Teoria degli insiemi

Che cos'è un insieme? Come si individua un insieme?

1. Scrivendone esplicitamente gli elementi:

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

2. Enunciando una proprietà che è soddisfatta da tutti e soli gli elementi dell'insieme:

$$A = \text{insieme degli studenti di questo corso}$$
$$\text{il cui nome inizia per A}$$

$$B = \text{insieme dei numeri naturali che sono multipli di 3}\ .$$

Si usa scrivere:

$$A = \{a \mid a \text{ possiede la proprietà } \mathcal{P}\ \}$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$$

$\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Simboli utili:

$\emptyset$ insieme vuoto “insieme privo di elementi”

$\in$ “elemento di”, “appartiene”

$$a \in A$$

Dire se è vero o falso che

$$2 \in \{1, 2, 3\}$$

$$5 \in \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

$\notin$ “non elemento di”, “non appartiene”

$$4 \notin \{1, 2, 3\}.$$

Relazioni ed operazioni tra insiemi

$\subset$ simbolo di inclusione “contenuto”, “sottoinsieme di”.

Dati due insiemi A e B,

$$A \subset B$$

si legge: “A è contenuto in B”.

Significa: ogni elemento di A è un elemento di B.

Esempi: Siano

$$A = \{1, 2, 7\}, \quad B = \{1, 2, 6, 7\}, \quad C = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}.$$

$$A \subset B \qquad A \subset C \qquad B \subset C$$

Siano

$$A = \{1, 2, 4\}, \quad B = \{1, 2, 5, 7\}.$$

A non è contenuto in B: esiste un elemento di A che non appartiene a B.

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme A si denota con $P(A)$ e si chiama insieme delle parti di A.
Sia $A = \{a, b, c\}$

$$P(A) =$$
$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme.
- Si ha $A \subset A$
- Se $A \subset B$ ma A non coincide con B, si dice che A è un sottoinsieme proprio di B.

Due insiemi A e B si dicono uguali e si scrive

$$A = B$$

se hanno gli stessi elementi.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

$\Leftrightarrow$ si legge "equivale".

Siano A, B, S tre insiemi tali che $A \subset S$, $B \subset S$.

Unione di A e B:

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \quad \text{oppure} \quad x \in B\}$$

Intersezione di A e B:

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$$

Differenza tra A e B:

$$A \setminus B := \{x \in S \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}$$

Complementare di A:

$$C(A) = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

- $C(A) = S \setminus A$
- Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono disgiunti.

Esempio: $A = \{2, 3, 8\}$ $B = \{2, 3, 7, 9\}$

$A \cup B =$

$A \cap B =$

$A \setminus B =$

Coppia ordinata: è una coppia di oggetti in cui l'ordine è importante. Si indica con (a, b).
Gli insiemi $\{1, 2\}$ e $\{2, 1\}$ sono uguali. Le coppie ordinate $(1, 2)$ e $(2, 1)$ non sono uguali.

Prodotto cartesiano di due insiemi A e B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

È l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con la prima coordinata a in A e la seconda coordinata b in B.

Esempio: Siano $A = \{3, 6, 8\}$, $\quad B = \{4, 6\}$.

$A \times B =$

$B \times A =$

Si ha che $A \times B \neq B \times A$.

Sia A un insieme. Ogni sottoinsieme $\mathcal{R}$ di $A \times A$ si chiama relazione.

Si scrive $a\mathcal{R}b$ per intendere che $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ si chiama relazione d'ordine se soddisfa le proprietà:

1. riflessiva: per ogni $a \in A$ si ha $(a, a) \in \mathcal{R}$;

2. antisimmetrica: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, a) \in \mathcal{R}$, allora $a = b$;

3. transitiva: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R}$, allora $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Esempi:

- $\subset$ è una relazione d'ordine in $P(A)$.

- In $\mathbb{N}$, $\leq$ è una relazione d'ordine.

Una relazione $\mathcal{R}$ si chiama relazione di equivalenza se soddisfa le proprietà

1. riflessiva: per ogni $a \in A$ si ha $(a, a) \in \mathcal{R}$;
2. simmetrica: se $(a, b) \in \mathcal{R}$, allora anche $(b, a) \in \mathcal{R}$;
3. transitiva: se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{R}$, allora $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Se $(a, b) \in \mathcal{R}$, con $\mathcal{R}$ relazione di equivalenza, si dice che a e b sono equivalenti e si scrive

$$a \sim b.$$

Sia $a \in A$. L'insieme di tutti gli elementi equivalenti ad a si chiama classe di equivalenza di a e si denota con $[a]$:

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

L'insieme di tutte le classi di equivalenza si chiama insieme quoziente e si denota con $A/\mathcal{R}$.

