

# Capitolo 4

## La Trasformata di Fourier

### 4.1 Serie di Fourier

È ben noto che un buon numero di funzioni sia rappresentabile, in maniera più o meno complicata, in serie di potenze. Comunque questo non è il solo modo per sviluppare in serie funzioni di variabile reale. Un modo alternativo è l'espressione di una funzione come somma di seni e coseni. Tali serie prendono il nome di *serie di Fourier*. Un punto di forza di tali sviluppi in serie è che, a differenza delle serie di Taylor, essi esistono anche se le funzioni presentano punti di discontinuità e non sono differenziabili in qualche punto del dominio. Inoltre le funzioni trigonometriche sono facilmente differenziabili ed integrabili. Può meravigliare il fatto che una qualsiasi funzione possa essere sviluppata, in un determinato intervallo, come somma di funzioni pari e dispari, tuttavia consideriamo che se  $F(x)$  può essere scritta nel seguente modo:

$$F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x) + F(x) - F(-x)]$$

Posto

$$P(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)]; \quad D(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$

risulta  $F(x) = P(x) + D(x)$  con  $P(x)$  funzione pari e  $D(x)$  funzione dispari. Per iniziare lo studio delle serie di Fourier introduciamo le ipotesi cui devono soddisfare le funzioni di variabile reale per poter essere sviluppabili in serie. Tali condizioni sono dette *condizioni di Dirichlet* e sono sufficienti per la convergenza della serie di Fourier.

Si dice che la funzione  $F(x)$  soddisfacente le condizioni di Dirichlet se:

1.  $F(x)$  è definita nell'intervallo  $c < x < c + 2l$ ;
2.  $F(x)$  e  $F'(x)$  sono generalmente continue per  $c < x < c + 2l$ ;
3.  $F(x)$  è periodica di periodo  $2l$ , cioè  $F(x + 2l) = F(x)$ .

Spesso le condizioni di Dirichlet sono formulate in modo alternativo, ma perfettamente equivalente, richiedendo che la funzione  $F(x)$  sia periodica, continua tranne che in un numero finito di punti, che abbia un numero finito di punti di massimo e di minimo e che la funzione sia integrabile in un periodo. Se la funzione  $F(x)$  soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo  $[c, c + 2l]$  allora in ogni punto  $x$  di continuità di  $F$  vale la seguente uguaglianza,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.1)$$

dove le costanti  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  sono detti *coefficienti di Fourier* e sono uguali a

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) dx, \quad (4.2)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Se  $x$  invece è un ogni punto di discontinuità si ha

$$\frac{1}{2} (F(x+0) + F(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.5)$$

dove  $F(x+0)$  e  $F(x-0)$  indicano rispettivamente i limiti destro e sinistro nella discontinuità. Infatti il limite destro della funzione  $f(x)$  si indica spesso con

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon) = f(x+0), \quad \varepsilon > 0.$$

Analogamente il limite sinistro di  $f(x)$  si indica con

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) = f(x-0), \quad \varepsilon > 0.$$

Il fatto che  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\varepsilon > 0$  si indica talvolta per brevità con  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Quindi ad esempio

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x + \varepsilon) = f(x + 0), \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x - \varepsilon) = f(x - 0).$$

La serie (4.1), o (4.5), con i coefficienti definiti da (4.2), (4.3) e (4.4), si chiama *serie di Fourier di  $F(x)$* . In molti casi risulta  $c = 0$  o, meglio  $c = -l$ , cosicchè le formule dei coefficienti della serie diventano

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx, \quad (4.6)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Prima di dimostrare quanto appena affermato consideriamo ora alcuni risultati preliminari.

