

**Esame Scritto di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)**

I Appello di Luglio 2006

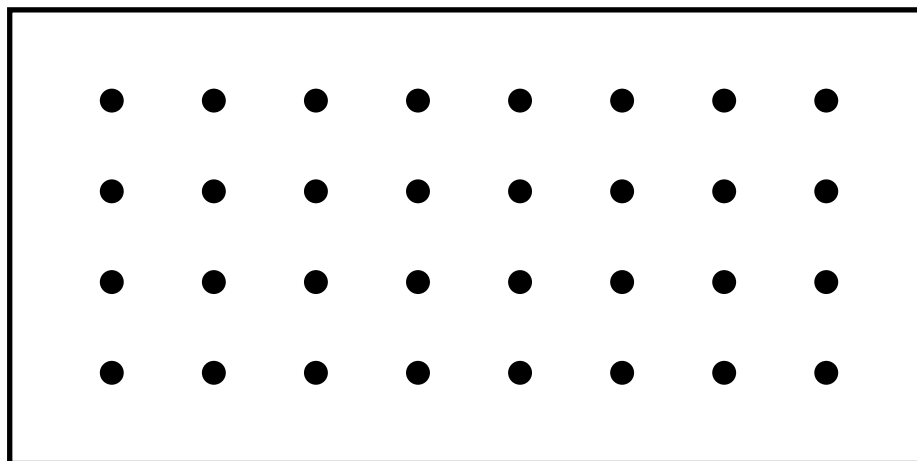
Rispondere ai primi 3 quesiti e ad altri 3 a scelta.

1. Dire se la seguente equazione alle derivate parziali è di tipo ellittico, iperbolico e parabolico:

$$u_t - u^2 u_x + xu = 0$$

supponendo $u(x, t) \neq 0$ per ogni (x, t) , e scriverla come equazione del secondo ordine senza la derivata mista u_{xt} .

2. Ordinare le incognite del seguente dominio utilizzando l'ordinamento multicolore con 6 colori (rosso, nero, verde, blu, giallo, magenta).



3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (giustificando in breve le risposte):

- (a) Il metodo a 5 punti per l'equazione di Laplace è di tipo esplicito;
- (b) L'equazione $u_t - au_x = 0$ non sempre è di tipo iperbolico;
- (c) La condizione di Courant, Friedrich e Lewy è verificata se $h = \Delta t$;
- (d) L'approssimazione tipo upwind della derivata prima è del secondo ordine;
- (e) L'approssimazione alle differenze centrali è del secondo ordine;
- (f) Il metodo a 5 punti non può essere applicato all'equazione di Poisson $\nabla^2 u = f$.

4. Descrivere i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel.
5. Classificare i seguenti tipi di equazioni alle derivate parziali:

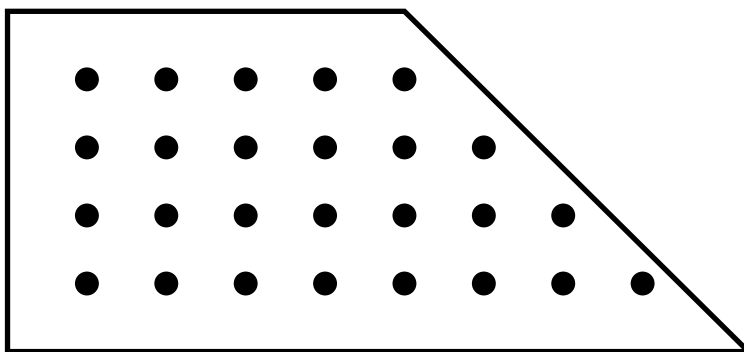
$$\begin{aligned}x^2 u_{yy} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{xx} + 6x^2 y u_x - 7u &= 0 \\u_t &= 6u u_{xx} - 17u^3 \\u_{xx} - u^2 u_{yy} &= 0\end{aligned}$$

6. Spiegare perchè i metodi numerici per l'equazione delle onde richiedono il calcolo esplicito delle approssimazioni all'istante t_1 mentre il metodo di Lax-Wendroff no.
7. Scrivere e commentare la formula di D'Alembert.
8. Scrivere un esempio di matrice a predominanza diagonale per righe, una a predominanza diagonale per colonne e una a predominanza diagonale per righe e per colonne contemporaneamente.
9. Spiegare la necessità di utilizzare una strategia di ordinamento per le incognite nel caso della risoluzione dell'equazione di Laplace e l'obiettivo che tale tecnica intende raggiungere.

