

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
Appello di Dicembre 2005

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione δ è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	a	(q_0, a, \rightarrow)	q_1	b	(q_3, b, \rightarrow)
s	b	(q_1, b, \rightarrow)	q_1	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$
s	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$	q_2	a	$(yes, a, -)$
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	q_2	b	(q_1, b, \rightarrow)
q_0	a	(q_2, a, \rightarrow)	q_2	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$
q_0	b	(q_1, b, \rightarrow)	q_3	a	(q_0, a, \rightarrow)
q_0	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$	q_3	b	$(yes, b, -)$
q_1	a	(q_0, a, \rightarrow)	q_3	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$

- Scrivere le configurazioni relative all'input $x = abbaa$;
 - Calcolare l'output $M(abbaa)$;
 - Descrivere il sottoinsieme delle stringhe di Σ^* riconosciuto da M ;
 - Stimare il costo computazionale di M in funzione della lunghezza della stringa di input.
2. Classificare i seguenti problemi in base alla classe di complessità di appartenenza:
- Ricerca di un elemento in una lista ordinata di n elementi;
 - Prodotto tra due matrici quadrate di ordine n ;
 - Somma tra due matrici quadrate di ordine n ;

- Prodotto scalare tra due vettori di lunghezza n , scegliendo tra le seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 f(n) = \mathcal{O}(n^4) & f(n) = n \log n \\
 f(n) = \mathcal{O}(n) & f(n) = n^2 \log n \\
 f(n) = \mathcal{O}(n^3) & f(n) = 2^n \\
 f(n) = \mathcal{O}(n^2) & f(n) = \log n
 \end{array}$$

- Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore.
- Sia M una macchina di Turing applicata ad una stringa di input x . Sia (q, w, u) una configurazione di M e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da M ?

- Spiegare cosa vuol dire

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

e dire se sono vere le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{l}
 n^2 = \mathcal{O}(n \log n), \\
 2^n = \mathcal{O}(c^n), \quad c > 2, \\
 n^2 + n = \mathcal{O}(n^2).
 \end{array}$$

- Spiegare cosa vuol dire calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile.
- Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.
- Spiegare, eventualmente con l'uso di alcuni esempi, la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
Appello di Gennaio 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Definire le istruzioni base di una RAM e interpretare il seguente programma RAM:

```
1   READ 3
2   STORE 3
3   READ 2
4   STORE 2
5   READ 1
6   STORE 1
7   ADD 2
8   ADD 3
9   HALT
```

2. Definire il Problema della Raggiungibilità di un grafo.
3. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
4. Definire il concetto e fornire qualche esempio di istanza di un problema e di dimensione di un'istanza.
5. Definire in modo formale una macchina di Turing e l'output di una macchina di Turing.
6. Definire la configurazione di una RAM.
7. Definire con esempi una classe di complessità.
8. Dimostrare il legame che esiste tra il progresso tecnologico e gli algoritmi con tempo polinomiale ed esponenziale. Dire se esiste tale legame anche per la risorsa spazio.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
Appello di Febbraio 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione δ è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	q_0	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
s	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	q_0	\sqcup	$(halt, \sqcup, -)$
s	\sqcup	$(halt, \sqcup, -)$	q_1	0	$(q_0, 0, -)$
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	q_1	1	(s, \sqcup, \rightarrow)
q_0	0	(s, \sqcup, \rightarrow)	q_1	\sqcup	$(halt, \sqcup, -)$

- Scrivere l'alfabeto Σ e l'insieme degli stati K ;
- Calcolare l'output $M(01110)$;
- Determinare la configurazione (q, x, y) tale che:

$$(q_0, 01 \sqcup 0 \sqcup 1, 010101111) \xrightarrow{M^6} (q, x, y).$$

2. Definire una macchina RAM.
3. Siano A e B due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore α le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

4. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
5. Spiegare cosa vuol dire

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

e fornire un esempio di due funzioni $g(n)$ ed $f(n)$ che soddisfino tale proprietà.

