

## Equazioni Iperboliche

Le equazioni iperboliche rappresentano probabilmente la classe che descrive il più ampio numero di fenomeni in diversi campi della fisica e della fluidodinamica. Le equazioni di Eulero per fluidi comprimibili, le equazioni di Einstein per la relatività generale sono esempi di equazioni iperboliche, quasi tutte non lineari.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + f(x, t, u) = 0$$

un'equazione è iperbolica se:

$$B^2 - AC > 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0, \quad AC < 0.$$

## L'Equazione delle Onde

Il prototipo dell'equazione iperbolica è costituito dall'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{monodimensionale}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad \text{multidimensionale}$$

in cui  $\nabla^2 u$  è l'operatore laplaciano rispetto alla posizione. L'equazione delle onde descrive a livello generale i diversi generi di onde (sonore, elettromagnetiche, dei liquidi) e si incontra in diversi campi (acustica, elettromagnetismo, fluidodinamica).

La costante  $c$  rappresenta la velocità di propagazione dell'onda. La soluzione  $u(x, t)$  misura l'intensità dell'onda in una particolare posizione  $x$  al tempo  $t$ .

L'equazione delle onde ha una formulazione in termini di equazione del primo ordine:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0.$$

Per verificare che effettivamente è un'equazione iperbolica deriviamola rispetto a  $t$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0,$$

rispetto a  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

e, sostituendo la derivata mista ricaviamo l'espressione dell'equazione iperbolica del secondo ordine:

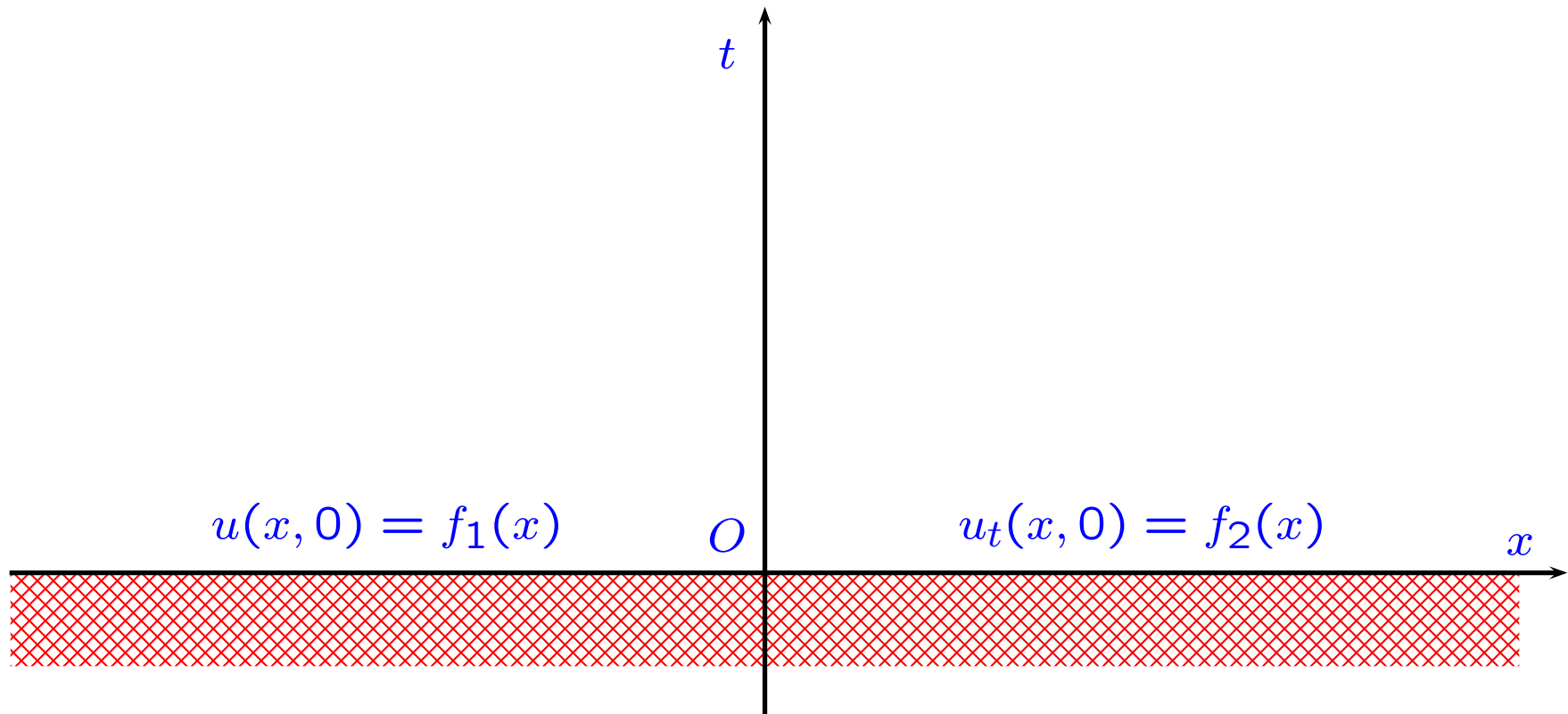
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

## Il problema ai valori iniziali (Problema di Cauchy)

Si tratta di trovare una funzione  $u(x, t)$ , definita e continua per  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$ , che soddisfi l'equazione delle onde per  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$  e le condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(x, 0) = f_2(x) \quad x \in \mathbb{R},$$



