# FORMA CANONICA DI JORDAN

A. Lotta

*Appunti per gli studenti del corso di* **Geometria 3**, *a.a. 2003/04.*

## 1. Introduzione

Siano $\mathbb{K}$ un campo, $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to V$ un endomorfismo di $V$. Supponiamo che il polinomio caratteristico di $f$ sia completamente riducibile e che $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \geq 1$, siano gli autovalori distinti di $f$. È ben noto che la dimensione dell'autospazio $V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$ è al massimo la molteplicità algebrica $\mu_i$ del corrispondente autovalore $\lambda_i$. La circostanza che tale massimo sia raggiunto, per ciascun autovalore, è equivalente al fatto che

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \tag{1}$$

il che accade se e solo se $f$ è diagonalizzabile.

La decomposizione (1) è una decomposizione di $V$ in sottospazi $f$-invarianti, ovvero $f(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}$. In base a tale decomposizione di $V$, è possibile determinare una base costituita da autovettori di $f$, rispetto alla quale la matrice di $f$ è nella forma canonica diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\mu_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_{\mu_k} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Una matrice di questo tipo è un esempio particolare di matrice *diagonale a blocchi*. Se $A$ è una matrice quadrata $n \times n$, e $A_1, \ldots, A_k$ sono sottomatrici quadrate di $A$, aventi ordini $m_i \leq n$, allora diciamo che $A$ è *diagonale a blocchi* $A_1, \ldots, A_k$, se:

1) La diagonale principale di $A$ è l'unione delle diagonali principali delle sottomatrici $A_i$;

2) I primi $m_1$ elementi (dall'alto verso il basso) della diagonale principale di $A$ costituiscono la diagonale principale di $A_1$, i successivi $m_2$ cosituiscono la diagonale principale di $A_2$, e così via, gli ultimi $m_k$ elementi della diagonale principale di $A$ essendo tutti e soli quelli della diagonale principale di $A_k$;

3) Gli elementi di $A$ che non appartengono a nessuna delle sottomatrici $A_i$ sono nulli.

Così la matrice $D$ può pensarsi come la matrice diagonale a blocchi $\lambda_i I_{\mu_i}$, $i = 1, \dots, k$.

Non è difficile verificare che, se $f \in End(V)$, dire che esiste una base di $V$ rispetto alla quale la matrice $A$ di $f$ è diagonale a blocchi, in accordo con le 1)-3), è equivalente a dire che $V$ ammette una decomposizione

$$V = V_1' \oplus V_2' \oplus \cdots \oplus V_k' \tag{3}$$

in sottospazi $f$-invarianti, tali che $\dim_{\mathbb{K}}(V_i) = m_i$.

Nei paragrafi che seguono proveremo che, nell'ipotesi che il polinomio caratteristico di $f$ sia completamente riducibile, anche se $f$ non è diagonalizzabile, esso ammette una *rappresentazione canonica*, costituita da una matrice diagonale a blocchi $J_f$ di tipo speciale (matrice di Jordan), sulla cui diagonale compaiono ancora gli autovalori di $f$, ripetuti tante volte a secondo della corrispondente molteplicità algebrica. Il tipico blocco che compare in $J_f$, relativamente ad un autovalore $\lambda$, è del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Per ciascun autovalore $\lambda$, il numero e gli ordini di queste sottomatrici sono univocamente determinati. Quindi la matrice $J_f$ è, a meno dell'ordine in cui si considerano gli autovalori, univocamente determinata da $f$ e si chiama la *forma canonica di Jordan* di $f$.

La matrice $J_f$ coincide con la matrice $D$ di cui sopra se e solo se $f$ è diagonalizzabile.

La forma canonica di Jordan fornisce quindi un criterio di classificazione degli endomorfismi, nel caso in cui il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso. Tale classificazione si intende a meno di equivelenza, laddove due endomorfismi si definiscono *equivalenti* se, rispetto alla scelta di due opportune basi di $V$, le matrici corrispondenti coincidono. Dunque due endomorfismi risultano equivalenti se e solo se hanno la stessa forma canonica di Jordan. Questo risultato fornisce anche la classificazione *per similitudine* delle matrici quadrate di un fissato ordine a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Il primo passo della trattazione (§2) consisterà nel determinare una decomposizione di $V$ in sottospazi $f$-invarianti del tipo (3), che generalizza la (1), risultando valida senza nessuna ipotesi aggiuntiva su $f$, oltre alla completa riducibilità del polinomio caratteristico. Questa decomposizione si otterrà sostituendo agli autospazi $V_{\lambda_i}$ dei sottospazi più grandi $V'_{\lambda_i}$, di dimensione pari a $\mu_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$. I $V'_{\lambda_i}$ sono i nuclei di opportune iterate $f_i^{s_i}$, $s_i \geq 1$, degli endomorfismi $f_i := f - \lambda_i Id$. Essi prendono il nome di *autospazi generalizzati*. Gli interi $s_i$ sono le molteplicità degli autovalori come radici del cosiddetto *polinomio minimo* di $f$, Il polinomio minimo di un endomorfismo è studiato nel §2. La relazione tra il polinomio minimo e quello caratteristico è chiarita nel §3.

Successivamente si discute l'esistenza ed unicità della forma canonica di Jordan per una particolare classe di endomorfismi, quelli *nilpotenti* (§4). Ciò porterà alla completa classificazione di tali endomorfismi mediante *diagrammi di Young*.

Infine nell'ultimo paragrafo si studia la forma canonica di Jordan di un endomorfismo nel caso generale.

## 2. Polinomio minimo di un endomorfismo

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Sia $n = \dim_{\mathbb{K}} V$. Si ricordi che un *endomorfismo* di $V$ è un'applicazione lineare $f : V \to V$. L'insieme degli endomorfismi di $V$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione $n^2$. La somma ed il prodotto per uno scalare sono definiti da

$$\forall v \in V \quad (f+g)(v) := f(v) + g(v), \quad (\alpha f)(v) := \alpha f(v)$$

per ogni $f, g \in End(V)$ ed $\alpha \in \mathbb{K}$. L'elemento neutro rispetto alla somma è l'endomorfismo *nullo* che trasforma ogni vettore $v \in V$ nel vettore nullo di $V$. $End(V)$ è anche un anello unitario, rispetto alla stessa addizione ed al prodotto interno

$$f \cdot g := f \circ g,$$

rispetto al quale l'elemento neutro è la trasformazione identica $I : V \to V$.

Sia $f \in End(V)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si denoterà con $f^k$ l'endomorfismo

$$f^k := \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{k \text{ volte}}$$

convenendo che

$$f^0 := I.$$

Sia ora $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$. A $p$ ed $f$ associamo l'endomorfismo $p(f) : V \to V$ definito nel modo seguente:

$$p(f) := a_0 I + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_k f^k. \tag{4}$$

Fissato l'endomorfismo $f$, resta così definita un'applicazione

$$\Phi : \mathbb{K}[x] \to End(V)$$

tale che

$$\Phi(p) := p(f).$$

**Esercizio 1** $\Phi$ è un omomorfismo di anelli.

Segue che $Ker(\Phi) \subset \mathbb{K}[x]$ è un *ideale* di $\mathbb{K}[x]$, ovvero $Ker(\Phi)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{K}[x], +)$ ed inoltre

$$\forall p \in \mathbb{K}[x]\, \forall q \in Ker(\Phi) \quad pq \in Ker(\Phi).$$

Se $p$ è un polinomio appartenente a questo ideale, cioè se $p(f) = 0$, diremo che *$p$ annulla $f$*.

Notiamo che, essendo $\mathbb{K}[x]$ un anello commutativo, per ogni $p$ e $q$ in $\mathbb{K}[x]$ risulta

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$$

come conseguenza del fatto che $\Phi$ è un omomorfismo.

**Esercizio 2** L'ideale $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \mathbb{K}[x]$ è non banale, nel senso che $Ker(\Phi) \neq \{0\}$ e $Ker(\Phi) \neq V$.

(Sugg.: Calcolare $\Phi(1)$ ed usare il fatto che la dimensione di $End(V)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è $n^2$).

**Proposizione 2.1.** *L'ideale* $\mathrm{Ker}(\Phi)$ *contiene un unico polinomio monico* $\mu_f$ *tale che*

$$\mathrm{gr}(\mu_f) = \min_{p \in \mathrm{Ker}(\Phi), p \neq 0} \mathrm{gr}(p).$$

*Il polinomio* $\mu_f$ *genera* $\mathrm{Ker}(\Phi)$*, cioè*

$$Ker(\Phi) = \mathbb{K}[x] \cdot \mu_f.$$

Dimostrazione L'esistenza di un polinomio monico $\mu_f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ avente grado minimo è un fatto ovvio. L'unicità segue dal fatto che, se $p, q \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ sono entrambi monici, e $\mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(q) = \min_{p \in \mathrm{Ker}(\Phi), p \neq 0} \mathrm{gr}(p)$, allora $p - q \in \mathrm{Ker}(\Phi)$; ma $\mathrm{gr}(p - q) < \mathrm{gr}(p)$ perchè $p$ e $q$ sono monici. Segue che $p - q = 0$, onde l'unicità di $\mu_f$. Mostriamo infine che $\mu_f$ genera $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Si supponga che $p$ annulli $f$; dividendo $p$ per $\mu_f$ abbiamo:

$$p = q\mu_f + r \tag{5}$$

dove $q, r \in \mathbb{K}[x]$ e $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(\mu_f)$. Dalla (5) segue:

$$p(f) = q(f) \cdot \mu_f(f) + r(f)$$

e quindi, essendo $p(f) = \mu_f(f) = 0$:

$$r(f) = 0$$

ovvero $r(f) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$; poichè $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(\mu_f)$, si conclude che $r = 0$, onde $p$ è multiplo di $\mu_f$. Per l'arbitrarietà di $p \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, resta provato che $\mu_f$ genera $\mathrm{Ker}(\Phi)$. $\square$

**Osservazione 2.2.** Il risultato in esame è un caso particolare del fatto che l'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x]$ è un anello a ideali principali. La dimostrazione generale di questo fatto procede esattamente come sopra.

**Definizione 2.3.** *Sia $f \in End(V)$; il polinomio $\mu_f$ di cui nella proposizione precedente si chiama il* **polinomio minimo** *di $f$.*

Dunque il polinomio minimo di $f$ è il polinomio monico avente grado minimo rispetto a tutti i polinomi non nulli che annullano $f$.

La nozione di polinomio minimo può darsi anche per una matrice quadrata. Ogni matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è infatti identificata in modo canonico all'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, denotato con lo stesso simbolo, tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad A(x) = A \cdot x$$

dove $\cdot$ è il prodotto righe per colonne ed il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è pensato come una matrice colonna con $n$ righe. In questo modo, come è noto, il prodotto $AB$ di due matrici $A$ e $B$ dello stesso ordine viene ad identificarsi con la composizione $A \circ B$ dei corrispondenti endomorfismi.

Il polinomio minimo di una matrice $A$, denotato con $\mu_A$, è quindi per definizione il polinomio minimo dell'endomorfismo associato ad $A$.

Riassumendo quanto visto sopra, $\mu_A$ è l'unico polinomio monico avente grado minimo tra tutti i polinomi non nulli che annullano $A$.

