

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

Appello del 26 settembre 2016

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{17} :

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6, 7)(8, 9, 10, 11, 12)(13, 14),$$

$$\tau = (4, 6)(5, 7)(13, 14)(15, 16, 17).$$

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Dimostrare che, se H è un sottogruppo di S_{17} contenente $\{\sigma, \tau\}$, allora ad H appartiene un 4-ciclo.

2. Siano a, b interi e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \\ ([x]_3, [y]_4) &\mapsto ([ax]_{12}, [by]_{12}) \end{aligned}$$

(a) Determinare tutte le coppie (a, b) tali che φ sia un omomorfismo di gruppi.

(b) Determinare tutte le coppie (a, b) tali che φ sia un omomorfismo di anelli.

(c) Trovare una coppia (a, b) tale che φ sia un monomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo maggiore di 2. Determinare il numero delle radici in \mathbb{Z}_p di ciascuno dei seguenti polinomi:

(a) $x^{\frac{p-1}{2}} - [1]_p \in \mathbb{Z}_p[x];$

(b) $x^{\frac{p-1}{2}} + [3]_p \in \mathbb{Z}_p[x].$