6. Definire la classe NP.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
Appello di Marzo 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione δ è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	a	(q_1, a, \rightarrow)	q_1	c	(s, c, \rightarrow)
s	b	(s, b, \rightarrow)	q_1	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$
s	c	(s, c, \rightarrow)	q_2	a	(q_1, a, \rightarrow)
s	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$	q_2	b	(s, b, \rightarrow)
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	q_2	c	$(yes, c, -)$
q_1	a	(q_1, a, \rightarrow)	q_2	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$
q_1	b	(q_2, b, \rightarrow)			

- Scrivere l'alfabeto Σ e l'insieme degli stati K ;
 - Calcolare $M(abcab)$ e $M(bcaa)$;
 - In base al risultato del punto precedente descrivere l'insieme delle stringhe riconosciute da M .
2. Descrivere il Problema Decisionale del Commesso Viaggiatore.
 3. Definire la classe NP.
 4. Spiegare, anche con l'uso di alcuni esempi, la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.
 5. Siano A e B due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore α le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

6. Definire il Problema della Raggiungibilità di un grafo.

7. Definire la configurazione di una RAM.

8. Spiegare cosa vuol dire

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
Appello di Aprile 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Definire le istruzioni base, la configurazione e la complessità di una macchina RAM.
2. Sia M una macchina di Turing applicata ad una stringa di input x . Sia (q, w, u) una configurazione di M e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da M ?

3. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\ f(n) &= \Theta(g(n)) \\ f(n) &= \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

4. Spiegare la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.
5. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
6. Definire i possibili output di una macchina di Turing.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
Appello di Maggio 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta:

1. Definire la configurazione di una macchina RAM. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere la configurazione della macchina al termine della loro esecuzione, considerati come registri di input (3, 4, 0):

1	READ	1
2	JZERO	14
3	STORE	1
4	READ	2
5	JZERO	13
6	ADD	1
7	STORE	1
8	READ	3
9	JZERO	13
10	ADD	1
11	STORE	1
12	JUMP	14
13	LOAD	1
14	HALT	

2. Sia M una macchina di Turing applicata ad una stringa di input x . Sia (q, w, u) una configurazione di M e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da M ?

3. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\ f(n) &= \Theta(g(n)) \\ f(n) &= \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

4. Siano A e B due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore α le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

5. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
6. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
I Appello di Luglio 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Considerare la macchina di Turing definita dalla seguente funzione di transizione.

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	a	(q_0, a, \rightarrow)	q_0	b	(q_1, b, \rightarrow)
s	b	(q_1, b, \rightarrow)	q_0	\sqcup	$(yes, \sqcup, -)$
s	\sqcup	$(yes, \sqcup, -)$	q_1	a	(q_0, a, \rightarrow)
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	q_1	b	$(no, b, -)$
q_0	a	$(no, a, -)$	q_1	\sqcup	$(yes, \sqcup, -)$

- Definire l'insieme dei possibili stati.
 - Definire l'alfabeto della macchina.
 - Calcolare $M(aaba)$ e $M(abab)$.
 - Scrivere l'insieme delle stringhe riconosciute da M .
2. Siano A e B due algoritmi aventi costo computazionale

$$f_A(n) = kn^2 + 3n, \quad f_B(n) = k^2n\sqrt{n} + 20n$$
 con k costante positiva. Determinare il valore di n che rende il costo computazionale di B inferiore rispetto a quello di A .
 3. Definire le caratteristiche degli algoritmi appartenenti alla classe NP.
 4. Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore e le relative problematiche dal punto di vista computazionale.
 5. Definire i possibili output di una macchina di Turing.
 6. Spiegare perchè il problema di trovare il vertice con il massimo in-degree (o out-degree) di un grafo orientato appartiene alla classe P. (*Suggerimento*: un possibile algoritmo deve avere complessità $\mathcal{O}(n^2)$.)
 7. Definire la configurazione di una RAM.
 8. Elencare i criteri da considerare nella valutazione della complessità di un algoritmo.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
II Appello di Luglio 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Definire le istruzioni base, la configurazione e la complessità di una macchina RAM.
2. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned}f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\f(n) &= \Theta(g(n)) \\f(n) &= \Omega(g(n)).\end{aligned}$$

3. Disegnare un grafo diretto con almeno 6 vertici e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto. Indicare i vertici con il massimo grado di ingresso e di uscita.
4. Siano A e B due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = n^3.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore α le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

5. Descrivere un algoritmo per risolvere il Problema della Raggiungibilità di un grafo.
6. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
I Appello di Settembre 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta:

1. Definire una macchina di Turing multinastro ed in particolare descrivere come deve essere definita la funzione di transizione.
2. Spiegare le motivazioni (almeno due) che, nella valutazione di un algoritmo, spingono a privilegiare la risorsa tempo alla risorsa spazio.
3. Spiegare come varia, in funzione del progresso tecnologico, lo studio della complessità degli algoritmi. Quale classe di problemi trae maggiori vantaggi da esso e perchè?
4. Descrivere la sintassi delle istruzioni di salto di una macchina RAM.
5. Calcolare (in modo approssimato) la complessità computazionale del calcolo della seguente formula:

$$S_n := \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i f_k$$

sapendo che il costo per calcolare f_k è $\mathcal{O}(2^k)$.

