

Capitolo 4

Equazioni non Lineari

4.1. Introduzione

Le radici di un'equazione non lineare $f(x) = 0$ non possono, in generale, essere espresse esplicitamente e anche se ciò è possibile spesso l'espressione si presenta in forma talmente complicata da essere praticamente inutilizzabile. Di conseguenza per poter risolvere equazioni di questo tipo siamo obbligati ad utilizzare metodi numerici che sono, in generale, di tipo iterativo, cioè partendo da una (o più) approssimazioni della radice, producono una successione x_0, x_1, x_2, \dots , convergente alla radice. Per alcuni di questi metodi per ottenere la convergenza è sufficiente conoscere un intervallo $[a, b]$ che contiene la soluzione, altri metodi richiedono invece la conoscenza di una buona approssimazione iniziale. Talvolta è opportuno utilizzare in maniera combinata due metodi, uno del primo tipo e uno del secondo.

Prima di analizzare alcuni metodi per l'approssimazione delle radici dell'equazione $f(x) = 0$ diamo la definizione di molteplicità di una radice.

Definizione 4.1.1 *Sia $f \in \mathcal{C}^r([a, b])$ per un intero $r > 0$. Una radice α di $f(x)$ si dice di molteplicità r se*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^r} = c \quad c \neq 0, c \neq \pm\infty. \quad (4.1)$$

4.2. Metodo di Bisezione

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$, e sia $f(a)f(b) < 0$. Sotto tali ipotesi esiste sicuramente almeno un punto nell'intervallo $[a, b]$ in cui f si annulla. L'idea alla base del *Metodo di Bisezione* consiste nel costruire una successione di intervalli $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$, con $I_0 = [a_0, b_0] \equiv [a, b]$, tali che:

1. $I_{k+1} \subset I_k$;
2. $\alpha \in I_k, \forall k \geq 0$;
3. l'ampiezza di I_k tende a zero per $k \rightarrow +\infty$.

La successione degli I_k viene costruita nel seguente modo. Innanzitutto si pone

$$I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$$

e si calcola il punto medio

$$c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Se $f(c_1) = 0$ allora $\alpha = c_1$, altrimenti si pone:

$$I_1 = [a_1, b_1] \equiv \begin{cases} a_1 = a_0 & b_1 = c_1 & \text{se } f(a_0)f(c_1) < 0 \\ a_1 = c_1 & b_1 = b_0 & \text{se } f(a_0)f(c_1) > 0. \end{cases}$$

Ora, a partire da $I_1 = [a_1, b_1]$, si ripete la stessa procedura. In generale al passo k si calcola

$$c_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Se $f(c_{k+1}) = 0$ allora $\alpha = c_{k+1}$, altrimenti si pone:

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv \begin{cases} a_{k+1} = a_k & b_{k+1} = c_k & \text{se } f(a_k)f(c_{k+1}) < 0 \\ a_{k+1} = c_{k+1} & b_{k+1} = b_k & \text{se } f(a_k)f(c_{k+1}) > 0. \end{cases}$$

La successione di intervalli I_k così costruita soddisfa automaticamente le condizioni 1) e 2). Per quanto riguarda la 3) abbiamo:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

e dunque l'ampiezza di I_k tende a zero quando $k \rightarrow +\infty$. La continuità di f garantisce poi la convergenza delle successioni $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ ad una radice di $f(x)$.

Infatti, per costruzione, $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ è una successione monotona decrescente, limitata inferiormente e dunque convergente, mentre $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è una successione monotona crescente, limitata superiormente e dunque convergente. Allora da:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k &= \xi_1 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \xi_2 \end{aligned}$$

segue

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Ancora poichè $f(a_k)f(b_k) \leq 0$ per ogni k , si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(a_k)f(b_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k\right) f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k\right) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(\xi) \leq 0$$

e quest'ultima ha senso solo se $f(\xi) = 0$. Quindi in definitiva $\alpha = \xi$. Generalmente costruendo le successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ accade che la condizione $f(c_k) = 0$, per un certo valore k , non si verifica mai a causa degli errori di arrotondamento. Quindi è necessario stabilire un opportuno criterio di stop che ci permetta di fermare la procedura quando riteniamo di aver raggiunto una precisione soddisfacente. Per esempio si può imporre:

$$b_k - a_k \leq \varepsilon \tag{4.2}$$

dove ε è una prefissata tolleranza. La (4.2) determina anche un limite per il numero di iterate infatti:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k > \log_2 \left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right).$$