## Il problema ai valori iniziali e al contorno

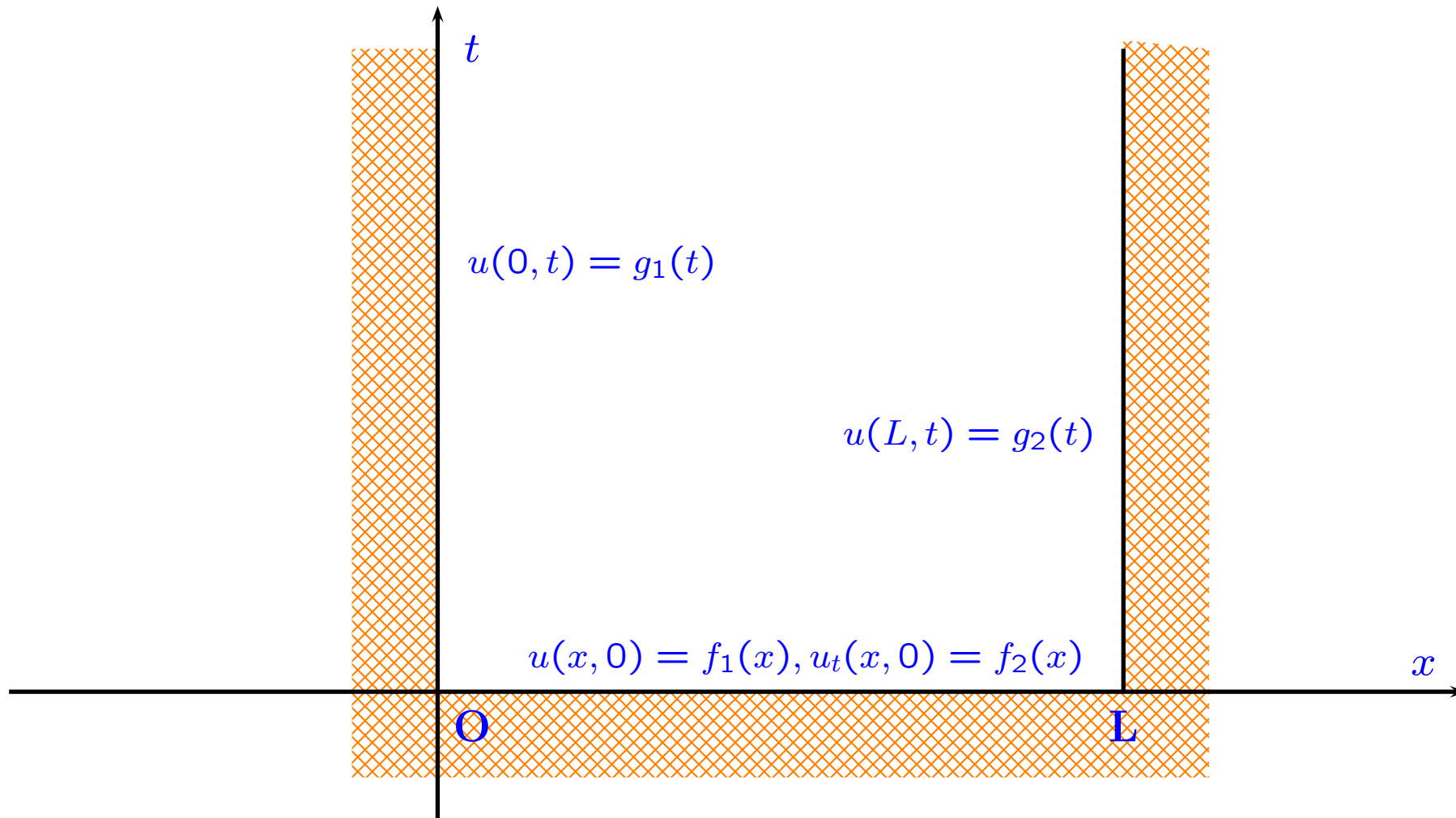
Assegnata una costante  $L > 0$  si deve trovare una funzione  $u(x, t)$ , definita e continua per  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ , che soddisfi l'equazione delle onde per  $0 < x < L$  e  $t > 0$  e le condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u_t(x, 0) = f_2(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

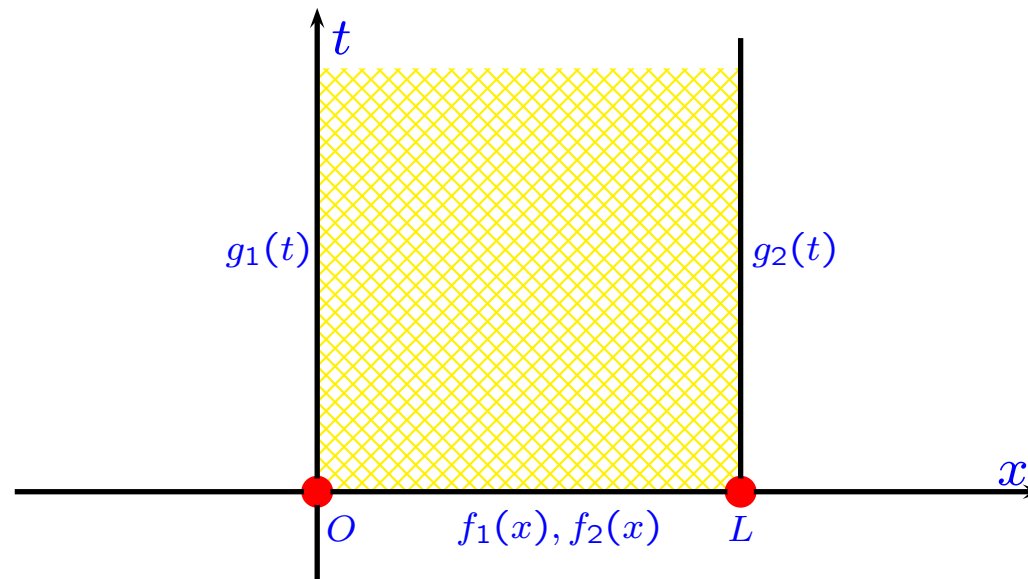
$$u(0, t) = g_1(t) \quad t \geq 0$$

$$u(L, t) = g_2(t) \quad t \geq 0.$$



Anche per le equazioni iperboliche le funzioni che definiscono le condizioni iniziali devono soddisfare le condizioni di omogeneità agli angoli del dominio:

$$f_1(0) = g_1(0), \quad f_1(L) = g_2(0), \quad f_2(0) = g'_1(0), \quad f_2(L) = g'_2(0).$$



## La formula di D'Alembert

La risoluzione per via analitica del problema di Cauchy è possibile effettuando il seguente cambio di variabile:

$$\xi = x + t, \quad \psi = x - t$$

e definendo la funzione

$$\mathcal{U}(\xi, \psi) = u(x(\xi, \psi), t(\xi, \psi)) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \psi), \frac{1}{2}(\xi - \psi)\right).$$

Osserviamo innanzitutto che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \psi} = 0.$$

Infatti

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

e, calcolando la derivata parziale seconda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \psi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial x}{\partial \psi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial t}{\partial \psi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

L'uguaglianza a zero deriva dall'ipotesi che la funzione  $u(x, t)$  soddisfa l'equazione d'onda e dall'uguaglianza delle derivate parziali miste.

Poichè  $\mathcal{U}_{\xi\psi} = 0$  possiamo considerare la derivata  $\mathcal{U}_\xi$  come funzione della sola variabile  $\xi$  quindi integrando rispetto a  $\psi$  si ottiene:

$$\mathcal{U}_\xi = F_1(\xi)$$

e, integrando nuovamente rispetto a  $\xi$ :

$$\mathcal{U}(\xi, \psi) = \int_0^\xi F_1(z)dz + G_2(\psi),$$

dove  $F_1$  e  $G_2$  sono due funzioni arbitrarie differenziabili. Posto

$$G_1(\xi) = \int_0^\xi F_1(z)dz$$

risulta

$$\mathcal{U}(\xi, \psi) = G_1(\xi) + G_2(\psi).$$

Tornando alle variabili  $x$  e  $t$  si ha che la soluzione deve essere:

$$u(x, t) = G_1(x + t) + G_2(x - t).$$

Sostituendo le condizioni iniziali risulta:

$$u(x, 0) = G_1(x) + G_2(x) = f_1(x)$$

$$u_t(x, 0) = G'_1(x) - G'_2(x) = f_2(x).$$

e, differenziando la prima equazione:

$$G'_1(x) + G'_2(x) = f'_1(x)$$

si ricava agevolmente:

$$G'_1(x) = \frac{1}{2} [f'_1(x) + f_2(x)]$$

$$G'_2(x) = \frac{1}{2} [f'_1(x) - f_2(x)],$$

da cui, integrando rispetto a  $x$ , risulta:

$$G_1(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) + \int_0^x f_2(z) dz \right]$$

$$G_2(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) - \int_0^x f_2(z) dz \right].$$

