+2|}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} x^2 \left(1+\frac{2}{x}\right)^3 \ln|x+2| = \pm\infty$$

$\nexists$ as. obliqui

Studio della derivata 1ª

$$y' = 3|x+2|^{\cancel{3}2} \frac{x+2}{\cancel{|x+2|}} \ln|x+2| + |x+2|^3 \frac{1}{x+2} =$$

$$= 3|x+2|(x+2)\ln|x+2| + \frac{(x+2)^{\cancel{2}}|x+2|}{\cancel{x+2}} = |x+2|(x+2)(3\ln|x+2|+1)$$

$ID(y') = \mathbb{R} - \{-2\} = ID(y)$ $\nexists$ pti angolosi e/o cuspidali

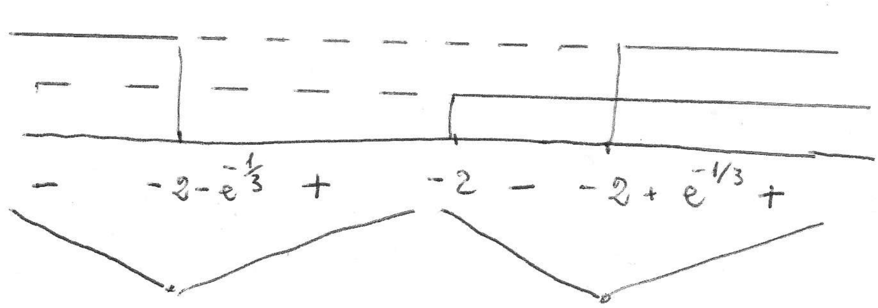
$$\lim_{x \to -2} |x+2|(x+2)(3\ln|x+2|+1) = 0 \cdot (-\infty) = 0$$ per gli ordini

Il prolungamento continuo di f è derivabile in $x=0$ con derivata $=0$

$f'(x) \geq 0 \iff |x+2|(x+2)(3\ln|x+2|+1) \geq 0 \iff (x+2)(3\ln|x+2|+1) \geq 0$

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$3\ln|x+2| \geq -1 \Rightarrow |x+2| \geq e^{-1/3} \Rightarrow x \leq -2-e^{-1/3} \vee x \geq -2+e^{-1/3}$



$x = -2+e^{-\frac{1}{3}}$

$x = -2-e^{-1/3}$ pti di minimo

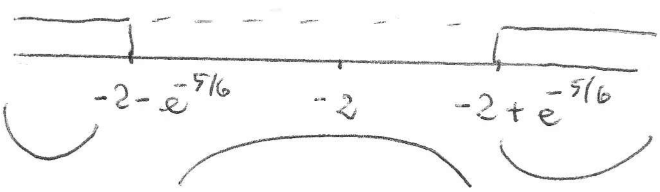
Studio della derivata seconda

$$f''(x) = D\left(|x+2|(x+2)(3\ln|x+2|+1)\right) = \frac{x+2}{|x+2|}(x+2)(3\ln|x+2|+1) +$$

$$+ |x+2|(3\ln|x+2|+1) + |x+2|\cancel{(x+2)}\frac{3}{\cancel{x+2}} = |x+2|(6\ln|x+2|+5)$$

$$f''>0 \iff |x+2|(6\ln|x+2|+5)>0 \iff 6\ln|x+2|>-5 \iff |x+2|>e^{-5/6}$$

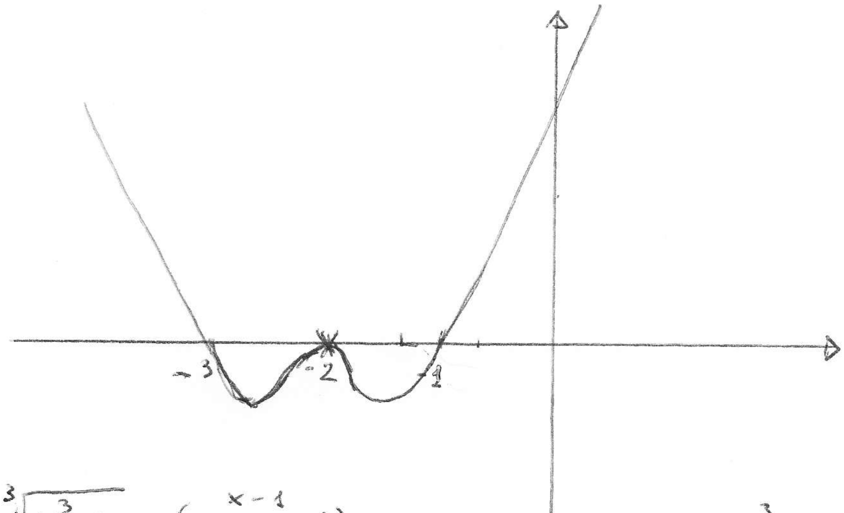
$$\iff x<-2-e^{-5/6} \ \vee \ x>-2+e^{-5/6}$$



