

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2016/17

Appello del 23 gennaio 2017

1. Siano date le seguenti permutazioni in S_{12} :

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8, 9)(10, 11, 12)$$

$$\tau = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)$$

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

Sia H un sottogruppo di S_{12} a cui appartengono σ e τ .

- (b) Provare che $(9, 11, 12, 10) \in H$.

- (c) Determinare un 9-ciclo appartenente ad H .

2. Data una coppia di interi (λ, μ) , si consideri l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$$

definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([a]_3, [b]_5) = [\lambda a + \mu b]_{30}.$$

- (a) Determinare tutte le coppie di interi (λ, μ) per le quali φ è ben definita.

- (b) Determinare tutte le coppie di interi (λ, μ) per le quali φ è un omomorfismo di anelli.

- (c) Determinare l'immagine di φ quando $\lambda = 100$, $\mu = 18$.

3. Sia p un numero primo positivo. Dire per quali p il polinomio

$$f(x) = x^{p^2} + x^{2p-2} + [1]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.