**Lemma 4.1.1** *Se  $k \in \mathbb{N}^*$  allora*

$$\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0.$$

*Dimostrazione.* Poichè la funzione seno è dispari l'integrale tra  $-l$  ed  $l$  è sicuramente nullo. Supponiamo ora  $k \in \mathbb{N}^*$  e calcoliamo il secondo integrale

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} \left( \sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{l}{k\pi} \left[ \sin \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^l = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 4.1.2** *Risulta, per  $m, n \in \mathbb{N}^*$ :*

a)

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \neq 0 \end{cases}$$

b)

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

c)

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m = n = 0.$$

d)

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2l, \quad m = n = 0.$$

*Dimostrazione.* a) Richiamiamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.9)$$

e

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (4.10)$$

Sommando e sottraendo (4.9) a (4.10) seguono rispettivamente

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Per  $m \neq n$  la a) può essere riscritta

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ & = \frac{1}{2} \left[ \int_{-l}^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx + \int_{-l}^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0 \end{aligned}$$

per il lemma 4.1.1. Analogamente, sempre per  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ & = \frac{1}{2} \left[ \int_{-l}^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx - \int_{-l}^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Se  $m = n$  allora ricordiamo innanzitutto che

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

quindi

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ 1 + \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

e analogamente

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ 1 - \sin \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

b) Dalle relazioni

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.11)$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (4.12)$$

segue

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Allora per  $m \neq n$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \right] dx$$

e il risultato è una conseguenza del lemma 4.1.1. Se invece  $m = n$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{2m\pi x}{l} dx = 0.$$

La dimostrazione dei punti c) e d) segue direttamente dal calcolo diretto degli integrali.  $\square$

**Teorema 4.1.1** *Se la serie*

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

*converge uniformemente a  $F(x)$  nell'intervallo  $(-l, l)$  allora, per  $n = 1, 2, \dots$*

$\alpha)$ 

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

 $\beta)$ 

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx;$$

 $\gamma)$ 

$$A = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx.$$

*Dimostrazione.*  $\alpha)$  Per ipotesi

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (4.13)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\cos \frac{m\pi x}{l}$  e integrando tra  $-l$  ed  $l$  si ha:

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx = \int_{-l}^l \left[ A + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (4.14)$$

Tenuto conto che, per il lemma 4.1.2,

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$$

e

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

la relazione (4.14) diventa

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx &= A \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= a_m l \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$\beta$ ) Moltiplicando la relazione (4.14) per  $\sin \frac{m\pi x}{l}$ , integrando tra  $-l$  e  $l$  ed applicando le relazioni già viste abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} F(x) dx &= A \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= b_m l \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$\gamma$ ) Integriamo ora la relazione (4.13) tra  $-l$  ed  $l$ , e tenendo conto del lemma 4.1.1 otteniamo

$$\int_{-l}^l F(x) dx = 2Al \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx.$$

Ponendo  $m = 0$  nel risultato  $\alpha$ ) si ha:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx; \quad A = \frac{a_0}{2}. \quad \square$$

*Osservazione.* I risultati ora ottenuti valgono anche se i limiti di integrazione sono sostituiti da  $c$  e  $c + 2l$ . Osserviamo anche esplicitamente che l'ipotesi di convergenza uniforme è intervenuta nell'integrazione termine a termine della serie.

### 4.1.1 Forma complessa della serie di Fourier

In forma complessa la serie di Fourier (4.1) e i suoi coefficienti possono essere scritti così:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in \frac{\pi x}{l}}$$

dove, ponendo  $c = -l$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-in\frac{\pi x}{l}} dx.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi x}{l}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\frac{\pi x}{l}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi x}{l}} = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ik\frac{\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi x}{l}} = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{-k} e^{-ik\frac{\pi x}{l}} + c_k e^{ik\frac{\pi x}{l}}] = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (c_{-k} + c_k) \cos \frac{k\pi x}{l} + i(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}. \end{aligned}$$

Vediamo ora di esplicitare l'espressione dei coefficienti di tale ultima formula. Innanzitutto osserviamo che

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx = \frac{a_0}{2}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} c_{-k} + c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) [e^{ik\frac{\pi x}{l}} + e^{-ik\frac{\pi x}{l}}] dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Quindi risulta  $c_{-k} + c_k = a_k$ .

$$\begin{aligned} \iota(c_k - c_{-k}) &= \iota \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) [e^{-\iota k \frac{\pi x}{l}} - e^{\iota k \frac{\pi x}{l}}] dx = \\ &= \iota \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) \left( -2\iota \sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Poichè risulta  $\iota(c_k - c_{-k}) = b_k$ , le due diverse formulazioni della serie di Fourier sono equivalenti.

