

A.A. 2022/2023
Matematica - Scienze Geologiche
III Appello - 20 Febbraio 2023

Esercizio 1. Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{x^2 - 4}{|2x - 1| - 1} < 0.$$

Esercizio 2. Studiare la funzione $f(x) := \frac{e^{-x}}{3 - x}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Esercizio 3. Calcolare (se esiste) il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{1 - 2x^2}}{x^3 - e^x \log(1 + x^3)}.$$

Esercizio 4.

a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 4} dx.$$

b) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\log x - 1}{x(\log^2 x - 4)} dx.$$

Esercizio 5. 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$3y'' - 7y' + 4y = 8x - 9.$$

2. Determinare l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 3y'' - 7y' + 4y = 8x - 9 \\ y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 6. Si consideri il numero complesso

$$w := \frac{8 + 2i}{5i + 3}.$$

1. Scrivere la forma algebrica di w .

2. Calcolare w^{10} .

Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n),$$

$$\text{dove} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$