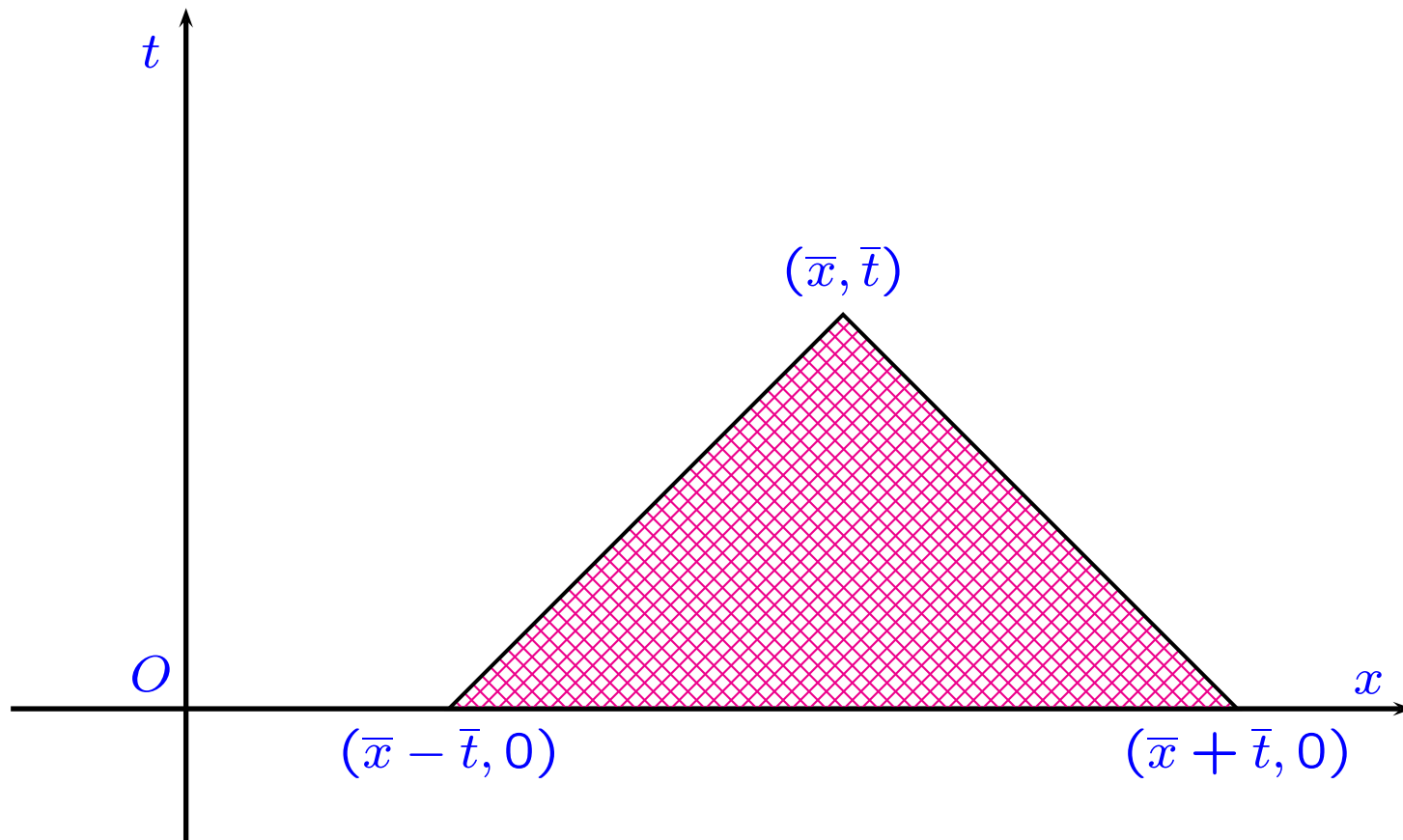
Sostituendo tali formule nell'espressioni di  $u(x, t)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ f_1(x+t) + \int_0^{x+t} f_2(z) dz \right] + \frac{1}{2} \left[ f_1(x-t) - \int_0^{x-t} f_2(z) dz \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ f_1(x+t) + f_1(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} f_2(z) dz \right]. \end{aligned}$$

che prende il nome di **Formula di D'Alembert**.

## Intervallo e regione di dipendenza

Dalla formula di D'Alembert segue che la funzione  $u(\bar{x}, \bar{t})$  è determinata univocamente in base alla conoscenza delle funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  tra i punti  $(\bar{x} - \bar{t}, 0)$  e  $(\bar{x} + \bar{t}, 0)$ . L'intervallo  $[\bar{x} - \bar{t}, \bar{x} + \bar{t}]$  viene detto **intervallo di dipendenza** del punto  $(\bar{x}, \bar{t})$ . La regione interna al triangolo di vertici  $(\bar{x}, \bar{t})$ ,  $(\bar{x} - \bar{t}, 0)$  e  $(\bar{x} + \bar{t}, 0)$  ed evidenziata nella figura seguente si chiama **Regione di dipendenza**.