6. Si consideri la macchina di Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s)$, dove

$$K = \{s, q_0, q_1\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

e si completi la seguente tabella della funzione di transizione δ in modo tale che M riconosca le stringhe del tipo $a \underbrace{b \dots b}_k a$, con $k \geq 0$.

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	a		q_0	b	
s	b		q_0	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$
s	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$	q_1	a	$(no, a, -)$
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	q_1	b	
q_0	a		q_1	\sqcup	$(yes, \sqcup, -)$

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
II Appello di Settembre 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta:

1. Definire la configurazione e la complessità di una macchina RAM.
2. Definire le classi di complessità con particolare riferimento alle classi P ed NP.
3. Sia M una macchina di Turing applicata ad una stringa di input x . Sia (q, w, u) una configurazione di M e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da M ?

4. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.
5. Siano A e B due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore α le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

6. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\ f(n) &= \Theta(g(n)) \\ f(n) &= \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
I Appello di Novembre 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione δ è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	a	(q_0, a, \rightarrow)	q_0	a	(s, a, \rightarrow)
s	b	(s, b, \rightarrow)	q_0	b	(q_0, b, \rightarrow)
s	\sqcup	$(no, \sqcup, -)$	q_0	\sqcup	$(yes, \sqcup, -)$
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$			

- Scrivere i passi relativi all'input $x = ababa$ e calcolare l'output $M(ababa)$;
 - Scrivere i passi relativi all'input $x = baab$ e calcolare l'output $M(baab)$;
 - Descrivere il sottoinsieme delle stringhe di Σ^* riconosciuto da M .
2. Siano A, B, C, D ed E cinque algoritmi per risolvere il problema P , le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	n^3	n^4
B	$2n^3$	n^3
C	2^n	n^2
D	2^n	$n \log_2 n^2$
E	2^n	$n \log_2 n$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

3. Perché la funzione complessità in tempo di un algoritmo in funzione della dimensione n del problema deve essere monotona crescente?
4. Dimostrare il legame che esiste tra il progresso tecnologico e gli algoritmi con tempo polinomiale ed esponenziale. Dire se esiste tale legame anche per la risorsa spazio.
5. Siano $C = (\kappa, R)$ e $C' = (\kappa', R')$ le configurazioni di una RAM applicata all'input I e tali che

$$(\kappa, R) \xrightarrow{\Pi, I} (\kappa', R').$$

Spiegare in quali circostanze risulta $R = R'$.

6. Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore e le relative problematiche dal punto di vista computazionale.
7. Enunciare la differenza tra computazione deterministica, non deterministica e probabilistica.

Esame Scritto di Complessità Numerica
(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)
(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)
II Appello di Novembre 2006

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q, q_0\}, \quad \Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione δ è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
s	0	$(s, 0, \rightarrow)$	q	1	$(no, 1, -)$
s	1	$(s, 1, \rightarrow)$	q	\triangleright	$(no, \triangleright, -)$
s	\sqcup	(q, \sqcup, \leftarrow)	q_0	0	$(yes, 0, -)$
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	q_0	1	$(no, 1, -)$
q	0	$(q_0, 0, \leftarrow)$	q_0	\triangleright	$(yes, \triangleright, -)$

- Calcolare $M(100)$ e $M(1010)$;
 - Se la stringa in input x è la rappresentazione binaria di un numero intero quali numeri sono riconosciuti da M ?
2. Spiegare la differenza che c'è tra le seguenti istruzioni di una RAM:

$$\begin{array}{ll} \text{ADD} & j \\ \text{ADD} & = j \\ \text{ADD} & \uparrow j \end{array}$$

con j numero intero, e spiegare come cambia la configurazione della macchina dopo che è stata eseguita ciascuna di esse.

3. Definire la configurazione di una macchina di Turing.

4. Siano A,B,C e D quattro algoritmi che risolvono il problema Π . Siano $f_A(n)$, $f_B(n)$, $f_C(n)$ ed $f_D(n)$ le relative funzioni di complessità in tempo. Sapendo che:
- $f_B(n) = \Theta(f_A(n))$;
 - l'algoritmo C è più efficiente di A (cioè $f_C(n) \leq f_A(n)$);
 - l'algoritmo B è più efficiente di D (cioè $f_B(n) \leq f_D(n)$);
 - $f_D(n) = \mathcal{O}(n^4)$;
- stabilire quale algoritmo è più efficiente e se $\Pi \in P$.
5. Definire il concetto di classe di complessità.
6. Tracciare il grafo definito dalla seguente matrice di adiacenza.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un grafo diretto? Trovare un percorso Hamiltoniano (se esiste).

7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.