**Osservazione 2.4.** Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, sia $h \in \mathbb{N}$ il più piccolo intero tale che $A^h$ è combinazione lineare delle matrici $I, A, \cdots, A^{h-1}$. Allora

$$A^h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i\, A^i$$

per opportuni scalari $a_0, \ldots, a_{h-1}$. Qui si è adottata la convenzione che $A^0 = Id$. Segue quindi dalla definizione che $\mu_A$ ha grado $h$ ed è dato da

$$\mu_A = x^h - \sum_{i=0}^{h-1} a_i x^i.$$

Si osservi anche che $h$ coincide con la dimensione del sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{K})$ generato da tutte le potenze $A^i$ di $A$, $i \in \mathbb{N}$.

**Esercizio 3** Determinare, usando la definizione, il polinomio minimo delle matrici a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

dove $a, b \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0$.

**Proposizione 2.5.** *Sia $f \in End(V)$. Gli autovalori di $f$ sono tutte e sole le radici di $\mu_f$.*

DIMOSTRAZIONE Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore; vogliamo provare che $\mu_f(\lambda) = 0$. Infatti, sia $v \in V_f(\lambda)$, di modo che $f(v) = \lambda v$. Segue subito che $f^k(v) = \lambda^k \cdot v$ per ogni intero $k$ stante la linearità di $f$. Allora per ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ si ha

$$p(f)(v) = p(\lambda) \cdot v.$$

In particolare ciò è vero per il polinomio minimo; poichè $\mu_f(f) = 0$, otteniamo

$$0 = \mu_f(\lambda) \cdot v$$

e poichè $v \neq 0$, concludiamo che $\mu_f(\lambda) = 0$.

Viceversa, si assuma che $\lambda$ sia una radice di $\mu_f$. Allora $x - \lambda$ divide $\mu_f$, di modo che possiamo scrivere

$$\mu_f = q \cdot (x - \lambda)$$

essendo $q$ un polinomio tale che $\mathrm{gr}(q) < \mathrm{gr}(\mu_f)$. Segue che

$$\mu_f(f) = q(f) \cdot (f - \lambda I)$$

ovvero

$$0 = q(f) \circ (f - \lambda I).$$

Ora, se $\lambda$ non fosse autovalore di $f$, $f - \lambda I$ risulterebbe un isomorfismo di $V$; componendo ambo i membri dell'uguaglianza precedente per l'inverso di $f - \lambda I$ si otterrebbe quindi

$$0 = q(f).$$

Dunque $q$ annullerebbe $f$, il che è assurdo essendo $\mathrm{gr}(q) < \mathrm{gr}(\mu_f)$. Pertanto $\lambda$ è autovalore di $f$. $\square$

Tendendo conto di questa proposizione, si da la

**Definizione 2.6.** *Siano $f \in End(V)$ e $\lambda \in Sp(f)$. Dicesi* **indice** *di $\lambda$ la molteplicità $s(\lambda)$ di $\lambda$ come radice del polinomio minimo di $f$. Si chiama* **autospazio generalizzato** *di $\lambda$ il sottospazio di $V$:*

$$V'_\lambda(f) := Ker(f - \lambda I)^{s(\lambda)}.$$

Determineremo in seguito che relazione intercorre tra l'indice di un autovalore e la sua molteplicità algebrica. Osserviamo che per definizione

$$V_\lambda(f) \subset V'_\lambda(f).$$

**Definizione 2.7.** Siano $f \in End(V)$ e $W \subset V$ un sottospazio. $W$ si dice **$f$-invariante** se

$$f(W) \subset W.$$

In tal caso $f$ induce per restrizione un endomorfismo di $W$.

**Esercizio 4**: Si supponga che

$$V = W_1 \oplus W_2$$

con $W_1$ e $W_2$ entrambi $f$-invarianti. Allora

$$p_f = p_{f_1} \cdot p_{f_2}$$

dove $f_i : W_i \to W_i$ denota l'endomorfismo di $W_i$ ottenuto per restrizione di $f$.

**Teorema 2.8.** *Sia $f \in End(V)$ e si supponga che*

$$\mu_f = \phi_1 \cdot \phi_2$$

*con $\phi_1$ e $\phi_2$ polinomi monici primi tra loro. Allora*

*1) $V = Ker(\phi_1(f)) \oplus Ker(\phi_2(f))$.*

*2) I sottospazi $V_1 = Ker(\phi_1(f))$ e $V_2 = Ker(\phi_2(f))$ sono entrambi $f$-invarianti e, posto $f_i := f_{|V_i} : V_i \to V_i$, $i = 1, 2$ risulta*

$$\mu_{f_1} = \phi_1,\ \mu_{f_2} = \phi_2.$$

Dimostrazione 1) Osserviamo innanzitutto che per l'ipotesi:

$$0 = \mu_f(f) = \phi_1(f) \circ \phi_2(f) = \phi_2(f) \circ \phi_1(f). \tag{6}$$

Poichè $\phi_1$ e $\phi_2$ sono primi tra loro, sussiste l'identità (di Bezout):

$$1 = \alpha \cdot \phi_1 + \beta \cdot \phi_2 \tag{7}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[x]$. Applicando ad $f$ i polinomi ad ambo i membri, segue che

$$Id = \alpha(f) \circ \cdot \phi_1(f) + \beta(f) \circ \phi_2(f). \tag{8}$$

Sia $v \in V_1 \cap V_2$; allora la (8) dà

$$v = \alpha(f)(\phi_1(f)(v)) + \beta(f)(\phi_2(f)(v)) = 0 + 0 = 0.$$

Dunque $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. D'altra parte, se $v \in V$, allora, sempre dalla (8) otteniamo

$$v = \phi_1(f)(\alpha(f)(v)) + \phi_2(f)(\beta(f)(v)) =: v' + v''.$$

Ora osserviamo che, per la (6):

$$\phi_2(f)(v') = 0,\ \phi_1(f)(v'') = 0.$$

Dunque $v \in V_1 + V_2$ e resta provata la 1).

Per provare 2), notiamo inannzitutto che gli endomorfismi $f$ e $\phi_i(f)$ commutano perchè $f = \Phi(x)$. Consegue che

$$v \in V_i \Rightarrow \phi_i(f)(v) = 0 \Rightarrow f(\phi_i(f)(v)) = 0 \Rightarrow \phi_i(f)(f(v)) = 0 \Rightarrow f(v) \in V_i.$$

Quindi i sottospazi sono $V_i$ sono $f$-invarianti. Denotiamo ora con $\mu'$ e $\mu''$ i polinomi minimi di $f_1$ e di $f_2$ rispettivamente. È evidente che $\phi_i$ annulla $f_i$, per cui

$$\mu' \mid \phi_1, \ \mu'' \mid \phi_2 \tag{9}$$

e quindi

$$\mu'\mu'' \mid \mu_f. \tag{10}$$

D'altra parte, dal fatto che $V = V_1 \oplus V_2$ si deduce che $\mu'\mu''$ annulla $f$: infatti, se $v \in V_1$ allora $\mu'\mu''(f)(v) = \mu''(f)(\mu'(f)(v)) = \mu''(f)(\mu'(f_1)(v)) = 0$ sicchè $(\mu'\mu'')(f)_{|V_1} = 0$. In modo del tutto analogo si verifica che $(\mu'\mu'')(f)_{|V_2} = 0$ e quindi si conclude che $(\mu'\mu'')(f) = 0$. Da ciò deduciamo che

$$\mu_f \mid \mu'\mu''. \tag{11}$$

Dalle (10) e (11) traiamo che

$$\mu_f = \mu'\mu''.$$

In particolare

$$gr(\phi_1) + gr(\phi_2) = gr(\mu') + gr(\mu'');$$

ma per la (9) è $gr(\mu') \leq gr(\phi_1)$ e $gr(\mu'') \leq gr(\phi_2)$, per cui necessariamente

$$gr(\mu') = gr(\phi_1),\ gr(\mu'') = gr(\phi_2)$$

e quindi

$$\phi_1 = \mu',\ \phi_2 = \mu''$$

essendo $\phi_1$ e $\phi_2$ entrambi monici. $\square$

**Osservazione 2.9.** Nelle ipotesi e con le notazioni del teorema precedente, si ha anche

$$Ker(\phi_1(f)) = Im(\phi_2(f)),\ Ker(\phi_2(f)) = Im(\phi_1(f)).$$

Dim: **Esercizio 5**.

Stabiliremo in seguito in che relazione sono il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico. Un primo risultato in questa direzione è il seguente

**Lemma 2.10.** *Sia $f \in End(V)$ e sia $n = \dim_{\mathbb{K}}(V) > 0$. Allora se esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, tali che $(x-\lambda)^k$ annulla $f$, il polinomio caratteristico di $f$ è $p_f = (-1)^n(x-\lambda)^n$.*

Dimostrazione Cominciamo con l'esaminare il caso in cui $\lambda = 0$, cioè $f^k = 0$ per un opportuno intero $k \geq 1$. Si tratta di provare che $p_f = (-1)^n x^n$. Ragioniamo per induzione su $n$. Nel caso in cui $n = 1$ risulta evidentemente $f = 0$, per cui $p_f = -x$. Supponiamo ora $n > 1$ e che l'asserto sia vero per spazi di dimensione $n-1$. Notiamo che dall'ipotesi $f^k = 0$ segue che $f$ non è un isomorfismo. In particolare $Ker(f) \neq \{0\}$. Fissiamo $v \in Ker(f)$, $v \neq 0$ ed una base $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di $V$ tale che $e_1 = v$. Posto $W =< e_2, \ldots, e_n >$, abbiamo allora $V =< v > \oplus W$ ed ha senso considerare la proiezione $p : V \to W$. Prendiamo quindi in considerazione l'endomorfismo $g : W \to W$ definito da

$$\forall z \in W \quad g(z) := p(f(z)). \tag{12}$$

Anche per l'endomorfismo $g$ è $g^k = 0$. Infatti dalla (12) segue che per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$\forall z \in W \quad g^m(z) := p(f^m(z)). \tag{13}$$

Questa formula è senz'altro valida per $m = 0$ (e per $m = 1$ è la (12)). Supposta vera per $m \geq 0$, si ottiene, per ogni $z \in W$:

$$g^{m+1}(z) = g(g^m(z)) = g(p(f^m(z))) = p(f(pf^m(z)) \overset{(*)}{=} p(f(f^m(z)) = p(f^{m+1}(z)).$$

Si osservi che l'uguaglianza $(*)$ è giustificata dal fatto che $v \in Ker(f)$. Possiamo ora applicare l'ipotesi induttiva a $g$, ottenendo che $p_g = (-1)^{n-1}x^{n-1}$. D'altra parte

$$A_f^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ \vdots & A_g^{\mathfrak{B}'} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

dove $\mathfrak{B}' = \{e_2, \ldots, e_n\}$. Pertanto

$$p_f = (-x)p_g$$

da cui $p_f = (-1)^n x^n$. Ciò conlude la dimostrazione del lemma nel caso particolare $\lambda = 0$. Il caso generale è immediata conseguenza: assumendo che $(f - \lambda Id)^k = 0$, e posto $g = f - \lambda Id$, si ottiene che $p_g = (-1)^n x^n$. D'altra parte si verifica facilmente che per ogni $x \in \mathbb{K}$:

$$p_f(x) = p_g(x - \lambda)$$

da cui $p_f = (-1)^n (x - \lambda)^n$. $\square$

Esamineremo ora la relazione fondamentale che lega indice, molteplicità algebrica e dimensione dell'autospazio generalizzato di un autovalore.