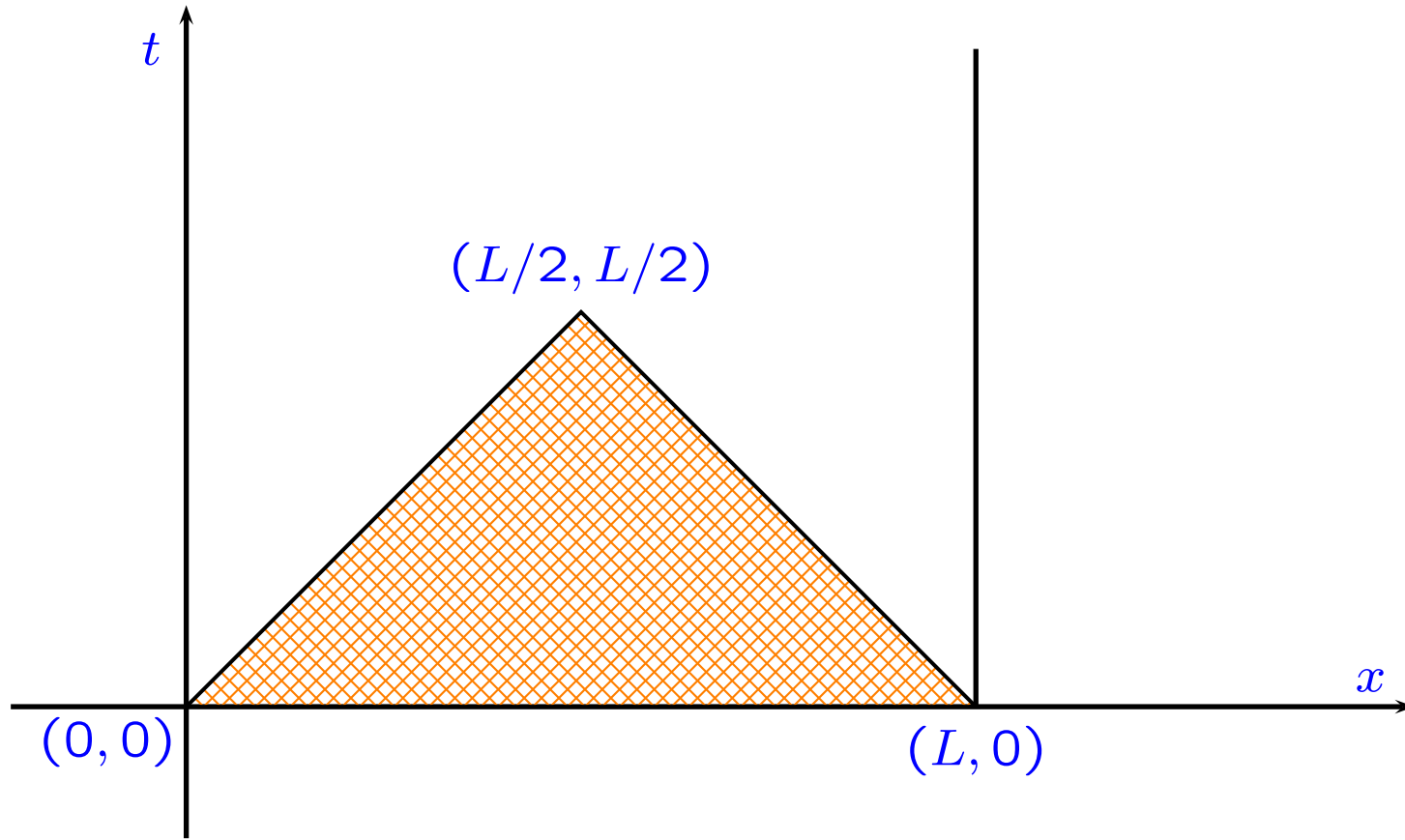


Le rette congiungenti i punti  $(\bar{x}, \bar{t})$  e  $(\bar{x} - \bar{t}, 0)$ ,  $(\bar{x}, \bar{t})$  e  $(\bar{x} + \bar{t}, 0)$  sono dette **rette caratteristiche** dell'equazione d'onda in  $(\bar{x}, \bar{t})$ .

Osserviamo che, nel caso in cui il problema sia ai valori al contorno, la formula di D'Alembert può essere usata per calcolare la soluzione solo nel triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(L, 0)$  e  $(L/2, L/2)$ .

Nel caso di equazione del primo ordine le rette caratteristiche hanno equazione:

$$x = x_0 + at, \quad x = x_0 - at.$$



## Un metodo esplicito per l'equazione d'onda

Come al solito si costruisce la griglia suddividendo l'intervallo  $[0, L]$  in sottointervalli di ampiezza  $h = L/(N + 1)$  e definendo gli istanti di tempo multipli di un valore  $\Delta t$ :

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N + 1,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Le derivate parziali seconde sono approssimate nel modo consueto:

$$u_{xx}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{h^2}$$

$$u_{tt}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{(\Delta t)^2}$$

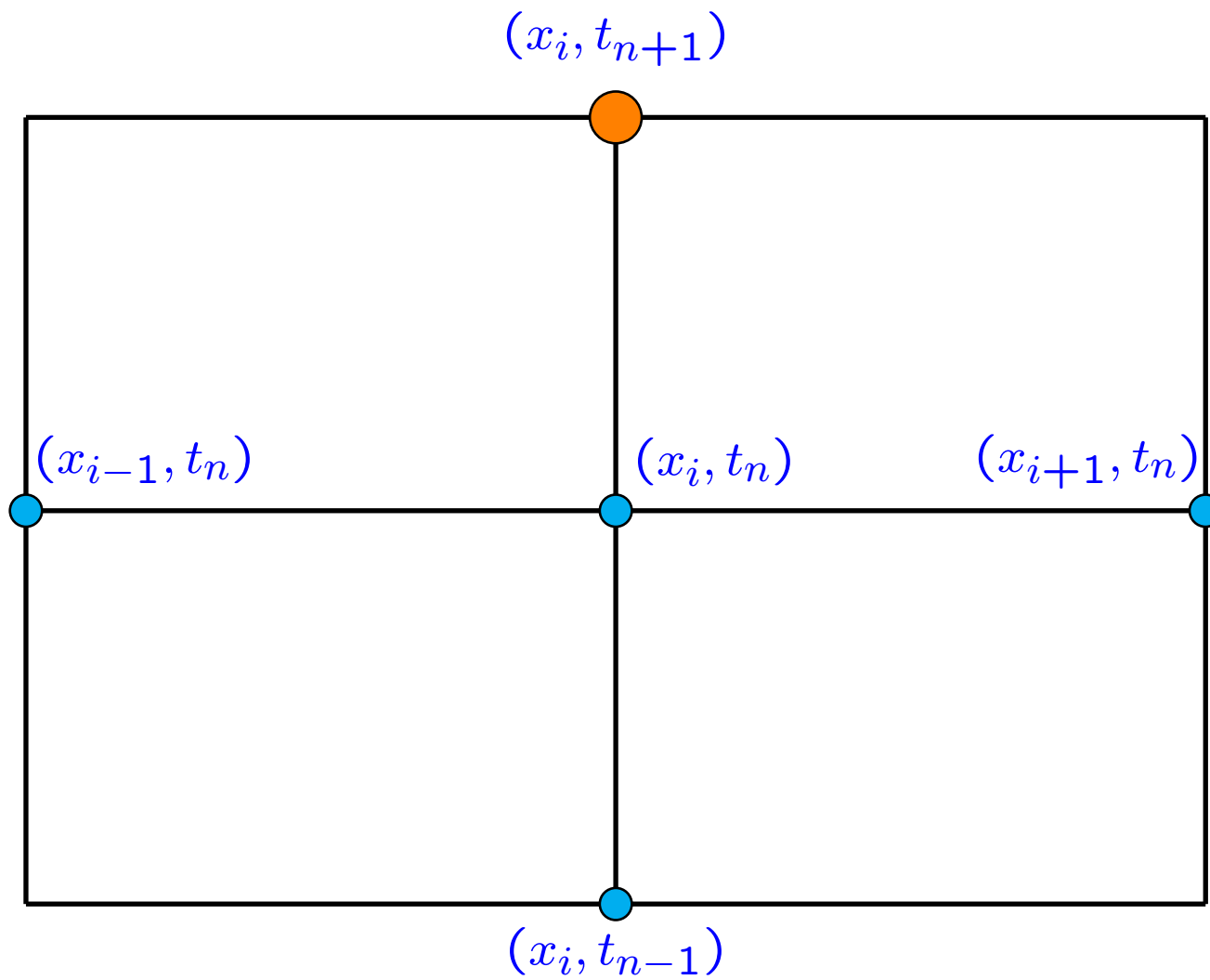
$$\frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{h^2} - \frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{(\Delta t)^2} = 0$$

$$u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1} = \frac{(\Delta t)^2}{h^2} (u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n})$$