## 4.2 Trasformata discreta di Fourier

Abbiamo visto che, se  $F(x)$  soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo  $] -l, l[$ , allora in ogni punto di continuità di  $F(x)$ :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota \frac{n\pi x}{l}} \quad (4.15)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota \frac{n\pi x}{l}} dx.$$

Posto

$$f(n) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (4.16)$$

allora  $F(x)$  si scrive

$$F(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{\iota \frac{n\pi x}{l}}. \quad (4.17)$$

La (4.16) prende il nome di *trasformata discreta di Fourier* e spesso viene indicata con  $f(n) = \mathcal{F}\{F\}$ , mentre  $F(x)$  si chiama *antitrasformata discreta di Fourier*.

Se  $x$  non è punto di continuità allora nella (4.15)  $F(x)$  va sostituito con  $(F(x+0) + F(x-0))/2$ .

### 4.2.1 Trasformate finite di Fourier

Riconsideriamo ora lo sviluppo di Fourier di  $F(x)$ ,  $-l < x < l$ , nella formulazione (4.1) con i coefficienti dati in  $\alpha$ ,  $\beta$ ) e  $\gamma$ ) ovvero

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

e facciamo l'ulteriore ipotesi  $F(x)$  dispari. In questo caso  $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$  è una funzione dispari per ogni  $n \in \mathbb{N}$  mentre  $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$  è una funzione pari per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Conseguentemente

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mentre

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4.18)$$

Pertanto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

con  $b_n$  definiti da (4.18).

Definiamo ora

$$f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

allora

$$b_n = \frac{2}{l} f_s(n)$$

e perciò si scrive

$$F(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.20)$$

La (4.19) prende il nome di *trasformata finita seno di Fourier* di  $F(x)$  per  $0 < x < l$  e viene spesso indicata con  $\mathcal{F}_s\{F\}$ , mentre la (4.20) si chiama *antitrasformata finita seno di Fourier* di  $f_s(n)$ .

Assumiamo ora che  $F(x)$  sia pari. In questo caso la funzione  $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$  è una funzione dispari in  $] -l, l[$  e la funzione  $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$  è pari in  $] -l, l[$ , e pertanto  $b_n = 0$  per ogni  $n$ . Conseguentemente

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

con

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Posto

$$f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

risulta

$$a_n = \frac{2}{l} f_c(n)$$

e di conseguenza

$$F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.22)$$

La (4.21) prende il nome di *trasformata finita coseno di Fourier* di  $F(x)$  per  $0 < x < l$ , e viene indicata con  $\mathcal{F}_c\{F\}$ , mentre  $F(x)$  si dice *antitrasformata finita coseno di Fourier* di  $f_c(n)$  ed è indicata normalmente con  $\mathcal{F}^{-1}\{f_c(n)\}$ .

**Esempio 4.2.1** *Determinare la serie di Fourier per la funzione*

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

*di periodo 6.*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 F(x) dx + \int_0^3 F(x) dx \right] = \frac{2}{3} \int_0^3 x dx = 3 \\ a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 2x \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left( \sin \frac{n\pi x}{3} \right) dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{6}{(n\pi)^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \right] = \frac{6}{(n\pi)^2} [\cos n\pi - 1]. \\ b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \int_0^3 2x \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \left[ \int_0^3 2x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left( \cos \frac{n\pi x}{3} \right) dx \right] = \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[ 3 \cos n\pi - \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \right] = \\ &= \frac{-6}{n\pi} \cos n\pi. \end{aligned}$$