Dato un endomorfismo $g$, si presti attenzione alla sequenza di sottospazi

$$\{0\} \subset Ker(g) \subset Ker(g^2) \subset \cdots \subset Ker(g^i) \subset \cdots \tag{14}$$

Notiamo che, poichè $V$ ha dimensione finita, le inclusioni $Ker(g^i) \subset Ker(g^{i+1})$ non possono essere tutte strette. Dunque esiste il più piccolo intero $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$Ker(g^k) = Ker(g^{k+1}).$$

Il lettore è invitato a verificare che da ciò segue anche

$$Ker(g^k) = Ker(g^s) \ \text{ per ogni } s \geq k$$

(**Esercizio 6**). Ciò si esprime dicendo che la sequenza (14) si stabilizza al $k$-mo passo.

**Teorema 2.11.** *Siano $f \in End(V)$ e $\lambda \in Sp(f)$. Si ponga $f_\lambda := f - \lambda Id$. Siano $s(\lambda)$, $\mu(\lambda)$ e $V'_\lambda(f)$ rispettivamente l'indice di $\lambda$, la sua molteplicità algebrica ed il corrispodendente autospazio generalizzato. Allora*

*1)* $s(\lambda) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid Ker(f_\lambda)^k = Ker(f_\lambda)^{k+1}\}$.

*2)* $1 \leq s(\lambda) \leq \mu(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}} V'_\lambda(f)$.

Dimostrazione Per definizione di indice, abbiamo $\mu_f = (x-\lambda)^{s(\lambda)} \cdot q$ dove $q$ è un polinomio tale che $q(\lambda) \neq 0$. In forza del Teorema 2.8, abbiamo quindi

$$V = V'_\lambda(f) \oplus Ker(q(f)). \tag{15}$$

Ricordando anche l'osservazione 2.9, questa uguaglianza può riscriversi:

$$V = V'_\lambda(f) \oplus Im(f_\lambda^{s(\lambda)}). \tag{16}$$

Ciò premesso, cominciamo col provare 1). Mostriamo dapprima che $Ker(f_\lambda)^{s(\lambda)} = Ker(f_\lambda)^{s(\lambda)+1}$. Sia $z \in Ker(f_\lambda)^{s(\lambda)+1}$ e si ponga $v = f_\lambda^{s(\lambda)}(z)$. Vogliamo provare che $v = 0$. In virtù della (16) è sufficiente verificare che $v \in V'_\lambda(f)$. Infatti

$$f_\lambda^{s(\lambda)}(v) = f_\lambda^{2s(\lambda)}(z) = 0.$$

Resta provato che $Ker(f_\lambda)^{s(\lambda)} = Ker(f_\lambda)^{s(\lambda)+1}$. Supponiamo ora per assurdo che

$$Ker(f_\lambda)^h = Ker(f_\lambda)^{h+1}$$

per un certo $h < s(\lambda)$. Ne seguirebbe

$$Ker(f_\lambda)^h = Ker(f_\lambda)^k \quad \forall k \geq h$$

e quindi in particolare

$$Ker(f_\lambda)^h = V'_\lambda(f).$$

Potremmo quindi riscrivere la (15) come

$$V = Ker(f_\lambda)^h \oplus Ker(q(f)).$$

Ma ciò implicherebbe che $((x-\lambda)^h q)(f) = 0$ perchè gli endomorfismi $(x-\lambda)^h(f)$ e $q(f)$ commutano. Si perviene ad un assurdo perchè il grado del polinomio $(x-\lambda)^h q$ è inferiore a quello di $\mu_f$.

2) Proviamo che $\mu(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}} V'_\lambda(f)$. Poniamo $k := \dim_{\mathbb{K}} V'_\lambda(f)$. Osserviamo che, poichè i sottospazi $V'_\lambda(f)$ e $Ker(q(f))$ sono $f$-invarianti, tenendo conto della decomposizione (15) risulta che

$$p_f = p_{f_1} \cdot p_{f_2} \tag{17}$$

dove $f_1$ e $f_2$ sono gli endomorfismi di $V'_\lambda(f)$ e di $Ker(q(f))$ ottenuti per restrizione di $f$. In base al Teorema 2.8 il polinomio minimo di $f_1$ è $(x-\lambda)^{s(\lambda)}$, onde il Lemma 2.10 garantisce che

$$p_{f_1} = (-1)^k (x-\lambda)^k.$$

Inoltre il polinomio minimo di $f_2$ è $q$; poichè $q(\lambda) \neq 0$ abbiamo $0 \notin Sp(f_2)$ e quindi 0 non è radice di $p_{f_2}$. Tornando alla (17), traiamo che la molteplicità $\mu(\lambda)$ di $\lambda$ come radice di $p_f$ è pari a $k$. Quindi $\mu(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}} V'_\lambda(f)$.

Per mostrare infine che $\mu(\lambda) \geq s(\lambda)$, è sufficiente osservare che, per la caratterizzazione dell'indice $s(\lambda)$ ottenuta nel punto 1), le inclusioni

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f_\lambda) \subset \mathrm{Ker}(f_\lambda^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f_\lambda^{s(\lambda)})$$

sono tutte strette; pertanto $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_\lambda^t) > \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_\lambda)^{t-1}$, $t = 1, \ldots, s(\lambda)$, e quindi $\mu(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f_\lambda^{s(\lambda)}) \geq s(\lambda)$. $\square$

**Teorema 2.12.** *(Decomposizione spettrale) Sia $f \in End(V)$ e si supponga che $\mu_f$ sia completamente riducibile su $\mathbb{K}$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di $f$. Si denotino con $s_i$ i corrispondenti indici. Allora*

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V'_{\lambda_k}.$$

*Ciasun autospazio generalizzato $V'_{\lambda_i}$ è un sottospazio $f$-invariante ed il polinomio minimo della restrizione di $f$ a $V'_f(\lambda_i)$ è $(x-\lambda_i)^{s_i}$.*

Dimostrazione Ragioniamo per induzione su $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Se $n = 1$, allora necessariamente $gr(p_f) = 1$; si ha un solo autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ che è l'unica radice del polinomio caratteristico. Allora $\mu_f = x - \lambda$ e $s(\lambda) = 1$. In particolare $f = \lambda Id$. Per definizione di autospazio generalizzato $V'_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id) = V$ ed il Teorema è vero in questo caso. Sia ora $n > 1$ e supponiamo vero l'asserto per endomorfismi di spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ aventi dimensione $< n$.

Notiamo che, se $\#Sp(f) = 1$, ovvero se $k = 1$, allora $\mu_f = (x-\lambda_1)^{s_1}$ e quindi per definizione di polinomio minimo $(f - \lambda_1 Id)^{s_1} = 0$ sicchè

$$V = Ker((f - \lambda_1 Id)^{s_1}) = V'_{\lambda_1}(f)$$

e quindi il teorema è vero. Possiamo quindi supporre che $k \geq 2$. Decomponiamo $\mu_f$ nel modo seguente

$$\mu_f = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdot q, \ \ q := (x-\lambda_2)^{s_2} \cdots (x-\lambda_k)^{s_k}.$$

Allora per il Teorema 2.8

$$V = V'_{\lambda_1}(f) \oplus Ker(q(f)). \tag{18}$$

Sappiamo inoltre che il polinomio minimo della restrizione di $f$ a $V'_{\lambda_1}(f)$ coincide con $(x-\lambda_1)^{s_1}$. Il sottospazio $W := Ker(q(f))$ è non banale, $f$-invariante ed ha dimensione $< n$. Consideriamo la restrizione $f_{|W} : W \to W$. Sappiamo che il polinomio minimo di $f_{|W}$ è $q$. Pertanto a $f_{|W}$ può applicarsi l'ipotesi induttiva. Notiamo anche che $Sp(f_{|W}) = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ e che per ogni $i = 2, \ldots k$, la molteplicità di $\lambda_i$ come autovalore di $f_{|W}$ è ancora $\mu_i$. Applicando ora l'ipotesi induttiva a $f_{|W}$, abbiamo che

$$W = W'_2 \oplus \cdots \oplus W'_k \tag{19}$$

con $W'_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f_{|W} - \lambda_i Id)^{\mu_i}$ autospazio generalizzato di $f_{|W}$ relativo a $\lambda_i$. Inoltre, applicando il Teorema 2.11, risulta che $\dim_{\mathbb{K}}(W_i) = \mu_i$, $i = 2, \ldots, k$. D'altra parte è chiaro per definizione che sussiste l'inclusione $W'_{\lambda_i} \subset V'_{\lambda_i}(f)$; avendo la stessa dimensione, questi spazi coincidono. Dunque

$$W = V'_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V'_{\lambda_k}$$

e per l'ipotesi induttiva, il polinomio minimo della restrizione di $f$ a $V'_{\lambda_i}$ è $(x - \lambda_i)^{s_i}$. Mettendo insieme questa informazione e le (18), (19), concludiamo che $V = V'_{\lambda_1} \oplus V'_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V'_{\lambda_k}$ e di qui l'asserto. □

**Corollario 2.13.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un endomorfismo $f \in End(V)$ sia diagonalizzabile è che il suo polinomio minimo sia prodotto di fattori lineari, cioè*

$$\mu_f = (x - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (x - \lambda_k)$$

*per opportuni scalari $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, $k \geq 1$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. In tal caso, $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.*

**Definizione 2.14.** *Un endomorfismo $f$ di $V$ si dice* **nilpotente** *se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $f^k = 0$. In tal caso, il più piccolo intero $s \in \mathbb{N}$ per cui risulta $f^s = 0$ è detto* **indice di nilpotenza** *di $f$.*

Analogamente, una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice nilpotente se $A^k = 0$ per un opportuno $k \in \mathbb{N}$; il più piccolo intero avente questa proprietà è l'indice di nilpotenza di $A$.

Si osservi che il Teorema 2.12 permette di ricondurre lo studio degli endomorfismi il cui polinomio minimo è completamente riducibile, allo studio degli endomorfismi il cui polinomio minimo è della forma $(x - \lambda)^k$. Sia $f$ un tale endomorfismo. Allora $f$ è della forma

$$f = \lambda\, Id + g$$

con $g$ nilpotente. Infatti, è sufficiente prendere $g = f - \lambda\, Id$.

In particolare, lo studio degli endomorfismi di uno spazio vettoriale su un campo algebricamente chiuso è completamente ricondotto allo studio degli endomorfismi nilpotenti.

## 3. Relazione tra polinomio minimo e polinomio caratteristico

**Lemma 3.1.** *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. Il polinomio minimo di $A$ coincide col polinomio minimo della stessa matrice pensata a coefficienti in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione Denotiamo con $\mu_A \in \mathbb{R}[x]$ il polinomio minimo di $A$ e con $q \in \mathbb{C}[x]$ il polinomio minimo di $A$ pensata a coefficienti in $\mathbb{C}$. Poichè $\mu_A$ annulla $A$, senz'altro $q \mid \mu_A$. Quindi per provare l'asserto è sufficiente verificare che $q$ e $\mu_A$ hanno lo stesso grado. Per assurdo sia $h := gr(q) < gr(\mu_A)$. Allora se $q = \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_j x^j + x^h$, seguirebbe

$$\sum_{j=0}^{h-1} \alpha_j A^j + A^h = 0$$

da cui, essendo $A$ reale:

$$\sum_{j=0}^{h-1} \mathsf{Re}(\alpha_j) A^j + A^h = 0, \ \sum_{j=0}^{h-1} \mathsf{Im}(\alpha_j) A^j = 0.$$

In particolare il polinomio $q' = \sum_{j=0}^{h-1} \mathsf{Re}(\alpha_j) x^j + x^h$, $q' \in \mathbb{R}[x]$, annullerrebbe $A$ il che è assurdo essendo $gr(q') = h < gr(\mu_A)$. $\square$

**Teorema 3.2.** *Il polinomio minimo $\mu_f$ di un endomorfismo $f \in End(V)$ divide il polinomio caratteristico $p_f$. Inoltre $p_f$ e $\mu_f$ hanno gli stessi fattori irriducibili.*

Dimostrazione Ci limiteremo a dimostrare l'asserto nei casi in cui $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supponiamo dapprima $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di $f$. Allora essendo $\mu_f$ completamente riducibile,

$$\mu_f = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k}$$

mentre

$$p_f = (-1)^n (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\mu_k}.$$

In base al Teorema 2.11 è $s(\lambda_i) \leq \mu_i$ per ogni $i = 1, \dots k$. Quindi il teorema è vero in questo caso.

Supponiamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fissata una base $\mathfrak{B}$ di $V$, il polinomio minimo di $f$ coincide col polinomio minimo $\mu_A$ della matrice $A = A_f^{\mathfrak{B}}$. D'altra parte $\mu_A$ è anche il polinomio minimo della stessa matrice pensata a coefficienti in $\mathbb{C}$. Poichè il polinomio caratteristico $p_A$ di $A$ che coincide con $p_f$, è lo stesso, sia che si pensi $A$ come matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$, concludiamo per quanto già visto nella prima parte della dimostrazione, che $\mu_f$ divide $p_f$. Supponiamo infine che $q \in \mathbb{R}[x]$ sia un fattore irriducibile di $p_f$. Allora $q$ ha grado 1 oppure è un polinomio di secondo grado con discriminante negativo.

Nel primo caso, se $\alpha \in \mathbb{R}$ è la radice di $q$, allora $\alpha \in Sp(f)$ e quindi $(x - \alpha)$ divide $\mu_f$. Ne segue che $q$ divide $\mu_f$. Nel secondo caso possiamo fattorizzare $q$ in $\mathbb{C}[x]$ come

$$q = c(x - \beta_1)(x - \beta_2)$$

con $c, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. Dunque $\beta_1, \beta_2 \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ dove $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ denota lo spettro della matrice $A$ pensata come matrice a coefficienti in $\mathbb{C}$. Segue che $q$ divide $\mu_A = \mu_f$ ed il Teorema è provato. $\square$

**Corollario 3.3.** *(Teorema di Cayley-Hamilton) Per ogni endomorfismo $f \in End(V)$ risulta $p_f(f) = 0$.*

**Esercizio 7** Verificare che per un endomorfismo $f$ sono equivalenti:

a) $f$ è nilpotente;

b) $p_f = (-1)^n x^n$;

c) $\mu_f = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

Inoltre, vera una di queste condizioni, e quindi tutte, l'intero $k$ nella c) è l'indice di nilpotenza di $f$.

**Esercizio 8** In base all'esercizio precedente, condizione necessaria affichè un endomorfismo $f$ sia nilpotente è che $Sp(f) = \{0\}$. Verificare che tale condizione è anche sufficiente nel caso in cui $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso. Mostrare con un esempio che nel caso in cui $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, può accadere che $Sp(f) = \{0\}$ senza che $f$ risulti nilpotente.

## Soluzione degli esercizi §1-3

**Esercizio 1** Siano $p = \sum_i a_i x^i$ e $q = b_j x^j$ due polinomi. Allora $pq = \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j}$. Per definizione di $\Phi$, si ha allora

$$\Phi(pq) = pq(f) = \sum_{i,j} a_i b_j f^{i+j};$$

ora, $f^i \cdot f^j = f^{i+j}$ e quindi

$$\sum_{i,j} a_i b_j f^{i+j} = (\sum_i a_i f^i) \cdot (\sum_j b_j f^j) = p(f) \cdot q(f)$$

e si conclude che $\Phi(pq) = \Phi(p) \cdot \Phi(q)$.

**Esercizio 2** Poichè $\Phi(1) = Id \neq 0$, segue che $1 \notin \mathrm{Ker}(\Phi)$, sicchè $\mathrm{Ker}(\Phi) \neq \mathbb{K}[x]$. Per provare che $\mathrm{Ker}(\Phi)$ non è l'ideale nullo, osserviamo che, poichè $End(V)$, come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, ha dimensione $n^2$, gli endomorfismi

$$I, f, f^2, \cdots, f^{n^2}$$

sono linearmente dipendenti. Quindi esistono opportuni scalari

$$a_o, a_1, \ldots, a_{n^2}$$

non tutti nulli, tali che

$$a_0 I + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n^2} f^{n^2} = 0.$$

Allora il polinomio non nullo $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n^2} x^{n^2}$ annulla $f$, onde l'asserto.

**Esercizio 3** Utilzziamo l'osservazione 2.4. Abbiamo $A = aI_2$ e quindi

$$\mu_A = x - a.$$

Quanto a $B$, poichè $b \neq 0$, $B$ non è linearmente dipendente da $I_2$. Quindi occorre calcolare $B^2$. Abbiamo

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix};$$

questa matrice è combinazione lineare di $I_2$ e di $B$:

$$B^2 = -a^2\, I_2 + 2aB.$$

Ne segue che

$$\mu_B = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2.$$

**Esercizio 4** Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ una base di $V$ ottenuta unendo una base $\mathcal{B}_1$ di $W_1$ ed una base $\mathcal{B}_2$ di $W_2$. Ordinando $\mathcal{B}$ disponendo prima i vettori di $\mathcal{B}_1$ e successivamente quelli di $\mathcal{B}_2$), la matrice $A$ associata ad $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ è della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

essendo $A_i$ la matrice associata ad $f_{|W_i} : W_i \to W_i$ rispetto a $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$. Ne consegue, calcolando il polinomio caratteristico di $f$, che

$$p_f = \det(A - xI_n) = \det(A_1 - xI_p)\det(A_2 - xI_q) = p_{f_1} \cdot p_{f_2}$$

dove $p = \dim_{\mathbb{K}}(W_1)$ e $q = \dim_{\mathbb{K}}(W_2)$.

**Esercizio 5** Verichiamo che $Im(\phi_1(f)) = Ker(\phi_2(f))$. Conviene utilizzare la (6); da questa formula segue infatti immediatamente che

$$Im(\phi_1(f)) \subset Ker(\phi_2(f)).$$

I due spazi hanno la stessa dimensione perchè, stante la 1) del Teorema 2.8:

$$\dim_{\mathbb{K}} Im(\phi_1(f)) = n - \dim_{\mathbb{K}}(Ker(\phi_1(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(Ker(\phi_2(f)).$$

Segue l'asserto. L'uguaglianza $Im(\phi_2(f)) = Ker(\phi_1(f))$ si prova in modo del tutto analogo.

**Esercizio 6** Assumiamo

$$\mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker}(g^{k+1}). \tag{$*$}$$

Ragioniamo per induzione su $l = s - k$. Se $l = 0$, allora non c'è niente da provare. Supposto che $\mathrm{Ker}(g^{k+l}) = \mathrm{Ker}(g^k)$, con $l \geq 1$, proviamo che $\mathrm{Ker}(g^{k+l+1}) = \mathrm{Ker}(g^k)$. Infatti, da $g^{k+l+1}(v) = 0$, segue $g^{k+l}(g(v)) = 0$, il che implica $g(v) \in \mathrm{Ker}(g^{k+l})$. Per l'ipotesi induttiva, ciò comporta che $g(v) \in \mathrm{Ker}(g^k)$, onde $g^k(g(v)) = 0$, ovvero $v \in \mathrm{Ker}(g^{k+1})$. Per (*), concludiamo che $v \in \mathrm{Ker}(g^k)$. Abbiamo mostrato che $\mathrm{Ker}(g^{k+l+1}) \subset \mathrm{Ker}(g^k)$ e quindi $\mathrm{Ker}(g^{k+l+1}) = \mathrm{Ker}(g^k)$.

**Esercizio 7**

Osserviamo che a) e c) sono chiaramente equivalenti: infatti , se $f$ è nilpotente, esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $f^h = 0$, ovvero il polinomio $x^h$ annulla $f$. Dunque $\mu_f$ divide $x^h$ e pertanto $\mu_f = x^k$ con $k \leq h$. Viceversa, vera c) segue $f^k = 0$, onde a).

L'equivalenza tra b) e c) segue direttamente dal Teorema 3.2, ricordando che $\mu_f$ è monico.

Osserviamo che si può anche procedere verificando prima l'equivalenza tra a) e b): a)$\Rightarrow$ b) segue dal Lemma 2.10, mentre b)$\Rightarrow$ a) segue dal Teorema di Cayley-Hamilton.

**Esercizio 8** Supponiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $Sp(f) = \{0\}$. Allora $p_f$ è completamente riducibile ed ammette 0 come unica radice, sicchè $p_f =$

$(-1)^n x^n$, onde $f$ è nilpotente per l'esercizio precedente. Per fornire un esempio di endomorfismo non nilpotente tale che $Sp(f) = \{0\}$, è sufficiente considerare una matrice quadrata reale $A$ il cui polinomio caratteristico ammetta solo la radice 0, senza essere completamente riducibile. Ad esempio, una matrice con $p_A = -x(x^2+1)$ soddisfa i requisiti richiesti. Una tale $A$ è per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 4. Forma canonica di un endomorfismo nilpotente

In questo paragrafo $V$ denota uno spazio vettoriale di dimensione $n > 0$ su un campo qualsiasi $\mathbb{K}$. Dimostreremo che gli endomorfismi *nilpotenti* di $V$ sono classificati, a meno di equivalenza, dalle $p$-ple di numeri interi $(k_1, \dots, k_p)$, $p \geq 1$, tali che

$$k_1 \geq k_2 \cdots \geq k_p \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{p} k_i = n.$$

Due endomorfismi $f, g \in End(V)$ si intendono *equivalenti* se vi è un isomorfismo $\psi : V \to V$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\psi"'] & V \end{tikzcd}$$

è commutativo. Ciò equivale al fatto che che esistano basi $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ di $V$ tali che le matrici $A_f^{\mathfrak{B}_1}$ e $A_g^{\mathfrak{B}_2}$ associate ad $f$ e $g$ rispetto ad esse coincidano.

La classificazione si otterrà mostrando che per ciascun endomorfismo nilpotente $f$, con indice di nilpotenza $k$, esiste una base $\mathfrak{B}$ rispetto alla quale $A_f^{\mathfrak{B}}$ è una matrice diagonale a blocchi $J_1, \dots, J_p$, dove $J_i$ è una matrice di tipo speciale, detta *blocco di Jordan*. Il numero $p$ e le dimensioni $k_1, \dots, k_p$ di questi blocchi sono univocamente determinati da $f$.

**Definizione 4.1.** Dicesi **blocco di Jordan** di ordine $m \geq 1$ e con autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice quadrata $J(\lambda, m) \in M_m(\mathbb{K})$:

$$J(\lambda, m) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente, posto $J(\lambda, m) = (a^i_j)$, allora

$$a^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ \lambda & \text{se } j = i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo anche che $J(\lambda, 1) = (\lambda)$.

**Definizione 4.2.** Una **matrice di Jordan** è una matrice diagonale a blocchi del tipo [1] $J = \mathrm{diag}(J(\lambda_1, n_1), \ldots, J(\lambda_s, n_s))$ per opportuni scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, e opportuni interi $s, n_1, \ldots, n_s \geq 1$.

**Definizione 4.3.** Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Una base $\mathfrak{B}$ di $V$ è detta **base di Jordan** per $f$ se la matrice $A_f^{\mathfrak{B}}$ associata ad $f$ rispetto a $\mathfrak{B}$ è una matrice di Jordan.