Poniamo  $\alpha = (\Delta t)^2/h^2$  e ricaviamo  $u_{i,n+1}$ :

$$u_{i,n+1} = 2u_{i,n} - u_{i,n-1} + \alpha(u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n})$$

$$u_{i,n+1} = \alpha u_{i-1,n} + 2(1-\alpha)u_{i,n} + \alpha u_{i+1,n} - u_{i,n-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 1.$$



Il primo insieme di valori che è possibile calcolare è quindi  $u_{i,2}$ , per i quali è però necessario conoscere  $u_{i,1}$ , poichè i valori  $u_{i,0}$  sono forniti dalla conoscenza della condizione iniziale

$$u_{i,0} = u(x_i, 0) = f_1(x_i).$$

Il problema è ora quello di approssimare la soluzione nei punti  $(x_i, \Delta t)$ , cioè conoscere i valori:

$$u_{i,1} \simeq u(x_i, \Delta t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Per questo motivo si utilizza l'espansione in serie di Taylor:

$$u(x_i, \Delta t) \simeq u(x_i, 0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0).$$

Poichè la funzione  $u(x, t)$  soddisfa l'equazione d'onda, allora possiamo sostituire  $u_{tt}$  con  $u_{xx}$ , e le condizioni iniziali per  $u(x, t)$  e  $u_t(x, t)$ :

$$u(x_i, \Delta t) \simeq f_1(x_i) + \Delta t f_2(x_i) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{xx}(x_i, 0).$$

L'ultimo termine della serie viene approssimato come al solito:

$$\begin{aligned}u_{xx}(x_i, 0) &\simeq \frac{u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)}{h^2} = \\ &= \frac{f_1(x_{i+1}) - 2f_1(x_i) + f_1(x_{i-1}))}{h^2}\end{aligned}$$

cosicchè si ottiene la seguente approssimazione:

$$u_{i,1} \simeq f_1(x_i) + \Delta t f_2(x_i) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{f_1(x_{i+1}) - 2f_1(x_i) + f_1(x_{i-1}))}{h^2}.$$

## Un metodo implicito per l'equazione d'onda

Per risolvere l'equazione d'onda si può discretizzare in modo diverso la derivata seconda di tipo spaziale:

$$u_{xx}(x_i, t_n) \simeq \frac{1}{2} [u_{xx}(x_i, t_{n+1}) + u_{xx}(x_i, t_{n-1})]$$

$$u_{tt}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$u_{xx}(x_i, t_{n+1}) \simeq \frac{u_{i+1,n+1} - 2u_{i,n+1} + u_{i-1,n+1}}{h^2}$$

$$u_{xx}(x_i, t_{n-1}) \simeq \frac{u_{i+1,n-1} - 2u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}}{h^2}$$

$$u_{xx}(x_i, t_n) \simeq$$

$$\left[ \frac{u_{i+1,n+1} - 2u_{i,n+1} + u_{i-1,n+1}}{2h^2} + \frac{u_{i+1,n-1} - 2u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}}{2h^2} \right].$$

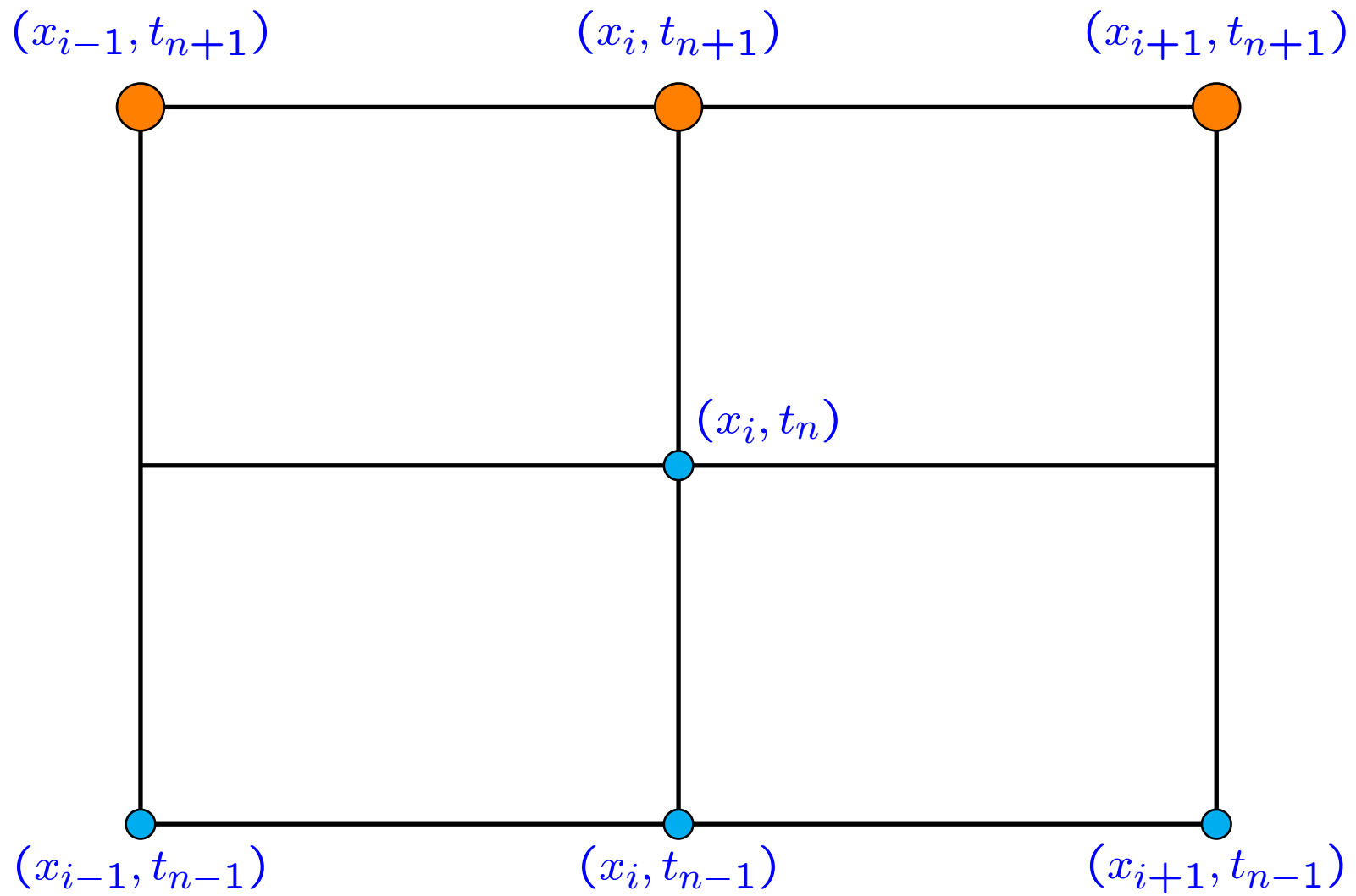
Sostituendo le approssimazioni nell'equazione alle derivate parziali si ottiene:

$$\frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1,n+1} - 2u_{i,n+1} + u_{i-1,n+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,n-1} - 2u_{i,n-1} + u_{i-1,n-1}}{h^2} \right] = 0.$$