Poichè $b_k - \alpha \leq b_k - a_k$, il criterio (4.2) garantisce che α è approssimata da c_{k+1} con un errore assoluto minore di ε . Se $0 \notin [a, b]$ si può usare come criterio di stop

$$\frac{b_k - a_k}{\min(|a_k|, |b_k|)} \leq \varepsilon \tag{4.3}$$

che garantisce che α è approssimata da c_{k+1} con un errore relativo minore di ε . Un ulteriore criterio di stop è fornito dal test:

$$|f(c_k)| \leq \varepsilon. \quad (4.4)$$

È comunque buona norma utilizzare due criteri di stop insieme, per esempio (4.2) e (4.4) oppure (4.3) e (4.4).

4.3. Il metodo della falsa posizione

Una variante del metodo delle bisezioni è appunto il metodo della falsa posizione. Partendo sempre da una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$, in questo caso si approssima la radice considerando l'intersezione della retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ con l'asse x . L'equazione della retta è

$$y = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

pertanto il punto c_1 , sua intersezione con l'asse x , è:

$$c_1 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Si testa a questo punto l'appartenenza della radice α ad uno dei due intervalli $[a, c_1]$ e $[c_1, b]$ e si procede esattamente come nel caso del metodo delle bisezioni, ponendo

$$[a_1, b_1] \equiv \begin{cases} a_1 = a, & b_1 = c_1 & \text{se } f(a)f(c_1) < 0 \\ a_1 = c_1, & b_1 = b & \text{se } f(a)f(c_1) > 0. \end{cases}$$

Ad un generico passo k si calcola

$$c_k = b_{k-1} - f(b_{k-1}) \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}$$

e si pone

$$[a_k, b_k] \equiv \begin{cases} a_k = a_{k-1} & b_k = c_k & \text{se } f(a_{k-1})f(c_k) < 0 \\ a_k = c_k & b_k = b_{k-1} & \text{se } f(a_{k-1})f(c_k) > 0. \end{cases}$$

Anche per questo metodo è possibile dimostrare la convergenza nella sola ipotesi di continuità della funzione $f(x)$.

4.4. Metodi di Iterazione Funzionale

Il metodo di bisezione può essere applicato ad una vastissima classe di funzioni, in quanto per la sua costruzione è richiesta solo la continuità della funzione. Tuttavia ha lo svantaggio di risultare piuttosto lento, infatti ad ogni passo si guadagna in precisione una cifra binaria. Poiché $10^{-1} \simeq 2^{-3.3}$ per passare da t a $t + 1$ cifre decimali significative sono mediamente necessarie 3.3 iterate. Inoltre la velocità di convergenza è indipendente dalla funzione $f(x)$ poiché il metodo utilizza esclusivamente il segno assunto dalla funzione in determinati punti e non il suo valore. Il metodo delle bisezioni può essere comunque utilizzato con profitto per determinare delle buone approssimazioni della radice α che possono essere utilizzate dai metodi iterativi che ci apprestiamo a trattare.

Infatti richiedendo alla f supplementari condizioni di regolarità è possibile individuare una vasta classe di metodi che forniscono le stesse approssimazioni del metodo di bisezione utilizzando però un numero di iterate molto minore. In generale questi metodi sono del tipo:

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

con x_0 assegnato valore iniziale e forniscono un'approssimazione delle soluzioni dell'equazione

$$x = g(x). \quad (4.6)$$

Ogni punto α tale che $\alpha = g(\alpha)$ si dice *punto fisso* o *punto unito* di g . Per poter applicare uno schema del tipo (4.5) all'equazione $f(x) = 0$, bisogna prima trasformare questa nella forma (4.6). Ad esempio se $[a, b]$ è l'intervallo di definizione di f ed $h(x)$ è una qualunque funzione tale che $h(x) \neq 0$, per ogni $x \in [a, b]$, si può porre:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}. \quad (4.7)$$

Ovviamente ogni punto fisso di g è uno zero di f e viceversa.