$x=-2+e^{-5/6}$

$x=-2-e^{-5/6}$

pti di flesso



3. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3-x}\cdot(e^{x-1}-1)}{\ln x\cdot \log_2(1+\sqrt[3]{x-1})\,(x^3-1)^{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{\nearrow 0}{\sqrt[3]{x-1}\,(e^{x-1}-1)}}{\underset{0\swarrow}{\ln x}\ \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\ln 2}}\cdot \frac{\overset{\nearrow \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}}{\underbrace{(x^3-1)^{x-1}}_{0^0}}$$

Si osservi che: $\displaystyle \bullet\ \lim_{x\to 1} (x^3-1)^{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-1)^{x-1}\cdot \underbrace{(x^2+x+1)^{x-1}}_{3^0=1} =$ posto $y=x-1$

$$= \lim_{y\to 0} y^y = \lim_{y\to 0} e^{y\ln y} = e^0 = 1$$

$$\bullet\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)}\,(e^{x-1}-1)}{\ln x\cdot \ln(1+\sqrt[3]{x-1})}\cdot \ln 2 \underset{x-1=y}{=} \ln 2 \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{y}\cdot(e^y-1)}{\ln(1+y)\cdot \ln(1+\sqrt[3]{y})} =$$

$$= \ln 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y^{1/3}\cdot y}{y\cdot y^{1/3}} = \ln 2$$ poiché $e^y-1 \sim y$, $\ln(1+y)\sim y$ se $y\to 0$

Segue allora che il limite di partenza è $= \sqrt[3]{2} \cdot \ln 2$.

4. ID(g): $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x \neq 0 \\ \operatorname{arctg} x^\alpha \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ x^\alpha \neq 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow$ g è definita (e continua) in $]0,\pi[\; \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*}]k\pi,(k+1)\pi[$

Segue in particolare che g è continua in $]0,1]$, in $[1,2]$ e in $[\pi, \frac{5}{3}\pi]$.

Poiché per $\alpha < 0$: $\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^\alpha}}_{\frac{1}{\pi/2} \in \mathbb{R}} = +\infty$ con ord 2

per $\alpha = 0$: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} 1} = +\infty$ con ord 2

per $\alpha > 0$: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{con ord 2 se } \alpha < 2 \\ -\infty & \text{con ord } \alpha \text{ se } \alpha > 2 \end{cases}$

segue che $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$ g non è integr. in s.i. in $]1,2]$ in quanto infinito di ordine ≥ 2

Resta da studiare il caso $\alpha = 2$ (in cui $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ e $\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}$ sono entrambi infiniti di ordine 2)

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{arctg} x^2}$$

applico gli sviluppi di Taylor per sen x e arctg x

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - \frac{x^6}{3} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{x^2 \cdot x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^6}{3}} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{36}}{x^4} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

Per $\alpha = 2$ g è integr. in s.i. (anzi in senso classico) in $]0,1]$ poiché ha limite finito per $x \to 0^+$ ed è continua in $]0,1]$.

In $[1,2]$ g è int. in senso classico, e quindi in s.i., in quanto continua in un intervallo chiuso e limitato.

In $]\pi, \frac{5}{3}]$ g è continua ma non è integ. in s.i. poiché

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{1}{\sin^2 x} - \underbrace{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^\alpha}}_{\ell\in\mathbb{R}} = +\infty \quad \text{con ord. } 2>1. \text{ Infatti}$$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{1}{\sin^2 x} \underset{x-\pi=y}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\sin^2(y+\pi)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{(-\sin y)^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2} = +\infty$$

con ord 2

5. i) $$\int \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx \underset{p.p.}{=} x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\,dx}_{I}$$

Calcolo il 2° integrale:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{x-1}}}\,\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\int \frac{x}{\sqrt{\frac{-2(x+1)}{(x-1)^2}}}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= -\int \frac{x\,|x-1|}{\sqrt{+2}\cdot\sqrt{-x-1}}\,\frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x\,\cancel{(x-1)}}{\sqrt{-x-1}\,(x-1)^{\cancel{2}}}\,dx = \quad t=\sqrt{-x-1}, \quad x=-t^2-1, \quad dx=-2t\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{-t^2-1}{\cancel{t}(-t^2-1-1)}(-2\cancel{t})\,dt = -\frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{t^2+1}{t^2+2}\,dt$$

N.B. La funzione è definita per $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \in [-1,1] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1 \vee x>1 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty, -1]$

e quindi $|x-1| = -(x-1)$

$$= -\sqrt{2}\int \left(1-\frac{1}{t^2+2}\right)dt = -\sqrt{2}\left[t - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right] + c = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-x-1}{2}} - \sqrt{2}\sqrt{-x-1} + c$$

Conclusione: $$\int \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-x-1}{2}} + \sqrt{2}\sqrt{-x-1} + c.$$

ii) Non ha senso calcolare l'integrale di h in $[1,+\infty)$ poiché la funzione non è ivi definita.