**Osservazione 4.4.** Se $f : V \to V$ ammette una base di Jordan $\mathfrak{B}$ con $A_f^{\mathfrak{B}} = \mathrm{diag}(J(\lambda_1, n_1), \ldots, J(\lambda_s, n_s))$, allora il polinomio caratteristico di $f$ è completamente riducibile su $\mathbb{K}$ e $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ dove $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ sono gli elementi distinti di $\mathbb{K}$ che compaiono sulla diagonale principale di $A_f^{\mathfrak{B}}$. La molteplicità algebrica di $\lambda_i$ coincide con la somma degli ordini dei blocchi di Jordan in cui $\lambda_i$ figura come elemento diagonale.

Infatti, $A_f^{\mathfrak{B}}$ e quindi anche $A_f^{\mathfrak{B}} - xI_n$ è triangolare superiore, onde il $\det(A_f^{\mathfrak{B}} - xI_n)$ coincide con il prodotto $(\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_s - x)^{n_s}$.

In particolare, se $f$ è nilpotente, necessariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$.

Nel seguito del paragrafo studieremo il problema dell'esistenza di basi di Jordan nel caso nilpotente. Il caso generale, che si deduce da questo utilizzando gli strumenti dei paragrafi §1-3, verrà esaminato nel paragrafo seguente.

Sia quindi $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente con indice di nilpotenza $k \geq 1$. Abbiamo la sequenza di sottospazi di $V$:

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}(f^k) = V.$$

A tale sequenza ci si riferirà col termine *filtrazione* di $V$ associata ad $f$. Porremo inoltre per comodità

$$W_i := \mathrm{Ker}(f^i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

**Esercizio 9** Verificare che $f(W_i) \subset W_{i-1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Se $v \in V$, allora denoteremo con $i(v) \in \mathbb{N}$ il più piccolo intero tale che

$$v \in W_{i(v)}.$$

Dunque, per ogni $v \in V$:

$$f^{i(v)}(v) = 0, \quad f^j(v) \neq 0 \ \text{ per } j < i(v). \tag{20}$$

[1] Per una matrice quadrata $A$, la scrittura $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m)$ significa che $A$ è a blocchi $A_1, \ldots, A_m$ in accordo con le notazioni nel §1.

**Definizione 4.5.** Sia $v \in V$ un vettore non nullo; chiameremo **$f$-stringa** di origine $v$, il seguente sottoinsieme finito $S_f(v)$:

$$S_f(v) = \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{i(v)-1}(v)\}.$$

**Osservazione 4.6.** Per ogni vettore $v \in V \setminus \{0\}$ risulta che i vettori $f^i(v)$, $i = 0, \dots, i(v) - 1$, sono tutti distinti, cioè $\# S_f(v) = i(v)$. Infatti, se fosse

$$f^i(v) = f^j(v) = 0$$

per $0 \leq i < j \leq i(v) - 1$ si avrebbe, applicando $f^{i(v)-j}$ ad ambo i membri

$$f^{i(v)-(j-i)}(v) = f^{i(v)}(v) = 0$$

contro la definizione di $i(v)$. Per questo motivo, ci si riferirà all'indice di un vettore anche come alla **lunghezza della stringa** da esso generata.

**Osservazione 4.7.** Riguardo le stringhe, ci atterremo nel seguito alla seguente convenzione. Laddove occorra considerare $S_f(v)$ come insieme ordinato, conveniamo che $f^i(v)$ *precede* $f^j(v)$ *se e solo se* $i > j$.

**Lemma 4.8.** *Siano $f \in End(V)$ un endomorfismo nilpotente e $W \subset V$ un sottospazio di dimensione $l > 0$. Si fissi una base $\mathfrak{B}$ di $W$. Allora sono equivalenti:*

*i) $W$ è $f$-invariante e la base $\mathfrak{B}$ può essere riordinata in modo che*

$$A^{\mathfrak{B}}_{f_{|W}} = J(0, l).$$

*ii) Esiste $v \in W$ tale che $i(v) = l$ e $\mathfrak{B} = S_f(v)$.*

Dimostrazione $i) \Rightarrow ii)$ Supponendo di aver ordinato i vettori di $\mathfrak{B}$ in accordo con $a)$, e coerentemente con ciò poniamo $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_l\}$. Per provare $b)$ è sufficiente porre $v = e_l$. Infatti, risulta per ipotesi

$$f(e_1) = 0,\ f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, \dots,\ f(e_l) = e_{l-1}$$

da cui

$$e_j = f^{l-j}(e_l).$$

Poichè ciascun $e_j$ è non nullo, ne segue che $i(e_l) = l$ e concludiamo che $\mathfrak{B} = S_f(e_l)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Poichè $W = \langle \mathfrak{B} \rangle$, per provare che $f(W) \subset W$ è sufficiente verificare che $f(u) \in W$ per ogni $u \in \mathfrak{B}$. Infatti, se $u = f^i(v)$ con $i \in \{0, \dots l - 1\}$, abbiamo

$$f(f^i(v)) = f^{i+1}(v) \in S_f(v) \cup \{0\} \subset W.$$

Dunque $W$ è $f$-invariante. Ordiniamo gli elementi della base $\mathfrak{B} = S_f(v)$ in accordo con la nostra convenzione, denotandoli come segue:

$$e_1 = f^{l-1}(v),\ \dots,\ e_{l-1} = f(v),\ e_l = v.$$

Allora, poichè $f(f^j(v)) = f^{j+1}(v)$, risulta

$$f(e_1) = 0 \;\text{ e }\; f(e_j) = e_{j-1} \text{ per } j \in \{2, \dots, l\}.$$

Da ciò segue immediatamente per definizione che la matrice associata ad $f_{|W}$ rispetto a $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_l\}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero coincide con $J(0, l)$. $\square$

Utilizzando questo Lemma otteniamo la seguente caratterizzazione per le basi di Jordan di endomorfismi nilpotenti, che afferma che tali basi sono tutte e sole quelle che si ottengono unendo $f$-stringhe.

**Proposizione 4.9.** *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente con indice $k \geq 1$. Sia $\mathfrak{B}$ una base di $V$. Allora sono proprietà equivalenti:*

*(a) $\mathfrak{B}$ è una base di Jordan per $f$, e*

$$A_f^{\mathfrak{B}} = \operatorname{diag}(J(0, k_1), \dots, J(0, k_p))$$

*rispetto ad un opportuno ordinamento per $\mathfrak{B}$;*

*(b) Esistono $p$ vettori non nulli $z_1, \cdots, z_p$ tali che*

*1)* $i(z_j) = k_j$;

*2)* $\mathfrak{B} = S_f(z_1) \cup \cdots \cup S_f(z_p)$.

Dimostrazione $a) \Rightarrow b)$ Se $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ denotiamo con $W_1$ lo spazio generato dai primi $k_1$ vettori $e_1, \dots, e_{k_1}$ di $\mathfrak{B}$, con $W_2$ quello generato dai successivi $k_2$ e così via, essendo $W_p$ il sottospazio generato dagli ultimi $k_p$ vettori di $\mathfrak{B}$. Naturalmente

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_p.$$

Per la (a) ciascun $W_j$ è $f$-invariante, e la matrice di $f_{|W_j}$, rispetto alla base di $W_j$ che si è estratta da $\mathfrak{B}$, coincide con $J(0, k_j)$. Allora (b) segue immediatamente da $i) \Rightarrow ii)$ del Lemma.

$b) \Rightarrow a)$ Si assuma $b)$; allora, per la 2):

$$V = \langle S_f(z_1) \rangle \oplus \cdots \oplus \langle S_f(z_p) \rangle$$

e ciascun sottospazio $\langle S_f(z_j)\rangle$ è $f$-invariante. Allora, posto $f_j := f_{|\langle S_f(z_j)\rangle} \in End(\langle S_f(z_j)\rangle)$, abbiamo, per $ii) \Rightarrow i)$ del Lemma:

$$A_f^{\mathfrak{B}} = \mathrm{diag}(A_{f_1}^{S_f(z_1)}, \dots, A_{f_p}^{S_f(z_p)}) = \mathrm{diag}(J(0,k_1), \dots, J(0,k_p))$$

e la $a)$ è provata. $\square$

**Definizione 4.10.** Siano $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $W$ un sottospazio. Siano $v_1, \dots, v_l$ vettori di $V$. Diremo che $v_1, \dots, v_l$ sono **linearmente indipendenti modulo** $W$ se

i) $v_1, \dots, v_l$ sono linearmente indipendenti;
ii) $W \cap \langle v_1, \dots, v_l\rangle = \{0\}$.
Diremo che $\{v_1, \dots, v_l\}$ è una **base di** $V$ **modulo** $W$ se
i) $v_1, \dots, v_l$ sono linearmente indipendenti;
ii) $V = W \oplus \langle v_1, \dots, v_l\rangle$.

**Esercizio 10** Mantenendo le notazioni della definizione precedente, provare che:

1) $v_1, \dots, v_l$ sono linearmente indipendenti modulo $W$ se e solo se per ogni $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{K}^l$ risulta:

$$\sum_j \alpha_j v_j \in W \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\};$$

2) Se $v_1, \dots, v_l$ sono linearmente indipendenti modulo $W$, esistono $w_{l+1}, \dots, w_h$ in $V$ tali che $\{v_1, \dots, w_{l+1}, \dots w_h\}$ sia una base di $V$ modulo $W$.

Naturalmente, la nozione appena introdotta coincide con quella familiare di lineare indipendenza nel caso in cui $W = \{0\}$.

Dopo queste premesse di natura generale, torniamo ad occuparci della filtrazione

$$\{0\} \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{k-1} \subset W_k = V, \quad W_i := \mathrm{Ker}(f^i)$$

associata ad un endomorfismo nilpotente $f : V \to V$ con indice di nilpotenza $k \geq 1$. Ricordiamo che $f(W_i) \subset W_{i-1}$.