Teorema 4.4.1 *Sia $g \in \mathcal{C}([a, b])$ e assumiamo che la successione $\{x_k\}$ generata da (4.5) sia contenuta in $[a, b]$. Allora se tale successione converge, il limite è il punto fisso di g .*

Dimostrazione.

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} g(x_k) = g\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) = g(\alpha). \quad \square$$

Teorema 4.4.2 *Sia α punto fisso di g e $g \in \mathcal{C}^1([\alpha - \rho, \alpha + \rho])$, per qualche $\rho > 0$. Scelto x_0 tale che*

$$|x_0 - \alpha| \leq \rho$$

per la successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generata da (4.5) si ha che se $|g'(x)| < 1$, per $|x - \alpha| \leq \rho$, allora $|x_k - \alpha| \leq \rho$, per ogni k , e la successione $\{x_k\}$ converge a α .

Dimostrazione. Sia

$$\lambda = \max_{|x - \alpha| \leq \rho} |g'(x)| < 1.$$

Proviamo per induzione che tutti gli elementi della successione $\{x_k\}$ sono contenuti nell'intervallo di centro α e ampiezza 2ρ . Per $k = 0$ si ha banalmente $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$. Assumiamo che $|x_k - \alpha| \leq \rho$ e dimostriamolo per $k + 1$.

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| = |g'(\xi_k)| |x_k - \alpha|$$

dove $|\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha| \leq \rho$. Pertanto

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha| < |x_k - \alpha| \leq \rho.$$

Proviamo ora che:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha.$$

Da $|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|$ segue

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda^{k+1} |x_0 - \alpha|.$$

Conseguentemente qualunque sia x_0 si ha:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha. \quad \square$$

Definizione 4.4.1 *Un metodo iterativo del tipo (4.5) si dice localmente convergente ad una soluzione α del problema $f(x) = 0$ se esiste un intervallo $[a, b]$ contenente α tale che, per ogni $x_0 \in [a, b]$, la successione generata da (4.5) converge a α .*

Una volta determinata una condizione sufficiente per la convergenza della successione $\{x_k\}$ ad un punto fisso di $g(x)$ si deve essere sicuri che tale punto fisso è unico. Infatti se, oltre ad α esistesse anche $\beta \in [a, b]$ tale che $\beta = g(\beta)$, con $\alpha \neq \beta$, allora

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)| |\alpha - \beta|$$

con $\xi \in [a, b]$. Poichè $|g'(\xi)| < 1$ si ha:

$$|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$$

e ciò è assurdo.

Come abbiamo già visto nel caso del metodo delle bisezioni anche per metodi di iterazione funzionale è necessario definire dei criteri di arresto per il calcolo delle iterazioni. I criteri di arresto per un processo iterativo basato sullo schema (4.5) sono i seguenti:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{\min(|x_{k+1}|, |x_k|)} \leq \varepsilon \quad |x_{k+1}|, |x_k| \neq 0$$

$$|f(x_k)| \leq \varepsilon$$

dove ε è una prefissata tolleranza dipendente dalla precisione con cui si vuole approssimare una soluzione.

Per confrontare differenti metodi iterativi che approssimano la stessa radice α di $f(x) = 0$, si può considerare la velocità con cui tali successioni convergono verso α . Lo studio della velocità di convergenza passa attraverso il concetto di ordine del metodo.