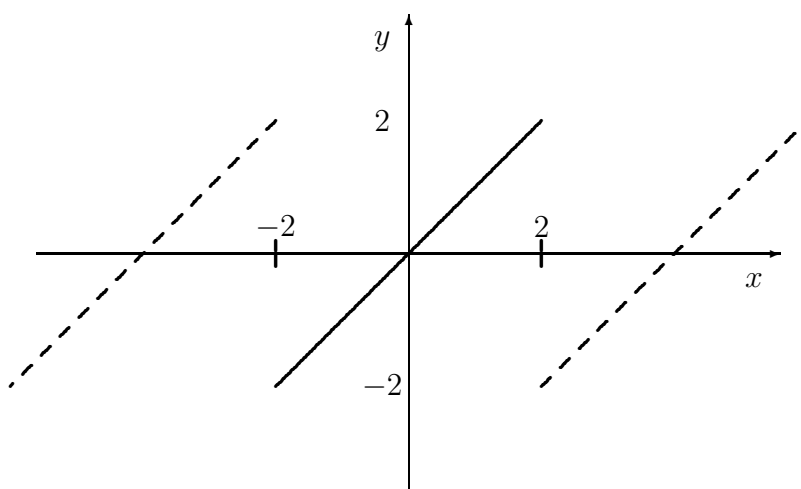


Figura 4.1:

Quindi in definitiva

$$F(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{6}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{6}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{3} \right].$$

**Esempio 4.2.2** *Sviluppare la funzione  $F(x) = x$ , per  $0 < x < 2$ :*

- a) *in serie di Fourier di soli seni;*
- b) *in serie di Fourier di soli coseni.*

a) *Per sviluppare  $F(x)$  in serie di soli seni è necessario che  $F(x)$  sia periodica e dispari. Estendiamo quindi la definizione di  $F(x)$  a quella di funzione dispari di periodo 4 (e quindi  $l = 2$ , vedere figura 4.1).*

*Possiamo ora scrivere per  $F(x)$  lo sviluppo*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \frac{d}{dx} \left( \cos \frac{n\pi x}{2} \right) dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left( 2 \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \left[ \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \right) = -\frac{4 \cos n\pi}{n\pi}
 \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{4 \cos n\pi}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} = \\
 &= -4 \left[ -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right] = \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

b) Per sviluppare  $F(x)$  in serie di soli coseni è necessario che  $F(x)$  sia periodica e pari. Estendiamo quindi la sua definizione a quella di funzione pari di periodo 4 (e quindi  $l = 2$ , vedere figura 4.2).

Allora

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^2 x dx = \int_0^2 x dx = 2$$

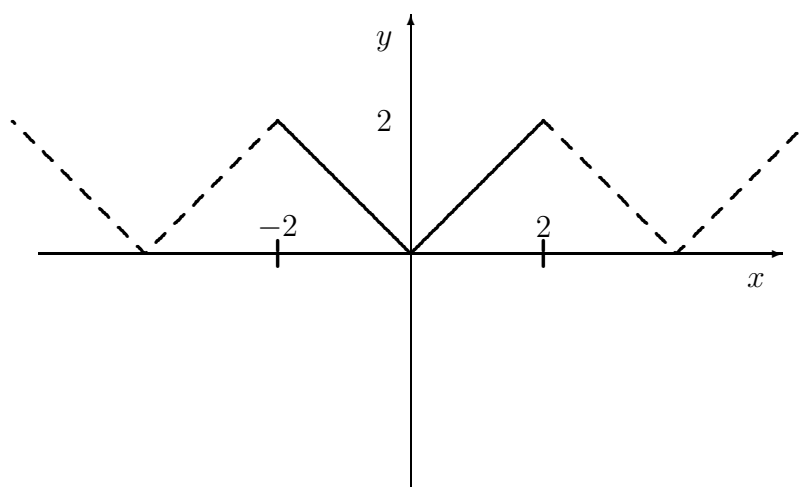


Figura 4.2:

e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left[ x \left( \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_{x=0}^{x=2} - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left[ - \left( \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1).
 \end{aligned}$$