Dopo diversi passaggi si arriva alla formulazione finale:

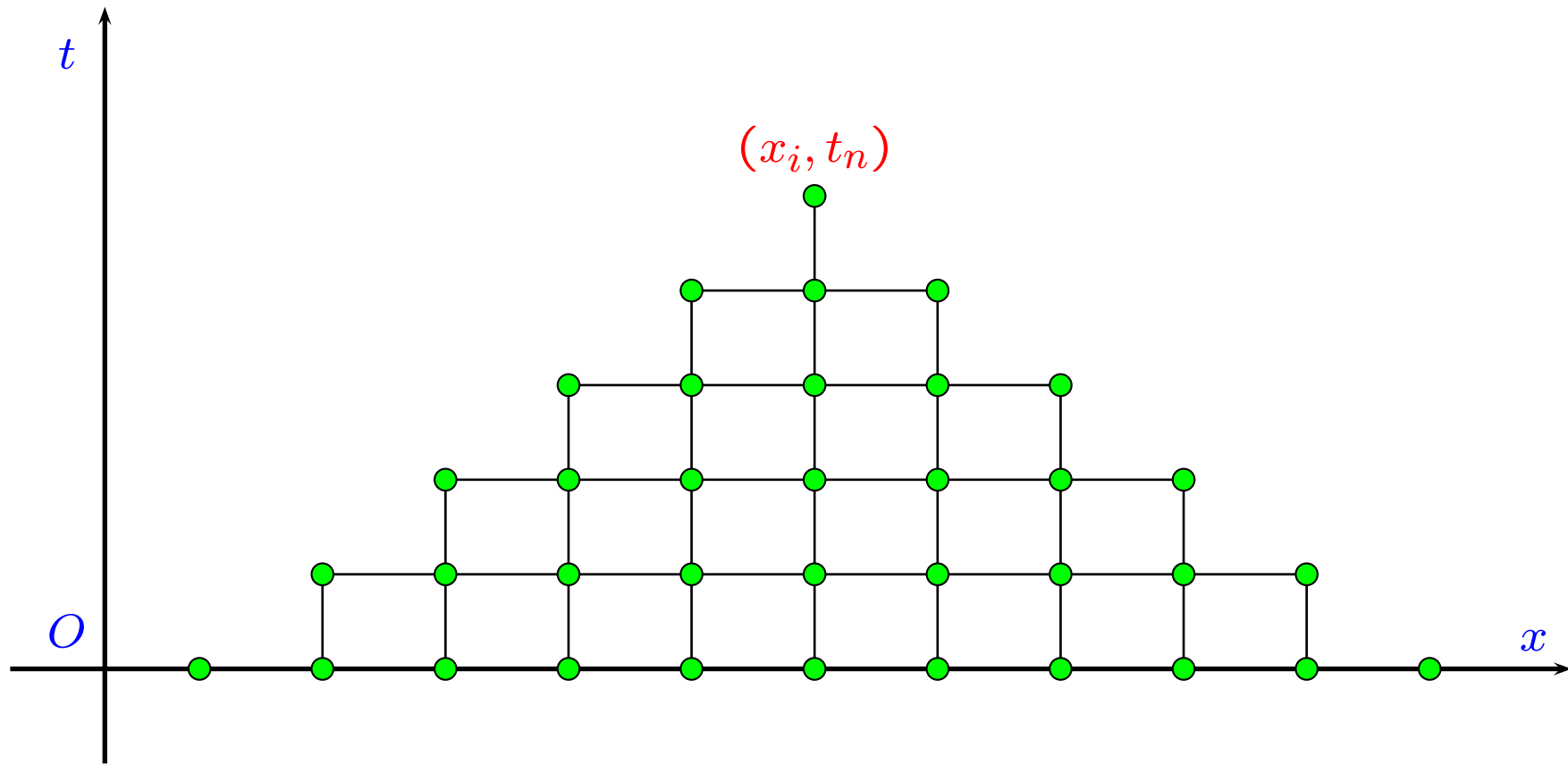
$$u_{i-1,n+1} - 2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{\Delta t} \right)^2 \right] u_{i,n+1} + u_{i+1,n+1} = -u_{i-1,n-1} + \\ -u_{i+1,n-1} - 4 \left( \frac{h}{\Delta t} \right)^2 u_{i,n} + 2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{\Delta t} \right)^2 \right] u_{i,n-1}.$$

Se la soluzione numerica è nota ai livelli  $t_n$  e  $t_{n-1}$  allora, utilizzando le condizioni al contorno, la formulazione del metodo costituisce un sistema lineare di  $N - 1$  equazioni nelle  $N - 1$  incognite  $u_{i,n+1}$ ,  $i = 1, N - 1$ . Tale sistema ha una struttura tridiagonale a predominanza diagonale quindi ammette un'unica soluzione. Per calcolare la soluzione al livello  $t_1$  si può utilizzare lo stesso di approssimazione visto per il metodo esplicito.