Esempio: Il parallelismo tra tutte le rette di un piano euclideo è una relazione di equivalenza.

Classi di equivalenza?

Insieme quoziente?

Insiemi numerici

- Insieme dei numeri naturali:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

- Insieme dei numeri relativi:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots\}$$

- Insieme dei numeri razionali:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

- Insieme dei numeri reali:

$$\mathbb{R}$$

Si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

e tutte le inclusioni sono proprie.

Quali sono gli elementi di $\mathbb{R}$ che non appartengono a $\mathbb{Q}$?

Ogni numero ammette una rappresentazione decimale.

$$a, a_1 a_2 a_3 \ldots = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$$

$$3,25843 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{3}{10^5}$$

Un numero decimale può essere

- limitato $\quad 3,251$
- illimitato periodico $\quad 2,44444\ldots = 2,\overline{4} \quad 2,346555\ldots = 2,346\overline{5}$
- illimitato non periodico $\quad 2,43156789\ldots \quad \pi = 3,1415\ldots$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri che ammettono una rappresentazione decimale limitata o illimitata periodica.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri che ammettono una rappresentazione decimale illimitata non periodica.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si chiama insieme dei numeri irrazionali.

Se $x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora $x' = a, a_1 \ldots a_k$ è una approssimazione per difetto di x a meno di 10^{-k}.

Esempio: $3,14$ approssima π a meno di $1/100$.

Proprietà di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di addizione $(+)$ e di moltiplicazione $(\cdot)$ con le seguenti proprietà:

Proprietà commutativa:

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Proprietà associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Proprietà distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esistenza degli elementi neutri: esistono in $\mathbb{R}$ due numeri distinti 0 e 1 tali che

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

Esistenza degli opposti: per ogni numero reale a esiste un (unico) numero reale, indicato con $-a$, tale che

$$a + (-a) = 0$$

Esistenza degli inversi (o reciproci): per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste un (unico) numero reale, indicato con a^{-1}, tale che

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Conseguenze:

1. se $a + b = a + c$, allora $b = c$;
2. se $a \cdot b = a \cdot c$ e $a \neq 0$, allora $b = c$;
3. $-(-a) = a$;
4. se $a \neq 0$, $(a^{-1})^{-1} = a$;
5. $(-a) \cdot b = -a \cdot b$, $\quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;
6. $a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$.

È definita la relazione d'ordine di minore o uguale ($\leq$) tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

riflessiva, antisimmetrica, transitiva:

Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a \leq b \quad \text{oppure} \quad b \leq a$$

Se $a \leq b$ allora vale anche

$$a + c \leq b + c$$

Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora valgono anche

$$0 \leq a + b \quad 0 \leq a \cdot b$$

$$a \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq a$$

Si definiscono anche $<$ e $>$:

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq b, \ a \neq b$$

$$a > b \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq b, \ a \neq b$$

Conseguenze:

1. $a \leq b$ equivale a $b - a \geq 0$;
2. $a \geq 0$ equivale a $-a \leq 0$;
3. Se $a \leq b$ e $c \geq 0$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$;
4. Se $a \leq b$ e $c \leq 0$, allora $a \cdot c \geq b \cdot c$;

Regole dei segni:

$$a, b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$$

$$a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$$

$$a \leq 0, b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$$

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$

Sia data una retta r. Si fissino su r due punti distinti O (origine) e U (unità). Essi individuano su r due versi di percorrenza: uno positivo (da O a U) e uno negativo (da U a O).

Ad ogni punto $P \in r$ si associa un unico numero reale:

$$\overline{OP} = \text{lunghezza del segmento } OP \text{ se } P \in r^+$$

$$-\overline{OP} = \text{opposto della lunghezza di } OP \text{ se } P \in r^-.$$

Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra r ed $\mathbb{R}$ che permette di identificare r ed $\mathbb{R}$ e di parlare di retta reale.

Intervalli

Sottinsiemi di $\mathbb{R}$ che sulla retta r corrispondono a segmenti: intervalli limitati.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Rappresentazione grafica:

$[a, a] = \{a\}$

$[1, 5[\cup]2, 7[=$

$[1, 5[\cap]2, 7[=$

$[1, 5[\setminus]2, 7[=$

Sottinsiemi di $\mathbb{R}$ che su r corrispondono a semirette: intervalli illimitati.

Sia $a \in \mathbb{R}$.

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Rappresentazione grafica:

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ semiretta positiva

$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ semiretta negativa

$[1, +\infty[\cup]2, 7[=$

$[1, +\infty[\cap]2, 7[=$

$[1, +\infty[\setminus]2, 7[=$