**Esame Scritto di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Luglio 2006**

Rispondere ai primi 3 quesiti e ad altri 2 a scelta.

1. Descrivere il metodo di Eulero esplicito per l'equazione del calore.
2. Utilizzare la tecnica di Cuthill-McKee per ordinare i punti del seguente dominio discretizzato:



3. Indicare quale (o quali) risposte riportate sono corrette:
 - (1) Il metodo a 5 punti per equazioni ellittiche:
 - (a) è applicabile solo se il dominio è un rettangolo;
 - (b) è applicabile se il dominio ha il contorno qualsiasi;
 - (c) è applicabile solo se il dominio ha il contorno poligonale.
 - (2) Le tecniche di ordinamento delle incognite servono
 - (a) a ridurre il numero di elementi della matrice dei coefficienti diversi da zero;
 - (b) a minimizzare il numero di elementi diversi da zero nei fattori triangolari della matrice dei coefficienti;
 - (c) a far convergere prima i metodi iterativi.
 - (3) I metodi iterativi per sistemi lineari
 - (a) convergono sempre;
 - (b) convergono qualche volta;
 - (c) convergono a seconda del vettore iniziale.
 - (4) La convergenza di un metodo iterativo dipende:

- (a) dalla matrice dei coefficienti;
 - (b) dal vettore approssimazione iniziale;
 - (c) dal vettore dei termini noti;
 - (d) dalla matrice dei coefficienti, dal vettore approssimazione iniziale e dal vettore dei termini noti.
- (5)** L'approssimazione tipo upwind della derivata prima è:
- (a) più precisa dell'approssimazione alle differenze centrali;
 - (b) meno precisa dell'approssimazione alle differenze centrali;
 - (c) più precisa dell'approssimazione alle differenze in avanti.
- (6)** L'equazione del secondo ordine $y(x^2+1)u_{xx}+(x^2-1)u_{yy}+3x+y = 0$:
- (a) è di tipo ellittico;
 - (b) è di tipo iperbolico;
 - (c) è di tipo parabolico;
 - (d) è di tipi diversi in funzione di x e y .

4. Spiegare la condizione di Courant, Friedrichs e Lewy.
5. Considerata l'equazione alle derivate parziali del secondo ordine

$$Axu_{xx} + 2tBu_{xt} + Cu_{tt} + f(x, t, u, u_x, u_t) = 0$$

trovare tre terne di valori per A, B, C (non necessariamente costanti) tali che l'equazione sia rispettivamente ellittica, parabolica ed iperbolica.

6. Spiegare perchè la formula di D'Alembert non è utile nel caso di problemi iperbolici ai valori iniziali e al contorno.
7. Spiegare la necessità di utilizzare una strategia di ordinamento per le incognite nel caso della risoluzione dell'equazione di Laplace e l'obiettivo che tale tecnica intende raggiungere.
8. Descrivere brevemente il metodo di più ripida discesa.

Esame Scritto di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Settembre 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Descrivere brevemente il metodo di Crank-Nicolson.
2. Elencare in dettaglio i modi di classificazione delle equazioni alle derivate parziali.
3. Descrivere brevemente il metodo di più ripida discesa.
4. Descrivere anche con esempi i metodi di riordinamento delle incognite nella risoluzione numerica dell'equazione di Laplace attraverso il metodo a 5 punti.
5. Descrivere i metodi iterativi di Jacobi, Gauss-Seidel e del Rilassamento.
6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando, se necessario, le risposte:
 - (a) La convergenza di un metodo iterativo dipende solo dal vettore approssimazione iniziale;
 - (b) Il metodo di Lax-Wendroff è di tipo implicito;
 - (c) Il metodo di più ripida discesa può essere applicato a qualunque sistema lineare;
 - (d) Nella risoluzione numerica dell'equazione di Laplace con il metodo a 5 punti la struttura della matrice A dipende dal dominio Ω ;
 - (e) Nel problema ellittico di Dirichlet la soluzione $u(x, y)$ è nota sulla frontiera del dominio Ω ;
 - (f) La condizione di Courant-Friedrichs-Lewy è verificata se $\Delta t = h$.

**Esame Scritto di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Settembre 2006**

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Descrivere il metodo di Eulero esplicito per l'equazione del calore.
2. Descrivere i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel.
3. Descrivere come si può approssimare la derivata seconda di una funzione $f(t)$ in un insieme di punti t_i equidistanti.
4. Indicare quale (o quali) risposte riportate sono corrette e, se necessario, spiegare brevemente la risposta:

(1) La migliore tecnica di ordinamento delle incognite per l'equazione di Laplace è:

- (a) l'ordinamento lessicografico;
- (b) l'ordinamento di Cuthill-McKee;
- (c) l'ordinamento Red-Black.