*In definitiva*

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} = \\
 &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

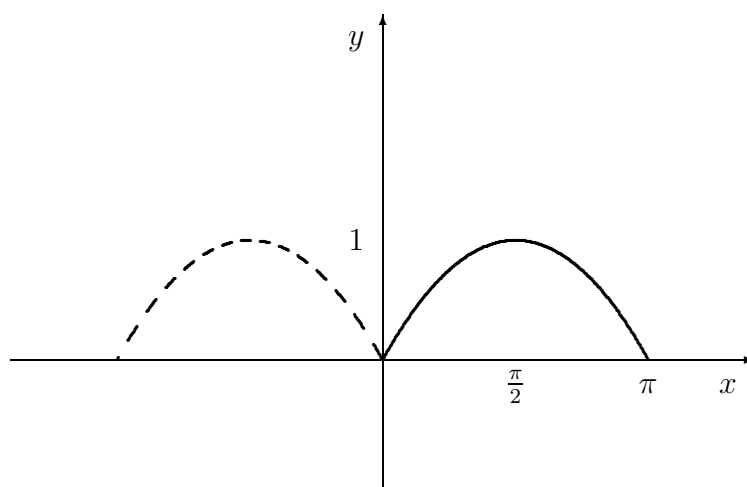


Figura 4.3:

**Esempio 4.2.3** *Sviluppare la funzione  $F(x) = \sin x$ ,  $0 < x < \pi$ , in serie coseno di Fourier.*

*Poichè per ottenere uno sviluppo in serie di soli coseni  $F(x)$  deve essere periodica pari effettuiamo un'estensione pari di  $F(x)$  di periodo  $2\pi$  (vedere Figura 4.3).*

*Risulta allora*

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

*con  $l = \pi$ . Quindi*

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] = \\
 &= -\frac{2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)}, \quad n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Se  $n=1$  allora

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^\pi = 0.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx = \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

**Esempio 4.2.4** *Determinare*

- a) *la trasformata finita seno di Fourier*
- b) *la trasformata finita coseno di Fourier*

della funzione  $F(x) = 2x$ ,  $0 < x < 4$ .

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{F\} &= f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\
&= \int_0^4 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \\
&= \left[ 2x \left( \frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left( \frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 = \\
&= -\frac{32}{n\pi} \cos n\pi;
\end{aligned}$$

b) se  $n > 0$ 

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{F\} &= f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
&= \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \\
&= \left[ 2x \left( \frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left( \frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 = \\
&= 32 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Se  $n = 0$ 

$$f_c(0) = \int_0^4 2x dx = 16.$$

Le trasformate seno e coseno di Fourier possono essere applicate anche a funzioni in due variabili  $U(x, t)$ . in questo caso la trasformata di  $U(x, t)$  è una funzione che dipende dalla variabile  $t$  e dal parametro  $n$ , numero naturale, cosicchè scriveremo

$$u(n, t) = \mathcal{F}_c(U(x, t)),$$

oppure

$$u(n, t) = \mathcal{F}_s(U(x, t)).$$

Infatti una delle principali applicazioni delle trasformate di Fourier è la risoluzione di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Nei successivi

esercizi vedremo di determinare le trasformate seno e coseno di Fourier per tali derivate.

**Esempio 4.2.5** *Determinare*

a) la trasformata finita seno di Fourier di  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ;

b) la trasformata finita coseno di Fourier di  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,

dove  $U(x, t)$  è una funzione definita per  $0 < x < l$  e  $t > 0$ .

a) Per definizione la trasformata finita seno è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \left[ U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l - \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c(U). \end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c(U);} \quad (4.23)$$

b) la trasformata finita coseno di Fourier è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \left[ U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s(U) - [U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi].} \quad (4.24)$$

**Esempio 4.2.6** Risolvere il problema precedente per  $\frac{\partial U}{\partial t}$ ;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{F}_s(U).\end{aligned}$$

