

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2015/16**

**Appello del 15 aprile 2016**

1. Sia  $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13) \in S_{13}$ .
  - (a) Determinare un sottogruppo  $H$  di  $S_{13}$  avente ordine 15 e tale che  $H \cap \langle \sigma \rangle$  non sia il sottogruppo banale.
  - (b) Determinare un sottogruppo  $K$  di  $S_{13}$  avente ordine 16 e tale che  $K \cap \langle \sigma \rangle$  non sia il sottogruppo banale.
  
2.
  - (a) Determinare tutti i numeri interi  $n$  per i quali  $n^5 - n^3$  è divisibile per 100.
  - (b) Determinare tutti i numeri interi  $n$  per i quali  $n^5 - n^3$  è divisibile per 1024.
  
3. Sia  $p$  un numero primo positivo e sia  $f(x) = x^{p^2} + x^p - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ .
  - (a) Provare che il polinomio  $g(x) = \bar{2}x^p - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$  divide la riduzione di  $f(x)$  modulo  $p$ .
  - (b) Per  $p = 3$ , determinare una fattorizzazione della riduzione di  $f(x)$  modulo 3 in  $\mathbb{Z}_3[x]$ .
  - (c) Determinare una fattorizzazione di  $x^4 + x^2 - 1$  in  $\mathbb{R}[x]$ .