Definizione 4.4.2 *Sia $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una successione convergente ad α e tale che $x_k \neq \alpha$, per ogni k . Se esiste un numero reale $p \geq 1$ tale che*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \gamma \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 < \gamma \leq 1 & \text{se } p = 1 \\ \gamma > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

allora si dice che la successione ha ordine di convergenza p . La costante γ prende il nome di costante asintotica di convergenza.

In particolare se $p = 1$ e $0 < \gamma < 1$ allora la convergenza si dice *lineare*, se $p = 1$ e $\gamma = 1$ allora la convergenza si dice *sublineare*, mentre se $p > 1$ allora la convergenza si dice *superlineare*.

Osservazione. La relazione (4.8) implica che esiste una costante positiva β ($\beta \simeq \gamma$) tale che, per k sufficientemente grande:

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \beta |x_k - \alpha|^p \quad (4.9)$$

La (4.9) indica che la riduzione di errore assoluto ad ogni passo è tanto maggiore quanto più alto è l'ordine di convergenza e, a parità di ordine, quanto più piccola è la costante asintotica di convergenza. I metodi aventi convergenza lineare sono caratterizzati dal fatto che $g'(\alpha) \neq 0$ mentre il seguente teorema stabilisce una relazione tra la funzione $g(x)$ e l'ordine di convergenza di un metodo nel caso sia superlineare.

Teorema 4.4.3 (Enunciato). *Sia α punto fisso di $g \in \mathcal{C}^p([a, b])$, $p \geq 2$, intero. Scelto $x_0 \in [a, b]$ la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo (4.5) converge a α con ordine p se e soltanto se*

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0. \quad \square$$

Definizione 4.4.3 *Un metodo iterativo convergente ad α si dice di ordine p (di ordine almeno p) se tutte le successioni ottenute al variare del punto iniziale in un opportuno intorno di α convergono con ordine di convergenza p (almeno p).*

4.5. Metodo di Newton-Raphson

Nell'ipotesi che f sia derivabile ed ammetta derivata prima continua allora un altro procedimento per l'approssimazione dello zero della funzione $f(x)$ è il *metodo di Newton-Raphson*, noto anche come *metodo delle tangenti*. Nella Figura 4.1 è riportata l'interpretazione geometrica di tale metodo. A partire dall'approssimazione x_0 si considera la retta tangente la funzione f passante per il punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Si calcola l'ascissa x_1 del punto di intersezione tra tale retta

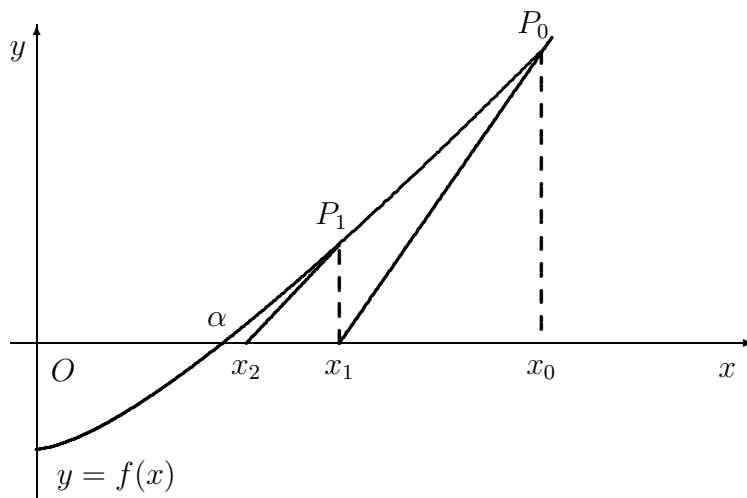


Figura 4.1: Metodo di Newton-Raphson

tangente e l'asse delle x e si ripete il procedimento a partire dal punto P_1 di coordinate $(x_1, f(x_1))$.