Analogamente

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}_c(U).$$

Da questi esempi si può inoltre ricavare che

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_c(U)$$

e

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_s(U).$$

**Esempio 4.2.7** Risolvere il problema dell'esempio 4.2.5 per la funzione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

a) Sostituendo  $\frac{\partial U}{\partial x}$  ad  $U$  nelle formule (4.23) e (4.24) dell'esempio 4.2.5 si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \mathcal{F}_s(U) + \frac{n\pi}{l} U(0, t) - \frac{n\pi}{l} U(l, t) \cos n\pi.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= \frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - [U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi] = \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \mathcal{F}_c(U) - [U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi].\end{aligned}$$

Nel seguente esercizio applicheremo le trasformate di Fourier ad un'equazione alle derivate parziali. Osserviamo che la scelta sull'uso della trasformata seno o coseno dipende esclusivamente dalle condizioni al contorno note. Infatti se conosciamo la funzione  $U(x, t)$  ai bordi del dominio, cioè per  $x = 0$  e  $x = l$ , allora si deve applicare necessariamente la trasformata seno che dipende da tali valori. Se, al contrario, si conosce il valore della derivata parziale  $U_x(x, t)$  per  $x = 0$  e  $x = l$  allora si deve utilizzare la trasformata coseno.

**Esempio 4.2.8** *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere l'equazione*

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(0, t) &= 0 \\ U(4, t) &= 0 \\ U(x, 0) &= 2x\end{aligned}$$

con  $0 < x < 4$  e  $t > 0$ .

Prendendo la trasformata finita seno di ambo i membri dell'equazione assegnata (con  $l = 4$ ), abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Posto  $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$  e tenendo conto dell'esempio 4.2.6

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}u(t, n).$$

Applicando ora l'esempio 4.2.7 abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -\frac{n\pi}{4}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

Per l'esempio 4.2.5

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \frac{n\pi}{4}\mathcal{F}_s(U(x, t)) + U(0, t) - U(4, t) \cos n\pi = \\ &= \frac{n\pi}{4}u(t, n).\end{aligned}$$

In definitiva si deve risolvere l'equazione

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u(t, n)$$

ottenendo

$$u(t, n) = u(0, n)e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

dove

$$u(0, n) = \mathcal{F}_s(2x) = \frac{-32 \cos n\pi}{n\pi}.$$

Quindi

$$u(t, n) = \frac{-32 \cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32 \cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16} \sin \frac{n\pi x}{4} = \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-\cos n\pi}{n} \right) e^{-n^2\pi^2 t/16} \sin \frac{n\pi x}{4}. \end{aligned}$$

**Esempio 4.2.9** Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con  $U(x, t)$  soggetta alle seguenti condizioni iniziali  $U(0, t) = U(6, t) = 0$ , per  $t \geq 0$  e

$$U(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita seno di Fourier con  $l = 6$ , quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo  $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$  e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(t, n)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = Ce^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con  $C$  costante da calcolare. Poichè

$$u(n, 0) = \mathcal{F}_c(U(x, 0)) = \mathcal{F}_s(U(x, 0)) = C$$

dobbiamo calcolare la trasformata seno della condizione iniziale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(U(x, 0)) &= \int_0^6 U(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= \frac{6}{n\pi} \left[ -\cos \frac{n\pi x}{6} \right]_0^3 = \frac{6}{n\pi} \left[ 1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n, t) = \frac{6}{n\pi} \left[ 1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right] e^{-n^2 \pi^2 t / 36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x, t) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \left[ 1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right] e^{-n^2 \pi^2 t / 36} \sin \frac{n\pi x}{6}.$$

**Esempio 4.2.10** Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

dove la funzione  $U(x, t)$  è soggetta alle seguenti condizioni iniziali:  $U(0, t) = U(1, t) = 0$ , per  $t \geq 0$  e

$$U(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 3x$$

con  $0 \leq x \leq 1$ .