**Lemma 4.11.** *Si fissi $i \in \{1, \dots, k\}$. Siano $z_1, \dots, z_l$ vettori di $W_i$. Se $z_1, \dots, z_l$ sono linearmente indipendente modulo $W_{i-1}$, allora $f(z_1), \dots, f(z_l)$ sono linearmente indipendenti modulo $W_{i-2}$.*

Dimostrazione Si assuma che, per certi scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ risulti

$$\sum_j \alpha_j f(v_j) \in W_{i-2}; \tag{21}$$

dobbiamo provare che $\alpha_1 = \cdots = \alpha_l = 0$. Infatti, da (21) segue, per definizione di $W_{i-2}$ che

$$f^{i-2}(\sum_j \alpha_j f(v_j)) = 0,$$

ovvero

$$\sum_j \alpha_j f^{i-1}(v_j) = 0$$

che possiamo ancora riscrivere come $f^{i-1}(\sum_j \alpha_j v_j) = 0$. Questo significa che $\sum_j \alpha_j \in W_{i-1}$. Essendo per ipotesi $z_1, \dots, z_l$ linearmente indipendenti modulo modulo $W_{i-1}$, segue che $\alpha_1 = \cdots = \alpha_l = 0$, onde la conclusione. $\square$

**Teorema 4.12.** (Forma canonica di Jordan degli endomorfismi nilpotenti)
*Sia $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente con indice di nilpotenza $k \geq 1$.*

*1) Se $\{z_1, \dots, z_m\}$ è una qualsiasi base di $V$ modulo $Ker(f^{k-1})$, esiste una base di Jordan per $f$ le cui stringhe di lunghezza $k$ sono quelle generate dai vettori $z_i$.*

*2) Sia $\mathfrak{B}$ una base di Jordan per $f$ con*

$$A_f^{\mathfrak{B}} = \mathrm{diag}(J(0, k_1), \dots, J(0, k_p)), \quad p \geq 1$$

*ordinata in modo tale che*

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p \geq 1.$$

*Allora gli interi $p$ e $k_1, \dots, k_p$ sono univocamente determinati da $f$. Cioè, se $\mathfrak{B}'$ è un'altra base di Jordan, con i medesimi requisiti,*

$$p = p', \text{ e } \ k_j = k_j'.$$

*Precisamente, risulta che*

$$p = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f)), \quad k_1 = k \tag{22}$$

*e per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$, il numero (eventualmente nullo) di blocchi di Jordan in $A_f^{\mathfrak{B}}$ aventi ordine $j$ è dato da:*

$$2 \dim_{\mathbb{K}} W_j - \dim_{\mathbb{K}} W_{j-1} - \dim_{\mathbb{K}} W_{j+1} = d_j - d_{j+1} \tag{23}$$

*dove per definizione $W_j = Ker(f^j)$ e $d_j := \dim_{\mathbb{K}} W_j - \dim_{\mathbb{K}} W_{j-1}$.*

Dimostrazione Osserviamo che i due enunciati 1) e 2) sono banalmente veri quando $k = 1$ perchè in tal caso $f = 0$. Poniamo

$$W := W_{k-1} = Ker(f^{k-1}).$$

Supponiamo $k > 1$. Ricordando che $W$ è $f$–invariante, denoteremo con $g$ l'endomorfismo di $W$ ottenuto per restrizione di $f$. Osserviamo che, nel caso $k > 1$, per definizione di $k$ le inclusioni

$$Ker(f^{k-2}) \subset Ker(f^{k-1}) = W \subset V$$

sono strette. Ne segue che $g$ è nilpotente con indice $k - 1$, ed inoltre $0 < \dim_{\mathbb{K}} W < n$. Ciò premesso, passiamo alla dimostrazione dei punti 1) e 2).

1) Ragioniamo per induzione su $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Se $n = 1$, allora necessariamente $f = 0$ e torniamo al caso $k = 1$. Supponiamo quindi $n > 0$,$k > 1$, e supponiamo vero l'asserto per gli endomorfismi nilponenti su spazi di dimensione $< n$. Fissiamo una base $\{z_1, \dots, z_m\}$ di $V$ modulo $W$. Per il Lemma 4.11, i vettori $f(z_1), \dots, f(z_m) \in W$ sono linearmente indipendenti modulo $W_{k-2}$. Quindi possiamo costruire una base $\mathfrak{W} = \{w_1, \dots w_d\}$ di $W$ modulo $W_{k-2}$, con $d = d_{k-1}$ e $w_i = f(z_i)$ per $i = 1, \dots, m$. Per l'ipotesi induttiva applicata a $g$, esiste una base di Jordan $\mathfrak{B}'$ di $W$ le cui stringhe di lunghezza $k - 1$ sono $S_g(w_1), \dots,\ S_g(w_d)$. Quindi $\mathfrak{B}'$ è della forma

$$\mathfrak{B}' = S_g(w_1) \cup \dots \cup\ S_g(w_d) \cup\ S_g(w_{d+1})\ \cup \dots \cup\ S_g(w_l)$$

dove $l \leq \dim_{\mathbb{K}}(W)$ ed i vettori $w_j$ per $j = d + 1, \dots, l$ hanno indice, rispetto a $g$, inferiore a $k - 1$. Poniamo quindi

$$\mathfrak{B} := \mathfrak{B}' \cup \{z_1, \dots, z_m\}.$$

Allora $\mathfrak{B}$ è una base di $V$ perchè per ipotesi $V = W \oplus < z_1, \dots,\ z_m >$ ed è una base di Jordan per $f$ in quanto è unione di $f$-stringhe: infatti

$$\mathfrak{B} = S_f(z_1) \cup \dots S_f(z_d) \cup S_f(w_{d+1}) \cup \dots \cup\ S_f(w_l).$$

Evidentemente le stringhe $S_f(z_i)$ sono quelle di lunghezza $k$. Ciò conclude la dimostrazione del punto 1).

2) Dimostriamo in primo luogo la (22). Per provare che $k_1 = k$, mostriamo che $f^{k_1} = 0$ e $f^{k_1-1} \neq 0$. Rappresentiamo al solito $\mathfrak{B}$ come unione di stringhe:

$$\mathfrak{B} = S_f(z_1) \cup \dots \cup\ S_f(z_p),\ \text{ con } i(z_j) = k_j.$$

Essendo $k_1 \geq k_j = i(z_j)$ abbiamo chiaramente $f^{k_1}(z_j) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, p$. Ma allora $f^{k_1}$ si annulla su tutti i vettori della base $\mathfrak{B}$, perchè il generico vettore di tale base è della forma $f^i(z_j)$, $i \geq 0$, ed abbiamo

$$f^{k_1}(f^i(z_j)) = f^{k_1+i}(z_j) = 0.$$

Dunque $f^{k_1} = 0$. Poichè d'altra parte $i(z_1) = k_1$, ricordando la (20), è $f^{k_1-1}(z_1) \neq 0$, e quindi $f^{k_1-1} \neq 0$. Proviamo ora che $p = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f))$. Infatti, calcolando il rango di $A_f^{\mathfrak{B}}$ abbiamo

$$\mathrm{rg}(A_f^{\mathfrak{B}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{diag}(J(0,k_1),\ldots,J(0,k_p))) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(J(0,k_i)) = \sum_{i=1}^{p}(k_i - 1)$$

onde $\mathrm{rg}(A_f^{\mathfrak{B}}) = n - p$, e quindi $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(f)) = p$. La (22) è provata.

Resta da provare la (23). Per ogni $j \in \{1,\ldots,k\}$, denotiamo con $l_j$ il numero di blocchi di Jordan di ordine $j$, che è pari la numero delle stringhe $S_f(z_i)$ aventi lunghezza $j$, ovvero è il numero dei vettori $z_i$ tali che $i(z_i) = k_i = j$.

Cominciamo a provare le formula (23) per $j = k$; si tratta di verificare che il numero $h := l_k$ di blocchi di ordine $k$ è pari a $d_k = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W$. A questo scopo, verichiamo che

$$V = W \oplus < z_1,\ldots,z_h > . \tag{24}$$

Infatti, notiamo che $f(V) \subset W_{k-1}$ e che che

$$\mathfrak{B} - \{z_1,\ldots,z_h\} \subset W \tag{25}$$

perchè l'indice $i(z_j)$ dei vettori $z_j$ per $j \in \{h+1,\ldots,p\}$ è $< k$. Da questi due fatti consegue che $V = W + \langle z_1,\ldots,z_m\rangle$ perchè ogni vettore $v \in V$ è combinazione lineare di vettori delle stringhe $S_f(z_i)$.

Ora fissiamo $z \in W \cap \langle z_1,\ldots,z_h\rangle$; possiamo scrivere $z = \sum_{j=1}^{h} a_j z_j$ con $a_j \in \mathbb{K}$. Proviamo che $z = 0$. Infatti, poichè $f^{k-1}(z) = 0$, segue

$$\sum_{j=1}^{h} a_j f^{k-1}(z_j) = 0;$$

ma $f^{k-1}(z_j) \in S_f(z_j) \subset \mathfrak{B}$ per $j \in \{1,\ldots,h\}$, e siccome $\mathfrak{B}$ è una base, questi vettori sono linearmente indipendenti. Allora $a_1 = \cdots = a_h = 0$, ovvero $v = 0$. Resta provata la (24) e con essa la (23) per $j = k$. Proveremo infine la (23) per $1 \leq j < k$ ragionando per induzione sulla dimensione di $V$. Come già osservato sopra il caso $n = 1$ è banale, quindi consideriamo il caso $n > 1$, supponendo vero l'asserto per spazi di dimensione $< n$. Poniamo $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B} - \{z_1,\ldots z_h\}$. Stanti le (24) e (25), $\mathfrak{B}'$ è una base di $W$. Inoltre possiamo scrivere

$$\mathfrak{B}' = S_g(f(z_1)) \cup \cdots \cup S_g(f(z_h)) \cup S_g(z_{h+1}) \cup \cdots \cup S_g(z_p)$$

il che mostra che $\mathfrak{B}'$ è una base di Jordan per $g$. Osserviamo che, per costruzione, il numero $l'_{k-1}$ delle $g$-stringhe di $\mathfrak{B}'$ aventi lunghezza $k-1$ è pari a

$$l'_{k-1} = l_{k-1} + h \tag{26}$$

mentre

$$l'_j = l_j \text{ per } j < k-1. \tag{27}$$

Applicando a $g$ la formula (23) già provata, abbiamo

$$l'_{k-1} = \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(W_{k-2})$$

e quindi la (26) dà:

$$l_{k-1} = \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(W_{k-2}) - h = d_{k-1} - d_k.$$

Resta così provata la (23) per $j = k-1$. Per $j < k-1$ la (23) è vera per l'ipotesi induttiva applicata a $g$ in forza della (27). La dimostrazione è completa. $\square$

Tenendo conto del Teorema 4.12, ha senso dare la

**Definizione 4.13.** La **forma canonica di Jordan** $J_f$ di un endomorfismo nilpotente $f$ è la matrice associata ad $f$ rispetto ad una *qualsiasi* base di Jordan $\mathfrak{B}$ per $f$, ordinata in modo che le dimensioni $k_1, \dots, k_p$ dei blocchi di Jordan di $A_f^{\mathfrak{B}}$ soddisfino

$$k_1 \geq \cdots \geq k_p.$$

La $p$-pla ordinata di interi $Y_f = (k_1, \dots, k_p)$ è chiamata l' **invariante fondamentale** di $f$.

È utile ricordare che il numero $p$ dei blocchi di Jordan della forma canonica è pari alla dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$, mentre la dimensione massima dei blocchi è pari all'indice di nilpotenza di $f$.

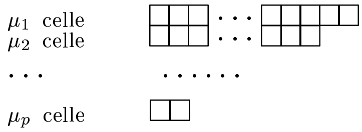
La dimostrazione del teorema 4.12 e le formule (23) suggeriscono un metodo pratico per determinare sia la forma canonica di Jordan di un endomorfismo nilpotente, sia una base di Jordan per esso.

Dato $f \in End(V)$, nilpotente di indice $k$, la (23) permette di calcolare agevolmente il sistema invariante $Y_f$, che a sua volta individua univocamente la forma canonica $J_f$.

L'informazione contenuta nella $p$-pla di interi $Y_f$ si può efficacemente visualizzare facendo uso dei cosiddetti *diagrammi di Young*. Ad ogni $p$-pla di numeri interi $(\mu_1, \dots, \mu_p)$, dove $p \geq 1$ è un intero qualsiasi e

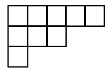
$$\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_p$$

si può far corrispondere uno schema di $p$ righe in cui la $j$-ma riga è composta da $\mu_j$ celle, $j = 1, \dots, p$, e la cella $s$-sima della $j$-ma riga si trova immediatamente al di sotto della $s$-sima cella della $(j-1)$-ma riga:



Naturalmente, il numero totale di celle è $\sum_j \mu_j$; inoltre lo schema consiste di $\mu_1$ colonne.

