

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2016/17**

**Appello del 5 luglio 2017**

1. Sia data la seguente permutazione di  $S_{10}$  :

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8)(9, 10).$$

Determinare i seguenti insiemi e dire quali sono sottogruppi di  $S_{10}$  :

(a)  $H = \{\alpha \in \langle \sigma \rangle \mid \alpha(\{3, 5\}) = \{3, 5\}\};$

(b)  $K = \{\alpha \in \langle \sigma \rangle \mid \alpha(\{1, 9\}) = \{1, 9\}\};$

(c)  $L = \{\alpha \in \langle \sigma \rangle \mid \alpha(\{7, 8, 9, 10\}) = \{7, 8, 9, 10\}\}.$

2.

(a) Determinare la cifra delle unità della rappresentazione decimale di  $13^{(13^{25317})}$ .

(b) Determinare l'inverso di  $[99]_{101}^{98}$  nell'anello  $\mathbb{Z}_{101}$ .

3. Dato un primo positivo  $p$ , sia  $f(x) = x^8 + x^4 - \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ .

(a) Provare che esiste un primo  $p > 50$  per il quale  $f(x)$  ha più di due radici (distinte) in  $\mathbb{Z}_p$ .

(b) Provare che, per tale valore di  $p$ ,  $f(x)$  ha solo radici semplici.