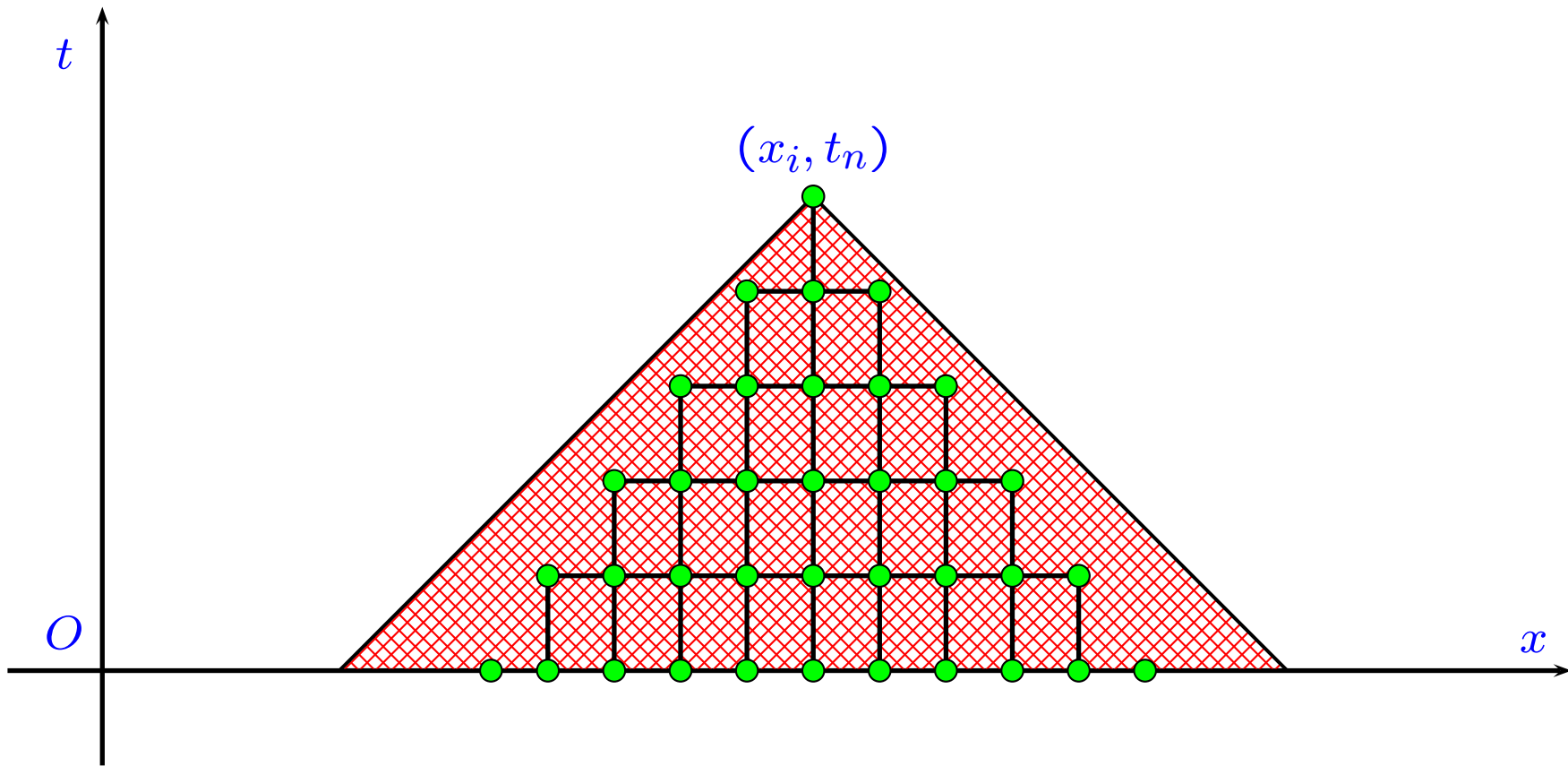


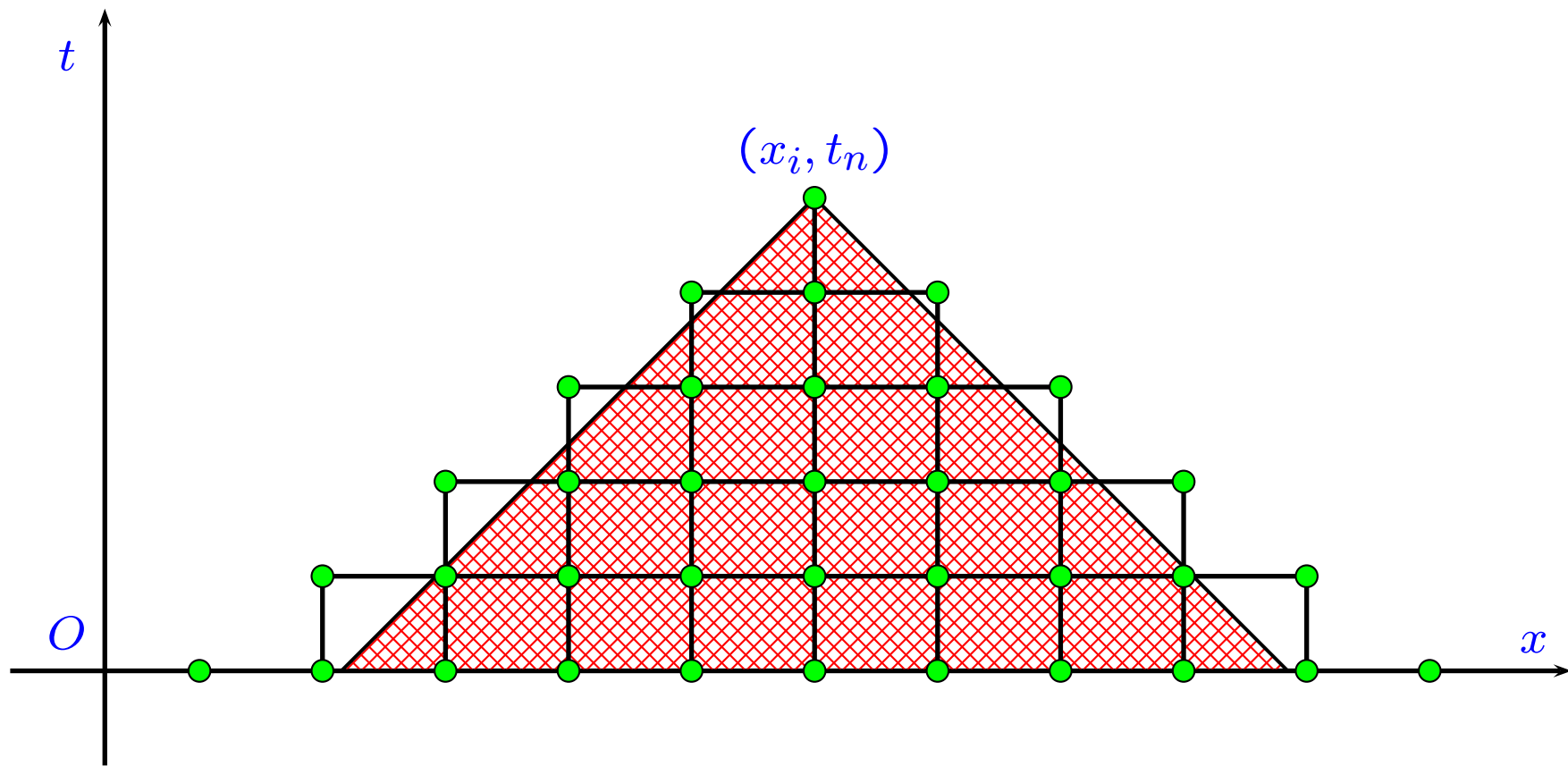
## Condizione di Courant, Friedrichs e Lewy

L'approssimazione  $u_{i,n}$  dipende, comunemente, da approssimazioni al livello precedente  $n - 1$ , in particolare da  $u_{i,n-1}$ ,  $u_{i-1,n-1}$  e  $u_{i+1,n-1}$ . A loro volta tali approssimazioni dipendono da altre al livello  $n - 2$ , in particolare da  $u_{i\pm k,n-2}$ , con  $k = -2, \dots, 2$ , così via. In questo modo procedendo a ritroso è possibile definire una specie di dominio di dipendenza discreto che contiene tutte le approssimazioni, dal livello 0 al livello  $n$ , necessarie al calcolo di  $u_{i,n}$ .