Così, ad esempio, il diagramma di Young di $(5, 3, 1)$ è:



Osserviamo che, stante la (22), il numero di colonne nel diagramma di Young corrispondente all'invariante fondamentale $Y_f$ di un endomorfismo nilpotente è pari all'indice di nilpotenza. Il numero di righe è invece uguale alla dimensione del nucleo di $f$. Si può inoltre verificare in base alle (23) che la colonna $j$-ma (contando da sinistra a destra) contiene esattamente $d_j = dim_{\mathbb{K}} W_j - \dim_{\mathbb{K}} W_{j-1}$ celle. Queste considerazioni permettono facilmente di ricostruire il diagramma, e quindi la forma canonica $J_f$, note le dimensioni dei sottospazi $W_i = Ker(f^i)$.

Per determinare una base di Jordan, può essere utile costruire una tabella corrispondente al diagramma di Young di $Y_f$ e riempirla con i vettori di una base $\mathfrak{B}$ che viene determinata utilizzando la procedura seguente. Si comincia col riempire la $k$-sima colonna (l'ultima) del diagramma con i vettori di una base arbitraria di $V$ modulo $W_{k-1}$ (tali vettori corrispondono ai vettori $z_1, \dots, z_m$ nell' enunciato del Teorema 4.12). Quindi nella colonna $(k-1)$-ma si collocano, dall'alto in basso, le immagini tramite $f$ dei vettori della $k$-colonna, e successivamente altri vettori (se occorre) scelti in modo da completare la $(k-1)$-ma colonna in una base di $W_{k-1}$ modulo $W_{k-2}$. Si ripete quindi questo procedimento fino a riempire tutte le colonne: la colonna $j$-sima è riempita calcolando le immagini dei vettori della colonna $(j+1)$-sima e quindi aggiungendo altri vettori in modo da ottenere una base di $W_j$ modulo $W_{j-1}$. Le righe saranno allora costituite da $f$-stringhe, la cui unione è la base $\mathfrak{B}$. Ordinando la base prendendo successivamente le stringhe dall'alto verso il basso, ciascuna essendo ordinata secondo la convenzione 4.7, otterremo che $A_f^{\mathfrak{B}} = J_f$.

Illustriamo ciò con un esempio:

**Esempio 4.14.** Consideriamo l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_4\}$, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verica facilmente che $A^2 = 0$, sicchè $f$ è nilpotente con indice 2. La filtrazione associata di $\mathbb{R}^4$ è quindi data semplicemente da

$$\{0\} \subset W_1 = \mathrm{Ker}(f) \subset W_2 = \mathbb{R}^4.$$

Si ottiene subito che $\mathrm{Ker}(f)$ ha equazione

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

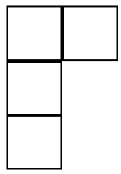
onde $\dim_{\mathbb{R}}(W_1) = 3$ ed una base di $W_1$ è

$$\{e_4, u_1(-2,0,1,0), u_2(2,1,0,0)\} \tag{28}$$

In base alla (23), applicata per $j = 1$ e $j = 2$, la forma canonica di Jordan di $f$ contiene un blocco di dimensione 2 e due blocchi di dimensione 1. Dunque otteniamo che

$$Y_f = (2,1,1).$$

Il corrispondente diagramma di Young è pertanto:

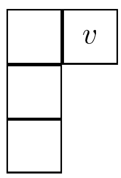


e la forma canonica di Jordan di $f$ è

$$J_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che il diagramma di $Y_f$ si può anche ottenere senza utilizzare le (23), utilizzando direttamente l'informazione $d_1 = 3$, $d_2 = 1$ e costruendolo per colonne: la prima colonna deve contenere 3 celle e la seconda una sola cella.

Determiniamo ora una base di Jordan per $f$. La seconda colonna del diagramma è costituita da una sola cella, in cui poniamo un vettore $v$ che costituisca una base di $\mathbb{R}^4$ modulo $W_1$. Poichè conosciamo la base (28) di $W_1$, è sufficiente scegliere $v$ in modo da completare (28) ad una base di $\mathbb{R}^4$. È facile vericare ad esempio che $v = e_1$ soddisfa questo requisito. $v$ è il primo vettore della costruenda base di Jordan:




Ora riempiamo la prima colonna; si tratta di calcolare $f(v)$ e quindi completare $\{f(v)\}$ ad una base $\{f(v), w_1, w_2\}$ di $W_1$:

| | |
|---|---|
| $f(v)$ | $v$ |
| $w_1$ | |
| $w_2$ | |

Abbiamo $f(v) = f(e_1) = (2, 1, 0, 1)$; poichè, come da semplice verifica, $f(v)$, $e_4$ e $u_1$ sono linearmente indipendenti, possiamo scegliere $w_1 = e_4$ e $w_2 = u_1$. La base di Jordan è quindi

$$\mathfrak{B} = \{f(v), v, e_4, u_1\} = \{(2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (-2, 0, 1, 0)\}.$$

Rispetto a $\mathfrak{B}$, ordinata in modo lessicografico, la matrice di $f$ è nella forma canonica $J_f$.

Concludiamo ritornando al problema della classificazione degli endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale $V$, a meno di equivalenza, cui abbiamo accennato all'inizio del paragrafo. Come preannunciato, la forma canonica di Jordan fornisce la seguente soluzione:

**Teorema 4.15.** *Siano $V$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, avente dimensione $n > 0$. Sia $\mathcal{N}(V)$ l'insieme delgi endomorfismi nilpotenti di $V$. Allora*

*I) Due endomorfismi $f, g \in \mathcal{N}(V)$ sono equivalenti se e solo se $J_f = J_g$ o, equivalentemente, $Y_f = Y_g$.*

*II) La corrispondenza $f \in \mathcal{N}(V) \mapsto Y_f$ definisce una bigezione tra $\mathcal{N}(V)/_\sim$ e l'insieme delle $p$-ple di numeri interi $(k_1, \dots, k_p)$ tali che*

$$p \geq 1, \quad k_1 \geq \cdots \geq k_p, \quad \sum_{i=1}^{p} k_i = n.$$

*Dunque $\mathcal{N}(V)/_\sim$ è canonicamente bigettivo all'insieme dei diagrammi di Young aventi $n$ celle.*

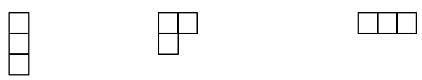
Dimostrazione Naturalmente è ovvio in base alle definizioni che $Y_f = Y_g$ se e solo se $J_f = J_g$.

I) Se $f \sim g$, allora esiste un isomorfismo $\psi : V \to V$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\psi"'] & V \end{tikzcd}$$

Quindi
$$g \circ \psi = \psi \circ f.$$
Segue che, se $\mathfrak{B}$ è una base di Jordan per $f$, con $A_f^{\mathfrak{B}} = J_f$, allora $\mathfrak{B}' := \psi(\mathfrak{B})$ è anche base di Jordan per $g$: infatti
$$A_g^{\mathfrak{B}} = A_f^{\mathfrak{B}'}$$
(**Esercizio 11**). Segue per definizione della forma canonica che $J_g = J_f$. Viceversa, si assuma che $J_f = J_g$. Siano $\mathfrak{B}_f = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathfrak{B}_g = \{u_1, \dots, u_n\}$ due basi di Jordan per $f$ tali che $A_f^{\mathfrak{B}_f} = J_f = J_g = A_g^{\mathfrak{B}_g}$. Allora l'isomorfismo $\psi$ di $V$ definito da
$$\psi(e_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, n$$
rende commutativo il diagramma
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\psi"'] & V \end{tikzcd}$$
(**Esercizio 12**). Pertanto $f \sim g$. La II) segue subito applicando I). $\square$

Il problema di determinare $\mathcal{N}(V)/_\sim$ è così ricondotto ad un problema di natura combinatoria, ovvero la determinazione di tutti i diagrammi di Young aventi $n$ celle. In dimensione bassa, questo problema è piuttosto agevole; ad esempio, per $n = 3$ i diagrammi sono i seguenti



onde vi sono esattamente tre classi di equivalenza in $\mathcal{N}(V)/_\sim$, rappresentate dalle forme canoniche
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo infine che la teoria svolta in questo paragrafo si applica alle matrici nilpotenti su un campo qualsiasi $\mathbb{K}$: il Teorema 4.12 può esssere riformulato in questi termini: ogni matrice nilpotente $A \in M_n(\mathbb{K})$ è simile ad un'unica matrice di Jordan $J_A$ del tipo
$$J_A = \operatorname{diag}(J(0, k_1), \dots, J(0, k_p)), \;\; k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1.$$

$J_A$ si chiama la **forma canonica di Jordan** di $A$ e la $p$-pla $(k_1, \ldots, k_p)$ si chiama l'invariante fondamentale di $A$.

Otteniamo quindi il seguente teorema di classificazione delle matrici nilpotenti a meno di similitudine:

**Corollario 4.16.** *Sia $n \geq 1$ e $\mathbb{K}$ un campo.*

*1) Due matrici nilpotenti $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili se e solo se $J_A = J_B$ ovvero $Y_A = Y_B$.*

*2) Le classi di similitudine di matrici nilpotenti di ordine $n$ sono in numero finito e pari al numero delle $p$-ple di interi $(k_1, \ldots, k_p)$ tali che*

$$p \geq 1, \quad k_1 \geq \cdots \geq k_p, \quad \sum_{i=1}^{p} k_i = n.$$

## Soluzione degli esercizi §4

**Esercizio 9** Sia $w \in W_i$; allora $f^i(w) = 0$. Segue $f^{i-1}(f(w)) = f^i(w) = 0$, e ciò significa che $f(w) \in W_{i-1}$.

**Esercizio 10** 1) Si supponga che $z_1, \dots, z_l$ siano linearmente indipendenti modulo $W$ e che

$$\sum_{j=1}^{l} a_j z_j \in W \tag{29}$$

per certi scalari $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{K}$. Il vettore $z = \sum_{j=1}^{l} a_j z_j$ è quindi nullo per la ii) della def. 4.10. Poichè $z_1, \dots, z_l$ sono linearmente indipendenti, segue che gli $a_j$ sono tutti nulli.

Per provare il viceversa, notiamo che, se $\sum_{j=1}^{l} a_j z_j = 0$, allora, poichè $0 \in W$, segue dall'ipotesi che $a_1 = \cdots = a_l = 0$. Quindi i $z_i$ sono linearmente indipendenti. Sia poi $z \in W \cap \langle z_1, \dots, z_l \rangle$; essendo $z$ combinazione lineare dei $z_i$, segue immediatamente dall'ipotesi che $z = 0$.

2) Scegliamo ad arbitrio una base $\{u_1, \dots, u_m\}$ di $W$; poichè $z_1, \dots, z_l$ sono linearmente indipendenti modulo $W$, utilizzando la proprietà 1) vediamo subito che $\{u_1, \dots, u_m, z_1, \dots, z_l\}$ è un sottoinsieme libero di $V$. Questo insieme può quindi completarsi ad una base di $V$ aggiungendo opportuni vettori $w_1, \dots, w_q$. Dunque, poichè $\{u_1, \dots, u_m, z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_q\}$ è una base di $V$ e $\{u_1, \dots, u_m\}$ è base di $W$, abbiamo senz'altro:

$$V = W \oplus \langle z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_q \rangle$$

e questo prova che $\{z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_q\}$ è base di $V$ modulo $W$ tenendo conto della definizione.

**Esercizio 11** Posto $\mathfrak{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $A_f^{\mathfrak{B}} = (a_j^i)$, abbiamo

$$g(\psi(u_j)) = \psi(f(u_j)) = \psi(\sum_k a_j^k u_k) = \sum_k a_j^k \psi(u_k)$$

onde per definizione $A_g^{\mathfrak{B}'} = (a_j^i) = A_f^{\mathfrak{B}}$.

