

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

Appello del 3 novembre 2016

1. Sia dato il seguente sottoinsieme di S_8 :

$$H = \{\sigma \in S_8 \mid \sigma^{12} = \text{id}\}.$$

- (a) Dire se H è un sottogruppo di S_8 .
- (b) Determinare un sottogruppo di S_8 avente ordine 12 e contenuto in H .
- (c) Determinare un sottogruppo di A_8 avente ordine 6 e contenuto in H .

2. Si considerino il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{Z})$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

e l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi: B &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} &\mapsto [a^2 + b]_2 \end{aligned}$$

- (a) Provare che B è un sottoanello di $M_2(\mathbb{Z})$ e dire se è integro.
 - (b) Provare che φ è un omomorfismo di anelli.
 - (c) Determinare $\varphi^{-1}([1]_2)$.
3. Sia p un numero primo maggiore di 2. Trovare tutte le radici in \mathbb{Z}_p del polinomio

$$f(x) = x^{(p-2)^2} - [1]_p \in \mathbb{Z}_p[x].$$