È facile vedere che il metodo definisce il seguente processo iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

che equivale, scegliendo in (4.7) $h(x) = f'(x)$, al metodo di iterazione funzionale in cui la funzione $g(x)$ è

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4.11)$$

Per esaminare l'ordine di convergenza del metodo in questione consideriamo prima il α è radice semplice dell'equazione $f(x) = 0$. Supponiamo che per ipotesi $f'(x) \neq 0$, per $x \in [a, b]$, dove $[a, b]$ è un opportuno intervallo contenente α . Calcoliamo quindi la derivata prima di $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}. \quad (4.12)$$

Poichè α è semplice risulta $f'(\alpha) \neq 0$ e quindi:

$$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0$$

esiste quindi un intorno di α nel quale $|g'(x)| < 1$, per ogni x , e per il teorema (4.4.2) comunque si sceglie un punto iniziale appartenente a tale intorno il metodo di Newton-Raphson risulta convergente.

Se la radice α ha molteplicità $r > 1$ l'ordine di convergenza del metodo non è più 2. Se x_0 è sufficientemente vicino ad α è $|g'(x)| < 1$ e quindi per il teorema 4.4.2 il metodo è ancora convergente ma l'ordine di convergenza è 1.

Osservazione Quando applicando ripetutamente la formula di Newton-Raphson accade che la derivata prima della funzione $f(x)$ si mantiene sensibilmente costante allora si può porre

$$M = f'(x)$$

e applicare la formula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M} \quad (4.13)$$

anzichè la (4.10). La (4.13) definisce un metodo che viene detto *metodo di Newton semplificato* oppure *metodo della direzione costante* in quanto geometricamente equivale all'applicazione del metodo di Newton in cui anzichè prendere la retta tangente la curva f si considera la retta avente coefficiente angolare uguale a M .

4.6. I Metodi delle Secanti e delle Secanti a due punti

Il metodo delle secanti è definito dalla relazione

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - c)}{f(x_k) - f(c)}$$

dove $c \in [a, b]$. Il significato geometrico di tale metodo è il seguente: ad un generico passo k si considera la retta congiungente i punti di coordinate $(x_k, f(x_k))$ e $(c, f(c))$ e si pone x_{k+1} pari al punto di intersezione di

tale retta con l'asse x . Dalla formula si evince che la funzione iteratrice del metodo è

$$g(x) = x - \frac{f(x)(x - c)}{f(x) - f(c)}.$$

In base alla teoria vista nei paragrafi precedenti il metodo ha ordine di convergenza 1 se $g'(\alpha) \neq 0$. Può avere ordine di convergenza almeno 1 se $g'(\alpha) = 0$. Tale eventualità si verifica se la tangente alla curva in α ha lo stesso coefficiente angolare della retta congiungente i punti $(\alpha, 0)$ e $(c, f(c))$.

Poichè il metodo delle secanti ha lo svantaggio di avere, solitamente, convergenza lineare mentre il metodo di Newton-Raphson, pur avendo convergenza quadratica, ha lo svantaggio di richiedere, ad ogni passo, due valutazioni di funzioni: $f(x_k)$ ed $f'(x_k)$, quindi se il costo computazionale di $f'(x_k)$ è molto più elevato rispetto a quello di $f(x_k)$ può essere più conveniente l'uso di metodi che necessitano solo del calcolo del valore della funzione $f(x)$. Un metodo di questo tipo è **il metodo delle secanti a due punti**, che consiste nel considerare, alla k -esima iterata, la retta passante per i punti di coordinate $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$ e definire x_{k+1} come il punto d'intersezione di tale retta con l'asse x . Ne risulta il seguente metodo:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (4.14)$$

Poichè il metodo delle secanti a due punti non rientra tra quelli di iterazione funzionale, per ricavare l'ordine del metodo non si possono applicare i teoremi enunciati in precedenza, pertanto si deve procedere in un modo più che sperimentale. Infatti in questo caso si può vedere che l'ordine non è neanche un numero intero ma irrazionale:

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Il metodo delle secanti a due punti ha comunque una convergenza di tipo superlineare, come il metodo di Newton-Raphson, ma ha il vantaggio di richiedere solo una valutazione funzionale ad ogni passo (tranne al primo passo) e di non richiedere il calcolo della derivata prima.