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con  $l = 1$ ), ottenendo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = -\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo  $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$  e otteniamo che il primo membro è uguale a

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2}u(t, n)$$

mentre il secondo diventa

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -n^2\pi^2 u(n, t)$$

cosicchè si deve risolvere ora la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = n^2\pi^2 u(t, n). \quad (4.25)$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione (4.25) è

$$\lambda^2 - n^2\pi^2 = 0$$

che ammette due radici reali distinte  $\lambda = \pm n\pi$ , cosicchè essa ammette come soluzione generale una combinazione lineare di esponenziali:

$$u(n, t) = Ae^{n\pi t} + Be^{-n\pi t}$$

con  $A$  e  $B$  costanti da determinarsi utilizzando le altre condizioni iniziali note. Infatti

$$U(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(n, 0) = \mathcal{F}_s(U(x, 0)) = \mathcal{F}_s(0) = 0$$

quindi

$$u(n, 0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

e la soluzione può essere scritta come

$$u(n, t) = Ae^{n\pi t} - Ae^{-n\pi t}.$$

Inoltre, poichè

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 3x \quad \Rightarrow \quad u'(n, 0) = \mathcal{F}_s \left( \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) \right) = \mathcal{F}_s(3x).$$

Calcoliamo quindi la trasformata seno della funzione  $3x$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(3x) &= \int_0^1 3x \sin(n\pi x) dx = 3 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \\ &= \frac{3}{n\pi} [-x \cos(n\pi x)]_0^1 + \frac{3}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 = \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{3}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$u'(n, t) = An\pi e^{n\pi t} + An\pi e^{-n\pi t}$$

e

$$u'(n, 0) = 2An\pi \quad \Rightarrow \quad A = \frac{u'(n, 0)}{2n\pi}$$

cosicchè

$$A = \frac{3}{2n^2\pi^2} (-1)^{n+1}.$$

In definitiva la trasformata di Fourier  $u(n, t)$  è

$$u(n, t) = \frac{3}{2n^2\pi^2} (-1)^{n+1} (e^{n\pi t} + e^{-n\pi t})$$

mentre la soluzione cercata è

$$\begin{aligned} U(x, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2\pi^2} (-1)^{n+1} [e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}] \sin(n\pi x) = \\ &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} [e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}] \sin(n\pi x). \end{aligned}$$

**Esempio 4.2.11** Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con  $U(x, t)$  soggetta alle seguenti condizioni iniziali:  $U_x(0, t) = U_x(6, t) = 0$ , per  $t \geq 0$  e  $U(x, 0) = 2x$ , per  $0 \leq x \leq 6$ .

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita coseno di Fourier con  $l = 6$ , quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo  $u(t, n) = \mathcal{F}_c(U)$  e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(t, n) + U_x(6, t) \cos(n\pi) - U_x(0, t) = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(t, n)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = Ce^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con  $C$  costanti da calcolare. Poichè

$$u(n, 0) = \mathcal{F}_c(U(x, 0)) = \mathcal{F}_c(U(x, 0)) = C$$

dobbiamo calcolare la trasformata coseno della condizione iniziale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(U(x, 0)) &= \int_0^6 2x \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= 2 \int_0^6 x \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= \frac{12}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{6} \right]_0^6 - \frac{12}{n\pi} \int_0^6 \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= -\frac{72}{n^2\pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{6} \right]_0^6 = \\ &= -\frac{72}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned}$$

mentre se  $n = 0$  la trasformata coseno di Fourier vale

$$\int_0^6 2x dx = 36.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n, t) = \frac{72}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] e^{-n^2\pi^2 t/36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x, t) = 6 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] e^{-n^2\pi^2 t/36} \cos \frac{n\pi x}{6}.$$

**Esempio 4.2.12** Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con  $U(x, t)$  soggetta alle seguenti condizioni iniziali:  $U_x(0, t) = U_x(2, t) = 0$ , per  $t \geq 0$  e

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita coseno di Fourier con  $l = 2$ , quindi otteniamo