**Esercizio 12** Posto $A = A_f^{\mathfrak{B}_f} = A_g^{\mathfrak{B}_g} = (a_j^i)$ abbiamo, per definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare:

$$f(e_j) = \sum_i a_j^i e_i, \quad g(u_j) = \sum_i a_j^i u_i$$

Poichè $u_j = \psi(e_j)$, segue che

$$g(\psi(e_j)) = \sum_i a^i_j \psi(e_i) = \psi(\sum_i a^i_j e_i) = \psi(f(e_j)).$$

Poichè ciò sussiste per ogni $j = 1, \ldots, n$, gli endomorfismi $g \circ \psi$ e $\psi \circ f$ coincidono.

## 5. La forma canonica di Jordan nel caso generale

Torniamo a considerare uno spazio vettoriale $V$ dimensione $n > 0$, su un campo $\mathbb{K}$.

Ricordiamo (def. 4.3) che una base di Jordan per $f$ è una base $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ rispetto alla quale la matrice $A_f^{\mathfrak{B}}$ è una matrice di Jordan (def. 4.2). L'osservazione 4.4 implica che la diagonale principale di $A_f^{\mathfrak{B}}$ deve essere costituita dagli autovalori $\lambda_i$, ciascuno ripetuto in base alla corrispondente molteplicità algebrica.

**Teorema 5.1.** *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e si assuma che il polinomio il polinomio minimo di $f$ sia completamente riducibile su $\mathbb{K}$. Sia $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ e per ogni $j \in \{1, \dots, p\}$, siano $s_j$, $\mu_j$ e $\gamma_j$ rispettivamente l'indice, la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_j$.*

*1) Esiste una base di Jordan $\mathfrak{B}$ per $f$, tale che la matrice $A_f^{\mathfrak{B}}$ è della forma:*

$$\operatorname{diag}(J(\lambda_1, k_1^1), \cdots, J(\lambda_1, k_{\gamma_1}^1), \cdots, J(\lambda_p, k_1^p), \cdots, J(\lambda_p, k_{\gamma_p}^p)) \tag{30}$$

*dove, per ogni $j = 1, \dots, p$:*

*I)* $k_1^j = s_j \geq k_2^j \geq \cdots \geq k_{\gamma_j}^j$;

*II)* $k_1^j + \cdots + k_{\gamma_j}^j = \mu_j$

*2) Se $\mathfrak{B}'$ è un'altra base di Jordan, essa può essere riordinata in modo che $A_f^{\mathfrak{B}'} = A_f^{\mathfrak{B}}$.*

La matrice (30) prende il nome di **forma canonica di Jordan** dell'endomorfismo $f$.

Dimostrazione 1) Costruiamo una base $\mathfrak{B}$ rispetto alla quale $A_f^{\mathfrak{B}}$ è nella forma (30). Per ogni $j$ consideriamo l'autospazio generalizzato $V_j = \operatorname{Ker}(f_j)^{s_j}$, essendo $f_j$ l'endomorfismo

$$f_j = f - \lambda_j I.$$

Ricordiamo che ciascun $V_j$ è un sottospazio $f$-invariante ed $f_j$-invariante di dimensione $\mu_j$, e che

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p.$$

Inoltre è chiaro che $f_{j|V_j} : V_j \to V_j$ è nilpotente con indice $s_j$ (si ricordi la definizione dell'indice $s_j$ nel §3). Si osservi anche che $\operatorname{Ker}(f_{j|V_j}) = \operatorname{Ker}(f_j)$ è l'autospazio di $f$ relativo a $\lambda_j$. Pertanto la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo nilpotente $f_{j|V_j}$, in accordo con la teoria sviluppata nel §4, è una matrice di Jordan con $\gamma_j$ blocchi. Sia $Y_{f_{j\,|\,V_j}} = (k_1^j, \cdots, k_{\gamma_j}^j)$ il sistema invariante di $f_{j\,|\,V_j}$. Naturalmente, ricordando la (22) del Teorema 4.12, risulta:

$$k_1^j = s_j, \quad \sum_{i=1}^{\gamma_j} k_i^j = \dim_{\mathbb{K}}(V_j) = \mu_j.$$

Scegliamo quindi una base di Jordan $\mathfrak{B}_j = \{e_1^j, \dots e_{\mu_j}^j\} \subset V_j$ per $f_{j\,|\,V_j}$, tale che

$$A^{\mathfrak{B}_j}_{f_{j\,|\,V_j}} = \operatorname{diag}(J(0, k_1^j), \cdots, J(0, k_{\gamma_j}^j)).$$

Ora, poichè $f = f_j + \lambda_j I$, la matrice di $f_{|\,V_j}$ rispetto a $\mathfrak{B}_j$ è $A^{\mathfrak{B}_j}_{f_{j\,|\,V_j}} + \lambda_j I_{\mu_j}$, ovvero:

$$A^{\mathfrak{B}_j}_{f_{|\,V_j}} = \operatorname{diag}(J(\lambda_j, k_1^j), \cdots, J(\lambda_j, k_{\gamma_j}^j)). \tag{31}$$

Ponendo quindi $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{B}_p = \{e_1^1, \dots, e_{\mu_1}^1, \dots, e_1^p, \dots, e_{\mu_p}^p\}$ otteniamo una base rispetto alla quale

$$A_f^{\mathfrak{B}} = \operatorname{diag}(A^{\mathfrak{B}_1}_{f_{|\,V_1}}, \cdots, A^{\mathfrak{B}_p}_{f_{|\,V_p}})$$

e quindi, in base alla (31), $A_f^{\mathfrak{B}}$ coincide con la matrice di Jordan (30).

Resta da provare l'asserzione 2), che afferma che la rappresentazione di $f$ mediante matrici di Jordan è sostanzialmente unica. Omettiamo i dettagli della verifica, limitandoci ad indicare che tale unicità dipende dall'unicità della forma canonica di Jordan degli endomorfismi nilpotenti $f_1, \dots, f_p$ (Teorema 4.12). $\square$

**Esempio 5.2.** Consideriamo l'endomorfismo di $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si ottiene $p_f(x) = -x^2(x+1)$ sicchè $f$ ammette gli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$ di molteplicità rispettivamente 2 ed 1.

Determiniamo il polinomio minimo di $f$; chiaramente

$$\mu_f = x^s \cdot (x+1)$$

con $s = 1$ oppure $s = 2$. Per discernere tra le due eventualità è sufficiente stabilire se l'inclusione

$$\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2) = V_1$$

è stretta o meno. Si verifica subito che $\operatorname{Ker}(f)$ ha equazioni $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, onde $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}(f) = 1$. Inoltre

$$\operatorname{Ker}(f) = \langle -e_1 + e_2 - e_3 \rangle.$$

Essendo poi $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ottiene subito $V_1 = \langle e_1, e_2 - e_3 \rangle$. Pertanto l'indice dell'autovalore $\lambda_1$ è $s = 2$, onde

$$\mu_f = x^2(x+1).$$

Questa informazione è sufficiente a stabilire che la forma canonica di Jordan è

$$J_f = \operatorname{diag}(J(0,2), J(-1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Infatti, sappiamo da I) nel teorema precedente che $J_f$ deve contenere almeno un blocco con autovalore $\lambda_1$ di dimensione pari al corrispondente indice $s = 2$. Questo è pertanto l'unico blocco relativo a $\lambda_1$, datosi che $\mu_1 = 2$.

Per determinare una base di Jordan per $f$, determiniamo una base di Jordan $\mathfrak{B}_1 \subset V_1$ per l'endomorfismo nilpotente $f_{|V_1} : V_1 \to V_1$. Naturalmente $Y_{f_{|V_1}} = (2)$, ed il corrispondente diagramma di Young è

$$\square\square$$

La base richiesta è quindi del tipo $\mathfrak{B}_1 = \{u_1 = f(v), u_2 = v\}$ con $v \in V_1$ tale che $\{v\}$ è base di $V_1$ modulo $\operatorname{Ker}(f)$, ovvero $0 \neq v \in V_1 \setminus \operatorname{Ker}(f)$. Possiamo scegliere ad esempio $v = e_1$. Quindi

$$\mathfrak{B}_1 = \{u_1 = (-1,1,-1), u_2 = (1,0,0)\}.$$

Aggiungendo a $\mathfrak{B}_1$ un vettore $u_3$ che costituisca una base di $V_2$, otteremo una base di Jordan per $f$. Abbiamo

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene che $V_2 = \operatorname{Ker}(f + I)$ ha equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_3 = 0$, e quindi

$$V_2 = \langle e_1 - e_2 \rangle.$$

Otteniamo così la base

$$\mathfrak{B}_1 = \{u_1 = (-1,1,-1), u_2 = (1,0,0), u_3 = (1,-1,0)\}$$

rispetto alla quale la matrice di $f$ è nella forma canonica (32).

**Esempio 5.3.** Determiniamo una base di Jordan per l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta $p_f = (x-2)^3(x-1)^2$, per cui

$$\mu_f = (x-2)^{s_1}(x-1)^{s_2} \text{ con } s_1, s_2 \in \{1, 2, 3\}.$$

Ordiniamo gli autovalori ponendo $\lambda_1 := 2$ e $\lambda_2 := 1$. Per calcolare gli indici $s_i$ determiniamo gli autospazi di $f$. Con calcoli standard, risulta

$$V_{\lambda_1} = \langle e_1 + e_2,\, e_5 - e_3 \rangle,\, V_{\lambda_2} = \langle\, e_5 \rangle. \tag{33}$$

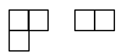
Da ciò deduciamo immediatamente utilizzando il Teorema 2.11 che

$$s_1 = s_2 = 2.$$

Si osservi che a questo risultato si perviene anche ragionando direttamente sulla forma canonica $J_f$: questa infatti deve essere costituita da due blocchi relativi all'autovalore 2, e da un blocco contenente l'autovalore 1. La dimensione massima $s_1$ e $s_2$ per tali blocchi è quindi necessariamente pari a 2. Concludiamo quindi che

$$J_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo una base di Jordan: denotata al solito con $f_i$ la restrizione di $f$ a $V_i'$, i diagrammi di Young di $g_1 := f_1 - 2Id$ e di $g_2 := f_2 - Id$ sono



Dunque si può costruire una base di Jordan $\mathfrak{B} = \{w_1, \ldots, w_5\}$ della forma

$$\mathfrak{B} = \{w_1 = g_1(u), w_2 = u, w_3 = v\} \cup \{w_4 = g_2(z), w_5 = z\}$$

dove i vettori $u, v$ vanno scelti in modo che $\{u\}$ sia base di $V_{\lambda_1}'$ modulo $V_{\lambda_1}$, $\{g_1(u), v\}$ sia base di $V_{\lambda_1}$, mentre $\{z\}$ dev'essere base di $V_{\lambda_2}'$ modulo $V_{\lambda_2}$. Effettuando i calcoli, risulta

$$V_{\lambda_1}' = Ker(f - 2I)^2 = \langle e_1, e_2, e_5 - e_3 \rangle,\, V_{\lambda_2}' = Ker(f - I)^2 = \langle e_4, e_5 \rangle.$$

Tenendo presente la (33), si può scegliere $u = e_1$ di modo che $g_1(u) = -e_1 - e_2 + e_3 - e_5$. Possiamo poi prendere $v = e_1 + e_2$, ed infine $z = e_4$, con $g_2(z) = e_5$.