(2) I metodi iterativi per sistemi lineari

- (a) convergono sempre;
- (b) convergono qualche volta;
- (c) convergono a seconda del vettore iniziale.

(3) La convergenza di un metodo iterativo dipende:

- (a) dalla matrice dei coefficienti;
- (b) dal vettore approssimazione iniziale;
- (c) dal vettore dei termini noti;
- (d) dalla matrice dei coefficienti, dal vettore approssimazione iniziale e dal vettore dei termini noti.

(4) L'approssimazione alle differenze centrali della derivata prima è:

- (a) meno precisa dell'approssimazione alle differenze all'indietro;
- (b) meno precisa dell'approssimazione tipo upwind;
- (c) più precisa dell'approssimazione alle differenze in avanti.

(5) L'equazione del secondo ordine

$$t^2 u_{tt} + 2xtu_{xt} + x^2 u_{xx} + 3xu_x + u_t - t^4 = 0$$

- (a) è di tipo ellittico;
- (b) è di tipo iperbolico;

(*c*) è di tipo parabolico;
(*d*) è di tipi diversi in funzione di x e t .

5. Descrivere il metodo a 5 punti per risolvere l'equazione di Laplace.
6. Spiegare quali tecniche possono essere utilizzate per approssimare le derivate parziali seconde di un'equazione ellittica quando la frontiera del dominio non è di tipo poligonale.
7. Spiegare la condizione di Courant, Friedrichs e Lewy.

Esame Scritto di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Novembre 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Spiegare la condizione di Courant, Friedrichs e Lewy.
2. Ricavare l'espressione delle formule alle differenze centrali, in avanti e all'indietro per l'approssimazione della derivata prima.
3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando, se necessario, la risposta:
 - (a) La convergenza di un metodo iterativo dipende solo dal vettore approssimazione iniziale;
 - (b) L'equazione di Laplace è di tipo stazionario;
 - (c) Il metodo di più ripida discesa può essere applicato a qualunque sistema lineare;
 - (d) La formula di D'Alembert si applica solo ad equazioni iperboliche;
 - (e) Nel problema ellittico di Neumann la soluzione $u(x, y)$ è nota sulla frontiera del dominio Ω ;
 - (f) L'equazione delle onde è di tipo parabolico.
4. Scrivere un esempio di matrice a predominanza diagonale per righe, una a predominanza diagonale per colonne e una a predominanza diagonale per righe e per colonne contemporaneamente.
5. Descrivere brevemente (eventualmente con un esempio) le tecniche di ordinamento lessicografico, Red-Black e di Cuthill-McKee.
6. Spiegare perchè la formula di D'Alembert non è utile completamente nel caso di problemi iperboliche ai valori iniziali e al contorno.
7. Spiegare perchè non è conveniente risolvere sistemi sparsi e di grandi dimensioni usando i cosiddetti metodi diretti (come il metodo di eliminazione di Gauss e la fattorizzazione LU).
8. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali del secondo ordine

$$A(x, t)u_{xx} + 2B(x, t)u_{xt} - t^2u_{tt} + \sin(xt) = 0.$$

Trovare la relazione che lega le funzioni A e B affinché essa sia parabolica per ogni x, t . Descrivere almeno un esempio.

Esame Scritto di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Novembre 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Enunciare il problema ai valori iniziali e ai valori al contorno per le equazioni paraboliche.
2. Elencare i modi per classificare le equazioni alle derivate parziali precisando vantaggi e svantaggi di ciascun metodo.
3. Ricavare le formula del secondo ordine per l'approssimazione della derivata seconda di una funzione $f(t)$.
4. Definire le rette caratteristiche ed il dominio di dipendenza dell'equazione d'onda.
5. Descrivere il metodo a 5 punti per risolvere l'equazione di Laplace.
6. Spiegare quali tecniche possono essere utilizzate per approssimare le derivate parziali seconde di un'equazione ellittica quando la frontiera del dominio non è di tipo poligonale.
7. Trasformando l'equazione di Laplace in coordinate polari come vengono modificate le condizioni al contorno per il problema di Dirichlet.
8. Descrivere brevemente i metodi di Jacobi, Gauss-Seidel e del Rilassamento.