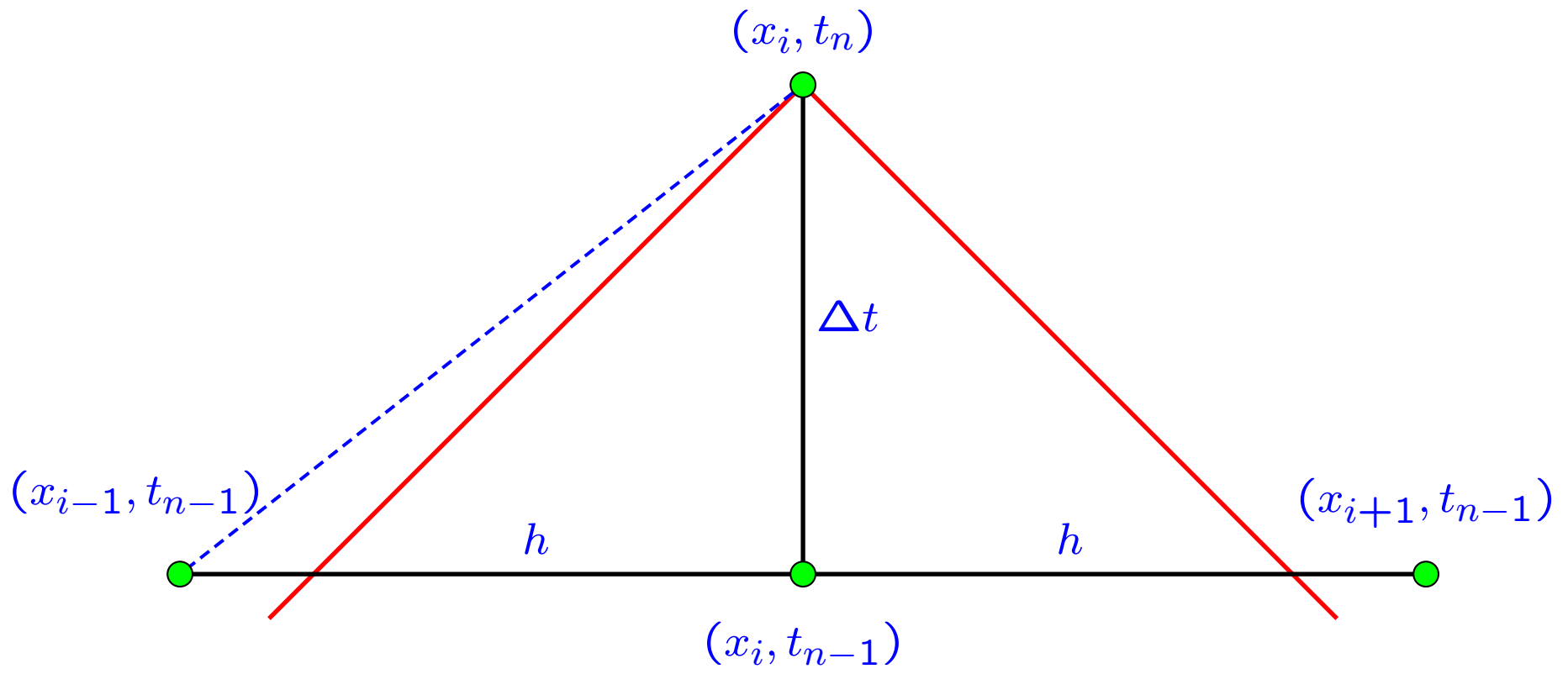


Appare ovvio che tale dominio discreto debba avere necessariamente un legame con quello continuo che abbiamo definito in precedenza. Se il dominio continuo includesse quello discreto questo vorrebbe dire che l'approssimazione  $u_{i,n+1}$  è stata ottenuta considerando solo una parte dei valori da cui dipende il valore teorico  $u(x_i, t_{n+1})$ , sicuramente tale approssimazione numerica non può essere un valore affidabile. Al contrario se il dominio discreto contiene quello continuo significa che la soluzione numerica ha utilizzato effettivamente tutti i dati necessari (e anche altri).





Dal punto di vista matematico si deve richiedere che tale situazione si verifichi, imponendo opportune condizioni sui passi di discretizzazione spaziale e temporale. Infatti è necessario richiedere che la retta caratteristica passante per  $(x_i, t_{n+1})$  intersechi la retta di dipendenza del metodo numerico.



La condizione viene verificata se la retta tratteggiata blu ha un coefficiente angolare inferiore rispetto a quello della retta caratteristica (che in questo caso vale 1), cioè se

$$\frac{\Delta t}{h} \leq 1.$$

Tale relazione prende il nome di **Condizione di Courant, Friedrichs e Lewy**.

## Il metodo di Lax-Wendroff

Un altro esempio di equazione iperbolica è la seguente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0. \quad (1)$$

Il metodo di Lax-Wendroff, esplicito, risolve numericamente l'equazione partendo dall'espansione in serie di Taylor della funzione  $u(x_i, t_n + \Delta t)$  rispetto alla variabile temporale e prendendo  $(x_i, t_n)$  come punto iniziale:

$$u(x_i, t_n + \Delta t) \simeq u(x_i, t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n).$$

Sostituendo la derivata prima rispetto a  $t$ :

$$u(x_i, t_n + \Delta t) \simeq u(x_i, t_n) - a \Delta t u_x(x_i, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x_i, t_n)$$

e, in base all'uguaglianza

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$$

la derivata seconda rispetto a  $t$  si ottiene:

$$u(x_i, t_n + \Delta t) \simeq u(x_i, t_n) - a\Delta t u_x(x_i, t_n) + \frac{(a\Delta t)^2}{2} u_{xx}(x_i, t_n).$$

Le derivate spaziali vengono approssimate usando la solita formula per  $u_{xx}(x_i, t_n)$  e quella alle differenze centrali per la derivata prima.

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} - \frac{a\Delta t}{2h} (u_{i+1,n} - u_{i-1,n}) + \frac{(a\Delta t)^2}{2h^2} (u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}).$$

Posto

$$\alpha = \frac{a\Delta t}{h}$$

si ottiene lo schema

$$\begin{aligned}u_{i,n+1} &= u_{i,n} - \frac{\alpha}{2} (u_{i+1,n} - u_{i-1,n}) + \frac{\alpha^2}{2} (u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}) \\ &= \frac{\alpha}{2}(1 + \alpha)u_{i-1,n} + (1 - \alpha^2)u_{i,n} - \frac{\alpha}{2}(1 - \alpha)u_{i+1,n}.\end{aligned}$$