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo  $u(t, n) = \mathcal{F}_c(U)$  e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{4} u(t, n)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = C e^{-n^2\pi^2 t/4}$$

con  $C$  costanti da calcolare. Poichè

$$u'(n, 0) = -\frac{n^2\pi^2}{4} C = \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)\right) \Rightarrow C = -\frac{4}{n^2\pi^2} \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)\right).$$

Calcoliamo quindi la trasformata coseno della  $U_t(x, 0)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)\right) &= \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \\
 &\quad + \frac{2}{n\pi} \left[ (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 + \\
 &\quad - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_1^2 = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 \right] - \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ \cos(n\pi) - \cos \frac{n\pi x}{2} \right] = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) + \cos \frac{n\pi x}{2} \right] = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ 2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right].
 \end{aligned}$$

La costante  $C$  vale

$$C = -\frac{16}{n^4\pi^4} \left[ 2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right].$$

Invece se  $n = 0$  la trasformata coseno di Fourier vale

$$\int_0^2 U_t(x, 0) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = 1$$

quindi

$$u(n, t) = -\frac{16}{n^4\pi^4} \left[ 2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right] e^{-n^2\pi^2 t/4}$$

mentre la soluzione cercata è

$$U(x, t) = \frac{1}{2} - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4} \left[ 2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right] e^{-n^2\pi^2 t/4} \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

**Esempio 4.2.13** Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni iniziali:  $U(0, t) = U(2, t) = 0$ , per  $t \geq 0$  e

$$U_t(x, 0) = 0, \quad U(x, 0) = \frac{1}{20}x(2-x)$$

con  $0 \leq x \leq 2$ .

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con  $l = 2$ ), ottenendo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = 9\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Posto  $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$  si deve risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{9n^2\pi^2}{4}u(t, n)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \frac{9n^2\pi^2}{4} = 0$$

che ammette due radici complesse coniugate  $\lambda = \pm i3n\pi/2$ , cosicchè essa ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = A \sin \frac{3n\pi t}{2} + B \cos \frac{3n\pi t}{2}$$

con  $A$  e  $B$  costanti da determinarsi. Poichè

$$u(n, 0) = \mathcal{F}_s(U(x, 0)) = \mathcal{F}_s\left(\frac{1}{20}x(2-x)\right)$$

quindi

$$u(n, 0) = B = \mathcal{F}_s\left(\frac{1}{20}x(2-x)\right)$$

mentre

$$u'(n, t) = A\frac{3}{2}n\pi \cos \frac{3n\pi t}{2} - B\frac{3}{2} \sin \frac{3n\pi t}{2}$$

quindi poichè  $u'(n, 0) = 0$  deve essere  $A = 0$ . Calcoliamo quindi la trasformata seno della condizione iniziale  $U(x, 0)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s(U(x, 0)) &= \int_0^2 \frac{1}{20} x(2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{10} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx - \frac{1}{20} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx &= \left[ -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2} \left[ \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi.\end{aligned}$$

Il secondo integrale è:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx &= \left[ -\frac{2x^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{8}{n\pi} \cos n\pi + \frac{8}{n^2\pi^2} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{8}{n\pi} \cos n\pi + \frac{16}{n^3\pi^3} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{16}{n^3\pi^3} [\cos n\pi - 1] - \frac{8}{n\pi} \cos n\pi.\end{aligned}$$

La costante cercata vale pertanto

$$\begin{aligned}B &= -\frac{2}{5n\pi} \cos n\pi - \frac{4}{5n^3\pi^3} [\cos n\pi - 1] + \frac{2}{5n\pi} = \\ &= \frac{4}{5n^3\pi^3} [1 - \cos n\pi].\end{aligned}$$

In definitiva la trasformata di Fourier  $u(n, t)$  è

$$u(n, t) = \frac{4}{5n^3\pi^3} [1 - \cos n\pi] \cos \frac{3n\pi t}{2}$$

mentre la soluzione cercata è

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5n^3\pi^3} [1 - \cos n\pi] \cos \frac{3n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi 2}{2}.$$